TD n° 1

Ensembles, applications

Exercice 1. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2. (Fonctions caractéristiques)
Soit E un ensemble. On appelle *fonction caractéristique* d'une partie A de E l'application f_A de E dans $\{0,1\}$ définie par

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A, \\ 0 \text{ si } x \notin A. \end{cases}$$

1. Montrer que l'application f de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{F}(E, \{0,1\})$ qui à A associe f_A est bijective.
2. Soient A, B deux parties de E. Montrer que les applications $f_A.f_B, 1-f_A, f_A+f_B-f_A.f_B$ sont des fonctions caractéristiques de parties de E que l'on précisera.
3. Exprimer $f_{A\backslash B}$ en fonction de f_A et f_B.
4. Démontrer en utilisant les fonctions caractéristiques que $A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$.

Relations d'équivalence

Exercice 3.

1. Rappeler la définition d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E.
2. Rappeler la définition de l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$.
3. Soient n, p deux entiers tels que $n \geq p^2 + 1$. Montrer que parmi n objets, soit au moins $p+1$ d'entre eux ont la même couleur, soit au moins $p+1$ d'entre eux ont des couleurs deux à deux distinctes.
4. Ce résultat est-il toujours vrai pour $n = p^2$?

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur $E = \mathbb{Z}$ par

$$a \mathrel{\mathcal{R}} b \iff n \mid (a-b).$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Donner le nombre de classes d'équivalence pour cette relation, et les décrire.

Exercice 5.

1. Soit f une application de E dans F. On considère la relation $\mathcal{R}$ définie sur E par

$$x \mathcal{R} y \iff f(x) = f(y).$$

   Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, et pour tout $x \in E$, expliciter la classe d'équivalence $\mathcal{C}(x)$ de x.

2. Soit $\overline{f}$ l'application de $E/\mathcal{R}$ dans F qui à $\mathcal{C}(x)$ associe $f(x)$. Montrer que $\overline{f}$ est bien définie et qu'elle est injective.
3. En déduire que si f est surjective, alors $\overline{f}$ est bijective.