

ANALYSE POUR LE CAPES

Cours à l'Université de Rennes 1 (2003–2004)

Antoine Chambert-Loir

Antoine Chambert-Loir

IRMAR, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex.

E-mail: antoine.chambert-loir@univ-rennes1.fr

Url: <http://name.math.univ-rennes1.fr/antoine.chambert-loir>

TABLE DES MATIÈRES

1. Intégrale de Riemann	5
1. Fonctions en escalier	5
2. Fonctions intégrables	9
3. Sommes de Riemann	16
4. Lien entre le calcul différentiel et le calcul intégral	18
5. Applications	20
6. Intégrales généralisées (ou impropres)	21
Rappels	25
Exercices	28
Index	33

CHAPITRE 1

INTÉGRALE DE RIEMANN

Dans ce chapitre, on définit l'intégrale de fonctions convenables, que nous appellerons *intégrables*, définies sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ de \mathbf{R} . La théorie que nous allons développer est celle de *l'intégrale de Riemann*, mais il y a bien d'autres théories possibles telles celles de Lebesgue, de Stieltjes, ou encore de Kurzweil–Henstock...

L'intégrale, une fois définie, aura plusieurs propriétés fondamentales :

a) appliquée à une fonction f , disons continue, elle permet de montrer qu'il existe une fonction dérivable F telle que $F' = f$, autrement dit de montrer que *toute fonction continue admet une primitive*;

b) l'intégrale est *linéaire*, c'est-à-dire que pour deux fonctions intégrables f et g , l'intégrale de leur somme $f + g$ est la somme de l'intégrale de f et de celle de g ; de même, si λ ⁽¹⁾ est un réel et f une fonction intégrable, l'intégrale de λf est λ fois l'intégrale de f ;

c) elle permet de calculer des *aires*, notamment l'aire située « entre » le graphe d'une fonction et l'axe Ox . Cependant, elle ne permet pas de *définir* l'aire d'une partie quelconque du plan. La définition axiomatique de ce qu'est une aire, un volume, etc. est au cœur de l'intégrale de Lebesgue.

En fait, la morale derrière la définition de l'intégrale de Riemann est que l'on peut effectivement définir l'aire de parties raisonnables du plan, et que cette aire vérifie la propriété (fondamentale, même si elle est intuitivement évidente) que si deux parties A et B du plan vérifient $A \subset B$, l'aire de B doit être *plus grande* que celle de A . L'idée va alors consister à approcher l'aire sous une courbe par celle d'une réunion de rectangles.

1. Fonctions en escalier

Fixons un intervalle fermé borné $I = [a, b]$.

⁽¹⁾Prononcer *lambda*

A. Subdivisions

1.1. *Définitions.* — Une *subdivision* de I est la donnée de points c_0, \dots, c_n avec $a = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b$. Une telle subdivision « découpe » l'intervalle I en n sous-intervalles (pas forcément de même longueur) qui ne se chevauchent pas. On note en général σ ⁽²⁾ une telle subdivision. Son *pas*, noté $p(\sigma)$ est le maximum des longueurs des sous-intervalles qui composent σ , c'est-à-dire,

$$p(\sigma) = \max(c_1 - c_0, c_2 - c_1, \dots, c_n - c_{n-1}).$$

C'est un réel strictement positif.

1.2. *Subdivision régulière.* — La *subdivision régulière* en n intervalles ($n \geq 1$) de l'intervalle $[a, b]$ est celle dont les sous-intervalles ont tous même longueur $(b - a) / n$. Elle est donc définie par

$$c_0 = a, \quad c_1 = a + \frac{b-a}{n}, \quad \dots, \quad c_k = a + k \frac{b-a}{n}, \quad \dots, \quad c_n = b.$$

Son pas est $(b - a) / n$.

1.3. *Raffinements.* — On dira qu'une subdivision $\sigma' = \{c'_0, \dots, c'_m\}$ de l'intervalle $I = [a, b]$ *raffine* une subdivision $\sigma = \{c_0, \dots, c_n\}$ si chaque intervalle $[c'_{j-1}, c'_j]$ (pour $1 \leq j \leq m$) est contenu dans un des intervalles $[c_{k-1}, c_k]$ (pour un certain k tel que $1 \leq k \leq n$). Intuitivement, cela revient à dire que l'on obtient σ' à partir de σ en subdivisant un peu plus chacun des sous-intervalles que définit σ .

Si σ et σ' sont deux subdivisions de $I = [a, b]$, il existe une subdivision σ'' qui raffine à la fois σ et σ' . On définit une telle subdivision en considérant par exemple toutes les extrémités de tous les sous-intervalles de σ et σ' et en les ordonnant.

B. Fonctions en escalier

1.4. *Définitions.* — On dit qu'une fonction $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = \{c_0, \dots, c_n\}$ de $[a, b]$ telle que f soit constante sur chacun des sous-intervalles ouverts $]c_{k-1}, c_k[$ que définit σ . Une telle subdivision est dite *adaptée* à f . Alors, toute subdivision σ' qui raffine σ est encore adaptée à f . On dira aussi que f est adaptée à σ , ou que f et σ sont adaptées.

Nous noterons \mathcal{E} l'ensemble des fonctions en escalier $I \rightarrow \mathbf{R}$. Si σ est une subdivision de $I = [a, b]$, nous noterons $\mathcal{E}(\sigma)$ l'ensemble des fonctions en escalier $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ adaptées à la subdivision σ .

PROPOSITION 1.5. — Si f et g sont deux fonctions en escalier $I \rightarrow \mathbf{R}$, la fonction $f + g$ qui associe à $x \in I$ la somme $f(x) + g(x)$ est encore une fonction en escalier. Il en est de même de leur produit fg , qui associe à $x \in I$ le produit $f(x)g(x)$.

Si f est une fonction en escalier et λ un réel, la fonction λf qui, à $x \in I$, associe $\lambda f(x)$ est une fonction en escalier. Si f ne s'annule pas, la fonction $1/f$ définie par $x \mapsto 1/f(x)$ est une fonction en escalier.

⁽²⁾ Prononcer *sigma*.

Plus précisément, si f et g sont adaptées à une subdivision σ , $f + g$, fg et λf le sont aussi, de même que $1/f$ si f ne s'annule pas.

EXERCICE 1.6. — Démontrer cette proposition en suivant les indications suivantes :

- démontrer que si f et g sont toutes deux adaptées à une subdivision σ , $f + g$, fg et λf le sont aussi, ainsi que $1/f$ si f ne s'annule pas ;
- démontrer que pour deux fonctions en escalier quelconques, il existe une subdivision σ qui est adaptée à toutes deux.

COROLLAIRE 1.7. — Les ensembles $\mathcal{E}(\sigma)$ et \mathcal{E} sont naturellement des espaces vectoriels sur \mathbf{R} .

EXERCICE 1.8. — Calculer la dimension de $\mathcal{E}(\sigma)$.

REMARQUE. — On définit de la même façon les fonctions en escalier à valeurs dans le corps \mathbf{C} des nombres complexes, ou à valeurs dans un espace vectoriel tel que \mathbf{R}^n .

PROPOSITION 1.9. — Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction et soit $c \in [a, b]$. Si les restrictions de f aux intervalles $[a, c]$ et $[c, b]$ sont en escalier, alors f est une fonction en escalier.

Démonstration. — Par définition, cela signifie qu'il existe une subdivision $\sigma = \{c_0, \dots, c_n\}$ de $[a, c]$ et une subdivision $\sigma' = \{c'_0, \dots, c'_m\}$ de $[c, b]$ telle que f soit constante sur chacun des sous-intervalles ouverts $]c_{j-1}, c_j[$ (pour $1 \leq j \leq n$) et $]c'_{k-1}, c'_k[$ (pour $1 \leq k \leq m$). Définissons alors une subdivision $\tau = \{d_0, \dots, d_{n+m}\}$ de $[a, b]$ en posant $d_j = c_j$ pour $0 \leq j \leq n$ et $d_j = c'_{j-n}$ pour $n \leq j \leq n+m$. (Remarquer que $d_n = c_n = b = c'_0$.) Les sous-intervalles de τ sont ceux de σ et de σ' . Par suite, f est constante sur chacun des sous-intervalles ouverts définis par la subdivision τ , donc est une fonction en escalier. \square

C. Fonctions par morceaux

DÉFINITION 1.10. — On dit qu'une fonction $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ est continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = \{c_0, \dots, c_n\}$ de l'intervalle $[a, b]$ telle que l'on ait les propriétés suivantes :

- la restriction de f à tout sous-intervalle ouvert $]c_{j-1}, c_j[$ est continue ($1 \leq j \leq n$) ;
- pour tout j tel que $0 \leq j \leq n-1$, f a une limite à droite en c_j ;
- pour tout j tel que $1 \leq j \leq n$, f a une limite à gauche en c_j .

Une telle subdivision σ sera dite adaptée à f .

Une fonction en escalier est continue par morceaux ; c'est une fonction « constante par morceaux ».

D. Intégrale d'une fonction en escalier

1.11. *Définitions.* — Soit $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction en escalier et soit $\sigma = \{c_0, \dots, c_n\}$ une subdivision adaptée à f . On définit

$$I(\sigma, f) = \sum_{k=1}^n (c_k - c_{k-1}) f\left(\frac{c_k + c_{k-1}}{2}\right).$$

Comme f est supposée constante sur chaque sous-intervalle ouvert, on notera que l'endroit où on la calcule dans cette formule, choisi comme le milieu du sous-intervalle $[c_{k-1}, c_k]$ n'a aucune importance; tout autre point du sous-intervalle ouvert $]c_{k-1}, c_k[$ aurait fourni le même résultat. D'autre part, les valeurs de f aux points c_k , c'est-à-dire aux extrémités des sous-intervalles $[c_{k-1}, c_k]$, n'influent pas sur le résultat.

LEMME 1.12. — Soit f une fonction en escalier. Les expressions $I(\sigma, f)$, où σ est une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f , sont toutes égales.

On appelle *intégrale sur $[a, b]$ de la fonction en escalier f* la valeur commune de ces expressions. On la note $\int_a^b f$. On la note souvent aussi $\int_a^b f(x) dx$, mais il doit bien être clair que le symbole x dans cette expression est muet (il ne devrait pas être occupé par une autre variable), et l'expression dx n'a aucune signification implicite.

