

# Mémoire de M2 : Cubulation des variétés arithmétiques

Anne Giralt

## 0.1 Introduction

Soit  $\mathbb{H}^n$  l'espace hyperbolique de dimension  $n$ , c'est-à-dire l'unique (à isométrie près) variété riemannienne de dimension  $n$ , complète, simplement connexe et de courbure sectionnelle constante égale à  $-1$ . Le groupe des isométries de  $\mathbb{H}^n$  qui préservent l'orientation est isomorphe au groupe  $SO_0(n, 1)$ , c'est-à-dire la composante connexe de l'identité dans le groupe orthogonal d'une forme quadratique réelle de signature  $(n, 1)$ . On appelle *variété hyperbolique* tout quotient  $V = \Gamma \backslash \mathbb{H}^n$ , où  $\Gamma$  est un sous-groupe discret et sans torsion de  $SO_0(n, 1)$ . On appelle *hyperplan* de  $\mathbb{H}^n$  une sous-variété de codimension 1, totalement géodésique dans  $\mathbb{H}^n$ .

**Définition 0.1.1.** *Un  $\Gamma$ -hyperplan est un hyperplan de  $\mathbb{H}^n$  tel que le quotient  $\text{Stab}_\Gamma(H) \backslash H$  soit compact.*

Un  $\Gamma$ -hyperplan correspond donc à une hypersurface totalement géodésique (immergée) dans la variété  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^n$ .

Dans une première partie nous démontrons le résultat suivant, qui affirme qu'une variété hyperbolique compacte contenant « beaucoup » de  $\Gamma$ -hyperplans est *cubique*, c'est-à-dire que son groupe fondamental opère *géométriquement* (proprement et cocompactement) sur un complexe cubique de courbure négative.

**Théorème 0.1.2.** *Soit  $V$  une variété hyperbolique compacte de dimension  $n$ ; appelons  $\Gamma$  son groupe fondamental. Si pour tout  $x \neq y$  dans  $\partial \mathbb{H}^n$ , il existe un  $\Gamma$ -hyperplan  $H \subset \mathbb{H}^n$  tel que  $\partial H$  sépare  $x$  et  $y$  dans  $\partial \mathbb{H}^n$ , alors  $\Gamma$  agit proprement et cocompactement sur un complexe cubique  $CAT(0)$ .*

Des travaux récents d'Agol et Wise montrent de manière spectaculaire la puissance de cette cubulation des variétés hyperboliques. Dans ce mémoire nous considérons des variétés hyperboliques particulières dites *arithmétiques standard* dont la construction est rappelée dans la section 2.1. La particularité des variétés hyperboliques arithmétiques standard que nous exploitons est de posséder « beaucoup » d'hypersurfaces totalement géodésiques. Nous déduisons en particulier du théorème précédent que ces variétés sont « cubulables ». Le théorème d'Agol et Wise affirme que le groupe fondamental de ces variétés possède un sous-groupe d'indice fini qui s'injecte dans un groupe de Coxeter à angles droits, i.e. un groupe de présentation fini engendré par des éléments d'ordre deux  $s_1, \dots, s_k$  et dont les seules relations sont  $[s_i, s_j] = 1$  pour certains  $i, j$ . Dans le cas spécial des variétés arithmétiques on peut plus facilement démontrer ce théorème et ainsi obtenir :

**Théorème 0.1.3.** *Le groupe fondamental d'une variété hyperbolique arithmétique standard compacte possède un sous-groupe d'indice fini qui se plonge dans un groupe de Coxeter à angles droits.*

La démonstration occupe la troisième partie de ce mémoire. Celle-ci consiste à vérifier « à la main » que quitte à prendre un sous-groupe d'indice fini  $\Gamma'$  dans  $\Gamma$ , le complexe  $C$  se plonge isométriquement dans un second complexe cubique  $CAT(0)$  sur lequel agit un certain groupe de Coxeter à angle droits. On va pour cela utiliser des propriétés de séparabilité de certains sous-espaces de  $\Gamma$ . Le sous-groupe  $\Gamma'$  se plongera alors naturellement dans le groupe de Coxeter.

# Chapitre 1

## Action d'un groupe de variété sur un complexe cubique CAT(0)

Dans cette partie nous démontrons le théorème suivant.

**Théorème 1.0.4.** *Soit  $V$  une variété hyperbolique compacte de dimension  $n$ ; appelons  $\Gamma$  son groupe fondamental. Si pour tout  $x \neq y$  dans  $\partial\mathbb{H}^n$ , il existe un  $\Gamma$ -hyperplan  $H \subset \mathbb{H}^n$  tel que  $\partial H$  sépare  $x$  et  $y$  dans  $\partial\mathbb{H}^n$ , alors  $\Gamma$  agit proprement et cocompactement sur un complexe cubique CAT(0).*

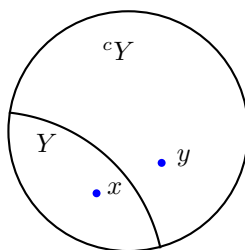
Ce théorème est un cas particulier d'un énoncé plus général sur les groupes hyperboliques, traité par N.Bergeron et D.Wise dans [BW10].

### 1.1 Construction d'un complexe cubique à partir d'un espace à murs

**Définition 1.1.1.** *Soit  $X$  un ensemble. Un mur de  $X$  est une partition  $\bar{Y} = \{Y, {}^cY\}$  de  $X$ , avec  $Y \subset X$ . Alors  $Y$  et  ${}^cY$  sont appelé des demi-espaces.*

**Définition 1.1.2.** *On appelle orientation d'un mur, le choix de l'un des demi-espaces.*

**Définition 1.1.3.** *Pour tout  $x, y$  dans  $X$ , avec  $x \neq y$ , on dit que  $m = \{Y, {}^cY\}$  sépare  $x$  et  $y$  si  $|\{x, y\} \cap Y| = 1$ .*



**Définition 1.1.4.** *Un espace à murs est une paire  $(X, \mathcal{M})$ , où  $X$  est un ensemble, et  $\mathcal{M}$  une collection de murs de  $X$ , tels que, pour tout  $x, y$  de  $X$ , il y ait un nombre fini de murs qui séparent  $x$  et  $y$ . On note alors  $\mathcal{M}$  l'ensemble des demi-espaces de  $(X, \mathcal{M})$ .*

**Remarque 1.1.5.** *On a une pseudo-distance sur un espace à murs : si  $x, y \in X$ , on note  $\delta(x, y)$  le cardinal de l'ensemble des murs qui séparent  $x$  et  $y$ .*

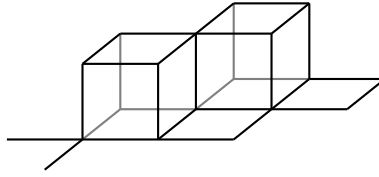
**Définition 1.1.6.** *On dit qu'un espace à murs  $(X, \mathcal{M})$  est séparé si  $\forall x, y \in X, \delta(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ .*

**Définition 1.1.7.** Un complexe cubique est un complexe cellulaire défini comme un quotient :

$$\bigsqcup_i Q_i / \sim$$

, où les  $Q_i$  sont des cubes euclidiens de dimension finie, et  $\sim$  est une relation d'équivalence engendrée par des isométries entre faces de cubes  $Q_i$ , de sorte que cette relation vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall x, x' \in \overset{\circ}{Q}_i, x \sim x' \Rightarrow x = x'$ .
- Pour tout sommet  $v$  dans  $Q_i$ , il existe un voisinage  $V$  de  $v$  dans  $Q_i$  tel que si  $x, x' \in V, x \sim x' \Rightarrow x = x'$ .



**Remarque 1.1.8.** Il y a naturellement une pseudo-distance sur un complexe cubique  $X = \bigsqcup_i Q_i / \sim$ . Soit  $p = (x = x_1, x_2, \dots, x_n = y)$ , une ligne brisée de  $x$  à  $y$ , avec  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \exists Q_i$  un cube de  $X$  tels que  $[x_i, x_{i+1}]$  est une droite de  $Q_i$ . Soit  $\ell$  l'application qui va de l'ensemble des lignes brisées dans  $\mathbb{R}$ , définie par  $\ell(p) = \sum_{i=1}^{n+1} d_{Q_i}(x_i, x_{i+1})$ . On pose  $d(x, y) = \inf\{\ell(p), p \text{ une ligne brisée entre } x \text{ et } y\}$ . Cette construction est plus générale, elle peut être réalisée sur n'importe quel quotient d'espaces métriques. Elle donne une pseudo-distance, et dans le cas particulier des complexes cubiques, c'est une distance.

On va construire un complexe cubique à partir de la structure d'un espace à murs séparé, construction simultanément réalisée par B.Nica dans [Nic04] et par I.Chatterji et G.Niblo dans [CN05].

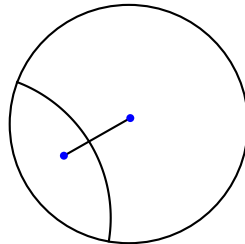
**Définition 1.1.9.** On appelle ultrafiltre une famille de demi-espaces de  $\mathcal{M}$  qui vérifie les deux conditions suivantes :

- $\forall Y \in \tilde{\mathcal{M}}, Y \in \sigma \Leftrightarrow {}^c Y \notin \sigma$
- $\forall A, B \in \tilde{\mathcal{M}}, A \subset B \text{ et } A \in \sigma \Rightarrow B \in \sigma$ .

**Lemme 1.1.10.** À chaque élément  $v$  de  $X$ , on associe un ultrafiltre qu'on appellera ultrafiltre principal. Il est donné par les choix de demi-espaces suivants :  $\sigma_v = \{Y \text{ tel que } v \in Y\}$ .

*Démonstration.* Il suffit de vérifier que  $\sigma_v$  satisfait les deux conditions qui définissent les ultrafiltres. Pour tout  $Y$  de  $\tilde{\mathcal{M}}$ ,  $v$  est dans  $Y$  ou  $v$  est dans  ${}^c Y$ , mais pas les deux et si  $v$  est dans  $A$  et que  $A$  est un sous-ensemble de  $B$  alors  $v$  appartient à  $B$ .  $\square$

**Construction 1.1.11.** Soit  $(X, \mathcal{M})$  un espace à murs séparé. Construisons un complexe cubique à partir de cette structure d'espace à murs. On commence par construire le 1-squelette du complexe cubique que l'on veut obtenir, c'est un graphe. On prend comme sommets les ultrafiltres définis ci-dessus, et on appelle  $C^0$  l'ensemble des sommets. Puis on définit les arêtes. On met une arête entre deux sommets  $\sigma$  et  $\sigma'$ , si  $|\sigma \Delta \sigma'| = 2$  (delta désigne la différence symétrique entre ensembles). Autrement dit,  $\sigma$  et  $\sigma'$  diffèrent exactement d'une orientation de mur ; l'un possède un des demi-espaces de ce mur et l'autre son complémentaire. On appelle  $C^1$ , le graphe ainsi obtenu.



**Remarque 1.1.12.** Soit  $(X, \mathcal{M})$  un espace à murs séparé; alors  $X$  s'injecte dans l'ensemble des sommets du complexe cubique associé  $C^0$ .

*Démonstration.* On considère l'application :

$$\begin{aligned}\sigma : X &\longrightarrow C^0 \\ \sigma : v &\longmapsto \sigma_v.\end{aligned}$$

Comme on a supposé l'espace à murs  $(X, \mathcal{M})$  séparable, on a :  $\forall x, y \in X \delta(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ . On obtient alors l'injectivité de  $\sigma$ .  $\square$

**Lemme 1.1.13.** Les ultrafiltres principaux sont tous connectés dans  $C^1$ .

*Démonstration.* Soient  $\sigma_a$  et  $\sigma_b$  deux ultrafiltres principaux de  $(X, \mathcal{M})$ , avec  $a, b \in X$ . Montrons qu'il existe bien un chemin entre  $\sigma_a$  et  $\sigma_b$ . Comme  $(X, \mathcal{M})$  est un espace à mur,  $a$  et  $b$  sont séparés par un nombre fini de murs, donc  $\sigma_a \Delta \sigma_b$  est fini. Montrons que si deux sommets  $u, v$  de  $C^0$  sont tels que  $u \Delta v = \{Y_1, {}^c Y_1, \dots, Y_n, {}^c Y_n\}$ , alors  $u$  et  $v$  sont connectés dans  $C^1$ . On va faire une récurrence sur  $n$ . Si  $n = 1$ , par définition,  $u$  et  $v$  sont bien connectés par une arête. Supposons maintenant que  $n > 1$ , et que  $\{Y_1, \dots, Y_n\} \subset u$ . S'il n'existe pas de sommet  $x$  de  $C^0$  tel que  $u \Delta x = \{Y_i, {}^c Y_i\}$ , alors  $\exists j \in \{1, 2, \dots, n\}$  tel que  $Y_j \subset Y_i$ . En effet, les sommets de  $C^0$  sont tous les ensembles de demi-espace avec pour contraintes celles de la définition 1.1.9. Ici, si  $x = u \cap v \cup \{Y_1, \dots, Y_{i-1}, {}^c Y_i, Y_{i+1}, \dots, Y_n\}$  n'est pas un sommet de  $C^0$ , comme chaque mur est bien orienté, alors il y a un problème de compatibilité donné par la seconde condition de la définition 1.1.9. Maintenant comme  $v$  est aussi un sommet de  $C^0$ , alors  $\forall i, Y_i$  et  ${}^c Y_i$  sont compatibles avec les demi-espaces de  $u \cap v$ , et les  $Y_k$  sont compatibles entre eux  $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Il y a donc un problème entre un des  $Y_j$  et  ${}^c Y_i$ , ce qui se traduit par  $\exists j \in \{1, 2, \dots, n\}$  tel que  $Y_j \subset Y_i$ . Or il n'est pas possible qu'un ensemble  $\{Y_1, \dots, Y_n\}$  avec  $Y_i \neq Y_j$  soit tel que  $\forall i, \exists j$  tel que  $Y_j \subset Y_i$ . Donc il existe un  $i$  et un  $x$  tel que  $u \Delta x = \{Y_i\}$ , et donc on a  $v \Delta x = u \Delta v \setminus \{Y_i\}$ . Par hypothèse de récurrence,  $x$  et  $u$  sont alors connectés, donc  $u$  et  $v$  aussi.  $\square$

**Construction 1.1.14.** du complexe cubique à partir de l'espace à murs (suite). À partir de maintenant on ne s'intéresse plus qu'à la composante connexe de  $C^1$  qui contient les ultrafiltres principaux. On l'appelle à nouveau  $C^1$ , on a alors obtenu le 1-squelette du complexe cubique. Puis on complète ce graphe en un complexe cubique en répétant l'opération suivante : quand on voit le 1-squelette d'un  $k$ -cube dans  $C^1$ , on y met un  $k$ -cube.

