Université Pierre et Marie Curie — Licence de Mathématiques
LM226 Combinatoire et Graphes — 2014-2015 — D. Bernardi

Feuille 3 - Énoncés

Chaînes, connexité, cycles

Exercice 66 Montrer que si tous les sommets d'un graphe sont de degré au moins 2, il existe un cycle élémentaire.

Exercice 67 Soit G un graphe simple. et soient u et v deux sommets de G. Si $u \neq v$ et s'il existe une chaîne reliant u et v, on définit $D(u, v)$ comme la longueur minimum des chaînes reliant u et v. $D(u, v) = +\infty$ si u et v ne sont pas connectés. Si $u = v$ on pose $D(u, v) = 0$. Montrer que l'on obtient ainsi une distance sur l'ensemble des sommets de G.

Exercice 68 Soit G un graphe simple connexe.

a) Montrer qu'il existe dans G une chaîne élémentaire de longueur maximum.

b) Montrer que deux telles chaînes ont au moins un sommet commun.

Exercice 69 Montrer que tout k-cycle avec k impair contient un cycle élémentaire de longueur impaire.

Exercice 70 Soit G un graphe simple de nombre chromatique $\chi(G)$ et de degré maximum Δ.

a) Montrer que si G est connexe et non régulier, $\chi(G) \leq \Delta$.

b) Donner deux exemples où G est connexe régulier, avec $\chi(G) = \Delta + 1$.

Exercice 71 Soit G un graphe simple à $2n$ sommets. Montrer que si tous les degrés valent au moins n, alors G est connexe.

Exercice 72 Montrer qu'au moins l'un des deux graphes G ou $\bar{G}$ est connexe.

Exercice 73 Une arête e d'un graphe connexe G est appelé *isthme* si $G \setminus e$ n'est pas connexe. Montrer que cela équivaut à dire que e n'appartient pas à un cycle simple de G.

Exercice 74 Soit G un graphe simple connexe et 4-régulier. Montrer que pour chaque arête e de G, le graphe $G \setminus e$ est connexe. Généraliser ce résultat.

Exercice 75 Montrer qu'un graphe simple G à n sommets et possédant plus de $\binom{n-1}{2}$ arêtes est connexe.

Graphes eulériens

Exercice 76 Montrer que dans un graphe G, le cardinal de chaque coupe est pair si et seulement si chaque sommet est de degré pair.

Exercice 77 Soient C un cycle simple et $\delta(X)$ une coupe d'un graphe G. Montrer que $|\,C \cap \delta(X)|$ est pair.

Exercice 78 Montrer qu'on peut décomposer un (multi)graphe G en cycles deux à deux arête-disjoints si et seulement si chaque sommet est de degré pair dans G.

Exercice 79 Soit G un (multi)graphe connexe. Montrer qu'on peut colorier les arêtes de G avec du rouge et du bleu de telle sorte que chaque sommet soit incident au même nombre d'arêtes rouges et bleues si et seulement si G est eulérien et le nombre d'arêtes de G est pair.

Exercice 80 Soit G un (multi)graphe connexe qui a $2l \geq 2$ sommets de degré impair. Montrer que $E(G)$ est réunion disjointe de l chaînes simples.

Graphes hamiltoniens

Exercice 81

a) Déterminer le nombre de sommets et le nombre d'arêtes du d-cube Q_d.

b) Montrer que pour $d \geq 2$, Q_d est hamiltonien.

Exercice 82 Soit $G = (V, E)$ un graphe simple hamiltonien. Montrer que

a) $|V| \geq 3$,

b) G ne contient pas de sommet de degré 1,

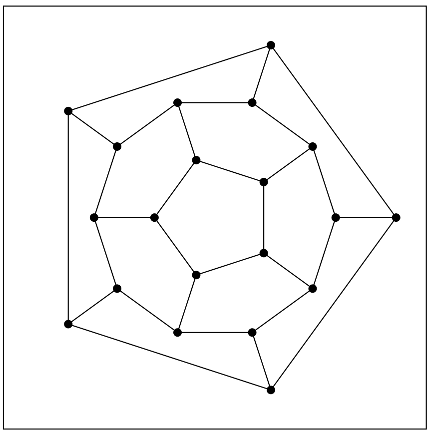
c) G est connexe,

d) G n'a pas de sommet d'articulation (un sommet v d'un graphe connexe G est dit *d'articulation* si $G \setminus v$ n'est pas connexe).

e) La réciproque de la partie (d) n'est pas vraie. Pour cela, on exhibera un graphe connexe d'ordre 5 qui n'est pas hamiltonien et qui n'admet pas de sommet d'articulation.

f) Pour tout sous-ensemble S non vide de V, le nombre de composantes connexes de $G \setminus S$ est inférieur ou égal à $|S|$.

g) Le *graphe du dodécaèdre* ci-dessous est-il hamiltonien ?



