Feuille 2 - Énoncés

Séries formelles, formules de Newton

Exercice 31 On considère la *suite de Fibonacci* définie par $F_0 = 0,\ F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \geq 0$.

a) Montrer que F_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Soit le vecteur $V_n = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $V_{n+1} = AV_n$ où A est une matrice 2×2 que l'on explicitera.

c) Montrer que l'on a $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$.

d) En déduire que pour tout $n \geq 2$, on a $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

e) Montrer que pour tout $n \geq 0$ et tout $m \geq 1$, on a $F_{n+m} = F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1}$. En déduire que $F_{3n} = F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3$ (on peut considérer les cas $m = n$, $m = n+1$ et $m = 2n$).

f) Montrer que F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux pour tout n.

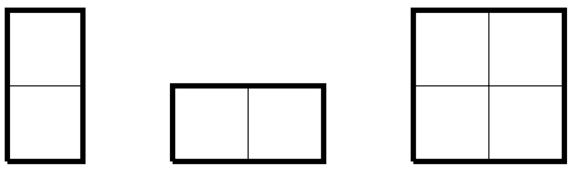
g) Montrer que $F_n = (\beta^n - \alpha^n)/\sqrt{5}$ où $\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 32 Considérons un escalier à n marches. Combien de façons y a-t-il de monter cet escalier si, à chaque pas, nous montons soit 1 marche, soit 2 marches ?

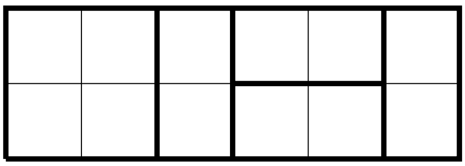
Exercice 33 Combien de façons y a-t-il de régler un montant de 21 centimes d'euros si nous disposons de six pièces de 1 centime, de cinq pièces de 2 centimes et de quatre pièces de 5 centimes ?

Exercice 34 Soient $P_1, \ldots, P_n$ les $n \geq 3$ sommets d'un polygone convexe P du plan. Une *triangulation* est un découpage de ce polygone en triangles disjoints dont les sommets font partie des P_i. Calculer le nombre T_n de triangulations distinctes.

Exercice 35 On dispose de pièces qui sont des dominos et des pavés :



et on veut couvrir avec ces pièces un rectangle de hauteur 2 et largeur n. Voici une solution possible pour $n = 6$:



Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de solutions distinctes à ce problème de pavage (en particulier, $u_0 = 1$).

a) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a $u_n = 2u_{n-2} + u_{n-1}$.

b) En déduire la valeur de la série génératrice $f = \sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n$ et une formule exprimant u_n en fonction de n.

Exercice 36 Notons α, β et γ les racines du polynôme $X^3 - 5X^2 + 3X - 6$. Trouver un polynôme de degré 3 dont α^2, β^2 et γ^2 sont racines.

Exercice 37 Calculer la somme des puissances cinquièmes des racines du polynôme $X^3 + 2X^2 + 5X + 7$.

Graphes simples, degrés

Exercice 38 Soit G un graphe simple à n sommets. Montrer que, si m est le nombre d'arêtes, on a $m \leq \binom{n}{2}$. Si S est un ensemble à n éléments, combien de graphes simples distincts peut-on définir qui ont S comme ensemble de sommets ?

Exercice 39 Soit G un graphe simple à n sommets. Montrer que pour chaque sommet v, on a $d(v) \leq n - 1$. Montrer que tout graphe simple fini à $n \geq 2$ sommets a au moins deux sommets de même degré.

Exercice 40 Montrer que dans un ensemble de six personnes, soit il en existe trois qui se connaissent, soit il en existe trois qui ne se connaissent pas. Autrement dit, si G est un graphe sur six sommets, ou bien G ou bien $\bar{G}$ contient un triangle. Montrer que ceci n'est pas nécessairement vrai pour un ensemble de cinq personnes.

Exercice 41 Appelons *coin* d'un graphe G un couple formé d'une arête de G et d'une arête de $\bar{G}$ qui ont une extrémité commune. Montrer que, si le graphe G a n sommets, le nombre C de ses coins vérifie

$$C \leq n \left(\frac{n-1}{2} \right)^2 .$$

Notons B le nombre de triangles qui ne sont ni dans G ni dans $\bar{G}$. Montrer que $C = 2B$ et en déduire qu'il y a au moins $\frac{n(n-1)(n-5)}{24}$ triangles qui sont soit dans G soit dans $\bar{G}$. Remarquer que, dans le cas $n = 6$, on obtient un résultat plus précis qu'à l'exercice précédent.