**Remarque 1.1.15.** On considère  $C^0$ , l'ensemble des sommets du complexe cubique. Soit  $\mathcal{M}(C)$  l'ensemble des murs de  $C^0$ . On pose l'application suivante :

$$\begin{aligned}f : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M}(C) \\ \bar{Y} = \{Y, {}^c Y\} &\longmapsto \{\{x \in C^0 / Y \in x\}, \{x \in C^0 / {}^c Y \in x\}\}\end{aligned}$$

. On considère l'ensemble des murs donnés par  $f(\mathcal{M})$ . Alors par connexité de  $C^1$ , les paires  $u, v$  de sommets de  $C^1$  sont séparées par un nombre fini de murs de  $f(\mathcal{M})$ , donné par les arêtes successives d'un chemin de  $u$  à  $v$ . Alors  $(C^0, f(\mathcal{M}))$  est un espace à murs. Et il y a une bijection entre les murs de  $(X, \mathcal{M})$  et les murs de  $(C^0, f(\mathcal{M}))$ .

Dans le cas particulier des variétés hyperboliques cocompactes qui satisfont les hypothèses du théorème 1.0.4, exhibons un espace à murs pour appliquer la construction ci-dessus.

Soient  $H_1, H_2, \dots, H_n$  un nombre fini de  $\Gamma$ -hyperplans. On pose  $\mathcal{H} = \bigcup_{i=1}^n \{\gamma.H_i, \gamma \in \Gamma\}$ , et  $P = \mathbb{H}^n \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$ . On appelle  $X$  l'ensemble des composantes connexes de  $P$ .

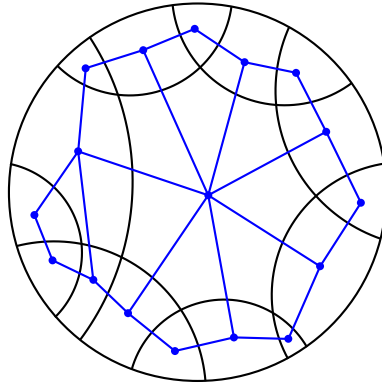
**Définition 1.1.16.** Chaque hyperplan  $H$  de  $\mathcal{H}$  sépare l'espace  $\mathbb{H}^n$  en deux composantes connexes. Il donne alors naturellement une partition à deux éléments de  $X$ , c'est-à-dire, un mur de  $X$ . On prend alors  $\mathcal{M}$  l'ensemble de ces murs sur  $X$ .

**Lemme 1.1.17.** Le couple  $(X, \mathcal{M})$ , défini ci-dessus, possède une structure d'espace à murs séparé.

*Démonstration.* La condition d'être séparé pour cet espace à mur est vérifiée par définition. Il reste à prouver que les  $\Gamma$ -orbites des hyperplans  $H_1, H_2, \dots, H_n$  donnent une collection d'hyperplans localement finie : Montrons qu'une boule  $B$  de rayon 1, intersecte un nombre fini d'hyperplans de  $\mathcal{H}$ . Il suffit de le prouver pour un hyperplan  $H$  et sa  $\Gamma$ -orbite, puisque  $\mathcal{H}$  est donné par un nombre fini d'hyperplans. Soit  $p : \mathbb{H}^n \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{H}^n$ , l'application de passage au quotient de  $\mathbb{H}^n$  par  $\Gamma$ . Montrons que si  $p(H)$  est compact, alors  $\{\gamma H, \gamma \in \Gamma\}$  est localement fini dans  $\mathbb{H}^n$ . Montrons que l'ensemble  $G = \{\gamma \in \Gamma / \text{Stab}_\Gamma(H), \gamma H \cap B \neq \emptyset\}$  est fini. Soit  $K$  un domaine fondamental compact pour l'action de  $\Gamma$  sur  $H$ . Si  $a \in G$ , on peut lui associer un  $\gamma \in \text{Stab}_\Gamma(H) \backslash \Gamma$ , tel que  $a\gamma K \cap B \neq \emptyset$ . Par propriété de l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{H}^n$ , comme  $K \cup B$  est compact, il y a un nombre fini d'éléments dans  $\{h \in \Gamma, hK \cap B \neq \emptyset\}$ . Il reste à prouver qu'à deux éléments  $a_1 \neq a_2 \in G$ , on associe deux éléments différents de  $\{h \in \Gamma, hK \cap B \neq \emptyset\}$ . c'est-à-dire, avec les notations ci-dessus, on doit montrer que  $a_1\gamma_1 \neq a_2\gamma_2$ . En fait, c'est vrai car  $a_1\gamma_1 K \subset a_1 H$  et  $a_2\gamma_2 K \subset a_2 H$ . Par homogénéité on constate que ce résultat est vrai pour toute boule de rayon 1. Maintenant si on prend deux points  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{H}^n$ , tels que  $d_{\mathbb{H}^{n+1}}(x, y) = r$ . Il y a au plus  $n(r + 1)$  hyperplans qui séparent  $x$  et  $y$ .

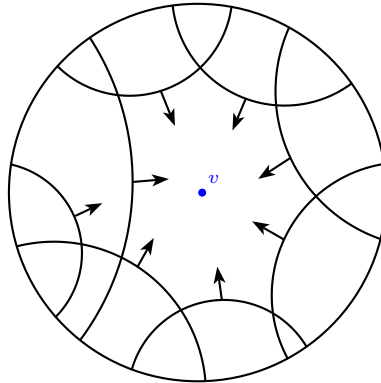
□

**Définition 1.1.18.** On appelle graphe dual de  $P$ , le graphe dont les sommets sont les composantes connexes de  $P$ , et tels que deux sommets soient reliés par une arête si les deux composantes connexes associées sont séparées par un unique hyperplan de  $\mathcal{H}$ .



**Remarque 1.1.19.** Le complexe cubique construit à partir de la structure d'espace à murs contient au moins le graphe dual de  $P$ .

*Démonstration.* On retrouve alors des sommets correspondants aux composantes connexes de  $P$  : Il correspondent aux ultrafiltres principaux du lemme 1.1.10.



On appellera *sommets géométriques* ces sommets particulier du complexe cubique.  $\square$

**Lemme 1.1.20.** *L'ensemble des sommets géométriques est connexe.*

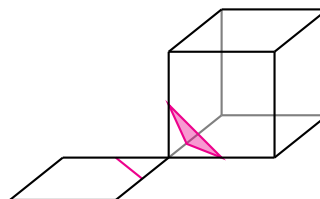
*Démonstration.* En fait on l'a déjà vu dans le lemme 1.1.13, les sommets géométriques correspondants aux ultrafiltres principaux dans la construction plus général d'un complexe cubique à partir d'un espace à mur. Mais ici, on peut le voir de manière plus géométrique. En effet, entre deux points  $x, y$  de  $\mathbb{H}^n$ , par locale finitude de  $\mathcal{H}$ , il existe un nombre fini de composantes connexes de  $P$  traversées par le segment géodésique  $[x, y]$ . Quitte à bouger un peu le sommet  $x$ , on peut supposer que le segment géodésique  $[x, y]$  traverse les hyperplans un par un. Chacune des composantes connexes ainsi traversées donne alors un sommet géométrique, relié par une arête au précédent  $\square$

## 1.2 Le complexe construit à partir d'un espace à murs est $CAT(0)$

On va utiliser un théorème qui caractérise de manière combinatoire la propriété  $CAT(0)$  pour un complexe cubique, pour cela on introduit les définitions suivantes.

**Définition 1.2.1.** *Un complexe multi-simplicial  $X$  est un complexe cellulaire dont les cellules sont des simplexes, avec des applications de recollement affines et tels que tous les simplexes soient plongés dans  $X$ . On dit qu'il est simplicial, au lieu de multi-simplicial, si chacun des simplexes du complexe est uniquement déterminé par son bord.*

**Définition 1.2.2.** *Dans un complexe cubique  $X$ , si  $v$  est un sommet,  $link(v, X)$  est le complexe multi-simplicial donné par le quotient  $\bigsqcup_{Q \text{ cube de } X} link(v, Q) / \sim$ . Avec pour tout  $v$  sommet de  $X$  et  $Q$  cube de  $X$  qui contient  $v$ ,  $link(v, Q)$  le simplexe de  $Q$  donné par l'enveloppe convexe de tous les milieux d'arêtes adjacentes dans  $Q$ , et  $\sim$  la relation d'équivalence induite par celle définie sur le complexe cubique  $X$ .*



**Définition 1.2.3.** *Un complexe simplicial  $X$  est dit de drapeau si pour tout ensemble de sommets  $a_1, a_2, \dots, a_k$  de  $X$ , 2 à 2 reliés dans  $X$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , est un simplexe de  $X$ .*

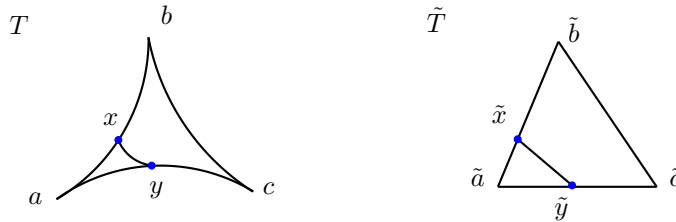
**Théorème 1.2.4.** *Un complexe cubique de dimension finie est  $CAT(0)$  si et seulement si il est :*

- *localement  $CAT(0)$ , c'est-à-dire le link de chaque sommet est simplicial et de drapeau.*
- *simplement connexe.*

En fait la propriété  $CAT(0)$  est beaucoup plus générale, elle existe déjà sur un espace métrique géodésique. C'est M.Gromov qui fait le lien, dans le cas des complexes cubiques, entre la définition combinatoire, ci-dessus, et la définition suivante, qui est plus générale.

**Définition 1.2.5.** *Soit  $(X, d)$  un espace métrique géodésique, soit  $T = (a, b, c)$  un triangle géodésique, grâce aux distances  $d(a, b)$ ,  $d(a, c)$  et  $d(c, b)$ , on peut construire un unique triangle dans  $\mathbb{R}^2$ , appelons le  $\tilde{T} = (\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})$ . Un point  $x$  de  $T$  peut être déterminé par le segment qui le porte, et sa distance a un des sommet de ce segment, on note alors  $\tilde{x}$  le sommet déterminé dans  $\tilde{T}$  par les mêmes conditions. On dit alors que  $X$  est  $CAT(0)$ , si pour tout triangle  $T$  géodésique de  $X$ , et pour toute paire de points  $\{x, y\}$  de  $T$  on a l'inégalité suivante :*

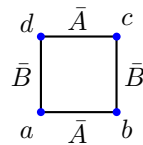
$$d(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq d(x, y).$$



**Théorème 1.2.6.** *Un complexe cubique  $C$  construit à partir d'un espace à murs  $(X, \mathcal{M})$  est  $CAT(0)$ .*

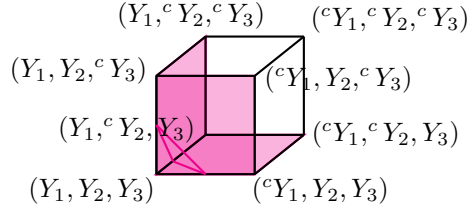
**Proposition 1.2.7.** *Le complexe cubique  $C$  est localement  $CAT(0)$ .*

*Démonstration.* Soit  $a, b, c, d$  un carré dans  $C^1$ .  $a$  et  $b$  sont connectés par un arête, donc il existe un mur  $\bar{A} = \{A, {}^c A\}$  tel que  $\bar{A} = a\Delta b$ . De même il existe un mur  $\bar{B} = b\Delta c$ .  $d$  est tel que  $|d\Delta a| = 2$  et  $|d\Delta c| = 2$ . Comme  $a\Delta c = \bar{A} \cup \bar{B}$  et que  $d \neq b$ , alors on a  $a\Delta d = \bar{B}$  et  $d\Delta c = \bar{A}$ .



On dit alors que les hyperplans  $A$  et  $B$  sont indépendants au sens où toutes les combinaisons  $\{A, B\}$ ,  $\{{}^c A, B\}$ ,  $\{A, {}^c B\}$  et  $\{{}^c A, {}^c B\}$  existent dans des sommets de  $C$ . En particulier, aucun des éléments de l'ensemble  $\{A, {}^c A, B, {}^c B\}$  n'est inclut dans un autre élément du même ensemble. L'orientation d'un mur n'influence pas l'orientation de l'autre, et géométriquement dans  $\mathbb{H}^n$ , ça correspond au cas où les hyperplans se croisent. Si  $v$  est un sommet de  $C^1$ , supposons qu'il existe un ensemble de  $k$  sommets dans  $link(v)$  qui sont deux à deux reliés. Pour chacun de ces sommets  $e_i$  du  $link(v)$ , on associe une arête  $a_i$  de  $C^1$ , elle même associée à un mur  $\bar{Y}_i$ . Comme chaque paire de sommets dans  $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  est relié dans le  $link(v)$ , il existe alors un carré entre les deux arêtes correspondantes et, d'après la remarque précédente, on obtient que les murs  $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \dots, \bar{Y}_k$  sont deux à deux indépendants. Montrons alors que tous les carrés adjacents à  $v$ , donnés par les liaisons dans  $link(v)$ , sont inclus dans un même  $k$ -cubes de  $C$ . On prends le  $k$ -cube donnée par les sommets suivant : Pour tout mur différent de  $\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_k$ , on choisit la mêmes orientations de murs que celles de  $v$ . Pour les  $\bar{Y}_i$ , on prends les  $2^k$  combinaisons d'orientations possibles. On obtient bien des sommets de  $C$ . Comme dans la preuve du lemme 1.1.13, tous les murs sont orientés dans ces ensembles de demi-espaces, il suffit de montrer qu'il n'y a pas d'incompatibilité dans les choix de demi-espaces, c'est vrai car on à vu dans le paragraphe ci-dessus l'indépendance,  $\forall i, j$ , des  $Y_i, Y_j$ .



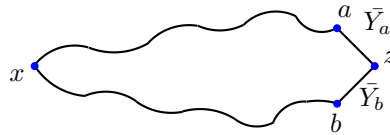


□

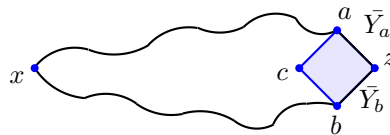
**Proposition 1.2.8.** *Le complexe cubique  $C$  est simplement connexe.*

*Démonstration.* Soit  $\gamma$  un lacet dans  $C$ , on l'homotope sur un lacet dans  $C^1$ , on peut supposer qu'il n'y pas d'aller-retour. Pour  $x, y \in C^0$ , on pose :  $\delta(x, y) = \frac{1}{2}|x\Delta y|$ . C'est une distance sur  $C^0$ . On choisit un sommet  $x$  et on va montrer que quitte à faire une homotopie on peut toujours réduire  $\max_{y \in \gamma \cap C^0} (\delta(x, y))$ .