Démonstration du lemme. — Soit σ et σ' deux subdivisions de $[a, b]$ qui sont adaptées à f . Notons $\sigma = \{c_0, \dots, c_n\}$ et $\sigma' = \{c'_0, \dots, c'_m\}$ et fixons un point quelconque $x_j \in]c_{j-1}, c_j[$ (pour $1 \leq j \leq n$) et un point quelconque $x'_k \in]c'_{k-1}, c'_k[$ (pour $1 \leq k \leq m$).

Supposons d'abord que σ' raffine σ . Alors, il existe des entiers $m(0), \dots, m(n)$ tels que $c_j = c'_{m(j)}$ pour tout j tel que $0 \leq j \leq n$. Comme σ est adaptée à f , f est constante sur chacun des sous-intervalles $]c_{j-1}, c_j[$, donc sur chacun des intervalles $]c'_{m(j-1)}, c'_{m(j)}[$. Autrement dit, $f(x'_k) = f(x_j)$ pour tout entier k tel que $m(j-1) < k \leq m(j)$. Calculons alors

$$\begin{aligned} I(\sigma', f) &= \sum_{k=1}^m (c'_k - c'_{k-1}) f(x'_k) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=m(j-1)+1}^{m(j)} (c'_k - c'_{k-1}) f(x'_k) \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=m(j-1)+1}^{m(j)} (c'_k - c'_{k-1}) \right) f(x_j) = \sum_{j=1}^n (c'_{m(j)} - c'_{m(j-1)}) f(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^n (c_j - c_{j-1}) f(x_j) = I(\sigma, f), \end{aligned}$$

d'où l'égalité voulue si σ' raffine σ .

Dans le cas général, il existe une subdivision σ'' qui raffine à la fois σ et σ' . Par la première partie de la démonstration, on a alors $I(\sigma'', f) = I(\sigma, f)$ et $I(\sigma'', f) = I(\sigma', f)$, d'où l'égalité $I(\sigma, f) = I(\sigma', f)$. \square

PROPOSITION 1.13 (Additivité). — Soit f et g deux fonctions en escalier sur $I = [a, b]$ et soit λ un réel. Alors,

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g \quad \text{et} \quad \int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f.$$

COROLLAIRE 1.14. — L'application de \mathcal{E} dans \mathbf{R} qui, à une fonction en escalier f , associe son intégrale $\int_a^b f$, est une forme linéaire.

PROPOSITION 1.15 (Relation de Chasles). — Soit f une fonction en escalier de $I = [a, b]$ dans \mathbf{R} et soit $c \in [a, b]$. On a l'égalité

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

PROPOSITION 1.16 (Positivité). — a) Soit f une fonction en escalier de $I = [a, b]$ dans \mathbf{R} . On a les inégalités

$$(b - a) \min(f) \leq \int_a^b f \leq (b - a) \max(f).$$

En particulier, $\left| \int_a^b f \right| \leq (b - a) \max |f|$.

b) Soit f et g deux fonctions en escalier de $I = [a, b]$ dans \mathbf{R} . Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

2. Fonctions intégrables

A. Et maintenant, que faut-il faire ?

Tout ce qui précède est bien joli, mais nous voudrions savoir définir l'intégrale de fonctions plus intéressantes, comme les fonctions continues. Essayons de raisonner abstraitement pour voir comment l'on peut s'en sortir. Nous avons construit un espace vectoriel \mathcal{E} , celui des fonctions en escalier, et sur cet espace vectoriel, une forme linéaire, l'intégrale. Le but est alors de définir un sous-espace vectoriel \mathcal{I} , de l'espace des fonctions de I dans \mathbf{R} qui contienne \mathcal{E} et une forme linéaire φ sur cet espace qui étende \mathcal{E} tout en possédant les propriétés de l'intégrale. L'idéal serait bien sûr que \mathcal{I} soit le plus gros possible ; nous voulons en particulier qu'il contienne les fonctions continues. Étant donnée une fonction f dont on veut définir l'intégrale, on est contraint de chercher des fonctions en escalier g proches de f , de sorte que l'intégrale de g approchera celle de f . À ce point, il y a deux approches possibles.

a) La première est reliée à la convergence uniforme et considèrera f et g proches si leur différence $f - g$ ne prend que des valeurs petites, c'est-à-dire si $\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$ est petit. Elle aboutit à la notion de *fonction réglée* ;

b) La seconde, un peu plus générale, dira simplement que deux fonctions f et g sont proches si l'intégrale de leur différence est petite. À ce stade, on ne sait pas plus définir l'intégrale de leur différence que celle de f , donc on doit postuler l'existence d'une fonction en escalier h dont l'intégrale $\int_a^b h$ soit petite et telle que l'on ait $|f(x) - g(x)| \leq h(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

B. Fonctions réglées

DÉFINITION 2.1. — On dit qu'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ est *régulée* si pour tout réel ε ⁽³⁾ strictement positif, il existe une fonction en escalier g telle que $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [a, b]$.

Avec une telle définition, il semble difficile de démontrer qu'une fonction donnée f est réglée. Pourtant :

THÉORÈME 2.2. — Une fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ est réglée.

⁽³⁾ Prononcer *epsilon*

Avant de démontrer ce théorème fondamental, donnons quelques propositions plus faciles (et utiles).

PROPOSITION 2.3. — a) Une fonction réglée est bornée.

b) Une fonction en escalier, par exemple, une fonction constante, est réglée.

c) La somme, le produit de deux fonctions réglées, le produit d'une fonction réglée par un réel, sont des fonctions réglées.

Ainsi, l'ensemble des fonctions réglées forme un *sous-espace vectoriel*, noté \mathcal{R}_0 , de l'espace des fonctions de $[a, b]$ dans \mathbf{R} .

Démonstration. — a) Soit f une fonction réglée et appliquons la définition avec $\varepsilon = 1$. Il existe ainsi une fonction en escalier g telle que $|f(x) - g(x)| \leq 1$ pour tout $x \in [a, b]$. Puisque g est en escalier, elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs, donc est bornée. Soit M un majorant de g . On a alors $M - 1 \leq f(x) \leq M + 1$ pour tout $x \in [a, b]$, ce qui prouve que f est bornée.

b) Si f est en escalier, on a $|f(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$; cela permet de prendre $g = f$ dans la définition d'une fonction réglée, si bien que f est réglée.

c) Soit f_1 et f_2 deux fonctions réglées; posons $f = f_1 + f_2$ et soit ε un réel > 0 . Par définition, il existe deux fonctions en escalier g_1 et g_2 telles que $|f_1(x) - g_1(x)| \leq \varepsilon/2$ et $|f_2(x) - g_2(x)| \leq \varepsilon/2$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors, la fonction $g = g_1 + g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction en escalier et l'on a, pour tout $x \in [a, b]$,

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &= |(f_1(x) + f_2(x)) - (g_1(x) + g_2(x))| \\ &= |(f_1(x) - g_1(x)) + (f_2(x) - g_2(x))| \\ &\leq |f_1(x) - g_1(x)| + |f_2(x) - g_2(x)| \\ &\leq (\varepsilon/2) + (\varepsilon/2) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme ε était arbitraire, f est une fonction réglée.⁽⁴⁾

Soit f une fonction réglée, soit λ un réel et montrons que λf est une fonction réglée. Soit ε un réel > 0 . Comme f est réglée, il existe une fonction en escalier g telle que $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon/(|\lambda| + 1)$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors, λg est une fonction en escalier et $|\lambda f(x) - \lambda g(x)| \leq |\lambda| \varepsilon/(|\lambda| + 1) \leq \varepsilon$. Comme ε était choisi arbitrairement, λf est une fonction réglée.⁽⁵⁾

Soit f_1 et f_2 deux fonctions réglées et montrons que leur produit $f = f_1 f_2$ est encore une fonction réglée. Les fonctions f_1 et f_2 sont bornées, donc il existe un réel $M > 0$ tel que $|f_1(x)| \leq M$ et $|f_2(x)| \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$. Soit $\varepsilon > 0$, posons $e = \min(\varepsilon/3M, M)$ et fixons deux fonctions en escalier g_1 et g_2 telles que $|f_1(x) - g_1(x)| \leq e$ et $|f_2(x) - g_2(x)| \leq e$ pour tout $x \in [a, b]$; il en existe puisque f_1 et f_2 sont supposées réglées. Posons $g = g_1 g_2$. C'est une fonction en escalier. De plus, si $x \in [a, b]$, on a

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= f_1(x) f_2(x) - g_1(x) g_2(x) \\ &= f_1(x) (f_2(x) - g_2(x)) + g_2(x) (f_1(x) - g_1(x)) \end{aligned}$$

si bien que

$$|f(x) - g(x)| \leq M e + \max |g_2(x)| e.$$

⁽⁴⁾L'astuce d'avoir divisé par deux au début permet de terminer l'inégalité avec ε et non 2ε .

⁽⁵⁾A priori, il suffisait de diviser par $|\lambda|$, mais si λ était nul, cela provoquerait une division par zéro. L'astuce consiste donc à diviser par la quantité plus grande, et non nulle, $|\lambda| + 1$.

On a pour tout x l'inégalité

$$|g_2(x)| \leq |f_2(x)| + e \leq M + e \leq 2M,$$

d'où il résulte que

$$|f(x) - g(x)| \leq Me + 2Me \leq 3Me \leq 3M(\varepsilon/3M) \leq \varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, f est réglée.⁽⁶⁾ □

REMARQUE. — Plutôt que de s'arracher les cheveux en coupant les ε en 4, il est plus simple — mais parfois insuffisant — de raisonner directement. Dans le dernier cas ci-dessus, supposons avoir choisi g_1 et g_2 avec $|f_1(x) - g_1(x)| \leq \varepsilon$ et $|f_2(x) - g_2(x)| \leq \varepsilon$ pour tout x . Alors, on démontre que

$$|f(x) - g(x)| \leq M\varepsilon + (M + \varepsilon)\varepsilon = \varepsilon(2M + \varepsilon).$$

Lorsque ε tend vers 0, cette expression tend vers 0 (la constante M est fixée, c'est un majorant de $|f_1|$ et $|f_2|$), ce qui permet d'en déduire que f est réglée. En effet, si l'on veut $|f(x) - g(x)| \leq \eta$, il suffit de refaire la démonstration en partant d'une autre valeur de ε , disons e , choisie pour que $e(2M + e) \leq \eta$. Cet argument se résume ainsi, où l'humour remplace la rigueur : « lorsque ε tend vers 0, $\varepsilon(2M + \varepsilon)$ est inférieur à tout ε fixé... ».