Exercice 42 Déterminer le nombre de triangles dans le graphe complet K_n.

Exercice 43 Trois couples veulent traverser une rivière en utilisant une barque qui peut contenir au plus deux personnes. Les maris jaloux n'acceptent pas que leur femmes respectives reste en présence d'un autre homme sans qu'ils soient là pour superviser. Tracer le graphe des situations possibles et dire si l'opération est réalisable. Même question avec quatre couples. (La question de la correction politique de l'énoncé ne fait pas partie du problème).

Exercice 44 Les sommets d'un graphe simple sont occupés par deux factions en guerre. La guerre est une succession de batailles. Une bataille se déroule de la façon suivante : un sommet, relié à (strictement) plus d'ennemis que d'amis, passe à l'ennemi. Quand il n'y a plus de bataille possible, c'est-à-dire plus de sommet susceptible de passer à l'ennemi, la guerre est finie. Montrer que la guerre ne peut pas durer éternellement.

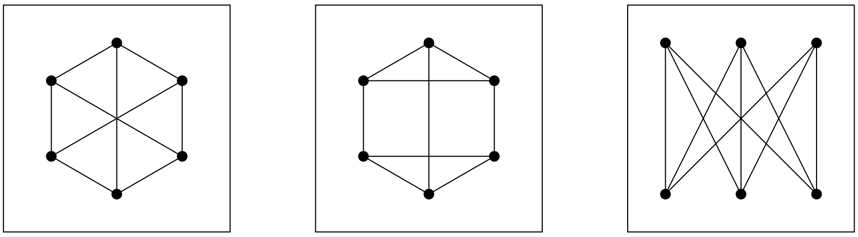
Isomorphismes

Exercice 45 Combien y a-t-il, à isomorphisme près, de graphes à n sommets, pour $1 \leq n \leq 4$?

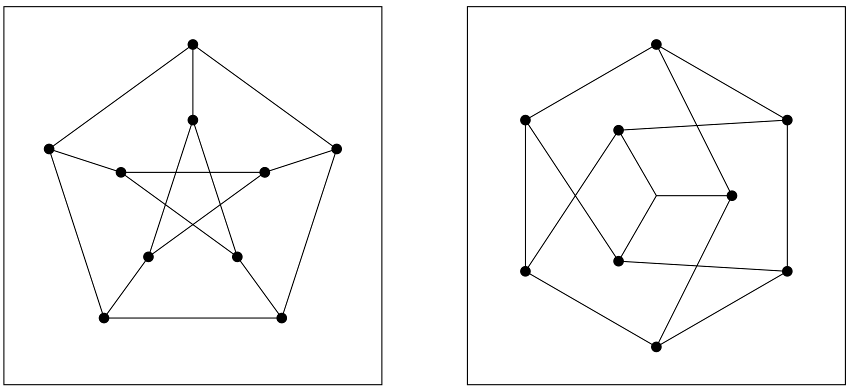
Exercice 46 Montrer que l'isomorphisme est une relation d'équivalence entre graphes.

Exercice 47 Montrer que G est isomorphe à H si est seulement si $\bar{G}$ est isomorphe à $\bar{H}$.

Exercice 48 Parmi les graphes suivants, lesquels sont isomorphes ?



Exercice 49 Graphe de Petersen. L'ensemble des sommets du graphe de Peersen est l'ensemble S des paires d'éléments de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Deux éléments de S sont voisins si et seulement si leur intersection est vide. Montrer que G est représentable par l'un des deux graphes isomorphes suivants :



Exercice 50 On dit qu'un graphe G est *auto-complémentaire* s'il est isomorphe à $\bar{G}$.

a) Montrer que, si un graphe G est auto-complémentaire, son nombre n de sommets est congru à 0 ou 1 modulo 4.

b) Pour tout $n \equiv 0$ ou $1 \pmod 4$, construire un graphe auto-complémentaire à n sommets.

Exercice 51 M. et Mme X invitent quatre couples à une fête. En arrivant, chaque invité serre ou non la main des personnes déjà présentes, mais on ne se serre pas la main entre membres d'un même couple. M. X demande alors à chaque personne présente combien de mains elle a serré et obtient 9 réponses distinctes. Combien de mains a serré Mme X ?