Soit  $E(\gamma) = \{z \in \gamma \cap C^0 / \delta(x, z) = \max_{y \in \gamma \cap C^0} (\delta(x, y))\}$ . L'ensemble  $E(\gamma)$  est fini, montrons qu'on peut toujours trouver un lacet  $\gamma'$  homotope à  $\gamma$  tel que  $|E(\gamma')| < |E(\gamma)|$ . Soit  $z$  un sommet de  $E$ . Si  $a$  est un sommet adjacent à  $z$  dans  $\gamma$ , il y a juste un changement d'orientation pour passer de  $z$  à  $a$ . Ce choix dans  $a$  doit alors être le même que dans  $x$ , sinon  $z$  ne maximiserait pas la distance par rapport à  $x$ , donc n'appartiendrait pas à  $E(\gamma)$ . Notons  $a$  et  $b$  les deux sommets adjacents à  $z$  dans  $\gamma$ , et  $\bar{Y}_a$  (resp  $\bar{Y}_b$ ) le mur dont l'orientation diffère de  $z$  à  $a$  (resp  $b$ ), et supposons  $Y_a, Y_b \in z$ .



Alors  $Y_a$  et  $Y_b \in z$ ,  $Y_a^c$  et  $Y_b \in a$ ,  $Y_b^c$  et  $Y_a \in b$ , et  $Y_a^c$  et  $Y_b^c \in x$ , d'après ce qu'on a dit ci-dessus. Donc les orientations  $^cY_a$  et  $^cY_b$  ne sont pas incompatible entres elle, et avec les autres murs de  $a$ ,  $b$  et  $z$ , on a donc un carré donné par :  $a, z, b, c = \{Y_a^c, Y_b^c, \text{orientations partagées par } a, b \text{ et } z\}$ .



On peut alors homotoper  $\gamma$  en changeant  $azb$  en  $acb$  et ainsi obtenir des éléments à une distance à  $x$  inférieure localement à  $\delta(x, z)$ . Si on fait ce processus sur chacun des points de  $E(\gamma)$  qui minimise la distance, on peut alors à homotopie près réduire cette distance. □

### 1.3 Action géométrique

**Définition 1.3.1.** *Soit  $(X, \mathcal{M})$  un espace à murs, on dit qu'un groupe  $G$  agit sur un espace à murs si pour tout  $g$  de  $G$ ,  $g$  agit sur  $X$ , et induit une permutation des éléments de  $\mathcal{M}$ .*

**Remarque 1.3.2.** L'action d'un groupe  $G$  sur un espace à murs induit naturellement une action de ce groupe sur le complexe cubique  $C$ , construit comme ci-dessus. En effet, un sommet est donné par le choix d'un demi-espace pour chaque mur de  $\mathcal{M}$ , les demi-espaces étant envoyés sur des demi-espaces par  $g$  on a donc une action de  $G$  sur  $C^0$ . La condition pour qu'il y ait une arête entre deux points étant la suivante : les deux ensembles de choix de demi-espaces ne diffèrent que d'un choix, condition également stable par l'action de  $G$ . Les conditions pour former un cube sont codées par les arêtes du 1-squelette du cube, condition stable par  $G$ , les images des cubes par  $G$  sont bien des cubes de même dimension.

On se replace dans le contexte des hypothèses du théorème 1.0.4. Il y a une action naturelle de  $\Gamma$  sur les hyperplans de  $\mathbb{H}^n$ . Comme  $\Gamma$  permute les éléments de  $\mathcal{H} = \{\gamma.H_i, \gamma \in \Gamma, i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ . Le groupe  $\Gamma$  agit alors sur l'espace à murs,  $X$ , construit à partir de  $\mathcal{H}$ . On a ensuite construit  $C$  un complexe cubique  $CAT(0)$ , et d'après la remarque précédente,  $\Gamma$  agit alors sur  $C$ .

**Définition 1.3.3.** On dit qu'un groupe  $G$  agit géométriquement sur un complexe cubique  $C$  si l'action est propre et cocompacte.

Cette partie a pour but de montrer qu'on peut choisir nos hyperplans  $H_1, H_2, \dots, H_n$  dont les  $\Gamma$ -orbites donnent  $\mathcal{H}$ , tel que l'action de  $\Gamma$  sur  $C$  soit géométrique. Commençons par montrer que ce choix peut nous donner la propriété. Si  $H_1, H_2, \dots, H_n$  des hyperplans de  $\mathbb{H}^n$  qui engendrent  $\mathcal{H}$ . Chaque hyperplan donne un mur dans  $X$ . Notons  $\bar{Y}_i = \{Y_i, {}^c Y_i\}$  le mur associé à  $H_i$ .

**Proposition 1.3.4.** : Si  $\forall \gamma \in \Gamma, \exists g \in \Gamma, k \in \mathbb{Z}$  et  $Y_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$  tels que

$$\gamma^{-k}gY_i \subsetneq gY_i \subsetneq \gamma^k gY_i$$

alors  $\Gamma$  agit proprement sur  $C$ .

*Démonstration.* Pour montrer la propriété, il suffit de prouver que  $\forall v \in C^0, \text{Stab}_\Gamma(v) = \{e\}$ . En effet par contraposé on a : Si l'action de  $\Gamma$  n'est pas propre, il existe un compact  $K$  tel que  $\{\gamma \in \Gamma \text{ tels que } \gamma K \cap K \neq \emptyset\}$  est infini. Or il y a un nombre fini de sommets de  $C^0$  dans  $K$ . Supposons qu'aucun de ces  $\gamma$  ne stabilise un des sommets de  $C^0$ . Il existe alors au moins deux éléments différents  $\gamma, \gamma' \in \Gamma$  qui envoient un sommet  $a$  sur un autre sommet  $b$ . Alors  $\gamma'\gamma^{-1} \neq e$  et  $\gamma'\gamma^{-1} \in \text{Stab}_\Gamma(b)$ .

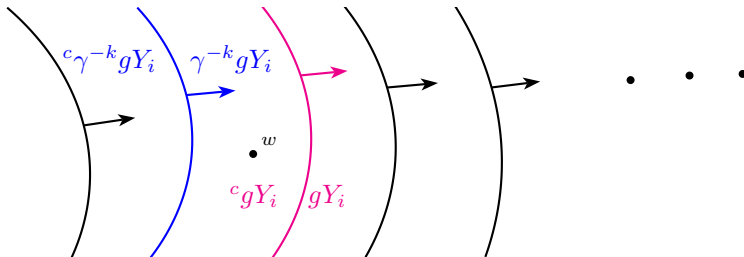
Soit  $v \in C^0$ , supposons par l'absurde qu'il existe  $\gamma \in \text{Stab}_\Gamma(v), \gamma \neq e$ , d'après les hypothèses de la proposition, il existe  $g \in \Gamma, k \in \mathbb{Z}$  et  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , tels que :

$$\gamma^{-k}gY_i \subsetneq gY_i \subsetneq \gamma^k gY_i$$

En fait on a :

$$\dots \subsetneq \gamma^{-pk}gY_i \dots \subsetneq \gamma^{-2k}gY_i \subsetneq \gamma^{-k}gY_i \subsetneq gY_i \subsetneq \gamma^k gY_i \subsetneq \gamma^{2k}gY_i \dots \subsetneq \gamma^{pk}gY_i \subsetneq \dots$$

En effet, supposons  $gY_i \in v$  (sinon on fait le même raisonnement avec  ${}^c gY_i$ ) alors  $\forall p \in \mathbb{Z}, \gamma^{pk}gY_i \in \gamma^{pk}v = v$ . Alors  $v$  ne fait pas partie de la composante connexe qui contient les ultrafiltres principaux, car il n'est jamais à distance finie d'au moins un des ultrafiltres principaux. Prenons par exemple,  $w$  un élément de  $\gamma^k gY_i \cap {}^c gY_i$ . Par définition  ${}^c gY_i \in \sigma_w$ , et grâce aux inclusions ci-dessus,  $\forall n \in \mathbb{N}, {}^c(\gamma^{-nk}gY_i) \in \sigma_w$ . Alors  $v$  et  $\sigma_w$  ont une infinité d'orientation de murs qui diffèrent, ils ne peuvent donc pas appartenir à la même composante connexe de  $C^1$ .



□

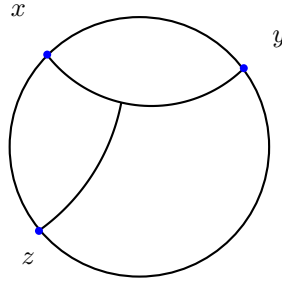
**Proposition 1.3.5.** *Sous les hypothèses du théorème 1.0.4, il existe un ensemble fini de  $\Gamma$ -hyperplans de  $\mathbb{H}^n$ ,  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , qui satisfont les hypothèses de la proposition 1.3.4.*

*Démonstration.* Soit  $T = \{(x, y, z) \in (\partial\mathbb{H}^n)^3 \text{ tels que } x, y, z \text{ soient deux à deux distincts}\}$  l'espace de triplets sur le bords de  $\mathbb{H}^n$ . Considérons l'application suivante :

$$p : T \longrightarrow \mathbb{H}^n$$

$$(x, y, z) \longmapsto p(x, y, z)$$

avec  $p(x, y, z)$  le point d'intersection de la géodésique ayant comme points à l'infini  $x$  et  $y$  et la géodésique perpendiculaire à celle-ci et ayant un point à l'infini égal à  $z$ .



Il y a une action naturelle de  $\Gamma$  sur  $\partial\mathbb{H}^n$ . On considère alors l'action diagonale de  $\Gamma$  sur les triplets de  $T$ , et l'application  $p$  est alors  $\Gamma$ -équivariante pour cette action. L'action de  $\Gamma$  sur  $T$  est propre. En effet, soit  $K$  un compact de  $T$ , si  $\gamma \in \Gamma$  tel que  $\gamma K \cap K \neq \emptyset$ , alors  $p(\gamma K \cap K) \neq \emptyset$ , et  $p(\gamma K) \cap p(K) \neq \emptyset$ . Comme  $p$  est  $\Gamma$ -équivariant,  $p(K)$  compact par continuité de  $p$ , et  $\Gamma$  agit proprement sur  $\mathbb{H}^n$ , il ne peut y avoir qu'un nombre fini de tels  $\gamma$ . L'action de  $\Gamma$  sur  $T$  est également cocompacte. En fait, l'application  $p$  est propre, c'est prouvé dans le lemme 1.3.6, et on peut en déduire que  $\Gamma$  agit cocompactement sur  $T$ . En effet,  $\gamma$  agit cocompactement sur  $\mathbb{H}^n$ , donc il existe un  $K$  compact de  $\mathbb{H}^n$ , tel que  $\mathbb{H}^n = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma K$ . Donc

$T = p^{-1}(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma K) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} p^{-1}(\gamma K)$ . Et comme  $p$  est  $\Gamma$ -équivariante, on a  $T = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma p^{-1}(K)$ . Par propriété de  $p$ , on a bien que  $\Gamma$  agit cocompactement sur  $T$ .

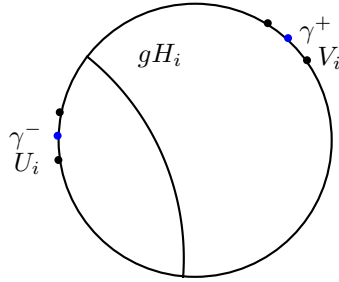
Soit  $(x, y, z) \in T$ ,  $\exists H_{(x,y)}$  un  $\Gamma$ -hyperplan qui sépare  $x$  et  $y$ .  $\partial\mathbb{H}^n$  est une sphère de dimension  $n-2$ , donc  $\partial\mathbb{H}^n \setminus \partial H$  est ouvert. On peut donc trouver des voisinages compacts  $U$  et  $V$  autour de  $x$  et  $y$  tel que  $\partial H$  sépare  $U$  et  $V$ , on prends  $W$  voisinage compact de  $z$ , qui n'intersecte pas  $U$  et  $V$ . Quitte à prendre des voisinages de  $(x, y, z)$  plus petits, on peut supposer que  $\forall \gamma \in \Gamma$ ,  $\gamma.(U \times V \times W) \cap (U \times V \times W) = \emptyset$  : Par propriété de l'action de  $\Gamma$  sur  $T$ ,  $G = \{\gamma \text{ tels que } \gamma.(U \times V \times W) \cap (U \times V \times W) \neq \emptyset\}$  est fini. Pour chacun des  $\gamma \in G \setminus \{1\}$ . Comme  $T$  est séparable, on peut prendre un voisinage  $A$  de  $(x, y, z)$  et  $B$  voisinage de  $\gamma.(x, y, z)$ , tels que  $A \cap B = \emptyset$ . On prends alors  $M = A \cap \gamma^{-1}B$ , alors  $\gamma M \cap M = \emptyset$ . Puis on répète cette opération pour chacun des  $\gamma$  de  $G$ . On note  $M_{(x,y,z)}$  un voisinage ouvert contenu dans ce voisinage. On prends alors

$\bigcup_{(x,y,z) \in T} M_{(x,y,z)}$  est un recouvrement ouvert de  $T$ . Comme  $\forall \gamma \in \Gamma \setminus \{1\}$ ,  $M_{(x,y,z)} \cap \gamma M_{(x,y,z)} = \emptyset$  le passage au

quotient de  $\bigcup_{(x,y,z) \in T} M_{(x,y,z)}$  est un recouvrement ouvert de  $\Gamma \backslash T$  qui est compact. On peut extraire un sous-

recouvrement fini,  $\exists M_{(x_1, y_1, z_1)}, \dots, M_{(x_n, y_n, z_n)}$  tels que  $\bigcup_{\gamma \in \Gamma, i=1, \dots, n} \gamma M_{(x_i, y_i, z_i)}$  recouvre  $T$ . On prends alors

comme hyperplans pour construire  $\mathcal{H}$ , les  $H_i$  qui séparent  $U_i$  et  $V_i$ . Maintenant si  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\gamma$  est loxodromique. Soient  $\gamma^+$  et  $\gamma^-$  les éléments du bord associés, attracteur et répulsif. Soit  $z \in \partial\mathbb{H}^n \in \setminus \{\gamma^+, \gamma^-\}$ , il existe alors un  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $(\gamma^+, \gamma^-, z) \in M_{(x_i, y_i, z_i)}$ ,  $\gamma^+$  et  $\gamma^-$  sont alors séparés par un certain hyperplan  $gH_i$  avec  $g \in \Gamma$ . On note  $gY$  le demi espace donné par  $gH_i$  qui contient  $\gamma^-$ .



Alors,  $\exists k \in \mathbb{Z}$  tel que :

$$\gamma^{-k}gY \subsetneq gY \subsetneq \gamma^k gY$$

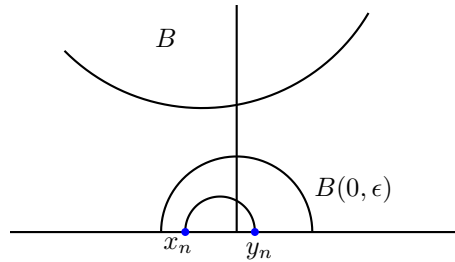
□

Il ne reste plus qu'à montrer le lemme suivant pour achever la preuve de la propriété de l'action de  $\Gamma$  sur  $C$ .