Exercice 83 Un graphe simple $G = (V, E)$ est dit *hypohamiltonien* s'il n'admet pas de cycle hamiltonien et si pour tout sommet v de G, $G \setminus v$ est hamiltonien. Soit G un graphe simple hypohamiltonien avec $|V| = n$.

a) Montrer que pour tout $v \in V$, $d(v) \geq 3$.
b) Montrer que $d(v) \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ pour tout $v \in V$.
c) Montrer que $n \geq 8$.
d) Montrer que pour tout sommet v du graphe de Petersen P, $P \setminus v$ est hamiltonien.

Exercice 84 Soit G un graphe connexe et C un cycle élémentaire de G. Montrer que, si pour une arête e de C, $C - e$ est une chaîne élémentaire de longueur maximale de G, alors C est un cycle hamiltonien de G (c'est-à-dire un cycle passant une unique fois par chaque sommet).

Arbres

Exercice 85 Déterminer tous les arbres (à isomorphisme près) qui ont au plus 5 sommets.

Exercice 86 Montrer que tout graphe connexe G admet un sommet v tel que $G \setminus v$ soit connexe.

Exercice 87 Soit G un graphe ayant au moins 5 sommets. Montrer que l'un des deux graphes G ou $\bar{G}$ admet un cycle.

Exercice 88 Soit G un graphe simple.

a) Montrer que si G admet deux arbres couvrants arête-disjoints alors G est 2-arête-connexe, c'est-à-dire que pour toute arête e de G, $G \setminus e$ est connexe.

b) Soit $\mathcal{P} = \{V_1, \ldots, V_k\}$ une partition de $V(G)$. On dénote par $E_{\mathcal{P}}$ l'ensemble d'arêtes entre les éléments différents de $\mathcal{P}$. Montrer que si G est connexe alors $|E_{\mathcal{P}}| \geq k - 1$.

c) Donner un graphe qui est 2-arête-connexe mais qui ne contient pas deux arbres couvrants arête-disjoints.

Exercice 89 Soit G un graphe ayant n sommets, m arêtes et k composantes connexes. Montrer que G admet au moins $m-n+k$ cycles élémentaires distincts.

Exercice 90 Soit G un graphe connexe, et T un arbre couvrant de G. Soit $e = \{u, v\} \in E(G) \setminus E(T)$ et f une arête de la chaîne élémentaire α joignant u et v dans T. Montrer que le sous-graphe $T' = (V(G), E(T) \setminus e \cup \{f\})$ de G est un arbre.

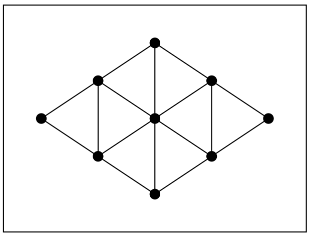
Exercice 91 Soient T_1 et T_2 deux arbres sur le même ensemble V de sommets. Montrer que pour toute arête e_1 de T_1 il existe une arête e_2 de T_2 telle que $T_1 - e_1 + e_2$ et $T_2 + e_1 - e_2$ soient des arbres.

Exercice 92 Soient $n > 1$ et $d_1, \ldots, d_n$ des entiers strictement positifs. Montrer qu'il existe un arbre avec suite de degrés $(d_1, \ldots, d_n)$ si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1).$$

Exercice 93 Soit T un arbre de diamètre pair $2r$, a et b deux sommets de T tels que $d(a,b) = 2r$ et c le point milieu de δ, l'unique chaîne élémentaire liant a et b. Montrer que c est l'unique sommet de T tel que pour tout $x \in V(T)$ on ait $d(c,x) \leq r$.

Exercice 94 Soit G le graphe ci-dessous. Est-ce que l'ensemble d'arêtes de G admet une partition en deux arbres couvrants ? Admet-il une partition en deux arbres couvrants isomorphes ?