PROPOSITION 2.4. — Soit f une fonction de $[a, b]$ dans \mathbf{R} et soit $c \in [a, b]$. La fonction f est une fonction réglée si et seulement si ses restrictions à $[a, c]$ et $[c, b]$ le sont.

Démonstration. — Supposons d'abord que f soit réglée sur $[a, b]$. Soit $\varepsilon > 0$, soit g une fonction en escalier de $[a, b]$ dans \mathbf{R} telle que $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [a, b]$. Considérant la restriction de g à l'intervalle $[a, c]$, on voit que $f|_{[a, c]}$ est une fonction réglée. Il en est de même pour la restriction de f à $[c, b]$.

Inversement, supposons que les restrictions de f aux intervalles $[a, c]$ et $[c, b]$ soient réglées. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit g_1 une fonction en escalier sur $[a, c]$ telle que $|f(x) - g_1(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [a, c]$ et soit g_2 une fonction en escalier sur $[c, b]$ telle que $|f(x) - g_2(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [c, b]$. Si l'on change g_2 au point c , en imposant $g_2(c) = g_1(c)$, la fonction g_2 modifiée est encore en escalier et vérifie encore cette dernière inégalité.

On définit alors une fonction g sur $[a, b]$ en posant $g(x) = g_1(x)$ si $a \leq x \leq c$ et $g(x) = g_2(x)$ si $c \leq x \leq b$. La fonction g est en escalier car ses restrictions à $[a, c]$ et $[c, b]$ le sont. De plus, si $a \leq x \leq c$, on a $|f(x) - g(x)| = |f(x) - g_1(x)| \leq \varepsilon$, tandis que si $c \leq x \leq b$, on a $|f(x) - g(x)| = |f(x) - g_2(x)| \leq \varepsilon$. Comme ε est arbitraire, f est une fonction réglée. □

Démonstration de ce qu'une fonction continue est réglée. — Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. Comme cet intervalle est fermé borné, on sait que f est *uniformément continue*. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $h > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ dès que $|x - y| \leq h$. Soit alors n un entier tel que $nh > b - a$ et considérons la subdivision régulière en n intervalles, définie par $\sigma = \{c_0, \dots, c_n\}$ avec

$$c_k = a + k \frac{b-a}{n}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

⁽⁶⁾L'ajustement des paramètres est bien désagréable dans ce cas...

Définissons une fonction $g: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ en posant $g(a) = f(a)$ et $g(x) = f(c_k)$ pour $1 \leq k \leq n$ et tout x tel que $c_{k-1} < x \leq c_k$. C'est une fonction en escalier, adaptée à la subdivision σ . De plus, si $x \in]c_{k-1}, c_k]$, $|x - c_k| \leq c_k - c_{k-1} = (b-a)/n < h$, si bien que

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - f(c_k)| \leq \varepsilon,$$

cette relation restant vraie si $x = a$. Comme ε était choisi arbitrairement, f est une fonction réglée. \square

C. Fonctions intégrables au sens de Riemann

DÉFINITION 2.5. — On dit qu'une fonction $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ est *intégrable au sens de Riemann* si f est bornée et s'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, des fonctions en escalier g et h telles que $|f(x) - g(x)| \leq h(x)$ pour tout $x \in [a, b]$ et $\int_a^b h \leq \varepsilon$.

PROPOSITION 2.6. — Une fonction continue, et plus généralement, une fonction réglée, est intégrable au sens de Riemann.

Démonstration. — Soit en effet une fonction $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ qui est réglée. On a vu que f est bornée. D'autre part, soit $\varepsilon > 0$ et soit g une fonction en escalier telle que $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon/(b-a)$ pour tout $x \in [a, b]$. La fonction constante h égalé à $\varepsilon/(b-a)$ est une fonction en escalier d'intégrale $\int_a^b h = \varepsilon$. Par suite, f est intégrable au sens de Riemann. \square

PROPOSITION 2.7. — a) La somme, le produit de deux fonctions intégrables au sens de Riemann sont intégrables au sens de Riemann.

b) Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction et soit $c \in [a, b]$. Alors f est intégrable au sens de Riemann si et seulement si ses restrictions à $[a, c]$ et $[c, b]$ le sont.

En particulier, l'ensemble des fonctions intégrables au sens de Riemann forme un sous-espace vectoriel, noté \mathcal{R} , de l'espace des fonctions de $[a, b]$ dans \mathbf{R} .

Démonstration. — Les démonstrations sont analogues à celles des propositions correspondantes pour les fonctions réglées. \square

PROPOSITION 2.8. — Une fonction monotone $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ est intégrable au sens de Riemann.

Démonstration. — On se place dans le cas où f est croissante. Pour $n \geq 1$, considérons la subdivision régulière en n intervalles, $\sigma = \{c_0, \dots, c_n\}$ et définissons une fonction en escalier $g_n: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ par $g_n(x) = f(c_{j-1})$ pour tout x tel que $c_{j-1} < x < c_j$ (pour $1 \leq j \leq n$) et $g_n(c_j) = f(c_j)$ (pour $0 \leq j \leq n$). De même, définissons une fonction en escalier $h_n: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ par $h_n(x) = f(c_j) - f(c_{j-1})$ pour tout x tel que $c_{j-1} < x < c_j$, et $h_n(c_j) = 0$ pour $0 \leq j \leq n$. Comme f est croissante, les inégalités

$$g_n(x) \leq f(x) \leq g_n(x) + h_n(x)$$

sont vérifiées pour tout $x \in [a, b]$. En particulier, $|f - g_n| \leq h_n$. De plus,

$$\int_a^b h_n = \sum_{j=1}^n \frac{b-a}{n} (f(c_j) - f(c_{j-1})) = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a))$$

(somme télescopique), donc $\int_a^b h_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Cela montre que f est intégrable. \square

REMARQUE 2.9. — On peut démontrer qu'une fonction monotone est réglée.

D. L'intégrale des fonctions intégrables

PROPOSITION 2.10. — Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann. Pour tout entier $n \geq 1$, soit g_n et h_n des fonctions en escalier telles que $|f - g_n| \leq h_n$ et $\int_a^b h_n \leq 1/n$. Alors, la suite des intégrales $\int_a^b g_n$ converge vers un réel lorsque $n \rightarrow \infty$. Cette limite est en outre indépendante des choix de g_n, h_n .

Démonstration. — Si n et m sont des entiers ≥ 1 , remarquons que l'on a

$$\int_a^b g_n - \int_a^b g_m = \int_a^b (g_n - g_m).$$

De plus, on a, pour tout $x \in [a, b]$,

$$|g_n(x) - g_m(x)| \leq |g_n(x) - f(x)| + |f(x) - g_m(x)| \leq h_n(x) + h_m(x)$$

si bien que

$$\int_a^b |g_n - g_m| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

et *a fortiori*,

$$\left| \int_a^b g_n - \int_a^b g_m \right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.$$

Cette majoration implique que la suite $(\int_a^b g_n)_n$ est une suite de Cauchy. Par conséquent, elle converge dans \mathbf{R} . Notons I cette limite.

Pour montrer qu'elle ne dépend pas des choix, nous allons utiliser une astuce classique dans ce genre de situations. Pour $n \geq 1$, soit g'_n et h'_n des fonctions en escalier telles que $|f - g'_n| \leq h'_n$ et $\int_a^b h'_n \leq 1/n$. D'après la première partie de la démonstration, la suite des intégrales $\int_a^b g'_n$ converge vers un réel I' .

Définissons alors des fonctions en escalier g''_n et h''_n par $g''_n = g_n$ si n est pair, et $g''_n = g'_n$ si n est impair, et de même $h''_n = h_n$ pour n pair, et $h''_n = h'_n$ pour n impair. Les fonctions g''_n, h''_n vérifient encore les hypothèses de la proposition, si bien que la suite $(\int_a^b g''_n)_n$ converge vers un réel I'' . Mais la sous-suite formées des termes d'indice pair converge vers I , tandis que la sous-suite formée des termes d'indice impair converge vers I' , car ce sont des sous-suites des suites $(\int_a^b g_n)_n$ et $(\int_a^b g'_n)_n$ respectivement. Cela entraîne que $I'' = I$ et $I'' = I'$, d'où $I = I'$ ainsi qu'on voulait démontrer. \square

DÉFINITION 2.11. — La limite commune de ces suites est appelée *intégrale de la fonction intégrable* f ; elle est notée $\int_a^b f$.

PROPOSITION 2.12 (Additivité). — Soit f_1 et f_2 deux fonctions intégrables au sens de Riemann sur $I = [a, b]$ et soit λ un réel. Alors,

$$\int_a^b (f_1 + f_2) = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 \quad \text{et} \quad \int_a^b (\lambda f_1) = \lambda \int_a^b f_1.$$

Autrement dit, l'application $f \mapsto \int_a^b f$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel \mathcal{R} des fonctions intégrables au sens de Riemann.

PROPOSITION 2.13 (Relation de Chasles). — Soit f une fonction intégrable de $I = [a, b]$ dans \mathbf{R} et soit $c \in [a, b]$. On a l'égalité

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

PROPOSITION 2.14. — a) Soit f une fonction intégrable de $I = [a, b]$ dans \mathbf{R} . On a les inégalités (inégalité de la moyenne)

$$(b-a) \inf(f) \leq \int_a^b f \leq (b-a) \sup(f).$$

En particulier, $\left| \int_a^b f \right| \leq (b-a) \sup |f|$.

b) Soit f_1 et f_2 deux fonctions intégrables de $I = [a, b]$ dans \mathbf{R} . Si $f_1(x) \leq f_2(x)$ pour tout $x \in I$, alors $\int_a^b f_1 \leq \int_a^b f_2$.

REMARQUE. — En appliquant l'inégalité de la moyenne, on prendra garde qu'en parlant de l'intervalle $[a, b]$, on suppose automatiquement que a est inférieur à b .

Démonstrations de ces propositions. — Elles consistent à passer convenablement à la limite dans les énoncés correspondants pour les fonctions en escalier.