**Lemme 1.3.6.** *L'application  $p$  définie au-dessus, dans la preuve de la proposition 1.3.5, est propre.*

*Démonstration.* Soit  $B$  une boule compacte de  $\mathbb{H}^n$ . Soit  $(x_n, y_n, z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $p^{-1}(B)$ . Montrons que quitte à extraire, on peut trouver une sous-suite qui converge dans  $p^{-1}(B)$ . L'application  $p$  étant continue et  $B$  étant compact,  $p^{-1}(B)$  est fermé. Il suffit donc de trouver une sous-suite qui converge dans  $T$ . Dans  $(\partial\mathbb{H}^n)^3$  qui est compact quitte à extraire, la suite  $(x_n, y_n, z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge. Appelons  $(x, y, z)$  sa limite. Montrons que cette limite est bien dans  $T$ , c'est-à-dire que  $x, y$  et  $z$  sont bien deux à deux distincts.

Supposons que  $x = y$ , alors les suites  $x_n$  et  $y_n$  tendent vers le même élément. On raisonne dans le modèle du demi-espace supérieur, on peut supposer que  $x_n$  et  $y_n$  tendent vers 0. Comme  $B$  est compact, il existe un  $\epsilon$  strictement plus petit que la distance euclidienne  $d$  de  $B$  à 0. Maintenant à partir d'un certain rang, on a  $\min(d(x_n, y_n)) < \epsilon$ , alors la droite  $(x_n, y_n)$  évite le compact  $B$ . Ce qui implique que pour  $n$  grand,  $p(x_n, y_n, z_n) \notin B$ , ce qui contredit les hypothèses.



Montrons que  $z \neq x$  et que  $z \neq y$ . Par symétrie, il suffit de montrer que  $z \neq x$ . Raisonnons par l'absurde, et supposons que  $z_n$  tend vers  $x$ . Notons  $D_n$  la droite passant par  $z_n$  et orthogonale à la droite  $(x, y)$ , et  $D'_n$  la droite passant par  $z_n$  et orthogonale à la droite  $(x_n, y_n)$ . Pour  $n$  assez grand,  $D_n$  et  $D'_n$  sont très proches. Si  $z_n$  est proche de  $x$ , la suite de droite  $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sort de tous compacts. Or  $p(x_n, y_n, z_n) \in D'_n$  donc  $D'_n \cap B \neq \emptyset$ , ce qui est absurde.

□

On a bien prouvé que l'on peut choisir des hyperplans tels que l'action de  $\Gamma$  sur  $C$  soit propre, pour montrer que l'action de  $\Gamma$  sur  $C$  est géométrique, il suffit maintenant de montrer la proposition suivante.

**Proposition 1.3.7.** *L'action de  $\Gamma$  sur  $C$  est cocompacte.*

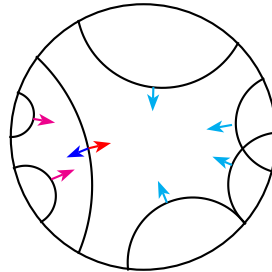
La preuve découle des deux propositions suivantes.

**Proposition 1.3.8.** *le complexe cubique  $C$  est de dimension finie.*

*Démonstration.* Montrons qu'il existe un entier  $N$ , tel que tous les cubes de  $C$  soient de dimension inférieurs à  $N$ . On appelle cube maximal, un cube qui n'est inclus dans aucun autre cube de dimension plus grande. Si  $n \in \mathbb{N}$ , un  $n$ -cube maximal de  $C$  est engendré par  $n$  hyperplans de  $\mathcal{H}$ , qui s'intersectent 2 à 2. L'image par passage au quotient de  $\mathcal{H}$  par  $\Gamma$  est une union d'hypersurfaces compactes, car les  $H_i$  dont on a pris les  $\Gamma$ -orbites pour construire  $\mathcal{H}$  sont des  $\Gamma$ -hyperplans. Il y a donc un nombre fini d'intersections possibles entre ces surfaces, et donc un nombre fini d'angles d'intersections possibles. Par conséquent, c'est aussi le cas en haut dans  $\mathbb{H}^n$ . On choisit  $\theta$ , un de ces angles, et on fait le raisonnement suivant. On considère alors deux hyperplans  $H_1$  et  $H_2$  qui se coupent en formant l'angle  $\theta$ . On choisit un point  $x$  sur l'intersection de ces hyperplans. Par hyperbolicité, il existe une constante  $R$ , tel que tout hyperplan qui coupe les deux premiers hyperplans se trouve dans la boule de centre  $x$  et de rayon  $R$ . Par locale finitude de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathbb{H}$ , il y a un nombre fini d'hyperplans qui coupent  $H_1$  et  $H_2$ , il ne peut donc pas y avoir de cube de dimension trop grande dont l'ensemble des hyperplans qui forment ce cube contient deux hyperplans dont l'intersection forme l'angle  $\theta$ . Une fois qu'on a fait le raisonnement sur chacun des angles, on peut voir qu'il ne peut pas y avoir de cube de dimension trop grande. □

**Proposition 1.3.9.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe une nombre fini de  $n$ -cubes modulo l'action de  $\Gamma$ .*

*Démonstration.* On raisonne sur les  $n$ -cubes maximaux. Pour  $n = 0$ , les seuls sommets de  $C$  qui ne sont pas inclus dans un cube de dimension plus grandes sont les sommets géométriques. En effet, les autres sont connectés à des sommets géométriques, car on a pris la composante connexe de ces sommets pour construire  $C$ , et donc en particuliers ils sont inclus dans une arête. Pour  $n = 1$ , une arête non inclus dans un cube plus gros est donnée par deux sommets qui diffère d'un hyperplan, qui ne rencontre aucuns autres hyperplans. Le fait de pouvoir changer l'orientation, et d'avoir toujours des sommets de  $C$  donne l'orientation de tous les hyperplans qui n'intersectent pas  $H$ . Sur le dessin ci-dessus, l'orientation rouge de l'hyperplans induit les orientations magenta, et la bleu foncée induit les bleu claires.



Ces arêtes sont alors uniquement déterminés par le choix d'un hyperplan. Comme il y a un nombre fini d'hyperplans de  $\mathcal{H}$  modulo  $\Gamma$ , il y a un nombre fini de 1-cubes maximaux modulo  $\Gamma$ . Pour  $n = 2$ , on regarde les intersections de deux hyperplans et modulo  $\Gamma$ , et il y en a un nombre fini. Enfin, montrons qu'il y a un nombre fini de 3-cubes (pas forcément maximaux) modulo  $\Gamma$ , et *a fortiori*, il y a un nombre fini de  $n$ -cubes, pour tout  $n > 2$ . Pour construire un 3-cube, avec  $n > 2$ , il faut trois hyperplans de  $\mathbb{H}^n$  qui s'intersectent 2 à 2. Soit  $D$  un domaine fondamental de l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{H}^n$ . On peut ramener n'importe quelle intersection dans  $D$  par un élément de  $\Gamma$ . Puis, par le même argument qu'au-dessus, dans la preuve de la proposition 1.3.8, il y a un nombre fini d'hyperplans qui intersectent ces deux hyperplans. C'est valable pour toutes les intersection possibles dans  $D$ , et il y en à un nombre fini modulo  $\Gamma$ , donc modulo  $\Gamma$  il y a un nombre fini de 3-cubes modulo  $\Gamma$ , et donc de  $n$ -cubes, pour tout  $n > 2$ . □

On fait donc agir  $\Gamma$  géométriquement sur un complexe cubique  $CAT(0)$ , objet qui possède des propriétés combinatoires en plus de propriétés géométriques, et on va pouvoir en tirer des informations sur le groupe  $\Gamma$ .

## Chapitre 2

# Hyperplans dans les variétés arithmétiques

### 2.1 Variétés arithmétiques

Soit  $F$  un corps de nombre totalement réel de degré  $d$ . On note  $\sigma_1 = \text{Id}, \sigma_2, \dots, \sigma_d$ , les différents plongements réels de  $F$ . Soit  $(V, Q)$  un espace quadratique de dimension  $n+1$  sur  $F$ . On note  $V^{\sigma_i}$  le tensorisé de  $V$  avec  $\mathbb{R}$  au-dessus de  $F$ , plongé dans  $\mathbb{R}$  via l'application  $\sigma_i$ . L'espace  $V^{\sigma_i}$  possède naturellement une structure d'espace vectoriel réel, en fait

$$V \otimes_{\sigma_i} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{n+1}.$$

On note  $Q^{\sigma_i}$  la forme quadratique induite sur  $V^{\sigma_i}$ .

Dans la suite on supposera toujours que  $\text{sign}(Q^{\sigma_1}) = (n, 1)$  et que, pour  $i = 2, \dots, d$ , la forme quadratique  $Q^{\sigma_i}$  est définie positive. Soit  $G = \text{SO}(Q)$  le groupe spécial orthogonal de  $Q$ ; c'est un groupe algébrique sur  $F$ . On notera

$$\Gamma = G \cap \text{SL}_{n+1}(\mathcal{O}_F)$$

où  $\mathcal{O}_F$  désigne l'anneau des entiers de  $F$ .

**Exemple 2.1.1.** On pose  $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ,  $\sigma_1 = \text{id}$ ,  $\sigma_2 = \tau : a + \sqrt{2}b \mapsto a - \sqrt{2}b$ , et  $Q = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - \sqrt{2}x_{n+1}^2$  est une forme quadratique sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})^{n+1}$ .

**Proposition 2.1.2.** Le groupe  $\text{SO}(Q^{\sigma_1}) \times \dots \times \text{SO}(Q^{\sigma_d})$  plongé – diagonalement par blocs – dans  $\text{SL}_{(n+1)d}(\mathbb{C})$  est conjugué à un sous-groupe algébrique,  $R_{F/\mathbb{Q}}(G) \subset \text{SL}_{(n+1)d}(\mathbb{C})$ , défini sur  $\mathbb{Q}$  tel que :

- $R_{F/\mathbb{Q}}(G)(\mathbb{Q}) \simeq G(F)$
- $R_{F/\mathbb{Q}}(G)_{\mathbb{Z}} := R_{F/\mathbb{Q}}(G) \cap \text{SL}_{(n+1)d}(\mathbb{Z}) \simeq \Gamma$
- $R_{F/\mathbb{Q}}(G)(\mathbb{R}) \simeq \prod_i \text{SO}(Q^{\sigma_i})(\mathbb{R})$
- la première projection  $\text{pr}_1 : \text{SO}(Q^{\sigma_1}) \times \dots \times \text{SO}(Q^{\sigma_d}) \rightarrow \text{SO}(Q^{\sigma_1})$  induit une projection  $\pi : R_{F/\mathbb{Q}}(G) \rightarrow \text{SO}(Q^{\sigma_1})$  qui est injective au niveau des points rationnels.

**Exemple 2.1.3.** Dans l'exemple sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ , on a l'isomorphisme suivant :

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(\sqrt{2}) &\longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{Q} \right\} \subset \text{GL}_2(\mathbb{Q}) \\ a + \sqrt{2}b &\longmapsto \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On pose  $H = R_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}}(\text{SO}(Q)) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 2B \\ B & A \end{pmatrix} \in \text{SL}_{2n+2}(\mathbb{R}), A + \sqrt{2}B \in \text{SO}(Q) \text{ et } A - \sqrt{2}B \in \text{SO}(Q^\tau) \right\}$   
C'est un groupe algébrique sur  $\mathbb{Q}$ .

On a alors l'isomorphisme de groupe suivant :

$$\Gamma \longrightarrow H(\mathbb{Z})$$

$$A + \sqrt{2}B \mapsto \begin{pmatrix} A & 2B \\ B & A \end{pmatrix}$$

On a bien :

- $R_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}}(SO(Q))(\mathbb{R}) \simeq SO(Q)(\mathbb{R}) \times SO(Q^\tau)(\mathbb{R})$  car  $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ .
- $R_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}}(SO(Q))(\mathbb{Q}) \simeq SO(\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$ .
- $R_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}}(SO(Q))(\mathbb{Z}) \simeq SO(Q)(\mathbb{Z}) \times SO(Q^\tau)(\mathbb{Z}) \simeq \Gamma$ .

**Proposition 2.1.4.** *Le groupe  $\Gamma$  se plonge naturellement, comme sous-groupe discret, dans  $SO(n, 1)$ .*

*Démonstration.* Le groupe  $R_{F/\mathbb{Q}}(G) \cap SL_{(n+1)d}(\mathbb{Z})$  est évidemment discret dans  $R_{F/\mathbb{Q}}(G)(\mathbb{R})$ .

D'après la proposition 2.1.2,  $R_{F/\mathbb{Q}}(G)(\mathbb{R}) \simeq \prod_i SO(Q^{\sigma_i})(\mathbb{R})$  et la première projection  $R_{F/\mathbb{Q}}(G)(\mathbb{R}) \rightarrow SO(Q^{\sigma_1}) \cong SO(n, 1)$  est injective en restriction à  $R_{F/\mathbb{Q}}(G) \cap SL_{(n+1)d}(\mathbb{Z})$ . On identifie de cette manière  $\Gamma$  à un sous-groupe de  $SO(n, 1)$ .

Supposons maintenant que  $\Gamma$  ne soit pas discret dans  $SO(n, 1)$ . Il existe alors une suite  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\Gamma$ , non stationnaire, et qui converge vers un élément  $g$  de  $SO(n, 1)$ . Chaque  $\gamma_n$  est l'image d'un élément de  $R_{F/\mathbb{Q}}(G) \cap SL_{(n+1)d}(\mathbb{Z})$  auquel correspond un élément

$$(\gamma_n, k_n) \in SO(n, 1) \times \prod_{i=2}^d SO(Q^{\sigma_i})(\mathbb{R}).$$

Puisque le produit  $\prod_{i=2}^d SO(Q^{\sigma_i})(\mathbb{R})$  est compact, quitte à extraire, on peut supposer que la suite  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente. Alors la suite  $(\gamma_n, k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est également convergente et non stationnaire. Ce qui contredit la discrétude de  $R_{F/\mathbb{Q}}(G) \cap SL_{(n+1)d}(\mathbb{Z})$  dans  $R_{F/\mathbb{Q}}(G)(\mathbb{R})$ .  $\square$

**Théorème 2.1.5.** *Le groupe  $\Gamma$  est cocompact dans  $SO(n, 1)$ .*

D'après ce qu'on a vu dans la démonstration précédente, pour montrer que  $\Gamma$  est cocompact dans  $SO(Q)$ , il suffit de montrer que  $R_{F/\mathbb{Q}}(G)_{\mathbb{Z}} \backslash R_{F/\mathbb{Q}}(G)(\mathbb{R})$  est compact, on le réalise alors comme un sous-ensemble  $R = SL_{(n+1)d}(\mathbb{Z}) \backslash SL_{(n+1)d}(\mathbb{R})$  de l'espace des réseaux unimodulaire sur  $\mathbb{R}^{d(n+1)}$ . En effet, si on considère le réseau standard  $\mathbb{Z}^{(n+1)d}$  dans  $\mathbb{R}^{(n+1)d}$ . L'image du réseau  $\mathbb{Z}^{(n+1)d}$  par l'action à gauche d'un élément de  $R_{F/\mathbb{Q}}(G)(\mathbb{R})$  est encore un réseau unimodulaire. Le groupe d'isotropie de cette action est alors  $R_{F/\mathbb{Q}}(G) \cap SL_{(n+1)d}(\mathbb{Z})$ . Le quotient  $R_{F/\mathbb{Q}}(G)_{\mathbb{Z}} \backslash R_{F/\mathbb{Q}}(G)(\mathbb{R})$  s'identifie donc à l'orbite de  $\mathbb{Z}^{(n+1)d}$  sous l'action de  $R_{F/\mathbb{Q}}(G)(\mathbb{R})$ .

