2M460
Année 2015-2016

Intégration

Exercice 3.1.— Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe $h, k > 0$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \ \mid f(x) \mid \leq hx + k$.

Exercice 3.2.— Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$. Montrer que f est uniformément continue sur $[a, +\infty[$.

Exercice 3.3.— **Intégrales de Wallis.** On considère la suite I_n définie par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.
1. Montrer que $(I_n)_n$ est positive décroissante.
2. Montrer que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ et expliciter I_n. En déduire $\int_0^1 (x^2 - 1)^n dx$.
3. Montrer que $I_n \sim I_{n+1}$.
4. Calculer $(n+1) I_n I_{n+1}$. Montrer que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Exercice 3.4.— **Formule de Stirling.** On considère la suite $(u_n)_n$ définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$u_n = \frac{n!}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n} \right)^n .$$

1. On pose $\nu_n = \ln(u_n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. En étudiant $\nu_{n+1} - \nu_n$, démontrer que la suite $(\nu_n)_n$ converge. En déduire que la suite (u_n) converge vers une certaine limite l.
2. À l'aide de la question **4** de l'exercice précédent, démontrer que $l = \sqrt{2\pi}$.
3. En déduire la formule de Stirling : $n! \sim \left(\dfrac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n}$.

Exercice 3.5.— Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, positive et $M = \sup f(x)$. Montrer que

$$\lim_{n \to \infty} \left(\int_a^b f(x)^n dx \right)^{\frac{1}{n}} = M.$$

Exercice 3.6.— On considère la suite de fonctions en escalier $g_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tel que $g_n(x) = 0$ si $x \geq \frac{1}{n}$ et $g_n(x) = n$ si $x < \frac{1}{n}$.
1. Existe-t-il une fonction bornée définie sur $[0, 1]$ qui soit limite de cette suite ?

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \int_0^1 f(x)g_n(x)dx$, où f est une fonction continue sur $[0, 1]$. Calculer $\lim_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 3.7.— Soit f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour toute application $g \in E([a, b])$ on a $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. Montrer que $f = 0$.

Exercice 3.8.— Soit f une application intégrable sur $[a, b]$. On pose $I_n = \int_a^b f(x)sin(nx)dx$. Montrer que I_n a une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et calculer cette limite.

Exercice 3.9.— Montrer que la fonction $\chi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} \chi(x) = 0 \; si \; x \notin \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ \chi(x) = 1 \; si \; x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \end{cases}$$

n'est pas intégrable.

Exercice 3.10.— Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction bornée sur $[a, b[$ et intégrable sur tout segment $[a, x] \subset [a, b[$. Montrer que $\tilde{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a, b[\\ \tilde{f}(b) = l \end{cases}$$

(où l est un réel quelconque) est intégrable.

Exercice 3.11.— Soient $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ intégrable telle que

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

On pose m la borne inférieure des valeurs prise par f et M la borne supérieure des valeurs prises par f.
Prouver

$$\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant -mM$$

Exercice 3.12.— Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \text{ si, et seulement si, } f \geqslant 0 \text{ ou } f \leqslant 0$$

Exercice 3.13.— Calculer les primitives des fonctions suivantes :

(i) $Arctg(\sqrt[3]{x})$, (ii) $sin^2 x cos^4 x$, (iii) $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$,

(iv) $\dfrac{1-cos2x}{sin3x}$, (v) $\dfrac{1}{1+cos\alpha cosx}(\alpha \neq k\pi)$ sur les intervalles $]0,\pi[,]\pi, 2\pi[,]0, 2\pi[$.

Exercice 3.14.—

1) Déterminer une primitive de $\dfrac{1}{x^2-2x+5}$.

2) Calculer une primitive de $\dfrac{1}{x^3-1}$ sur $]1,+\infty[$ ou $]-\infty, 1[$.

3) Calculer une primitive de $\dfrac{1}{x(x^2-1)}$ sur $]-\infty,-1[$ ou $]-1,0[$ ou $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$.

Exercice 3.15.—

1) Décomposer en éléments simples la fonction $g(x) = \dfrac{x^3+5}{x(x^2-2x+5)}$.

2) Déterminer une primitive de g sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3) En déduire une primitive de $\dfrac{e^{3t}+5}{e^{2t}-2e^t+5}$.

Exercice 3.16.— Soit $f \in C^0([0,\pi],\mathbb{R})$.

1. Montrer à l'aide d'un changement de variable que l'on a

$$\int_0^\pi xf(\sin(x))dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin(x))dx.$$

2. En déduire la valeur de

$$I = \int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx.$$

Exercice 3.17.— 1) On pose $U_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+4} + \cdots + \dfrac{n}{2n^2}$. Montrer que U_n est convergente et calculer sa limite.