Commençons par l'additivité. Soit, pour tout $n \geq 1$, des fonctions en escalier $g_{1,n}$, $g_{2,n}$, $h_{1,n}$ et $h_{2,n}$ telles que

$$|f_1 - g_{1,n}| \leq h_{1,n}, \quad \int_a^b h_{1,n} \leq 1/n, \quad |f_2 - g_{2,n}| \leq h_{2,n}, \quad \text{et} \quad \int_a^b h_{2,n} \leq 1/n.$$

Posons alors $f = f_1 + f_2$, $g_n = f_{1,n} + f_{2,n}$ et $h_n = h_{1,n} + h_{2,n}$. La fonction f est intégrable au sens de Riemann; les fonctions g_n et h_n sont des fonctions en escalier sur $[a, b]$ et vérifient $|f(x) - g_n(x)| \leq h_n(x)$ pour tout $x \in [a, b]$. De plus, on a

$$\int_a^b h_n = \int_a^b h_{1,n} + \int_a^b h_{2,n} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \leq 2/n.$$

Comme $2/n$ tend vers 0, il résulte de la proposition qui définit l'intégrale que $\int_a^b f$ est la limite des intégrales $\int_a^b g_n$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Or,

$$\int_a^b g_n = \int_a^b g_{1,n} + \int_a^b g_{2,n}$$

qui converge vers $\int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$ par hypothèse.

Le cas de la multiplication par un scalaire λ est analogue, grâce au fait que

$$\int_a^b \lambda g_{1,n} = \lambda \int_a^b g_{1,n}$$

converge vers $\int_a^b \lambda f_1$ par définition, et vers $\lambda \int_a^b f_1$ par construction.

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$. Pour tout $n \geq 1$, soit g_n et h_n des fonctions en escalier telles que $|f - g_n| \leq h_n$ et $\int_a^b h_n \leq 1/n$. Comme

$$\int_a^b h_n = \int_a^c h_n + \int_c^b h_n \leq 1/n$$

et comme ces quantités sont positives, $\int_a^c h_n$ et $\int_c^b h_n$ sont toutes deux $\leq 1/n$. Par définition, l'intégrale $\int_a^c f$ est ainsi la limite de $\int_a^c g_n$, et $\int_c^b f$ est la limite de $\int_c^b g_n$. La relation voulue découle alors de la relation $\int_a^b g_n = \int_a^c g_n + \int_c^b g_n$: le membre de gauche converge vers $\int_a^b f$, tandis que le membre de droite converge vers $\int_a^c f + \int_c^b f$.

Montrons maintenant l'assertion de positivité. Pour alléger les notations, posons $m = \inf(f)$ et $M = \sup(f)$. Soit pour tout $n \geq 1$ des fonctions en escalier g_n et h_n telles que $|f - g_n| \leq h_n$ et $\int_a^b h_n \leq 1/n$. Définissons alors une fonction en escalier g'_n par les relations

$$g'_n(x) = \begin{cases} m & \text{si } g_n(x) < m; \\ g_n(x) & \text{si } m \leq g_n(x) \leq M; \\ M & \text{si } g_n(x) > M. \end{cases}$$

On voit dans chacun des cas que

$$|f(x) - g'_n(x)| \leq |f(x) - g_n(x)| \leq h_n(x).$$

Par suite, $\int_a^b g'_n$ converge vers $\int_a^b f$. La fonction g'_n vérifie les inégalités $m \leq g'_n(x) \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$, donc

$$(b-a)m \leq \int_a^b g'_n \leq (b-a)M.$$

Par passage à la limite, on en déduit l'inégalité voulue. \square

COROLLAIRE 2.15 (Formule de la moyenne). — Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f.$$

Démonstration. — En effet, le réel $(\int_a^b f)/(b-a)$ appartient, d'après l'inégalité de la moyenne, à l'intervalle $[\inf(f), \sup(f)]$. Comme f est continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$, elle y atteint ses bornes et prend toutes les valeurs intermédiaires. Il existe donc un réel $c \in [a, b]$ comme voulu. \square

PROPOSITION 2.16 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). — Soit f et g deux fonctions intégrables de $[a, b]$ dans \mathbf{R} . On a alors l'inégalité

$$\left(\int_a^b fg \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2 \right) \left(\int_a^b g^2 \right).$$

Démonstration. — Pour tout $t \in \mathbf{R}$, la fonction $f - tg$ est intégrable sur $[a, b]$. Posons alors

$$q(t) = \int_a^b (f - tg)^2 = \int_a^b f^2 - 2t \int_a^b fg + t^2 \int_a^b g^2.$$

La fonction q est une fonction polynôme de degré 2. Comme $q(t)$ est défini par l'intégrale de la fonction positive $(f - tg)^2$, l'inégalité $q(t) \geq 0$ est satisfaite pour tout $t \in \mathbf{R}$. En écrivant que le discriminant de q est négatif ou nul, on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz. \square

E. Perturbations anodines d'une fonction intégrable

REMARQUE 2.17. — Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction en escalier. Toute fonction de $[a, b]$ dans \mathbf{R} qui coïncide avec f sauf en un nombre fini de points de $[a, b]$ est une fonction en escalier, et a même intégrale que f .

LEMME 2.18. — Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction intégrable. Soit $g: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction qui coïncide avec f sauf en un nombre fini de points de $[a, b]$. Alors, g est intégrable et a même intégrale que f .

Démonstration. — Soit X l'ensemble fini des points de $[a, b]$ où f et g diffèrent. Soit aussi, pour tout $n \geq 1$, des fonctions en escalier $g_n, h_n: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ tels que $|f - g_n| \leq h_n$ et $\int_a^b h_n \leq 1/n$. Posons $g'_n(x) = g_n(x)$ si $x \notin X$, et $g'_n(x) = g(x)$ si $x \in X$. On a alors $|g - g'_n| \leq h_n$, car cette relation, vraie par hypothèse si $x \notin X$, l'est trivialement si $x \in X$. Cela montre que g est intégrable et que $\int g = \lim \int g'_n$. \square

PROPOSITION 2.19. — Une fonction continue par morceaux est intégrable.

Démonstration. — Soit en effet $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une telle fonction et soit $\sigma = \{c_0, \dots, c_n\}$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f .

Fixons $j \in \{1, \dots, n\}$. Soit $f_j: [c_{j-1}, c_j] \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$f_j(x) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow c_{j-1}+0} f(t) & \text{si } x = c_{j-1}; \\ f(x) & \text{si } c_{j-1} < x < c_j; \\ \lim_{t \rightarrow c_j-0} f(t) & \text{si } x = c_j. \end{cases}$$

Les limites existent par la définition même d'une fonction continue par morceaux, et la fonction f_j est continue sur $[c_{j-1}, c_j]$. Elle est donc intégrable sur cet intervalle. Comme la restriction de f à l'intervalle $[c_{j-1}, c_j]$ ne diffère de f_j qu'en deux points, elle est aussi intégrable, et a même intégrale que f_j . D'après la relation de Chasles, f est alors intégrable sur $[a, b]$. \square

3. Sommes de Riemann

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction. Soit $\sigma = \{c_0, \dots, c_n\}$ une subdivision de $[a, b]$ et, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, soit x_j un point de l'intervalle $[c_{j-1}, c_j]$.

DÉFINITION 3.1. — On appelle somme de Riemann de f , relativement à la subdivision σ et aux points x_j , le réel

$$\mathcal{S}(f; \sigma, (x_j)) = \sum_{j=1}^n (c_j - c_{j-1}) f(x_j).$$

Concernant le choix des x_j , il y a trois cas importants qui consistent à prendre systématiquement $x_j = c_{j-1}$ (somme de Riemann à gauche), $x_j = c_j$ (à droite) et $x_j = (c_{j-1} + c_j)/2$ (point médian). Ils sont particulièrement importants lorsque la subdivision choisie est régulière. Elles donnent lieu à des méthodes d'analyse numérique pour calculer une intégrale, connues sous le nom de méthode des rectangles ou des trapèzes.

THÉORÈME 3.2. — Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction intégrable. Posons $I = \int_a^b f$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $h > 0$ tel que, pour toute subdivision σ de $[a, b]$ dont le pas est $\leq h$, et pour tout choix de points x_j , on ait

$$|\mathcal{S}(f; \sigma, (x_j)) - I| \leq \varepsilon.$$

De manière imagée, les sommes de Riemann convergent vers l'intégrale lorsque le pas de la subdivision tend vers 0. Par exemple, f étant une fonction intégrable au sens de Riemann, les sommes de Riemann à droite, à gauche, ou au point médian, associées à une subdivision régulière en n intervalles tendent toutes trois vers l'intégrale de f , lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration. — Démontrons le résultat pour une fonction f qui vaut 1 sur $[c, d]$ et 0 en tout autre point de l'intervalle $[a, b]$. Soit $\sigma = \{c_0, \dots, c_n\}$ une subdivision de $[a, b]$, et soit i, j des entiers tels que $c_{i-1} < c \leq c_i$ et $c_j \leq d < c_{j+1}$. Alors, la somme de Riemann associée à cette subdivision et à un choix (x_j) de points vérifie

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(f; \sigma, (x_j)) &= \sum_{k=1}^n (c_k - c_{k-1}) f(x_k) \\ &= (c_i - c_{i-1}) f(x_{i-1}) + \sum_{k=i+1}^j (c_k - c_{k-1}) + (c_{j+1} - c_j) f(x_j) \\ &= (c_j - c_i) + (c_i - c_{i-1}) f(x_{i-1}) + (c_{j+1} - c_j) f(x_j). \end{aligned}$$

Comme $f(x)$ vaut 0 ou 1, elle est ainsi comprise entre $(c_j - c_i)$ et $(c_{j+1} - c_{i-1})$. Par suite,

$$|\mathcal{S}(f; \sigma, (x_j)) - (d - c)| \leq (c_{j+1} - c_j) + (c_i - c_{i-1}) \leq 2p(\sigma).$$

De plus, $d - c = \int_a^b f$.