**Proposition 2.1.6.** *Le quotient  $R_{F/\mathbb{Q}}(G)_{\mathbb{Z}} \backslash R_{F/\mathbb{Q}}(G)(\mathbb{R})$  est relativement compact.*

*Démonstration.* Le critère de Mahler dit qu'un sous-espace de l'espace des réseaux est relativement compact si son volume est majoré et qu'il n'y a pas de vecteur de norme arbitrairement petite dans les réseaux de cet ensemble. Ici on a des matrices conjuguées à des matrices de  $SO(Q)(\mathbb{R}) \times SO(Q^{\sigma_2})(\mathbb{R}) \times \dots \times SO(Q^{\sigma_d})(\mathbb{R})$ , le volume étant le déterminant de la matrice, il est égal à 1. Il reste à prouver la minoration de la norme des vecteurs des réseaux de  $R_{F/\mathbb{Q}}(G)_{\mathbb{Z}} \backslash R_{F/\mathbb{Q}}(G)(\mathbb{R})$ . L'application

$$f : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$v \longmapsto \prod_{i=1}^d Q^{\sigma_i}(\sigma_i(v))$$

est continue. Quitte à multiplier  $Q$  par un élément de  $\mathcal{O}_F$ , on peut supposer que  $Q$  est à coefficients dans  $\mathcal{O}_F$ . Soit  $v \in \mathcal{O}_F^{n+1}$ , alors  $f(v) \in \mathcal{O}_F$ . Comme  $f(v)$  est invariant par l'action des  $\sigma_i$  par construction,  $f(v) \in \mathbb{Q}$ , et donc  $f(v) \in \mathbb{Z}$ . Si  $f(v) = 0$ , alors il existe un  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  tel que  $Q^{\sigma_i}(\sigma_i(v)) = 0$ . Or  $Q^{\sigma_i}(\sigma_i(v)) = \sigma_i(Q(v))$  donc  $Q(v) = 0$  et donc  $Q^{\sigma_2}(\sigma_2(v)) = 0$ , comme  $Q^{\sigma_2}$  est supposée définie, ça implique que  $v = 0$ . On veut minorer la taille des éléments de  $[L] \in R_{F/\mathbb{Q}}(G)(\mathbb{R}) \cdot [\mathbb{Z}^{d(n+1)}]$ . Par définition  $f$  est invariant sous l'action de  $R_{F/\mathbb{Q}}(G)(\mathbb{R})$ . Donc,  $f([L]) = f([\mathbb{Z}^{(n+1)d}]) \subset \mathbb{Z}$ . De plus, si  $v \in f(v) \in \mathbb{Z}$ , et si  $v \neq 0$   $f(v) \neq 0$ . Donc  $|f(v)| \geq 1$ .  $\square$

**Proposition 2.1.7.**  $R_{F/\mathbb{Q}}(G)_{\mathbb{Z}} \backslash R_{F/\mathbb{Q}}(G)(\mathbb{R})$  est fermé.

**Définition 2.1.8.** Une variété hyperbolique est arithmétique standard si elle possède un revêtement fini qui est isométrique à un revêtement fini de  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^n$ , avec  $\Gamma$  défini comme ci-dessus.

En fait, une fois qu'on a construit un  $\Gamma$  comme au-dessus, on peut obtenir une variété arithmétique standard grâce au lemme suivant.

**Lemme 2.1.9.** Soient  $G$  un sous-groupe fini de  $GL_n(\mathbb{Z})$ , et  $p$  un entier tel que  $p \geq 3$ . La projection de  $G$  modulo  $p$  dans  $GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  est injective.

Le groupe  $\Gamma \subset SL_{(n+1)d}(\mathbb{Z}) \rightarrow SL_{(n+1)d}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ . Soit  $\Gamma(3) = \{\gamma \in \Gamma, \gamma \equiv Id \text{ mod } 3\}$ . Si  $\gamma \in \Gamma(3)$  tel que  $\gamma^k = Id$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Alors  $\langle \gamma \rangle$  est un sous-groupe fini de  $SL_N(\mathbb{Z})$ . Donc, d'après le lemme 2.1.9,  $\langle \gamma \rangle$  s'injecte dans  $SL_N(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ . Comme  $\gamma \in \Gamma(3)$ , on a  $\gamma = Id$ . De plus  $\Gamma(3)$  est d'indice fini dans  $\Gamma$ .

## 2.2 Hyperplans dans cette variété

Dans cette partie, on va étudier les hyperplans d'une variété hyperbolique arithmétique standard de groupe fondamental  $\Gamma$ .

**Lemme 2.2.1.** Soit  $H$  un hyperplan de  $\mathbb{H}^n$ ,  $H$  est un  $\Gamma$ -hyperplan si et seulement si la projection de  $H$  dans  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^n$  est compacte.

*Démonstration.* ( $\Rightarrow$ ) Supposons que  $H$  est un  $\Gamma$ -hyperplan de  $\mathbb{H}^n$ . On a le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{i} & \mathbb{H}^n \\ p \downarrow & \searrow p' \circ i & \downarrow p' \\ Stab_{\Gamma}(H) \backslash H & \xrightarrow{f} & \Gamma \backslash \mathbb{H}^n \end{array}$$

L'application  $p' \circ i$  passe bien au quotient par  $Stab_{\Gamma}(H)$ . Comme  $Stab_{\Gamma}(H) \backslash H$  est compact, la projection de  $H$  dans  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^n$  est alors compacte.

( $\Leftarrow$ ) Soit  $p : \mathbb{H}^n \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{H}^n$ , soit  $H$  un hyperplan de  $\mathbb{H}^n$ , tel que  $p(H)$  soit compact. Montrons qu'il existe un  $r \in \mathbb{N}$ , tel que l'immersion  $f : Stab_{\Gamma}(H) \backslash H \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{H}^n$  est à fibre de cardinal  $\leq r$ . Soit  $D$  un domaine fondamental compact pour l'action de  $\Gamma$  sur  $H$ . Il suffit de montrer que  $\forall x \in D, |Stab_{\Gamma}(H) \backslash \{\gamma \in \Gamma, \gamma x \in H\}| \leq r$ . D'après la démonstration du lemme 1.1.17, la famille  $\{\gamma.H, \gamma \in \Gamma\}$  est localement finie, donc il existe  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k \in \Gamma$  tels que  $\{\gamma.H, \gamma \in \Gamma \text{ et } \gamma.H \cap D \neq \emptyset\} = \{\gamma_1.H, \gamma_2.H, \dots, \gamma_k.H\}$ . Soient  $x \in D, \gamma \in \Gamma$  tel que  $\gamma x \in H$ , alors  $\gamma^{-1}H \cap D \neq \emptyset$ , donc  $\exists i$  tel que  $\gamma^{-1}H = \gamma_i H, \gamma \gamma_i \in Stab_{\Gamma}(H)$ , et donc  $\gamma \in Stab_{\Gamma}(H) \gamma_i^{-1}$ . Maintenant comme  $p(H)$  est compact, et comme  $f$  est à fibre finie, alors  $Stab_{\Gamma}(H) \backslash H$  est compact.  $\square$

**Théorème 2.2.2.** On a suffisamment de  $\Gamma$ -hyperplans pour satisfaire les hypothèses du théorème 1.0.4.

Pour montrer ce théorème, on a besoin de quelques résultats intermédiaire. La démonstration est donc en fin de chapitre.

**Lemme 2.2.3.** Il existe un  $\Gamma$ -hyperplan dans  $\mathbb{H}^n$ .

*Démonstration.* Soit  $v \in V$  tel que  $Q(v) > 0$ , alors  $V = U \oplus^{\perp} \langle v \rangle$ , avec  $U$  un sous-espace vectoriel de  $V$  sur  $F$  et  $\text{sign}(Q|_U) = (n-1, 1)$  et  $\forall i \neq 1, Q|_U^{\sigma_i}$  est définie positive. On pose  $G' = SO(Q|_U)$  et  $\Gamma' = SO(Q|_U) \cap M_n(\mathcal{O}_F)$ . On s'est alors replacé dans la situation de l'étude précédente, donc  $\Gamma'$  est discret, cocompact dans  $SO(Q|_U)(\mathbb{R})$  et sans torsion, puisqu'on a supposé  $\Gamma$  sans torsion. Soit  $f$  le changement de base  $f : SO(V)(\mathbb{R}) \rightarrow SO(n, 1)$ . L'image  $f(SO(Q|_U)(\mathbb{R}))$  est alors isomorphe à  $SO(n-1, 1)$ , donc c'est le groupe d'isométrie d'un hyperplan  $H$  de  $\mathbb{H}^n$ . Comme  $\Gamma'$  est cocompact dans  $SO(Q|_U)(\mathbb{R})$ ,  $H$  est bien un  $\Gamma$ -hyperplan.  $\square$

**Définition 2.2.4.** Soit  $G$  un groupe, et  $\Gamma$  un sous-groupe de  $G$ , alors le commensurateur de  $\Gamma$  dans  $G$  est défini par :  $Comm_G(\Gamma) = \{g \in G, g\Gamma g^{-1} \cap \Gamma \text{ est d'indice fini dans } \Gamma \text{ et dans } g\Gamma g^{-1}\}$ .



**Lemme 2.2.5.** Soient  $\Gamma$  le groupe fondamental d'une variété hyperbolique, et  $H$  un  $\Gamma$ -hyperplan de cette variété. Posons  $G = SO(n, 1)$ . Si  $g$  appartient à  $Comm_G(\Gamma)$ , alors  $gH$  est aussi un  $\Gamma$ -hyperplan.

*Démonstration.* Tout élément  $g$  de  $G$  induit une isométrie entre les variétés  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^n$  et  $g\Gamma g^{-1} \backslash \mathbb{H}^n$ . En effet, on a l'application suivante :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{H}^n &\longrightarrow \mathbb{H}^n \\ x &\longmapsto gx \end{aligned}$$

elle passe au quotient par  $\Gamma$  au départ et par  $g\Gamma g^{-1}$  à l'arrivée, car  $g\Gamma x = g\Gamma g^{-1}gx$ , et donne donc l'isométrie annoncée. Comme  $H$  est un  $\Gamma$ -hyperplan,  $gH$  est un  $g\Gamma g^{-1}$ -hyperplan. En effet, si  $Stab_{\Gamma}(H) \backslash H$  est compact, son image par l'application ci-dessus  $Stab_{g\Gamma g^{-1}}(gH) \backslash gH$  est aussi compacte. Par le Lemme 2.2.1, on sait que l'image de  $gH$  dans  $g\Gamma g^{-1} \backslash \mathbb{H}^n$  est compacte. Comme  $g \in Comm_G(\Gamma)$ , on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} g\Gamma g^{-1} \cap \Gamma \backslash \mathbb{H}^n & \xrightarrow{p_1} & g\Gamma g^{-1} \backslash \mathbb{H}^n \\ p_2 \downarrow & & \\ \Gamma \backslash \mathbb{H}^n & & \end{array}$$

avec  $p_1$  et  $p_2$  des revêtement finis. Alors la projection de  $gH$  dans  $g\Gamma g^{-1} \cap \Gamma \backslash \mathbb{H}^n$  est compacte, et donc la projection de  $gH$  dans  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^n$  aussi. D'après l'équivalence du lemme 2.2.1,  $gH$  est alors un  $\Gamma$ -hyperplan.  $\square$

**Proposition 2.2.6.** (Admise) Le groupe  $G(F)$  est dense dans  $G(F \otimes_{\sigma_1} \mathbb{R})$ .

**Proposition 2.2.7.** Si  $\Gamma$  appartient à  $G(\mathcal{O}_F)$ , alors  $G(F) \subset Comm_{SO(n,1)}(\Gamma)$ .

*Démonstration.* Raisonnons encore un fois avec les groupes  $R_{F/\mathbb{Q}}(G)(\mathbb{Q})$  et  $R_{F/\mathbb{Q}}(G)_{\mathbb{Z}}$ , qui sont isomorphes, via le même isomorphisme, à  $G(F)$  et  $\Gamma$ . Soit  $g \in R_{F/\mathbb{Q}}(G)(\mathbb{Q})$ , montrons que  $gR_{F/\mathbb{Q}}(G)_{\mathbb{Z}}g^{-1} \cap R_{F/\mathbb{Q}}(G)_{\mathbb{Z}}$  est d'indice fini dans  $gR_{F/\mathbb{Q}}(G)_{\mathbb{Z}}g^{-1}$ . Comme  $g \in R_{F/\mathbb{Q}}(G)(\mathbb{Q})$ , il existe un  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $g, g^{-1} \in Id + \frac{1}{m}M_{(n+1)d}(\mathbb{Z})$ . Soit  $\gamma \in R_{F/\mathbb{Q}}(G)_{\mathbb{Z}}$  tel que  $\gamma \equiv Id[m^2]$ . Alors il existe  $A, B, A' \in M_{(n+1)d}(\mathbb{Z})$  tels que,  $g = Id + \frac{1}{m}A$ ,  $g^{-1} = Id + \frac{1}{m}A'$ ,  $\gamma = Id + m^2B$ , alors :  $g\gamma g^{-1} = (Id + \frac{1}{m}A)(Id + m^2B)(Id + \frac{1}{m}A')$

$$\begin{aligned} g\gamma g^{-1} &= (Id + \frac{1}{m}A + m^2B + mA'B)(Id + \frac{1}{m}A') \\ &= (Id + \frac{1}{m}A)(Id + \frac{1}{m}A') + mBA' + ABA' \\ &= mBA' + ABA' \end{aligned}$$