Exercice 52 Soit G un graphe fini et $X \subseteq S$ un sous-ensemble de l'ensemble S des sommets de G. On appelle *coupe* de X et on note $\delta(X)$ l'ensemble des arêtes dont une extrémité est dans X et l'autre non. On note $d(X) = |\delta(X)|$ le cardinal de la coupe.

a) Montrer que cette notion généralise celle de degré d'un sommet.

b) Si $E(G[X])$ désigne l'ensemble des arêtes du sous-graphe $G[X]$ engendré par X, montrer que
$$d(X) = \sum_{v \in X} d(v) - 2|E(G[X])|.$$

Exercice 53 On dit que la suite d'entiers $(d_1, \ldots, d_n)$ est *graphique* s'il existe un graphe simple G de sommets $(v_1, \ldots, v_n)$ tel que pour chaque entier $i \in [1..n]$, $d(v_i) = d_i$. Parmi les suites suivantes, dire lesquelles sont graphiques :

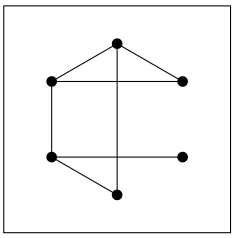
a) $(7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$, b) $(6, 6, 5, 4, 3, 3, 1)$, c) $(3, 3, 2, 1, 1)$, d) $(3, 3, 2, 2)$,

e) $(5, 4, 3, 1, 1, 1, 1)$, f) $(4, 2, 1, 1, 1, 1)$, g) $(1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6)$, h) $(1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3)$.

Exercice 54 Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer qu'il y a $2^{\binom{n-1}{2}}$ graphes simples sur l'ensemble de sommets $v_1, \ldots, v_n$ tels que le degré de chaque sommet est pair.

Colorations, graphes bipartis

Exercice 55 Numéroter les sommets du graphe suivant et appliquer l'algorithme glouton pour obtenir une coloration :



Exercice 56 Prouver la proposition 3.1.4 du cours :

a) $\chi(G) = 1$ si et seulement si G est un n-stable,

b) $\chi(G) = n$ si et seulement si G est une n-clique,

c) $\chi(P_n) = 2$ pour $n \geq 1$,

d) $\chi(C_n) = \begin{cases} 2 \text{ si } n \geq 4 \text{ est pair} \\ 3 \text{ si } n \geq 3 \text{ est impair.} \end{cases}$,

e) $\chi(Q_d) = 2$ pour $d \geq 1$,

f) $\chi(\text{Petersen}) = 3$,

g) $\chi(K_{n_1,\ldots,n_k}) = k$.

Exercice 57 Soit G un graphe de nombre chromatique $\chi(G)$. Montrer que G a au moins $\binom{\chi(G)}{2}$ arêtes.

Exercice 58 Soit S un ensemble de n lignes dans le plan tel que 3 lignes ne soient pas concourantes. Montrer que les points d'intersection engendrés par S peuvent être coloriés avec trois couleurs de telle sorte que deux points d'intersection consécutifs sur une même ligne aient des couleurs différentes.

Exercice 59 Soit $G = (V, E)$ un graphe simple et $f : V \to [1, k]$ une coloration de G. On numérote les sommets de G dans un ordre croissant (au sens large) des couleurs des sommets, et on applique l'algorithme glouton à cette numérotation. On obtient une nouvelle coloration g. Montrer que pour tout sommet v de G on a $g(v) \leq f(v)$. En déduire que pour tout graphe G il est possible de numéroter les sommets de façon à ce que l'algorithme glouton n'utilise que le nombre minimum de couleurs.

Exercice 60 Soit $G = (A, B; E)$ un graphe biparti k-régulier, avec $k \geq 1$. Montrer que $|A| = |B|$.

Exercice 61 Soit e une arête d'un graphe connexe biparti k-régulier G, avec $k \geq 2$. Montrer que $G \setminus e$ est connexe.

Exercice 62 Soit $G = (A, B; E)$ un multigraphe biparti tel que $|A| = |B|$. Notons Δ le degré maximal des sommets de G. Montrer qu'il est possible d'ajouter à G des arêtes de façon qu'il devienne Δ-régulier tout en restant biparti.

Exercice 63 Montrer qu'on peut rendre biparti un graphe sans boucle en effaçant au plus la moitié de ses arêtes.

Exercice 64 Soit A la matrice d'incidence d'un graphe biparti. Soit B une sous-matrice carrée quelconque de A. Montrer que $det(B) = 0, 1$ ou -1.

Exercice 65 Soit G un graphe simple connexe. On rappelle que $d(a, b)$, défini comme la longueur minimale d'une chaîne d'extrémités a et b, est une distance sur $V(G)$. Soit $a \in V(G)$. Montrer que G est biparti si et seulement si pour tout couple (b, c) de sommets voisins, on a $d(a, b) \neq d(a, c)$.