Toute fonction en escalier f est combinaison linéaire de fonctions du type que l'on vient d'étudier. Comme sommes de Riemann et intégrale sont linéaires en f il existe pour toute fonction en escalier f une constante C telle que

$$\left| \mathcal{S}(f; \sigma, (x_j)) - \int_a^b f \right| \leq Cp(\sigma).$$

Soit maintenant f une fonction intégrable et soit $\varepsilon > 0$. Soit g et h deux fonctions en escalier telles que $|f - g| \leq h$ et $\int_a^b h \leq \varepsilon$. On a ainsi, pour toute subdivision σ et tout choix de points (x_j) , les inégalités

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}(f) - \mathcal{S}(g)| &\leq \mathcal{S}(h) \\ \left| \mathcal{S}(g) - \int_a^b g \right| &\leq C_g p(\sigma) \\ \left| \mathcal{S}(h) - \int_a^b h \right| &\leq C_h p(\sigma) \end{aligned}$$

où C_g et C_h sont les constantes que nous avons associées au paragraphe précédent aux fonctions en escalier g et h . Alors,

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{S}(f) - \int_a^b f \right| &= \left| (\mathcal{S}(f) - \mathcal{S}(g)) + \left(\mathcal{S}(g) - \int_a^b g \right) + \left(\int_a^b g - \int_a^b f \right) \right| \\ &\leq \mathcal{S}(h) + \left| \mathcal{S}(g) - \int_a^b g \right| + \int_a^b h \\ &\leq \left(\int_a^b h + C_h p(\sigma) \right) + C_g p(\sigma) + \int_a^b h \\ &\leq (C_h + C_g) p(\sigma) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Par suite, dès que $p(\sigma) \leq \varepsilon / (C_h + C_g)$, on a

$$\left| \mathcal{S}(f) - \int_a^b f \right| \leq 3\varepsilon,$$

d'où le théorème. □

4. Lien entre le calcul différentiel et le calcul intégral

Soit I un intervalle de \mathbf{R} , soit a un point de I et soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction.

DÉFINITION 4.1. — On dit que f est *localement intégrable* sur I si la restriction de f à tout intervalle fermé borné contenu dans I est intégrable au sens de Riemann.

Une fonction continue est localement intégrable.

Supposons que f soit localement intégrable. Nous pouvons alors définir une fonction $F : I \rightarrow \mathbf{R}$ par la formule

$$F(x) = \begin{cases} \int_a^x f & \text{si } x \geq a; \\ -\int_x^a f & \text{si } x \leq a. \end{cases}$$

Si $x \leq y$ sont deux points de I , on déduit de la relation de Chasles que

$$F(y) - F(x) = \int_x^y f.$$

PROPOSITION 4.2. — *Supposons f localement intégrable sur I . La fonction F est continue, et même lipschitzienne.*

Rappelons qu'une fonction h à valeurs réelles définie sur un intervalle I de \mathbf{R} est dite lipschitzienne s'il existe un réel M tel que l'on ait $|h(x) - h(y)| \leq M|x - y|$ pour $x, y \in I$. Une telle fonction est nécessairement continue.

Démonstration. — Comme f est intégrable, elle est bornée. Soit M un majorant de $|f|$. Alors, pour tous x et y dans I , avec $x \leq y$, il vient

$$|F(y) - F(x)| \leq \int_x^y |f| \leq M(y - x). \quad \square$$

PROPOSITION 4.3. — *Supposons f localement intégrable sur I et soit x un point de I . Si f est continue en x , alors F est dérivable en x , de dérivée $f(x)$.*

Démonstration. — Le taux d'accroissement $\tau(y)$ ⁽⁷⁾ de F entre x et un point $y \neq x$ de I est défini par

$$\tau(y) = \frac{F(y) - F(x)}{y - x} = \frac{1}{y - x} \int_x^y f.$$

Nous voulons montrer qu'il est arbitrairement proche de $f(x)$ lorsque y tend vers x . Soit donc $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en x , il existe un réel $h > 0$ tel que $f(x) - \varepsilon \leq f(y) \leq f(x) + \varepsilon$ pour tout élément $y \in I$ qui appartient à l'intervalle $[x - h, x + h]$. Si de plus $y > x$, on a donc les inégalités

$$(y - x)(f(x) - \varepsilon) \leq \int_x^y f \leq (y - x)(f(x) + \varepsilon),$$

et donc, en divisant par $y - x$ (qui est positif),

$$f(x) - \varepsilon \leq \tau(y) \leq f(x) + \varepsilon.$$

Lorsque $y < x$, on remarque que

$$\tau(y) = \frac{1}{x - y} \int_y^x f,$$

et l'inégalité précédente reste valable. Cela montre que $\tau(y)$ converge vers $f(x)$ lorsque $y \in I$ tend vers x . \square

COROLLAIRE 4.4. — *Si $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ est continue, la fonction F est de classe \mathcal{C}^1 et vérifie $F' = f$.*

REMARQUE. — Inversement, si F est une fonction de classe \mathcal{C}^1 , sa dérivée est continue, donc localement intégrable et le corollaire permet de calculer F à partir de F' .

On prendra garde que la dérivée d'une fonction dérivable n'est pas forcément intégrable au sens de Riemann. Considérons par exemple, la fonction définie par $F(x) = x^2 \sin(1/x^2)$ pour $x \neq 0$ et prolongée par continuité en 0. Elle est dérivable sur \mathbf{R} (c'est évident sur \mathbf{R}^* , remarquer que $F'(0) = 0$), mais sa dérivée est donnée par

$$F'(x) = 2x \sin(1/x^2) - 2 \frac{1}{x} \cos(1/x^2)$$

pour $x \neq 0$ et n'est donc pas bornée au voisinage de 0. En particulier, F' n'est pas intégrable sur $[0, \pi]$, donc n'est pas localement intégrable sur \mathbf{R} .

COROLLAIRE 4.5. — *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue et soit F une primitive (quelconque) de f . On a alors*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Démonstration. — La fonction $x \mapsto \int_a^x f - F(x)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ et sa dérivée vaut $f(x) - F'(x) = 0$. Elle est donc constante; elle vaut $-F(a)$ en a et $\int_a^b f - F(b)$ en $x = b$, d'où le corollaire. \square

⁽⁷⁾ Prononcer *tau*

5. Applications

PROPOSITION 5.1 (Changement de variables). — Soit $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue et soit $\varphi: [a, b] \rightarrow I$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . La fonction $g: x \mapsto (f \circ \varphi)(x)\varphi'(x)$ est continue de $[a, b]$ dans \mathbf{R} et l'on a

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(x)\varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.$$

Démonstration. — Soit $F: I \rightarrow \mathbf{R}$ une primitive de f . Alors, la fonction $G = F \circ \varphi$ de $[a, b]$ dans \mathbf{R} est une primitive de g . Le membre de gauche de l'égalité affirmée par la proposition vaut alors $G(b) - G(a)$, celui de droite $F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$. Ils sont égaux. \square

PROPOSITION 5.2 (Intégration par parties). — Soit u et v deux fonction de classe \mathcal{C}^1 de $[a, b]$ dans \mathbf{R} . Alors,

$$\int_a^b uv' = (u(b)v(b) - u(a)v(a)) - \int_a^b u'v.$$

Démonstration. — La fonction $uv: x \mapsto u(x)v(x)$ est de classe \mathcal{C}^1 , sa dérivée est la fonction qui, à $x \in [a, b]$, associe $u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Par suite,

$$\int_a^b (u'v + uv') = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

La formule d'intégration par parties en résulte en faisant passer le terme $\int_a^b u'v$ dans le membre de droite. \square

REMARQUE. — Rappelons qu'on note couramment $[uv]_a^b$, voire $[u(x)v(x)]_a^b$, la différence $u(b)v(b) - u(a)v(a)$ qui apparaît dans la formule d'intégration par parties.

PROPOSITION 5.3 (Formule de Taylor avec reste intégral). — Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} définie sur un intervalle I de \mathbf{R} . Soit $a \in I$. Pour tout $x \in I$, on a alors l'égalité

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt. \end{aligned}$$

Démonstration. — Démontrons cette formule par récurrence sur n . Pour $n = 0$, elle s'écrit

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt,$$

donc est vraie. Supposons la vraie pour $n - 1$ et soit f une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} . Intégrons par parties le reste intégral dans la formule au rang $n - 1$. On intègre $(x-t)^{n-1}$, on dérive $f^{(n)}(t)$, d'où il vient

$$\begin{aligned} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt &= \left[-\frac{1}{n}(x-t)^n f^{(n)}(t) \right]_a^x + \frac{1}{n} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \\ &= \frac{1}{n} f^{(n)}(a)(x-a)^n + \frac{1}{n} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt. \end{aligned}$$

La formule au rang n s'en déduit en divisant cette égalité par $(n-1)!$ et en l'insérant dans la formule au rang $n - 1$. \square

6. Intégrales généralisées (ou impropres)

Soit I un intervalle de \mathbf{R} et soit $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction localement intégrable. Si I est fermé borné, $I = [a, b]$, la fonction f est intégrable et on a déjà défini $\int_a^b f$. Ce sont les trois autres cas possibles qui nous concernent ici, à savoir ceux où I est ouvert à l'une des bornes : $I =]a, b]$, $I =]a, b[$, ou $I = [a, b[$. Nous voulons définir l'intégrale $\int_a^b f$; nous dirons qu'elle est impropre en a si $a \notin I$, et en b , si $b \notin I$. Parmi ces cas, nous n'oublions pas les cas importants obtenus lorsque $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.

DÉFINITION 6.1. — On dit que l'intégrale généralisée de f sur I existe si les intégrales $\int_x^y f$, pour $x, y \in I$, ont une limite lorsque $x \rightarrow a$ et $y \rightarrow b$. Cette limite est notée $\int_a^b f$. On dira aussi que f est *intégrable* sur I .

Si $I = [a, b]$, cela revient à dire que la limite de $\int_a^y f$, pour $y \in I$, existe lorsque $y \rightarrow b$. De même, si $I =]a, b]$, cela revient à dire que la limite $\int_x^b f$ existe lorsque $x \rightarrow a$ ($x \in I$). Supposons enfin que $I =]a, b[$ et fixons un point quelconque $c \in I$. Alors, on a

$$\int_x^y f = \int_x^c f + \int_c^y f$$

pour $x, y \in I$. Par suite, l'intégrale généralisée de f sur I existe si et seulement si les intégrales généralisées $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ existent, et alors

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Dans la pratique, il est *fortement conseillé*, pour étudier une intégrale généralisée sur un intervalle ouvert aux deux bornes, de se ramener à deux telles intégrales généralisées, chacune n'étant impropre qu'en une seule borne.