Exercice 95 (**Théorème de Cayley**) Soit $n \geq k \geq 1$ des entiers, $A = \{v_1, \ldots, v_k\}$ un sous-ensemble à k éléments de l'ensemble $X = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Notons $T_{n,k}$ le nombre des forêts qui ont X pour ensemble de sommets, qui sont formées de k arbres et où chaque arbre de la forêt contient exactement un sommet de A. Montrer que $T_{n,k} = kn^{n-k-1}$ et en déduire qu'il existe exactement n^{n-2} arbres ayant X comme ensemble de sommets.

Exercice 96 Soit T un arbre ayant au moins 2 arêtes. Montrer qu'il existe deux arêtes adjacentes e et f telle que $T \setminus \{e,f\}$ soit constitué d'un arbre plus deux sommets isolés.

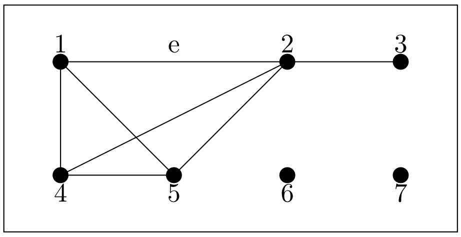
Le polynôme chromatique

Exercice 97 Soit $G = (V,E)$ un graphe simple. Pour tout entier $k \geq 1$, on note $P_G(k)$ le nombre de colorations distinctes du graphe G avec des couleurs prises parmi $[1..k]$.

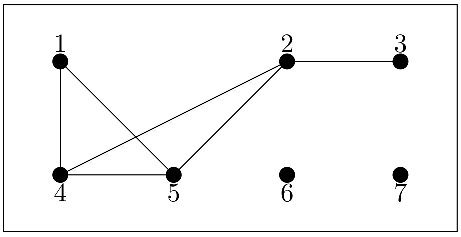
a) En notant S_n le n-stable et K_n la n-clique, calculer $P_{S_n}(k)$ et $P_{K_n}(k)$ pour tout $k \geq 1$.

b) Montrer que si P_n est la chaîne de longueur n, $P_{P_n}(k) = k(k-1)^n$. Plus généralement, montrer que si T est un arbre à n sommets, $P_T(k) = k(k-1)^{n-1}$.

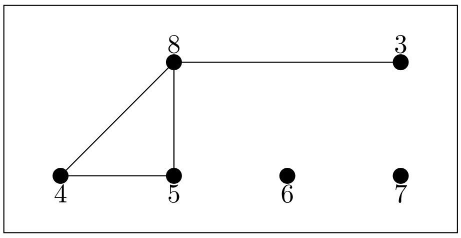
c) Soit e une arête de G, et u et v ses extrémités. Notons $G' = G \setminus \{e\}$, le graphe obtenu à partir de G par "ablation" de l'arête e et G'' le graphe obtenu à partir de G' par "suture" : les deux sommets u et v sont remplacés par un seul sommet w. Un autre sommet x est voisin de w dans G'' si et seulement si il est voisin de u ou de v dans G. Voici un exemple de la procédure.



G



G'



G''

Démontrer la relation

$$\forall k \geq 1, \qquad P_G(k) = P_{G'}(k) - P_{G''}(k).$$

d) Montrer que si C_n est le n-cycle avec $n \geq 3$, on a

$$P_{C_n}(k) = (k-1)((k-1)^{n-1} + (-1)^n).$$

e) Montrer qu'il existe un polynôme à coefficients entiers unitaire de degré $n = |V|$, qui prend la même valeur que P_G en tout point k. En d'autres termes, il existe une suite $(a_i)_{i \in [1,n]}$ d'éléments de $\mathbb{Z}$ telle que

$$\forall k \geq 1, \qquad P_G(k) = k^n + \sum_{i=1}^{n} a_i k^{n-i}.$$

On note encore P_G et on appelle *polynôme chromatique* de G le polynôme $X^n + \sum_{i=1}^{n} a_i X^{n-i}$.

f) Donner une expression de a_n et de a_1. Montrer que le nombre chromatique $\chi(G)$ est le plus petit entier naturel qui n'est pas racine de P_G.

g) Calculer le polynôme chromatique du graphe G suivant.