Donc  $g\gamma g^{-1} \in M_{(n+1)d}(\mathbb{Z}) \cap R_{F/\mathbb{Q}}(G)(\mathbb{Q}) = R_{F/\mathbb{Q}}(G)_{\mathbb{Z}}$ . En fait, on a  $H = g\{\gamma \in R_{F/\mathbb{Q}}(G)_{\mathbb{Z}}, \gamma \equiv Id[m^2]\}g^{-1}$  est un sous-groupe de  $gR_{F/\mathbb{Q}}(G)_{\mathbb{Z}}g^{-1} \cap R_{F/\mathbb{Q}}(G)_{\mathbb{Z}}$ , d'après le calcul ci-dessus. De plus,  $H$  est d'indice fini dans  $gR_{F/\mathbb{Q}}(G)_{\mathbb{Z}}g^{-1}$ . Donc  $gR_{F/\mathbb{Q}}(G)_{\mathbb{Z}}g^{-1} \cap R_{F/\mathbb{Q}}(G)_{\mathbb{Z}}$  est d'indice fini dans  $gR_{F/\mathbb{Q}}(G)_{\mathbb{Z}}g^{-1}$ . On a aussi  $H < gR_{F/\mathbb{Q}}(G)_{\mathbb{Z}}g^{-1} \cap R_{F/\mathbb{Q}}(G)_{\mathbb{Z}}$  et  $H$  d'indice fini dans  $R_{F/\mathbb{Q}}(G)_{\mathbb{Z}}$ .  $\square$

*Démonstration.* du théorème 2.2.2. D'après les propositions 2.2.6 et 2.2.7,  $Comm_{SO(n,1)}G$  est dense dans  $G(F \otimes_{\sigma_1} \mathbb{R}) \simeq SO(n, 1)$ . De plus, d'après le lemme 2.2.5, l'image d'un  $\Gamma$ -hyperplan par un élément de  $Comm_{SO(n,1)}G$  est un  $\Gamma$ -hyperplan. Soient  $H$  un  $\Gamma$ -hyperplan de  $\mathbb{H}^n$ ,  $x, y$  deux points de  $\partial\mathbb{H}^n$ . Il existe un hyperplans  $H'$  de  $\mathbb{H}^n$  qui sépare  $x$  et  $y$ . Il existe un élément  $g$  de  $SO(n, 1)$ , qui envoie  $H$  sur  $H'$ . Comme  $Comm_{SO(n,1)}G$  est dense dans  $SO(n, 1)$ , alors il existe une suite d'éléments de  $Comm_{SO(n,1)}G$  qui tend vers  $g$ , et qui envoie  $H$  sur un  $\Gamma$ -hyperplan de plus en plus proche de  $H'$ . Si on choisit cet élément suffisamment proche de  $g$ , il sépare aussi  $x$  et  $y$ .  $\square$

## Chapitre 3

# Plongement du groupe dans un groupe de Coxeter à angles droits

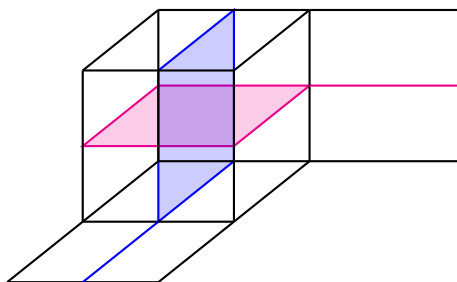
Pour tout sous-groupe  $\Gamma'$  de  $\Gamma$ , on peut construire un complexe cubique  $CAT(0)$ , le complexe de Davis, noté  $D(\Gamma')$ ; une application qui envoie  $\Gamma'$  dans un groupe de Coxeter à angle droit qui agit sur  $D(\Gamma')$  et une application  $\Gamma'$ -équivariante de  $C$  dans  $D(\Gamma')$ . On va montrer qu'il existe un sous-groupe  $\Gamma'$  d'indice fini dans  $\Gamma$ , tel que l'application de  $C$  dans  $D(\Gamma')$  est isométrie locale. Par un corollaire du théorème de Cartan-Hadamard, ([BH99] proposition II.4.14), comme  $C$  est  $CAT(0)$ , on aura alors un plongement isométrique de  $C$  dans  $D(\Gamma')$ , et l'application entre les groupes sera alors injective.

### 3.1 Étude des hyperplans du complexe cubique $CAT(0)$

On se replace dans le cas général d'un complexe cubique  $CAT(0)$   $C$ .

**Définition 3.1.1.** Dans un cube  $[0, 1]^k$ , un hyperplan est un cube de dimension  $k - 1$ , obtenu quand on fixe une des coordonnées à  $\frac{1}{2}$ .

**Définition 3.1.2.** Soit  $e = \{e_1, e_2\}$  une arête de  $C$ , l'hyperplan dual à  $e$  est l'ensemble des points équidistants de  $e_1$  et de  $e_2$  (pour la distance sur les complexes cubiques induite par le quotient dans la remarque 1.1.8).



**Proposition 3.1.3.** Soit  $H$  un hyperplan dual à une arête  $a$ .

- $H$  est un sous-espace convexe (en particulier connexe).
- Si  $Q$  est un cube de  $C$ , alors  $H \cap Q = \emptyset$  ou  $H \cap Q$  est un hyperplan du cube  $Q$ .
- $H$  sépare  $C$  en deux composantes connexes.
- Si  $H$  sépare les extrémités d'une arête  $b$ , alors  $H$  est l'hyperplan dual à  $b$ .

**Définition 3.1.4.** On appelle voisinage d'un hyperplan  $H$ , le sous-complexe cubique donné par l'ensemble des cubes qui intersectent  $H$ . On le note  $N(H)$ .

**Définition 3.1.5.** On dit que deux hyperplans  $H$  et  $H'$  sont tangents si  $H \cap H' = \emptyset$  et  $N(H) \cap N(H') \neq \emptyset$ .

**Remarque 3.1.6.** Dans le cas de la construction d'un complexe cubique  $CAT(0)$  à partir d'un espace à murs  $(X, \mathcal{M})$ , l'ensemble des murs  $\mathcal{M} \setminus \{\emptyset, X\}$  est en bijection avec l'ensemble des hyperplans de  $C$ .

Soit  $m = \{Y, {}^c Y\}$ , un mur de  $\mathcal{M} \setminus \{\emptyset, X\}$ . Il existe deux sommets de  $C^0$  qui ne diffèrent que du mur  $\{{}^c Y, Y\}$ , c'est une arête de  $C$ . On associe alors à  $m$  l'hyperplan  $H_m$  de  $C$  dual à cette arête. Pour voir que cette application est bien définie, il faut montrer que l'hyperplan donné ne dépend pas du choix de l'arête de  $C$ , autrement-dit, il faut montrer que toutes les arêtes associées au mur  $m$  sont duales au même hyperplan. Et, pour montrer qu'on a bien une bijection, il faut montrer que toutes les arêtes transverses à un même hyperplan sont bien données par le même mur de  $\mathcal{M} \setminus \{\emptyset, X\}$ . En fait, si deux arêtes  $a = (a_1, a_2)$  et  $b = (b_1, b_2)$  sont transverses au même hyperplan  $H$ , alors elles sont reliés par une succession de carrés. En effet, d'après la proposition 3.1.3,  $H$  sépare  $C$  en deux composantes connexes;  $H$  sépare alors les extrémités des arêtes  $a$  et  $b$ . Quitte à échanger  $a_1$  et  $a_2$ , il existe  $\gamma_1$ , un chemin de  $a_1$  à  $b_1$ , et  $\gamma_2$  un chemin de  $a_2$  à  $b_2$ . Comme  $C$  est  $CAT(0)$ , donc en particulier simplement connexe, le lacet  $a\gamma_1 b\gamma_2$  borde une union de carrés. Maintenant, un hyperplan dual à une arête dans un carré passe par l'arête opposée, et l'hyperplan s'étend au carré d'à coté à partir de cette seconde arête. Deux arêtes d'un même hyperplans sont alors bien associées au même mur de  $\mathcal{M} \setminus \{\emptyset, X\}$ . On sait que toute les arêtes duales à un même hyperplan sont données par le même mur de  $\mathcal{M} \setminus \{\emptyset, X\}$ ; montrons que toutes les arêtes associées à ce mur sont duales au même hyperplan. Supposons par l'absurde qu'il existe au moins deux hyperplans différents  $H$  et  $H'$  dont les arêtes duales sont associées au même mur  $m = \{Y, {}^c Y\}$ . D'après la proposition 3.1.3  $H$  sépare  $C$  en deux composantes connexes. Au moins une de ces deux composantes connexes contient une partie de  $H'$ . On l'appelle  $C_1$ , et quitte à échanger  $Y$  et  ${}^c Y$ , on peut supposer que les sommets au voisinage de l'hyperplan  $H$  dans  $C_1$  contiennent l'orientation  $Y$ . On appelle  $C_2$  l'autre composante connexe. On prends un sommet  $a$  de  $C_1$  qui contient  ${}^c Y$  (ça existe puisque  $C_1 \cap H' \neq \emptyset$ ), et  $b$  un sommet de  $C_2$ . On prends un chemin le plus court possible entre  $a$  et  $b$  dans  $C^1$ . Comme  $H$  sépare  $a \in C_1$  et  $b \in C_2$ , une des arêtes de ce chemin est transverse à  $H$ . Nommons  $b'$  le sommet de cette arête qui contient  ${}^c Y$ , c'est-à-dire, le sommet du coté de  $C_2$ . Alors un des chemins les plus courts entre  $b'$  et  $a$  est de longueur  $|a\Delta b'| + 2$ , or dans la démonstration du lemme 1.1.13, on prouve qu'on peut trouver un chemin de longueur  $|a\Delta b'|$  entre  $a$  et  $b'$ . En fait, ici on a démontré que dans  $C_1$ , il ne peut pas y avoir de sommet qui contient l'orientation  ${}^c Y$ . Par conséquent si on prends la partition à deux éléments de l'ensemble des sommets de  $C$  donnée par l'hyperplan  $H$ , c'est exactement le mur de  $C^0$  donné par  $f(H)$ , avec  $f$  la fonction de la remarque 1.1.15.

On se replace dans le cadre des variétés arithmétiques hyperboliques, avec l'espace à murs  $(X, \mathcal{M})$ , construit grâce au hyperplans, puis du complexe cubique  $C$  associé.

**Remarque 3.1.7.** Soit  $H$  un hyperplan de  $\mathbb{H}^n$ , on peut le voir comme un mur de  $X$ , alors  $Stab_\Gamma(H) = Stab_\Gamma f(H)$ , avec la fonction  $f$  utilisée dans la remarque précédente.

*Démonstration.* Soit  $\gamma \in Stab_\Gamma(H)$ . Si on note  $\{Y, {}^c Y\}$  les demi-espaces de  $X$  délimités par  $H$ . Alors  $\gamma$  agit trivialement sur cette paire. Si on considère une arête transverse à  $f(H)$ . Elle est envoyé par  $\gamma$  sur une arête encore associées à la paire  $\{Y, {}^c Y\}$ . Donc transverse à  $f(H)$ . Donc  $\gamma$  agit bien trivialement sur  $f(H)$ . Soit  $\gamma \in Stab_\Gamma f(H)$ , alors toutes les arêtes transverses à l'hyperplan  $f(H)$  sont envoyées sur des arêtes transverses à l'hyperplan  $f(H)$ . Or toute les arêtes du graphe dual de  $P$  déterminent entièrement un hyperplan de  $\mathbb{H}^n$ .  $\square$

**Lemme 3.1.8.** Soit  $H$  un hyperplan de  $C$ , si l'action de  $\Gamma$  est cocompacte sur  $C$ , alors  $Stab_\Gamma(H) \backslash^H$  est compact.

*Démonstration.* L'action de  $\Gamma$  sur le complexe cubique  $C$  est cocompacte. En particulier, il existe un nombre fini d'arêtes modulo l'action de  $\Gamma$ . Appelons les  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Soit  $a$  et  $b$  deux arête de  $C$  qui intersecte  $H$  et qui sont dans l'orbite d'un même  $a_i$  modulo  $\Gamma$ . Alors  $\exists \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$  tel que  $\gamma_1.a_i = a$  et  $\gamma_2.a_i = b$ . Donc  $\gamma_2^{-1}\gamma_1 a = b$ , et comme  $\gamma_2^{-1}\gamma_1$  envoie une arête duale à  $H$  sur une arête duale à  $H$ , alors  $\gamma_2^{-1}\gamma_1 \in Stab_\Gamma(H)$ .  $\square$

À partir de maintenant, tous les hyperplans considérés sont des hyperplans du complexe cubique  $C$ .

## 3.2 Construction du complexe de Davis et de l'application qui envoie $C$ dans ce complexe

**Construction du complexe de Davis :**

Soit  $\Gamma'$  un sous groupe d'indice fini de  $\Gamma$ . Soit  $Hyp(\Gamma') = \Gamma' \setminus H(C)$ , où  $H(C)$  est l'ensemble des hyperplans de  $C$ . On construit le groupe de Coxeter à angle droit suivant :

$$W(\Gamma') = \langle Hyp(\Gamma') / s^2, sts^{-1}t^{-1} \text{ si } \exists H \in s, H' \in t \text{ tels que } H \cap H' \neq \emptyset \rangle$$

On construit alors le complexe cubique  $D(\Gamma')$ , *complexe de Davis* de  $W$  : On part du graphe de Cayley  $\mathcal{G}(W)$ , associé à la présentation  $W$ , on remplit ensuite avec des carrés à chaque fois qu'on trouve quatre sommets  $a, b, c, d \in \mathcal{G}(W)$  tel que il existe  $s, t$  deux générateurs dans  $W(\Gamma')$  qui commutent, avec les relations suivantes  $sa = b, ta = d$  et  $tb = sd = c$ . C'est un complexe cubique  $CAT(0)$ . **Construction des applications :**

On choisit un point base  $v \in C^0$ , et on pose :

$$f_v^0 : C^0 \longrightarrow D(\Gamma')$$

telle que  $f_v^0$  envoie  $v$  sur 1, et pour tout point  $x$  de  $C^0$ , comme  $C^1$  est connexe, il existe un chemin dans  $C^1$  de  $v$  à  $x$ . Ce chemin traverse alors une succession d'arêtes  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , les hyperplans associés donnent une succession d'éléments de  $W : (s_1, s_2, \dots, s_n)$ . On pose alors  $f_v^0(x) = s_1 s_2 \dots s_n$ . Pour que l'application soit bien définie, il faut vérifier que l'image ne dépend pas du chemin choisi.

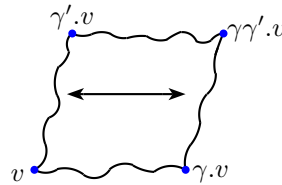
Dans un complexe cubique, les homotopies entre deux chemins du 1 – *squelette* d'un complexe cubique, sont données par une succession d'homotopie élémentaires combinatoires. Il y en a de trois sortes :

- Un aller-retour sur la même arête est homotope au point.
- Dans un carré les deux chemins sur le bords allant d'un sommet au sommet diagonalement opposé sont homotopes.
- Dans un carré le chemin qui emprunte juste une arête du carré est homotope à celui qui passe par les trois autre arêtes.