EXEMPLES 6.2. — a) Prenons $I = [1, +\infty[$ et $f(x) = 1/x^2$. La fonction f est continue sur I , donc localement intégrable. On a

$$\int_1^x f(t) dt = \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = [-1/t]_1^x = -\frac{1}{x} + 1.$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, cette expression tend vers 1. Par suite, l'intégrale généralisée de f sur $[1, +\infty[$ existe et vaut 1.

b) Supposons que l'on ait $I = [0, +\infty[$ et $f(x) = \sin(x)$. La fonction f est continue sur I , donc localement intégrable et

$$\int_0^x f(t) dt = [-\cos(t)]_0^x = 1 - \cos(x).$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\cos(x)$ n'a pas de limite. (En effet, on a $\cos(2n\pi) = 1$ et $\cos((2n+1)\pi) = -1$, pour $n \in \mathbf{N}$. Si la fonction \cos avait une limite ℓ en $+\infty$, $\cos(x)$ appartiendrait à l'intervalle $[\ell - 1/2, \ell + 1/2]$ pour x assez grand, intervalle qui contiendrait en particulier $+1$ et -1 . Cependant, sa largeur est 1, donc il ne peut contenir deux réels distants de 2.) Ainsi, f n'est pas intégrable sur I .

PROPOSITION 6.3. — Soit I un intervalle d'extrémités a et b ($a < b$) et soit f, g deux fonctions localement intégrables sur I . Soit λ et μ ⁽⁸⁾ deux réels. Si les intégrales généralisées de f et de g sur I existent toutes deux, alors l'intégrale généralisée de la fonction $\lambda f + \mu g$ sur I existe, et l'on a

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

L'ensemble des fonctions intégrables \mathcal{I} sur I forme donc un sous-espace vectoriel des fonctions localement intégrables et l'application $f \mapsto \int_a^b f$ est une forme linéaire.

Même si on n'est pas capable de calculer l'intégrale généralisée, il peut être utile de savoir qu'elle existe, d'où l'utilité d'un critère de Cauchy. C'est une application du critère de Cauchy pour les limites.

PROPOSITION 6.4. — Soit I un intervalle d'extrémités a et b ($a < b$) et soit $c \in I$. Soit f une fonction localement intégrable sur I . Alors, l'intégrale généralisée $\int_c^b f$ existe si et seulement si

(cas où $b = +\infty$) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe M tel que l'on ait $|\int_x^y f| \leq \varepsilon$ pour tous x et y dans I vérifiant $x \geq M$ et $y \geq M$.

(cas où $b \neq +\infty$) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $h > 0$ tel que l'on ait $|\int_x^y f| \leq \varepsilon$ pour tous x et y dans I vérifiant $x \geq b - h$ et $y \geq b - h$.

De même, l'intégrale généralisée $\int_a^c f$ existe si et seulement si

(cas où $a = -\infty$) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe M tel que l'on ait $|\int_x^y f| \leq \varepsilon$ pour tous x et y dans I vérifiant $x \leq M$ et $y \leq M$;

(cas où $a \neq -\infty$) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $h > 0$ tel que l'on ait $|\int_x^y f| \leq \varepsilon$ pour tous x et y dans I vérifiant $x \leq a + h$ et $y \leq a + h$.

Dans le cas d'une intégrale impropre aux deux bornes, il faut vérifier le critère à chaque borne.

Démonstration. — Posons $F(x) = \int_c^x f$. On a donc

$$F(y) - F(x) = \int_x^y f.$$

Dire que f est intégrable sur $[c, b[$ est équivalent à dire que $F(x)$ a une limite quand $x \rightarrow b$. On s'est ainsi contenté d'écrire le critère de Cauchy qui affirme l'existence de cette limite. Le raisonnement est le même pour la borne de gauche. \square

EXEMPLE 6.5. — Supposons que l'on ait $I = [a, b[$, avec $b \neq +\infty$, et que f soit une fonction localement intégrable sur I et bornée. Alors f est intégrable sur I . Soit en effet M un réel tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in I$. On a ainsi, si x et y appartiennent à I ,

$$\left| \int_x^y f \right| \leq |y - x| M.$$

⁽⁸⁾ Prononcer μ .

Si $\varepsilon > 0$, on a en particulier

$$\left| \int_x^y f \right| \leq \varepsilon$$

dès que x et y vérifient $x \geq b - \varepsilon/M$ et $y \geq b - \varepsilon/M$.

L'exemple de la fonction sin sur l'intervalle $[0, +\infty[$ montre que l'hypothèse $b \neq +\infty$ est nécessaire.

D'autre part, définissons une fonction $g: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ en posant $F(x) = f(x)$ si $x \neq b$ et en choisissant une valeur arbitraire pour $F(b)$. Alors, f est intégrable sur l'intervalle $[a, b]$ et l'intégrale généralisée de f sur $[a, b[$ est égale à $\int_a^b G$.

Soit en effet $\varepsilon > 0$. Comme f est intégrable sur l'intervalle $[a, b - \varepsilon/M]$, il existe des fonctions en escalier g et h sur cet intervalle telles que $|f(x) - g(x)| \leq h(x)$ et $\int_a^{b-\varepsilon/M} h \leq \varepsilon$. Soit G la fonction définie par $G(x) = f(x)$ pour $a \leq x \leq b - \varepsilon/M$ et $G(x) = 0$ si $b - \varepsilon/M < x \leq b$; soit H la fonction définie par $H(x) = h(x)$ pour $a \leq x \leq b - \varepsilon/M$, et $H(x) = M$ si $b - \varepsilon/M < x < b$ et $H(b) = F(b)$. Ce sont des fonctions en escalier, elles vérifient $|F - G| \leq H$. De plus,

$$\int_a^b H = \int_a^{b-\varepsilon/M} H + \int_{b-\varepsilon/M}^b H = \int_a^{b-\varepsilon/M} h + \int_{b-\varepsilon/M}^b M \leq \varepsilon + (\varepsilon/M)M = 2\varepsilon.$$

Cela montre que F est intégrable sur $[a, b]$.

La fonction $x \mapsto \int_a^x F$ est donc continue sur $[a, b]$, en particulier en b , si bien que

$$\int_a^b F = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x F(t) dt.$$

Comme $f(t) = F(t)$ pour tout $t \in [a, b[$, on a ainsi, si $x < b$, $\int_a^x f = \int_a^x F$. Cela prouve que

$$\int_a^b F = \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \int_a^x f,$$

donc que l'intégrale généralisée de f sur $[a, b[$ est égale à $\int_a^b F$.

Voilà un résultat très utile, et plus général que le précédent.

PROPOSITION 6.6. — Soit $I = [a, b[$ et f une fonction localement intégrable sur I . Soit g une fonction intégrable sur I telle que $|f(x)| \leq g(x)$ pour tout $x \in I$. Alors f est intégrable sur I .

On peut appliquer la proposition précédente à $|f|$ qui est donc intégrable sur I . Une telle fonction est dite *absolument intégrable*.

Démonstration. — Il suffit de vérifier le critère de Cauchy. Nous supposons que $b = +\infty$, les modifications à apporter dans l'autre cas sont minimes. Soit donc $\varepsilon > 0$. Comme g est intégrable sur I , il existe M tel que l'on ait $|\int_x^y g| \leq \varepsilon$ pour x et y dans I , avec $x \geq M$, $y \geq M$. Pour de tels x et y , on a alors

$$\left| \int_x^y f \right| \leq \int_x^y |f| \leq \int_x^y g \leq \varepsilon.$$

Cela prouve que le critère de Cauchy est vérifié, et donc que f est intégrable sur I . □

Il suffit bien entendu (!) d'avoir une majoration $|f(x)| \leq g(x)$ pour x proche de b (pour x grand si $b = +\infty$). En particulier, si f est équivalente à g en b (et g positive), on a *a fortiori* $f = O(g)$ au voisinage de b , ce qui permet d'appliquer la proposition.

EXEMPLE 6.7. — Supposons $I = [0, +\infty[$ et posons

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{1+x^2}, \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

On a

$$\int_0^x g(t) dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan(t)]_0^x = \arctan(x).$$

Par suite, $\int_0^x g(t) dt$ tend vers $\pi/2$ quand $x \rightarrow +\infty$, donc g est intégrable sur $[0, +\infty[$. La majoration $|f(x)| \leq g(x)$, valable pour tout $x \geq 0$, montre que f est absolument intégrable sur $[0, +\infty[$.

On peut démontrer des variantes des formules de changement de variables et d'intégration par parties dans le contexte des intégrales généralisées. Comme elle peuvent induire des erreurs de rédaction, voire de raisonnement, il est cependant demandé de se ramener aux formules démontrées pour les intégrales non-impropres.

EXEMPLE 6.8 (Exemple d'intégration par parties). — La fonction \log est intégrable sur $]0, 1]$ et l'on a $\int_0^1 \log(t) dt = -1$.

En effet, si $x > 0$, on peut intégrer par parties dans l'intégrale $\int_x^1 \log(t) dt$, d'où

$$\begin{aligned} \int_x^1 \log(t) dt &= [t \log(t)]_x^1 - \int_x^1 t \frac{1}{t} dt \\ &= -x \log x - \int_x^1 dt = -x \log x - (1-x) \\ &= -x \log x + x - 1. \end{aligned}$$

Lorsque $x \rightarrow 0$, $x \log(x)$ tend vers 0. Cela fait partie des limites classiques. Si on l'a oubliée, voici une démonstration : on pose $u = -\log(x)$, de sorte que $x \log(x) = u e^{-u}$ est l'inverse de e^u/u , et $u \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 0$. Or, on a $e^u \geq 1 + u + \frac{1}{2}u^2 \geq \frac{1}{2}u^2$ pour $u \geq 0$ (étudier la différence), d'où la minoration $e^u/u \geq u/2$, ce qui prouve que $e^u/u \rightarrow +\infty$, d'où finalement $x \log(x) \rightarrow 0$. Finalement, $\int_x^1 \log(t) dt$ converge vers -1 quand $x \rightarrow 0$.

Rappels

A. Réels

Il y a plusieurs façons de définir l'ensemble des nombres réels mais nous allons plus ou moins nous passer d'une définition précise. Tout nombre réel admet un *développement décimal*, éventuellement illimité à droite ; on convient que le développement décimal d'un nombre réel n'est pas identiquement formé de 9 à partir d'un certain rang, en remplaçant la partie $\overline{a9999\dots}$, où a est un entier compris entre 0 et 8, par $(a + 1)00\dots$.

La partie entière d'un réel x est l'unique entier n tel que $n \leq x < n + 1$. On la note $\lfloor x \rfloor$. Si $x \geq y$, alors $\lfloor x \rfloor \geq \lfloor y \rfloor$.