2) On pose $V_n = \sum_{k=1}^n \dfrac{k}{n^2} sin\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$. Montrer que V_n est convergente et calculer sa limite.

Exercice 3.18.— 1) Soit f une fonction continue strictement croissante sur l'intervalle $[0,a]$ telle que $f(0)=0$. On pose $g = f^{-1}$.

1. Calculer à l'aide de sommes de Riemann bien choisies

$$\int_0^a f(t)dt + \int_0^{f(a)} g(t)dt.$$

2. En déduire que, pour tout $\alpha \in [0, a]$ et $\beta \in [0, f(a)]$:

$$\alpha\beta \leq \int_0^\alpha f(t)dt + \int_0^\beta g(t)dt.$$

Exercice 3.19.— Pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, on pose $I(x) = \int_0^x \frac{\arctan(t)}{1+t^2}dt$ et $J(x) = \int_0^x \frac{\arctan(t)}{(1+t)^2}dt$.

1. **a.** Déterminer la valeur de $I(x)$ en fonction de x.

b. En déduire l'existence et la valeur de la limite de la fonction I en $+\infty$.

2. **a.** Déterminer la valeur de $J(x)$ en fonction de x.

b. En déduire l'existence et la valeur de la limite de la fonction J en $+\infty$.

Exercice 3.20.— Pour tout réel x, on pose $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\cos(t)+1}{1+t^2}dt$.

1. Montrer que f est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer la dérivée de f et en déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que f est positive sur $]-\infty, 0]$ et $[1, +\infty[$, et négative sur $[0, 1]$.

4. Pour quelles valeurs de x la fonction f s'annule-t-elle ?

Exercice 3.21.— Déterminer la nature des intégrales suivantes :

(i) $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt$; (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)-1}{\sin^2(t)}dt$; (iii) $\int_0^1 \frac{1-t^2}{1-\sqrt{t}}dt$; (iv) $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$; (v) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{1+\cos(t)+e^t}dt$;
(vi) $\int_0^{+\infty} \frac{t^3-5t^2+1}{2t^4+2t^3+t^2+1}dt$; (vii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(t)}{t}dt$; (viii) $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}(1-t)^2}$; (ix) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)^2}{\sqrt{|t^2-1|(\sqrt{t}+2)}}dt$;
(x) $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$; (xi) $\int_0^{+\infty} t^\alpha(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{t}}})dt$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.22.— Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ? Si oui, calculer leur valeur.

(i) $\int_0^\infty \frac{\arctan(t)}{1+t^2}dt$; (ii) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+e^t)(1-e^{-t})}$; (iii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\tan^2(t)}$; (iv) $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$; (v) $\int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt$;
(vi) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^\alpha}dt$, où $\alpha \in \mathbb{R}$; (vii) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+\sqrt{t^2+1})^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.23.— Soit $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer la nature de l'intégrale $\int_a^b \frac{f(t)}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}dt$.

2. On suppose que $f(b) \neq 0$. Déterminer la nature de l'intégrale $\int_a^b \frac{f(t)^2 \ln(t-a)}{(b-t)^2}dt$.

Exercice 3.24.— Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$. On suppose que $f(0) = 0$ et que f est dérivable en 0.

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(t)}{t^{\frac{3}{2}}} dt$ est convergente.

2. On suppose que $f'(0) \neq 0$. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(t)}{t^2} dt$ est divergente.

Exercice 3.25.— Soit $I = -\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}(1-t)^{\frac{3}{2}}} dt$.

1. Montrer que l'intégrale I est convergente.

2. Calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto \sqrt{\frac{t}{1-t}}$ sur l'intervalle $]0,1[$.

3. En déduire que $I = 2\pi$.

Exercice 3.26.— **1.** Montrer que les deux intégrales $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ sont convergentes.

2. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ est convergente, et que sa valeur est égale à

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = 0.$$

3. Soit $a > 0$. A l'aide d'un changement de variable approprié, en déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2} dt = \frac{\pi}{2a} \ln(a).$$

Exercice 3.27.— **1.** Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente.

2. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ est convergente.

3. Pour $x \in [1, +\infty[$, on pose $I(x) = \int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt$.

a. Montrer que la fonction I est définie et de classe C^1 sur $[1, +\infty[$, et qu'elle a une limite en $+\infty$.

b. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente.

Remarque. La valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 3.28.— Pour tout réel strictement positif x, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Montrer que la fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\Gamma(1) = 1$.

2. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

3. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3.29.— Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n.$$

3. En déduire la valeur de I_n en fonction de n.

Remarque. On admettra que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.