Ici, dans le premier cas, comme  $\forall H \in H(C), [H]^2 = 1$  dans  $W$ , l'application est bien définie modulo cette homotopie. Dans les deux autres cas, si il y a un carré dans  $C$ , les deux hyperplans  $H_a$  et  $H_b$  qui traversent ce carré se coupent alors dans ce carré; et donc dans  $W$ ,  $[H_a]$  et  $[H_b]$  commutent. L'application  $f_v^0$  s'étend en un application  $f_v$  sur le 1 – *squelette* de  $C$ . Il existe une application naturelle qui transporte l'action de groupe :

$$\begin{aligned} \phi_v : \Gamma &\longrightarrow D(\Gamma')^0 = W = Hyp(\Gamma') \\ \gamma &\longmapsto f_v^0(\gamma.v) \end{aligned}$$

Il reste à montrer que cette application est bien un morphisme de groupe, c'est-à-dire que  $\forall \gamma, \gamma' \in \Gamma', f_v^0(\gamma.\gamma'.v) = f_v^0(\gamma.v)f_v^0(\gamma'.v)$ . Un chemin de  $v$  à  $\gamma.v$  concaténé avec un chemin de  $\gamma.v$  à  $\gamma.\gamma'.v$  est un chemin de  $v$  à  $\gamma.\gamma'.v$ . Or un chemin de  $\gamma.v$  à  $\gamma.\gamma'.v$  passe par la même succession d'hyperplans, modulo l'action de  $\Gamma$  à gauche, qu'un chemin de  $v$  à  $\gamma'.v$ .



Donc l'application  $f_v^0$  est bien  $\Gamma'$ -equivariante *via* l'application  $\phi_v$ . Sous certaines hypothèses on va étendre  $f_v^0$  à  $C$  en une application combinatoire.

### 3.3 Cette application est isométrie locale pour un certain $\Gamma'$

**Notation** Soient  $G$  un groupe,  $H$  un sous-groupe de  $G$ . La notation  $H \triangleleft G$  indique que  $H$  est un sous-groupe d'indice fini. On peut montrer qu'il existe un  $\Gamma' \triangleleft \Gamma$  tel que l'application  $f_v^1$  s'étende en une application  $f_v$  sur  $C$  combinatoire et tel que  $f_v$  soit une isométrie locale.

**Définition 3.3.1.** Une application  $f$  entre deux complexes cubique  $X, Y$  est dite combinatoire si elle envoie un  $k$ -cube sur un  $k$ -cube.

**Définition 3.3.2.** Une application  $f$  entre graphes  $A$  et  $B$  est dite pleine, si  $\forall a_1, a_2$  tels que  $f(a_1)$  et  $f(a_2)$  soient reliés par une arête dans  $B$ , alors  $a$  et  $b$  sont reliés par une arête dans  $A$ .

**Proposition 3.3.3.** Une application combinatoire entre complexes cubique  $CAT(0)$  est une isométrie locale si l'application simpliciale induite sur le link de chaque sommet est injective et pleine.

**Remarque 3.3.4.** En fait, une application combinatoire entre complexes cubiques  $CAT(0)$  est une isométrie locale si et seulement si l'application induite sur le 1 – squelette des link est injective et pleine.

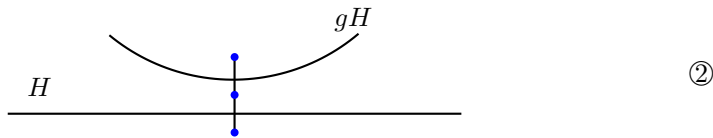
**Définition 3.3.5.** On dit qu'un hyperplan  $H \in H(C)$  s'auto-intersecte dans  $\Gamma' \setminus C$  si  $\exists g \in \Gamma'$  tel que  $gH \cap H \neq \emptyset$ .

Dans  $C$  on voit :



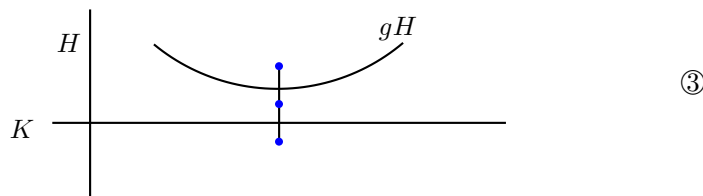
**Définition 3.3.6.** On dit qu'un hyperplan  $H \in H(C)$  est auto-tangent dans  $\Gamma' \setminus C$  si  $\exists g \in \Gamma'$  tel que  $H$  et  $gH$  sont tangents.

Dans  $C$  on voit :



**Définition 3.3.7.** On dit que deux hyperplans  $H$  et  $K \in H(C)$  sont inter-tangents si ils se coupent, puis sont tangents dans  $\Gamma' \setminus C$ .

Dans  $C$  on voit :



**Proposition 3.3.8.** Si dans  $H(C)$  il n'y a aucune des pathologies ci-dessus, alors l'application  $f_v^0$  s'étend en une application combinatoire, qui de plus est une isométrie locale.

*Démonstration.* En effet,  $f_v^0$  envoie des sommets sur des sommets et des arêtes sur des arêtes. Pour vérifier que l'application s'étend en une application combinatoire, il suffit de montrer qu'un carré est envoyé sur un carré. Si l'application n'écrase pas les carrés sur des arêtes, elle ne pourra pas écraser les cubes de  $C$  sur des cubes de  $D(\Gamma')$  plus petits. Soit  $a, b, c, d$  un carré dans  $C$ , il existe  $H, H'$  deux hyperplans de  $C$ , qui se coupent au centre de ce carré. Par l'absence de la pathologie ①,  $[H] \neq [H']$ . Supposons  $f_v^0(a) = a_1 a_2 \dots a_n$ , alors  $f_v^0(b) = a_1 a_2 \dots a_n [H]$  et  $f_v^0(c) = a_1 a_2 \dots a_n [H][H'] \neq f_v^0(a) = a_1 a_2 \dots a_n$ . Donc, si la situation ① n'est pas possible, alors l'image d'un carré par  $f_v^0$  ne s'écrase pas sur une arête. Le fait que l'application induite sur le *link* soit injective est une conséquence des deux premières conditions : Soient  $x$  un sommet de  $C$ ,  $a$  et  $b$ , deux éléments distincts appartenant au *link*( $x$ ). Soient  $H_a$  et  $H_b$  des hyperplans associés aux arêtes  $a$  et  $b$ . Il y a deux possibilités : Soit  $H_a$  et  $H_b$  se coupent en un carré, comme au dessus l'image de ce carré est un carré et  $f_v^0(a) \neq f_v^0(b)$ . Soit  $H_a$  et  $H_b$  ne se coupent pas, alors  $a$  et  $b$  appartenant au *link*( $v$ ), on a  $N(H_a) \cap N(H_b) \neq \emptyset$ . Les hyperplans  $H_a$  et  $H_b$  sont alors tangents, donc si il n'y a pas d'auto-tangence,  $[H_a] \neq [H_b]$ , par conséquent  $f_v^0(a) \neq f_v^0(b)$ .

Le fait que l'implication induite sur le *link* soit pleine découle de l'absence d'inter-tangence : soit  $x$  un sommet de  $C$ , on doit montrer que  $f_v^0(\text{link}(x))$  est un sous-complexe plein de  $\text{link}(f_v^0(x))$ .  $C^2$  est un complexe de dimension 2,  $\text{link}(x)$  est un complexe de dimension 1. Soient  $s$  et  $t$  deux arêtes de  $\text{link}(x)$ , appelons  $H_s, H_t$  les hyperplans de  $C$  associés. Il suffit de montrer que, si  $f(s)$  et  $f(t)$  sont reliés dans  $\text{link}(f_v^0(x))$  alors  $s$  et  $t$  sont reliés dans  $\text{link}(x)$ . Or la condition  $f(s), f(t)$  sont reliés dans  $\text{link}(f_v^0(x))$  se traduit par  $H_s, H_t$  se coupent dans  $\text{Hyp}(\Gamma')$ . Autour de  $x$ , soit  $H_s$  et  $H_t$  s'intersectent dans un carré, et on a ce que l'on veut, soit ils ne s'intersectent pas dans un carré, mais alors  $H_s$  et  $H_t$  sont tangents, donc comme  $[H_s]$  et  $[H_t]$  se coupent dans  $\text{Hyp}(\Gamma')$  ça implique que  $H_s$  et  $H_t$  s'inter-osculent, ce qu'on a supposé impossible.  $\square$

En fait, les conditions ①, ② et ③ sont données par des conditions de séparabilité de certains sous-ensembles de  $\Gamma$ .

**Définition 3.3.9.** *Un sous-groupe  $H$  d'un groupe  $G$  est séparable si  $\forall g \in G \setminus H$ , il existe  $H' \dot{<} G$  tel que  $H < H'$  et  $g \notin H'$ .*

**Lemme 3.3.10.** *Si  $H \dot{<} G$ , alors il existe  $H' \dot{<} G$  avec  $H' < H$ .*

*Démonstration.* On pose  $H' = \bigcap_{x \in H \setminus G} x^{-1} H x$ . Alors  $H$  contient  $H'$  et  $H'$  est d'indice fini comme intersection finie de sous-groupe d'indice fini de  $G$ .  $\square$

**Proposition 3.3.11.** *Si pour tout hyperplan  $H$  de  $C$ ,  $\text{Stab}_\Gamma(H)$  est séparable dans  $\Gamma$ , alors on peut trouver un  $\Gamma' \dot{<} \Gamma$  tel qu'il n'y ait ni auto-intersection, ni auto-tangence dans  $\Gamma' \setminus C$ .*

*Démonstration.* soient  $H$  un hyperplan de  $C$  et  $\Gamma' < \Gamma$ , on note :

$$I(H, \Gamma') = \{\gamma \in \Gamma' : \gamma N(H) \cap N(H) \neq \emptyset\}.$$

Montrons que  $\exists \Gamma(H) \dot{<} \Gamma$  tel que l'ensemble  $I(H, \Gamma(H)) = \text{Stab}_\Gamma(H)$ . L'espace  $\text{Stab}_\Gamma(H) \setminus^H$  est compact, donc  $\text{Stab}_\Gamma(H) \setminus^{N(H)}$  est compact comme  $\frac{1}{2}$  voisinage fermé d'un compact. Il y a donc un nombre fini de sommets dans  $\text{Stab}_\Gamma(H) \setminus^{N(H)}$ , appelons  $e_1, e_2 \dots e_n$  des représentants de ces sommets dans  $C$ , on a alors :

$$\gamma \in I(H, \Gamma) \Leftrightarrow \exists i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ tel que } \gamma \cdot \text{Stab}_\Gamma(H) e_i \cap \text{Stab}_\Gamma(H) e_j \neq \emptyset.$$

On considère le compact donné par l'union des sommets  $e_1, e_2 \dots e_n$ , par propriété il y a un nombre fini d'éléments  $\text{Stab}_\Gamma(H) \gamma \text{Stab}_\Gamma(H)$ , tels que  $\text{Stab}_\Gamma(H) \cdot \gamma \cdot \text{Stab}_\Gamma(H) e_i \cap e_j \neq \emptyset$ . Donc  $\exists a_1, a_2, \dots a_k$  tels que  $I(H, \Gamma) = \bigcup_{i=1}^n \text{Stab}_\Gamma(H) a_i \text{Stab}_\Gamma(H)$ , avec  $a_1 = 1$ . Le groupe  $\text{Stab}_\Gamma(H)$  étant séparable dans  $\Gamma$ , on peut trouver  $\Gamma(H) \dot{<} \Gamma$  qui contient  $\text{Stab}_\Gamma(H)$  et qui ne contient aucun des  $a_i$ . On a alors :

$$\begin{aligned} I(H, \Gamma(H)) &= \left( \bigcup_{i=1}^n \text{Stab}_\Gamma(H) a_i \text{Stab}_\Gamma(H) \right) \cap \Gamma(H) \\ I(H, \Gamma(H)) &= \bigcup_{i=1}^n (\text{Stab}_\Gamma(H) a_i \text{Stab}_\Gamma(H) \cap \Gamma(H)) \\ I(H, \Gamma(H)) &= \text{Stab}_\Gamma(H) \cap \Gamma(H) \end{aligned}$$

Et donc, on a bien  $I(H, \Gamma(H)) = \text{Stab}_\Gamma(H)$ .

Maintenant, il n'y a qu'un nombre fini d'hyperplans  $H_1, H_2, \dots, H_n$  qui forment les hyperplans de  $C$ , modulo l'action de  $\Gamma$ . On pose  $\Gamma' = \bigcap_{i=1}^n \Gamma(H_i)$ . C'est un sous-groupe d'indice fini car c'est une intersection de sous-groupes d'indice fini. D'après la remarque 3.3.10, quitte à prendre un sous-groupe plus petit, on peut supposer qu'il est normal dans  $\Gamma$ . Soit  $\gamma \in \Gamma'$ .

$$\gamma N(gH_i) \cap N(gH_i) \neq \emptyset \Rightarrow \gamma g N(H_i) \cap g N(H_i) \neq \emptyset \Rightarrow g^{-1} \gamma g N(H_i) \cap N(H_i) \neq \emptyset$$

Alors  $g^{-1} \gamma g \in \Gamma'$  et fait s'intersecter un voisinage de  $H_i$ , donc  $g^{-1} \gamma g \in \text{Stab}_\Gamma(H_i)$ . Donc,  $\gamma \in \text{Stab}_\Gamma(gH_i)$ .  $\square$

Il existe aussi une condition de séparabilité d'un sous-espace de  $\Gamma$  qui empêche que des hyperplans de s'inter-osculer :

**Définition 3.3.12.** *Un sous-espace  $X$  d'un groupe  $G$  est séparable si  $X$  est fermé pour la topologie profinie, c'est-à-dire, la topologie dont une base d'ouverts est :  $\{gG' \text{ tels que } g \in G, G' \dot{<} G\}$ .*

**Remarque 3.3.13.** *Si  $X$  est fermé dans  $G$ , son complémentaire est ouvert, ce qui s'écrit :  $\forall a \notin X, \exists G' \dot{<} G$  tels que  $aG' \cap X = \emptyset$ .*

**Remarque 3.3.14.** *Cette définition généralise la définition 3.3.9, avec comme ensemble un sous-groupe d'un groupe  $G$ .*

**Notation** Soient  $H$  et  $K$  deux hyperplans de  $C$  qui s'intersectent. On pose  $\text{Inter}_\Gamma(H, K) = \{\gamma \in \Gamma, \gamma K \cap H \neq \emptyset\}$ .

