

Feuille d'Exercices 4

Suites de fonctions

Exercice 4.1.— Etudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(x) = x^n$, pour $x \in [0, 1]$, pour $x \in [0, a]$ avec $a < 1$, pour $x \in [0, 1[$.
2. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n|x|}$, pour $x \in \mathbb{R}$.
3. $f_n(x) = \frac{ne^{-x}+1}{n+x}$, pour $x \in \mathbb{R}_+$.
4. $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{n}}$, pour $x \in \mathbb{R}$.
5. $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$, pour $x \in \mathbb{R}$.
6. $f_n(x) = \frac{ne^x+xe^{-x}}{n+x}$, pour $x \in [0, 1]$.
7. $f_n(x) = x^n(1-x)$, pour $x \in [0, 1]$.
8. $f_n(x) = e^{-nx} \sin(\alpha nx)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$, pour $x \in [a, +\infty[$ (avec $a > 0$), $\alpha \in \mathbb{R}$.
9. $f_n(x) = x^2 \sin(\frac{1}{nx})$, pour $x \neq 0$, $f_n(0) = 0$.
10. $f_n(x) = nx$, pour $x \in [0, \frac{1}{n}[$, $f_n(x) = \frac{n(x-1)}{1-n}$, pour $x \in [\frac{1}{n}, 1]$.
11. $f_n(x) = \sqrt{n}x$, pour $x \in [0, \frac{1}{n}[$, et $f_n(x) = \frac{n(x-1)}{(1-n)\sqrt{n}}$, pour $x \in [\frac{1}{n}, 1]$.

Exercice 4.2.— Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $I =]-\pi, \pi[$ par :

$$f_n(0) = 0, \quad f_n(x) = \frac{\sin^2(nx)}{n \sin(x)}, \quad x \neq 0.$$

Etudier la convergence simple ou uniforme de la suite (f_n) sur tout ou partie de l'intervalle I .

Exercice 4.3.— On considère la suite de fonctions numériques définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{n\sqrt{n}} \frac{1+nx}{1+n^2x^2}, \quad x \in [0, +\infty[, n \geq 1.$$

Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 4.4.— Soit $f_n(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \cos(n! \pi x)^{2m}$, pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f_n converge simplement vers une fonction que l'on déterminera.

Exercice 4.5.— On définit sur $[0, 1]$ la suite de fonctions f_n par :

$$f_n(x) = \frac{1 - x^n}{1 + x^{2n}}.$$

Les fonctions f_n sont-elles continues ? Montrer que la suite (f_n) converge simplement mais pas uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 4.6.— Soit la suite de fonctions numériques définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + (n + x)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que la suite de fonction (f_n) converge simplement vers 0 et que la convergence est uniforme sur \mathbb{R}^+ , mais pas sur \mathbb{R} .

Exercice 4.7.— Pour $n \geq 1$, on note f_n la fonction définie sur \mathbb{R} par $f_n(t) = e^{-nt^2}$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur \mathbb{R} vers une limite que l'on déterminera.

2. Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur \mathbb{R} , mais qu'il y a convergence uniforme sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ ou $] -\infty, -a]$ pour $a > 0$.

Exercice 4.8.— Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ définie sur \mathbb{R}^+ par

$$f_n(x) = e^{-x} \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} \right)$$

converge uniformément sur \mathbb{R}_+ vers $f : x \mapsto e^{-2x}$.

Exercice 4.9.— Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ la suite de fonctions définie sur \mathbb{R} par

$$f_n(t) = \frac{nt^2}{1 + nt} \text{ si } t \geq 0 \text{ et } f_n(t) = \frac{nt^3}{1 + nt^2} \text{ si } t < 0.$$

Etudier la convergence simple, puis uniforme de cette suite.

Exercice 4.10.—

Soit α un réel strictement positif. Pour tout $n \geq 1$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx^2/2}.$$

1) Nous allons étudier la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Par un argument de parité, montrer qu'il nous suffit d'étudier la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur \mathbb{R}^+ .