B. Limites

Une suite (u_n) converge vers $+\infty$ si pour tout réel M , on a $u_n \geq M$ pour tout n assez grand. Elle converge vers un réel ℓ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $|u_n - \ell| < \varepsilon$ pour $n \geq N$.

THÉORÈME R.1 (Suites croissantes majorées). — *Toute suite croissante majorée converge. Toute suite décroissante minorée converge.*

Démonstration. — Soit (u_n) une suite croissante majorée. En effet, la suite $(\lfloor u_n \rfloor)$ des parties entières est croissante, majorée. Comme elle est formée d'entiers, elle est constante à partir d'un certain rang n_0 , de valeur a_0 . On a ainsi $a_0 \leq u_n < a_0 + 1$ pour $n \geq n_0$. Considérons alors la suite formée de la première décimale de u_n , pour $n \geq n_0$; c'est une suite croissante d'entiers entre 0 et 9. Elle est donc constante à partir d'un certain rang n_1 ; de valeur a_1 . Par suite, $\overline{a_0, a_1} \leq u_n < \overline{a_0, a_1} + 10^{-1}$ pour $n \geq n_1$. Par récurrence, on construit un développement décimal $\overline{a_0, a_1 \dots a_k}$ et un entier n_k tel que

$$\overline{a_0, a_1 \dots a_k} \leq u_n < \overline{a_0, a_1 \dots a_k} + 10^{-k}$$

pour tout entier $n \geq n_k$. Alors, la suite (u_n) converge vers l'unique réel a de développement décimal $\overline{a_0, a_1 \dots}$.

Le cas d'une suite (u_n) décroissante et minorée s'en déduit, en considérant la suite croissante et majorée $(-u_n)$. □

COROLLAIRE R.2 (Suites adjacentes). — *Soit (u_n) et (v_n) deux suites de réels telles que $u_n \leq v_n$ pour tout n . On suppose la suite (u_n) croissante, la suite (v_n) décroissante, et que $v_n - u_n$ tend vers 0. Alors, u_n et v_n convergent et ont même limite.*

Démonstration. — La suite (u_n) est croissante, majorée par v_0 , donc converge vers un réel ℓ . La suite (v_n) est décroissante, minorée par u_0 , donc converge vers un réel L . La suite $v_n - u_n$ converge alors vers $L - \ell = 0$, d'où $\ell = L$. □

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites vérifiant $u_n \leq v_n \leq w_n$. Si (u_n) et (w_n) convergent vers un réel ℓ , alors la suite (v_n) converge vers ℓ . Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ pour tout n . Si la suite (u_n) tend vers $+\infty$, la suite (v_n) aussi. (*Théorèmes d'encadrement*)

Une sous-suite d'une suite (u_n) est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})$ où $\varphi: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ est une application strictement croissante. On appelle *valeur d'adhérence* d'une suite toute limite d'une sous-suite convergente. À ce sujet, on a le *théorème fondamental* suivant :

THÉORÈME R.3. — *De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Démonstration. — Soit (u_n) une suite bornée et soit m, M deux réels tels que $m \leq u_n \leq M$. Posons $a_0 = m$ et $b_0 = M$.

L'un des deux intervalles $[a_0, (a_0 + b_0)/2]$ et $[(a_0 + b_0)/2, b_0]$ au moins contient une infinité de termes de la suite (u_n) . Notons le $[a_1, b_1]$, de sorte que $a_1 \geq a_0$, $b_1 \leq b_0$ et $b_1 - a_1 = (b_0 - a_0)/2$. Par récurrence, on construit ainsi une suite d'intervalles $[a_k, b_k]$, telle que chaque intervalle soit égal à la moitié gauche ou la moitié droite de l'intervalle précédent et qu'il contienne une infinité de termes de la suite (u_n) . La suite (a_k) est croissante, la suite (b_k) décroissante et $b_k - a_k = (b_0 - a_0)2^{-k}$. Ce sont donc des suites adjacentes ; elles ont donc une limite commune ℓ .

Soit aussi $\varphi(1)$ un entier tel que $u_{\varphi(1)} \in [a_1, b_1]$. Puis, par récurrence, soit $\varphi(k)$ un entier $\geq \varphi(k-1)$ tel que $u_{\varphi(k)}$ appartienne à $[a_k, b_k]$. On a l'inégalité $a_k \leq u_{\varphi(k)} \leq b_k$; d'après le théorème d'encadrement, cela entraîne que la suite $u_{\varphi(k)}$ converge vers ℓ . \square

On a un critère abstrait, mais efficace, pour affirmer l'existence d'une limite :

PROPOSITION R.4 (Critère de Cauchy). — *Soit (u_n) une suite de réels. La suite (u_n) converge vers un réel si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que l'on ait $|u_m - u_n| \leq \varepsilon$ pour $m, n \geq N$.*

Une suite qui vérifie le critère de Cauchy énoncé dans la proposition est appelée *suite de Cauchy*.

Démonstration. — Supposons que (u_n) converge vers ℓ et soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon/2$ pour $n \geq N$. Alors, si $m, n \geq N$,

$$|u_m - u_n| = |(u_m - \ell) - (u_n - \ell)| \leq |u_m - \ell| + |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Le point crucial de la proposition est la réciproque. Supposons que (u_n) vérifie le critère de Cauchy. Appliquons ce critère avec $\varepsilon = 1$; il existe alors N tel que $|u_m - u_n| \leq 1$ pour $m, n \geq N$, et en particulier $|u_n| \leq 1 + |u_N|$ pour tout $n \geq N$. Cela montre que la suite (u_n) est bornée. D'après le théorème R.3, il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge vers un réel ℓ . Nous allons montrer que la suite (u_n) converge vers ℓ . Soit donc $\varepsilon > 0$ et soit $N > 0$ tel que $|u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N$. Soit d'autre part M tel que $|u_n - u_m| \leq \varepsilon$ si $n, m \geq M$ et posons $P = \max(M, N)$. Pour $n \geq \varphi(P)$, on peut écrire

$$|u_n - \ell| = |(u_{\varphi(P)} - \ell) + (u_n - u_{\varphi(P)})| \leq |u_{\varphi(P)} - \ell| + |u_n - u_{\varphi(P)}|.$$

Le premier terme est majoré par ε car $\varphi(P) \geq \varphi(N) \geq N$ (comme φ est strictement croissante, on a $\varphi(n) \geq n$ pour tout n), de même que le second, car n et $\varphi(P)$ sont tous deux plus grands que M . Par suite, $|u_n - \ell| \leq 2\varepsilon$. Cela montre que (u_n) tend vers ℓ . \square

C. Continuité, continuité uniforme

Une fonction f définie sur un intervalle I de \mathbf{R} est continue en un point $a \in I$ si l'on a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. On dit qu'elle est continue sur I si elle est continue en tout point

de I . Cela revient à dire que pour tout $a \in I$, tout $\varepsilon > 0$, il existe $h > 0$ tel que l'on ait $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$ si $x \in I$ et $|x - a| \leq h$. Avec des quantificateurs :

$$\forall a \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists h > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq h) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon).$$

La continuité uniforme sur I est une notion plus restrictive. Une fonction f définie sur I est dite *uniformément continue* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $h > 0$ tel que l'on ait l'inégalité $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$ dès que x et a sont des points de I vérifiant $|x - a| \leq h$. Le réel h peut ainsi être choisi *indépendamment* du point a . En termes de quantificateurs, cela revient à déplacer le « $\forall a \in I$ » du début de la formule définissant la continuité jusqu'après le « $\exists h > 0$ » :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists h > 0, \forall a \in I, \forall x \in I, (|x - a| \leq h) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon).$$

Le cas le plus simple de fonction uniformément continue est fourni par les fonctions lipschitziennes, c'est-à-dire les fonctions f pour lesquelles il existe un réel C de sorte que l'on ait

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$$

pour $x, y \in I$. En effet, si ε est un réel > 0 , il suffira, pour que $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ que l'on choisisse $|x - y| \leq C/\varepsilon$. D'après la formule de la moyenne, une fonction \mathcal{C}^1 dont la dérivée est bornée est lipschitzienne (on peut prendre pour C un majorant de $|f'|$).

Voici un théorème extrêmement important :

THÉORÈME R.5. — *Toute fonction continue définie sur un intervalle fermé borné est uniformément continue.*

Démonstration. — Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Si f n'est pas uniformément continue, il existe $\varepsilon > 0$ et des couples de points $(x, y) \in I \times I$ arbitrairement proches pour lesquels $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Il existe ainsi, pour tout entier $n \geq 1$, un tel couple (x_n, y_n) avec $|x_n - y_n| \leq 1/n$. La suite (x_n) étant à valeurs dans l'intervalle borné $[a, b]$, on peut en extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$; notons ℓ sa limite; on a $a \leq \ell \leq b$. Alors, la suite $y_{\varphi(n)}$ converge vers ℓ aussi. Comme $\ell \in I$, f est continue en ℓ , si bien que $f(x_{\varphi(n)}) \rightarrow f(\ell)$ et $f(y_{\varphi(n)}) \rightarrow f(\ell)$. Par conséquent, $f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})$ converge vers 0. Mais ceci contredit l'hypothèse que $|f(x_k) - f(y_k)| \geq \varepsilon$ pour tout k . □

Exercices

EXERCICE 1.1 (Théorème de Cesàro). — Soit (u_n) une suite de réels. On pose $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$.

a) On suppose qu'il existe un réel m tel que $u_n \geq m$ pour n supérieur à un entier N . Montrer que l'on a, pour $n > N$,

$$U_n \geq m + \frac{N}{n}(U_N - m).$$

b) Si (u_n) converge vers $+\infty$, montrer que (U_n) converge vers $+\infty$.

c) Si (u_n) converge vers un réel ℓ , montrer que la suite (U_n) converge vers ℓ .