**Proposition 3.3.15.** *Si pour toute paire d'hyperplan  $H, K$  de  $C$  qui s'intersectent, l'ensemble  $\text{Inter}_\Gamma(H, K)$  est séparable dans  $\Gamma$ , alors on peut trouver un  $\Gamma' \dot{<} \Gamma$  tel qu'il n'y ait jamais d'inter-tangence.*

*Démonstration.* Soient  $H, K$  des hyperplans de  $C$  qui s'intersectent et  $\Gamma' < \Gamma$ , on note :

$$\text{Tan}(H, K, \Gamma') = \{\gamma \in \Gamma' : \gamma K \text{ et } H \text{ sont tangents}\}.$$

Montrons que  $\exists \Gamma(H, K) \dot{<} \Gamma$  tel que l'ensemble  $\text{Tan}(H, K, \Gamma(H, K)) = \emptyset$ . Comme au dessus,  $\text{Stab}_\Gamma(H) \setminus N(H)$  et  $\text{Stab}_\Gamma(K) \setminus N(K)$  sont compact. Il y a donc un nombre fini de sommets dans ces deux complexes. Or un élément de  $\text{Tan}(H, K, \Gamma)$  envoie un sommet de  $N(K)$  sur un sommet de  $N(H)$ . Par propriété,  $\exists a_1, \dots, a_n \in \Gamma$  tels que :  $\text{Tan}(H, K, \Gamma) = \bigcup_{i=1}^n \text{Stab}_\Gamma(H) a_i \text{Stab}_\Gamma(K)$ . On peut constater que  $\text{Tan}(H, K, \Gamma) \subset \Gamma \setminus \text{Inter}_\Gamma(H, K)$ .

Soit  $a_i$ , un des éléments ci-dessus ;  $\exists G_i \dot{<} \Gamma$  tel que  $a_i G_i \cap \text{Inter}_\Gamma(H, K) \neq \emptyset$ . Alors  $a_i \notin \text{Inter}_\Gamma(H, K) G_i$ , et comme  $1 \in \text{Inter}_\Gamma(H, K)$ , alors  $a_i \notin G_i$ . On prend alors  $\Gamma(H, K) = \bigcap_{i=1}^n G_i$ . Alors  $\text{Tan}(H, K, \Gamma(H, K)) =$

$\text{Tan}(H, K, \Gamma) \cap \Gamma(H, K) = \emptyset$  et  $\Gamma(H, K)$  est d'indice fini dans  $\Gamma$ , comme intersection finie de sous-groupes de

$\Gamma$  d'indices finis. On veut montrer maintenant qu'il existe un  $\Gamma' \dot{<} \Gamma$  tels que pour toute paire d'hyperplans  $H, K$  de  $C$ , qui s'intersectent,  $\text{Tan}(H, K, \Gamma') = \emptyset$ . Comme  $\Gamma \setminus C$  est compact, il y a un nombre fini de carrés dans ce complexe cubique. Donc il y a un nombre fini de carré, modulo l'action de  $\Gamma$ . Or deux hyperplans qui s'intersectent, se coupent en particulier dans un carré. Donc modulo l'action de  $\Gamma$ , il y a un nombre fini de paires d'hyperplans qui se coupent. Appelons  $H_1, K_1, \dots, H_p, K_p$  ces paires d'hyperplans. Soit  $\Gamma_i \dot{<} \Gamma$ , avec

$\Gamma_i = \Gamma(H_i, K_i)$  défini comme ci-dessus, c'est-à-dire, tel que l'hyperplan  $H_i$  et  $K_i$  ne sont pas inter-tangent dans

le quotient. On pose alors :  $\Gamma' = \bigcap_{i=1}^n \Gamma_i$  et toujours d'après le lemme 3.3.10, quitte à prendre un sous-groupe, on

peut supposer que le sous-groupe  $\Gamma'$  est normal dans  $\Gamma$ . Alors,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\text{Tan}(H_i, K_i, \Gamma') = \emptyset$ . Soient  $H$  et  $K$  deux hyperplans de  $C$  qui sont sécants ; supposons qu'il existe un  $\gamma \in \Gamma'$  tel que  $\gamma \in \text{Tan}(H, K, \Gamma')$ . Il existe  $g \in \Gamma$ ,  $i \in \{1, \dots, p\}$ , tel que  $(H, K) = (gH_i, gK_i)$ . Alors  $gH_i$  et  $\gamma gK_i$  sont tangents, en fait on a aussi  $H_i$  et  $g^{-1} \gamma g K_i$  s'intersectent et sont tangents. Alors  $g^{-1} \gamma g \in \text{Tan}(H_i, K_i, \Gamma')$ , ce qui n'est pas possible car  $\text{Tan}(H_i, K_i, \Gamma') = \emptyset$ .  $\square$

Ainsi quitte à prendre un sous-groupe d'indice fini de  $\Gamma$ , l'application décrite dans la section 3.2 une isométrie locale de  $C^2$  vers un complexe de Davis. Comme  $D(\Gamma)$  est  $CAT(0)$ , d'après le théorème de Cartan-Hadamard (Proposition II.4.14 dans [BH99]), cette application entre  $C$  et  $D(\Gamma')$  est alors un plongement isométrique, et l'application induite entre les groupes  $\Gamma'$  et  $W$  est elle aussi un plongement. Sous les hypothèses de séparabilité prouvé dans la section suivante, on obtient bien, virtuellement, un plongement de  $\Gamma$  dans un groupe de Coxeter à angles droits. Maintenant, montrons que ces conditions de séparabilité sont bien satisfaites.

### 3.4 Les sous-ensembles $Stab_\Gamma(H)$ et $Inter_\Gamma(H, K)$ sont séparables dans $\Gamma$

Soient  $H, K \in H(C)$ , montrons que  $Inter_\Gamma(H, K)$  est séparable dans  $\Gamma$ .

**Lemme 3.4.1.** (Admis) Soit  $A$  un sous anneau de  $\mathbb{C}$ , finiment engendré sur  $\mathbb{Z}$ . Soient  $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ . Alors il existe un corps fini  $F$  et un morphisme d'anneau  $\eta : A \rightarrow F$ , tel que  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\eta(a_i) \neq 0$ .

**Proposition 3.4.2.** Soient  $K$  un corps,  $\Gamma < GL_{n+1}(K)$  un groupe de type fini, et  $V \subset M_n(K)$  un ensemble algébrique :  $V = \{A \in GL_{n+1}(K), P_\lambda(a_{i,j}) = 0, \forall \lambda \in \Lambda\}$ , où  $(P_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  est une famille de polynôme en  $(n+1)^2$  variables, à coefficient dans  $K$ . Alors  $V \cap \Gamma$  est fermé pour la topologie profinie sur  $\Gamma$ .

*Démonstration.* Soit  $\gamma \notin V \cap \Gamma$ , montrons qu'il existe  $H$ , un sous-groupe d'indice fini dans  $\Gamma$  tel que  $\gamma.H \cap V = \emptyset$ . Comme  $\gamma \notin V$ ,  $\exists \lambda \in \Lambda$ ,  $P_\lambda(\gamma) \neq 0$ . Comme  $\Gamma$  est de type fini, il est engendré par un nombre fini d'éléments de  $GL_{n+1}(K)$ . On considère l'anneau  $A$ , l'anneau finiment engendré sur  $\mathbb{Z}$  par les coefficients de ces matrices, et par les coefficients du polynôme  $P_\lambda$ . D'après le lemme 3.4.1, il existe un corps fini  $F$  et un morphisme d'anneau  $\eta : A \rightarrow F$  tel que  $\eta(P_\lambda(\gamma)) \neq 0$ . L'application  $\eta$  induit alors un morphisme d'anneau  $\eta' : GL_{n+1}(A) \rightarrow GL_{n+1}(F)$ , puis en se restreignant à  $\Gamma$ , on obtient un morphisme d'anneau  $\phi : \Gamma \rightarrow GL_{n+1}(F)$ , et  $GL_{n+1}(F)$  est un groupe fini. On pose  $H = \ker(\phi)$ , c'est un sous-groupe distingué d'indice fini dans  $\Gamma$ . Soit  $x \in \gamma.H$ ,  $x = \gamma.h$ . On note  $\bar{P}_\lambda$ , le polynôme  $P_\lambda$  où on a appliqué  $\eta$  sur chacun des coefficients. Alors  $\phi(P_\lambda(\gamma.h)) = \bar{P}_\lambda(\phi(\gamma.h)) = \bar{P}_\lambda(\phi(\gamma)) \neq 0$ , donc  $P_\lambda(x) \neq 0$ , alors par définition de  $V$ ,  $x \notin V$ , et donc  $\gamma.H \cap V = \emptyset$ .  $\square$

**Proposition 3.4.3.** Il existe un ensemble algébrique sur  $Q$   $V_0$ , tel que,  $Inter_\Gamma(H, K) = V_0 \cap \Gamma$ .

*Démonstration.* Soient  $A$  et  $B$  deux hyperplans du complexe cubique  $C$ . Soient  $\{Y_A, {}^c Y_A\}$  et  $\{Y_B, {}^c Y_B\}$  les murs associée dans  $C$ . Pour ces hyperplans la condition de s'intersecter se traduit par l'indépendance dont on parle dans la preuve de 1.2.7. C'est-à-dire, il existe au moins quatre sommets qui contiennent chacun une des combinaisons suivantes :  $\{Y_A, Y_B\}$ ,  $\{Y_A, {}^c Y_B\}$ ,  $\{{}^c Y_A, Y_B\}$  et  $\{{}^c Y_A, {}^c Y_B\}$ , ce qui se traduit par le fait que les hyperplans de  $\mathbb{H}^n$  sont sécants. Maintenant, si on note  $s_H$  la symétrie par rapport à l'hyperplan  $H$  dans  $\mathbb{H}^n$ ,  $g \in Inter_\Gamma(H, K) \Leftrightarrow g \in \Gamma$  et  $s_H s_g K$  est une rotation dans  $\mathbb{H}^n$ . Étudions les angles possibles pour ces rotations. Par définition, il y a un nombre fini d'hyperplans dans  $\mathcal{H}$  modulo  $\Gamma$ . Deux hyperplans ne s'intersectent qu'un nombre fini de fois dans  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^n$ . Il y a donc un nombre fini d'angles possibles,  $\theta_1, \dots, \theta_k$ , pour les rotations engendrées par les symétries correspondantes à des hyperplans de  $\mathcal{H}$ . On pose alors l'application :

$$\begin{aligned} \phi : GL_{n+1}(\mathbb{R}) &\longrightarrow GL_{n+1}(\mathbb{R}) \\ g &\longmapsto s_H g s_K g^{-1} \end{aligned}$$

Soit  $V = \{h \in SO(n, 1), \text{ tel que } h \text{ est une rotation d'angle } \theta_i, i \in \{1, 2, \dots, k\}\}$ , alors on pose  $V_0 = \phi^{-1}(V)$  et  $V_0 \cap \Gamma = Inter_\Gamma(H, K)$ . Supposons que  $V$  soit un ensemble algébrique, c'est-à-dire, qu'il existe un ensemble de polynômes  $(P_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ , tel que,  $V = \{x \in M_{n+1}(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \Lambda, P_\lambda(x) = 0\}$ , alors  $\forall \lambda \in \Lambda$ ,  $\phi \circ P_\lambda$  est aussi un polynôme, et  $\phi^{-1}(V) = \{x \in M_{n+1}(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \Lambda, \phi \circ P_\lambda(x) = 0\}$ , c'est alors un ensemble algébrique. Il reste à montrer que  $V$  est algébrique sur  $\mathbb{Q}$ . Appartenir à  $SO(n, 1)$  est équivalent à annuler un certain polynôme, et si  $x$  est une rotation d'angle  $\theta_p$ , est équivalent à dire que  $sp(x) = (1, 1, \dots, 1, e^{i\theta_p}, e^{i\theta_p})$ . Donc,  $V$  est une union fini d'ensemble algébriques, donc c'est un ensemble algébrique.  $\square$

**Proposition 3.4.4.** Pour tout couple d'hyperplan  $(H, K)$ , l'ensemble  $Inter_\Gamma(H, K)$  est séparable dans  $\Gamma$ .

*Démonstration.* Ça découle directement des deux propositions précédentes.  $\square$



Pour vérifier que  $\forall H \in H(C)$ ,  $Stab_{\Gamma}(H)$  est séparable dans  $\Gamma$ , il suffit de vérifier que pour n'importe quel  $\Gamma$ -hyperplan de  $\mathbb{H}^n$ ,  $Stab_{\Gamma}(H)$  est séparable dans  $\Gamma$ . En fait c'est vrai pour n'importe quel hyperplan de  $\mathbb{H}^n$ .

**Proposition 3.4.5.** *Soit  $H$  un hyperplan de  $\mathbb{H}^n$ , alors  $Stab_{\Gamma}(H)$  est séparable dans  $\Gamma$ .*

*Démonstration.* Soit  $\tau$ , la réflexion par rapport à l'hyperplan  $H$ , soit  $\Gamma' = \langle \Gamma, \tau \rangle$ , c'est un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{R})$  finiment engendré. On pose,  $\Lambda = \{g \in \Gamma', g\tau = \tau g\}$ . Alors  $\Lambda \cap \Gamma = Stab_{\Gamma}(H)$ . En effet, si  $g \notin Stab_{\Gamma}(H)$ ,  $\exists h \in H$  tel que  $g.h \notin H$ , alors  $g.\tau.h = g.h$ , or  $\tau.g.h \neq g.h$  car  $g.h \notin H$ , alors  $g \notin \Lambda \cap \Gamma$ , et  $\Lambda \cap \Gamma \subset Stab_{\Gamma}(H)$ . Supposons  $g \in Stab_{\Gamma}(H)$ , alors  $g\tau g^{-1}$  est la réflexion par rapport à l'hyperplan  $g.H = H$ , donc  $g \in \Lambda \cap \Gamma$ . Maintenant, montrer que  $Stab_{\Gamma}(H)$  est séparable dans  $\Gamma$  est alors équivalent à montrer que  $\Lambda$  est séparable dans  $\Gamma'$ . Soit  $g \notin \Lambda$ , alors  $[g, \tau] \neq 1$ . Comme  $\Gamma'$  est un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{R})$  finiment engendré, d'après le théorème de Malcev, il est résiduellement fini. Soit alors,  $N \triangleleft \Gamma'$  tel que  $[g, \tau] \notin N$ . On considère alors le groupe  $N.\Lambda$ , c'est un sous-groupe de  $\Gamma'$  d'indice fini, et il ne contient pas  $g$ . En effet, supposons  $g \in N.\Lambda$ ,  $g = n\lambda$ , alors  $[g, \tau] = n\lambda\tau\lambda^{-1}n^{-1}\tau = n\tau n^{-1}\tau$  car  $\lambda \in \Lambda$ . Donc  $[g, \tau] \in N$ , ce qui n'est pas possible.  $\square$

# Bibliographie

- [BH99] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [BHW11] Nicolas Bergeron, Frédéric Haglund, and Daniel T. Wise. Hyperplane sections in arithmetic hyperbolic manifolds. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 83(2) :431–448, 2011.
- [BW10] Nicolas Bergeron and Daniel T. Wise. A boundary criterion for cubulation. 2010.
- [CN05] Indira Chatterji and Graham Niblo. From wall spaces to CAT(0) cube complexes. *Internat. J. Algebra Comput.*, 15(5-6) :875–885, 2005.
- [Nic04] Bogdan Nica. Cubulating spaces with walls. *Algebr. Geom. Topol.*, 4 :297–309 (electronic), 2004.