2) a) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur \mathbb{R}^+ .

b) La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur \mathbb{R}^+ . On discutera suivant les valeurs du paramètre α .

c) Soit h un nombre réel strictement positif. Montrer que quelque soit α , le suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers zero sur $[h, +\infty[$.

Exercice 4.11.— Soit $n \geq 1$ et $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_n(t) = e^t - \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \text{ si } t > -n, f_n(t) = e^t \text{ si } t \leq -n.$$

1. Montrer que la restriction de f_n à $[0, +\infty[$ est croissante. En déduire que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers 0 sur tout intervalle $[0, a]$ avec $a > 0$.

2. Montrer que la restriction de f_n à $] -\infty, 0[$ est positive, atteint son maximum en un point x_n et que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ admet -2 pour limite.

3. En déduire que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $] -\infty, 0[$.

Exercice 4.12.— **Théorèmes de Dini.**

1. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} qui converge simplement vers une fonction continue sur $[0, 1]$. Montrer que la convergence est uniforme.

2. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions continues et croissantes de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , qui converge simplement vers une fonction f continue sur $[0, 1]$. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 4.13.— Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit P_n par $P_0(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$ et $P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}(t - P_n(t))^2$ pour $t \in [0, 1]$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est un polynôme et que pour tout $t \in [0, 1]$, on a $0 \leq P_n(t) \leq \sqrt{t}$.

2. Montrer que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante et qu'elle converge simplement vers une limite que l'on déterminera.

3. Montrer que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 4.14.— Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[-1, 1]$ par

$$\forall x \in [-1, 1], f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}.$$

a. Montrer qu'elle converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.

b. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) = f'(x)$ dans tout intervalle de la forme $[-1, b]$, $b < 0$ ou $[a, 1]$, $a > 0$.

c. Montrer que cette dernière propriété n'est pas vraie sur $[-1, 1]$. (Le théorème sur la dérivation des suites de fonctions terme à terme ne s'applique pas ici sur $[-1, 1]$).

Exercice 4.15.— On considère la suite de fonctions $f_n(x) = xe^{-nx^2}$. Montrer que f_n converge uniformément sur \mathbb{R} . A-t-on, pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x)$? Montrer que la suite (f'_n) ne converge pas uniformément sur \mathbb{R} .

Exercice 4.16.— On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur \mathbb{R}^+ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = \frac{e^{-nx} + nx^3}{1 + nx^2}.$$

- a. Déterminer la limite simple de cette suite sur \mathbb{R}^+ .
- b. Montrer que la convergence de la suite est uniforme sur tout intervalle de la forme $[a, b]$ avec $0 < a < b$. La convergence est-elle uniforme sur \mathbb{R}^+ ?
- c. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ où $I_n = \int_1^2 \frac{e^{-nx} + nx^3}{1 + nx^2} dx$.

Exercice 4.17.— On considère la suite de fonctions (f_n) définie par :

$$\begin{cases} f_n(x) = n^2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ f_n(x) = n^2(\frac{1}{n} - x), & \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ f_n(x) = 0, & x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f . Comparer $\int_0^1 f(x) dx$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$.

Exercice 4.18.— A tout $n \in \mathbb{N}^*$, on associe $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{(1 + x^n)^{1 + \frac{1}{n}}}.$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ et déterminer sa limite f .
2. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur le segment $[0, 1]$? Et sur l'intervalle $[0, 1[$?
Montrer que si $0 < c < 1$, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, c]$.
3. Calculer la limite de l'intégrale $\int_0^1 f_n(t) dt$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4.19.—

1. Montrer que la suite de fonctions $(S_n)_{n \geq 1}$ définie par $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{x + k}$ converge simplement sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
2. On note $x \rightarrow S(x)$ sa limite. Montrer que la fonction S est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
3. Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite des dérivées $(S'_n)_{n \geq 1}$ sur $[0, +\infty[$. Montrer que la fonction S est de classe C^1 sur l'intervalle $[0, +\infty[$.