EXERCICE 1.2. — a) On pose

$$u_n = \sum_{p=1}^n \frac{n}{n^2 + p^2}.$$

Trouver une fonction $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ telle que u_n soit une somme de Riemann pour f , associée à la subdivision régulière à n pas.

b) En déduire que la suite (u_n) converge. Calculer sa limite.

c) Mêmes questions avec la suite de terme général

$$v_n = \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p}.$$

EXERCICE 1.3. — a) Si $1 \leq k \leq n$, montrer que l'on a l'inégalité

$$\frac{1}{n} \log \frac{k}{n} \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \log x \, dx \leq \frac{1}{n} \log \frac{k+1}{n}.$$

b) Si $u_n = \frac{1}{n} \log(n!/n^n)$, en déduire que l'on a

$$\frac{1}{n} \log \frac{1}{n} + \int_{1/n}^n \log x \, dx \leq \frac{1}{n} \log \frac{n!}{n^n} \leq \int_{1/n}^{(n+1)/n} \log x \, dx.$$

c) Calculer une primitive de la fonction logarithme, $\log: \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$.

d) En déduire la limite de $(n!/n^n)^{1/n}$ quand n tend vers l'infini.

EXERCICE 1.4. — On pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} \, dx.$$

a) Calculer I_0 et I_1 .

b) Calculer $I_n + I_{n+2}$ pour tout n .

c) En déduire par récurrence sur n que

$$(-1)^n I_{2n} = I_0 - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{2k-1}$$

et

$$(-1)^n I_{2n+1} = I_1 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k}.$$

d) Montrer que $0 \leq I_n \leq 1/(n+1)$. En déduire la limite des suites de terme général

$$u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$$

et

$$v_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

EXERCICE 1.5. — Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$. On pose

$$u_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right), \quad v_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right), \quad w_n = \frac{1}{2}(u_n + v_n).$$

a) Interpréter géométriquement les sommes u_n , v_n et w_n . Si f est croissante, montrer que $u_n \leq \int_a^b f \leq v_n$. Quelle est la limite des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) ?

b) Soit $R_n = \int_a^b f - u_n$. Si f est de classe \mathcal{C}^1 , Montrer que

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+kh}^{a+(k+1)h} (a + (k+1)h - x) f'(x) dx,$$

où $h = (b-a)/n$.

c) (*suite*) Montrer à l'aide de l'égalité de la moyenne qu'il existe pour tout entier $k \in \{0, \dots, n-1\}$ un réel $x_k \in [kh, (k+1)h]$ tel que

$$R_n = \frac{1}{2} \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 \sum_{k=0}^{n-1} f'(x_k).$$

En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nR_n = \frac{1}{2}(b-a)(f(b) - f(a)).$$

d) Calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\int_a^b f - v_n \right) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\int_a^b f - w_n \right).$$

Quelle conséquence pouvez-vous en tirer concernant le calcul numérique?

EXERCICE 1.6. — Pour tout réel $x \in \mathbf{R}$, $x \neq \pm 1$, on pose

$$I(x) = \int_0^\pi \log(1 - 2x \cos(t) + x^2) dt.$$

a) Montrer que $I(-x) = I(x)$, que $I(1/x) = I(x) - 2\pi \log x$.

b) Montrer que $I(x) + I(-x) = I(x^2)$. (Utiliser un changement de variables $t = 2u$.)

c) Quelle est la limite de $I(x)$ quand $x \rightarrow 0$?

d) Calculer $I(x)$ pour tout réel x ($x \neq \pm 1$).

e) Retrouver ce résultat à l'aide de sommes de Riemann.

EXERCICE 1.7. — Soit I un intervalle contenant 0 et soit $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction intégrable. On suppose que f est continue en 0. Calculer la limite quand $x \rightarrow 0$ de

$$\int_x^{2x} \frac{f(t)}{t} dt.$$

EXERCICE 1.8 (Intégrales de Wallis). — Pour $n \geq 0$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin(x))^n dx.$$

- a) Calculer I_0 , I_1 et I_2 .
 b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'on a

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

pour tout entier $n \geq 2$.

- c) En déduire une formule pour I_n à l'aide de factorielles. (On distinguera suivant que n est pair ou impair).
 d) Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.
 e) Montrer que I_{n+1}/I_n tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$. (Indication : quelle est la limite de I_{n+2}/I_n ?)
 f) Montrer la formule

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^4 2^{4n}}{(2n!)^2 (2n+1)}.$$

EXERCICE 1.9. — Si f est une fonction intégrable sur l'intervalle $[a, b]$, on pose $F(t) = \int_a^b f(x) \sin(tx) dx$.

- a) Calculer F lorsque f est la fonction constante égale à 1, puis lorsque f est la fonction caractéristique d'un intervalle $[c, d]$ contenu dans $[a, b]$. Remarquer que dans ces cas, $F(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.
 b) Si f est en escalier, montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 0$.
 c) Soit g et h des fonctions en escalier telles que $|f - g| \leq h$. Montrer que l'on a, pour tout $t \in \mathbf{R}$, l'inégalité

$$|F(t) - G(t)| \leq \int_a^b h(x) dx.$$

- d) Déduire des questions b) et c) que $F(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$. (Si $\varepsilon > 0$, choisir g et h telles que $\int_a^b h \leq \varepsilon$; en déduire que $|F(t)| \leq 2\varepsilon$ si t est assez grand.)
 e) On suppose que f est de classe \mathcal{C}^1 . Retrouver le résultat du d) à l'aide d'une intégration par parties.

EXERCICE 1.10. — a) Pour $a, b, c \in \mathbf{R}$ et $n \geq 1$, calculer l'intégrale

$$\int_0^\pi (a + bx + cx^2) \cos(nx) dx.$$

- b) Trouver deux constantes a et b telles que l'on ait, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n^2} = \int_0^\pi (ax + bx^2) \cos(nx) dx.$$

- c) Simplifier la somme $\sum_{n=1}^N \cos(nx)$.

d) À l'aide des questions b) et c), et de l'exercice précédent, montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

EXERCICE 1.11. — Soit p et q deux réels > 1 tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ à valeurs réelles.

a) Montrer que l'on a l'inégalité : $uv \leq \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q$, pour $u, v \geq 0$. (On pourra fixer v et étudier la fonction $x \mapsto x^p - pvx$.)

b) On suppose dans cette question que f et g sont à valeurs positives et que $\int_a^b f^p = \int_a^b g^q = 1$. Montrer que

$$\int_a^b f(x)g(x) dx \leq 1.$$

c) En appliquant la question précédente aux fonctions $|f|/F$ et $|g|/G$ pour deux réels F et G bien choisis, montrer l'inégalité, dite *de Hölder* :

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q \right)^{1/q}.$$

d) On pose $N_p(f) = \left(\int_a^b |f(x)|^p \right)^{1/p}$. Montrer l'inégalité, dite *de Minkowski* :

$$N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g).$$

(Majorer $|(f+g)(x)|^p$ par $|f(x)||f+g(x)|^{p-1} + |g(x)||f+g(x)|^{p-1}$ et appliquer deux fois la question précédente. Remarquer que $p = (p-1)/q$.)

e) Lorsque $p = q = 2$, quelles inégalités retrouve-t-on ?

EXERCICE 1.12. — a) Calculer, en discutant suivant λ , et en prenant garde aux ensembles de définition, toutes les primitives de la fonction $x \mapsto 1/(1 - 2\lambda \cos x + \lambda^2)$.

b) On suppose $|\lambda| < 1$ et on pose, pour $n \geq 0$,

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\cos nx}{1 - 2\lambda \cos x + \lambda^2} dx.$$

Chercher une relation entre I_n, I_{n+1} et I_{n+2} .

c) Calculer I_n pour tout entier n .

EXERCICE 1.13. — Étudier la convergence des intégrales impropres suivantes,

a) par recherche d'un équivalent :

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^\alpha} dx, \quad \int_0^\infty \frac{\log(1+x^\alpha)}{x^\beta} dx, \quad \int_0^\infty \frac{t^\alpha}{e^t - 1} dt;$$

b) par une intégration par parties :

$$\int_0^\infty \cos(t^2) dt, \quad \int_0^\infty \cos(\log(t)) dt, \quad \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dt.$$

EXERCICE 1.14. — On pose $F(x) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt$.

- a) Montrer que l'intégrale qui définit F converge pour $x > -1$ et diverge pour $x \leq -1$.
- b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout réel $x > -1$, on a $F(x+1) = (x+1)F(x)$.
- c) Calculer $F(0)$, puis $F(n)$ pour tout entier naturel n .

EXERCICE 1.15. — Soit f une fonction continue de $[1, +\infty[$ dans \mathbf{R} . On suppose que l'intégrale $\int_1^\infty f(x) dx$ converge. Soit F la primitive de f qui s'annule en 1.

- a) Montrer que F est bornée sur $[1, +\infty[$.
- b) En déduire que l'intégrale $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} F(x) dx$ converge.
- c) Montrer que pour tout réel $a \geq 1$, on a

$$\int_1^a \frac{f(x)}{x} dx = \frac{1}{a} F(a) + \int_1^a \frac{1}{x^2} F(x) dx.$$

- d) Montrer que l'intégrale $\int_1^\infty \frac{1}{x} f(x) dx$ converge.

INDEX

- critère de Cauchy, 26
 - pour les intégrales généralisées, 22
- développement décimal, 25
- discriminant, 15
- fonction continue, 9, 12, 18, 27
- fonction continue par morceaux, 7, 16
- fonction croissante, 12
- fonction dérivable, 19
- fonction en escalier, 6
- fonction intégrable (au sens de Riemann), 12–14, 16, 19, 21
- fonction lipschitzienne, 18, 27
- fonction localement intégrable, 18, 19, 21
- fonction monotone, 12
- fonction réglée, 9, 10, 12
- fonction uniformément continue, 11, 27
- formule d'intégration par parties, 20
- formule de changement de variables, 20
- formule de Taylor avec reste intégral, 20
- inégalité de Cauchy-Schwarz, 15
- inégalité de Hölder, 31
- inégalité de la moyenne, 14
- inégalité de Minkowski, 31
- intégrale d'une fonction en escalier, 8
- intégrale d'une fonction intégrable, 13
- intégrale généralisée, 21
- méthode des rectangles, 16
- méthode des trapèzes, 16
- pas d'une subdivision, 6
- raffinement d'une subdivision, 6, 8
- somme de Riemann, 16
- sous-suite, 26
- subdivision, 6, 7, 16
- subdivision adaptée à une fonction continue par morceaux, 7
- subdivision adaptée à une fonction en escalier, 6, 7
- subdivision régulière, 6, 11, 16
- suite de Cauchy, 13, 26
- suite extraite, *voir* sous-suite 26
- suites adjacentes, 25
- taux d'accroissement, 19
- théorème d'encadrement, 25, 26
- valeur d'adhérence, 26