



Les exercices qui suivent sont la traduction française des exercices du chapitre 2 (paragraphe 4 et 5) du livre

Otto BRETSCHER, *Linear Algebra with Applications*
Prentice Hall, 3^e édition, 2004. ISBN : 013145336X

CHAPITRE 2. APPLICATIONS LINÉAIRES

4. Produits de matrices

BUT. — Savoir calculer des produits de matrices colonne par colonne et coefficient par coefficient. Interpréter la multiplication des matrices comme la composition des applications linéaires correspondantes. Savoir utiliser les règles de calcul de l'algèbre matricielle. Multiplier des matrices par blocs.

Dans les exercices 1 à 13, calculer à la main, lorsqu'ils sont définis, les produits de matrices indiqués.

$$1. \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3. \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$4. \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$5. \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$6. \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$13. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & 1 \\ g & h & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

14. Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E = [5].$$

Des 25 produits $AA, AB, AC, \dots, ED, EE$, déterminez et calculez ceux qui sont définis.

15. Calculer le produit de matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -2 & 5 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Expliquez pourquoi le résultat ne contredit pas le fait 2.4.9 du cours.

Soit A et B des matrices $n \times n$ inversibles. Parmi les formules des exercices 16 à 25, lesquelles sont vraies indépendamment du choix de A et B .

$$16. (I_n - A)(I_n + A) = I_n - A^2$$

$$17. (A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$18. A^2 \text{ est inversible et } (A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$$

$$19. A + B \text{ est inversible et } (A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$$

$$20. (A - B)(A + B) = A^2 - B^2$$

$$21. ABB^{-1}A^{-1} = I_n$$

$$22. ABA^{-1} = B$$

$$23. (ABA^{-1})^3 = AB^3A^{-1}$$

$$24. (I_n + A)(I_n + A^{-1}) = 2I_n + A + A^{-1}$$

$$25. A^{-1}B \text{ est inversible et } (A^{-1}B)^{-1} = B^{-1}A.$$

Effectuer les produits par blocs demandés dans les exercices 26 et 27. Effectuer ensuite les mêmes calculs sans utiliser les blocs. Justifiez toutes les étapes de vos calculs.

$$26. \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{array} \right]$$

$$27. \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 4 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ \hline 3 & 4 \end{array} \right]$$

28. Déterminer une matrice 2×2 non nulle, A , telle que $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

29. Déterminer une matrice 2×2 , B , telle que $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

30. Si A une matrice $n \times n$, non inversible, existe-t-il toujours une matrice non nulle $n \times n$, B , telle que $AB = 0$?

31. Étant donnée la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

déterminer une matrice A telle que $BA = I_2$. Combien de solutions A ce problème a-t-il ?

32. Existe-t-il une matrice 3×2 , A , et une matrice 2×3 , B , telles que le produit AB soit égal à I_3 . *Indication* : étant données des matrices A et B , de tailles 3×2 et 2×3 , il existe un vecteur non nul $\vec{x}$ tel que $B\vec{x} = \vec{0}$ (pourquoi?). Considérez alors $AB\vec{x}$.

33. Existe-t-il une matrice 3×2 , A , et une matrice 2×3 , B , dont le produit AB soit inversible? (Suivre l'indication de l'exercice précédent.)

34. Soit A et B deux matrice $n \times n$ dont le produit AB est inversible. Montrer que les matrices A et B sont toutes deux inversibles. *Indication* : on a $AB(AB)^{-1} = I_n$ et $(AB)^{-1}AB = I_n$. Utiliser alors le fait 2.4.9 du cours.

35. Considérons une matrice $m \times n$, B , et une matrice $n \times m$, A , telles que $BA = I_m$.

a. Déterminez toutes les solutions du système linéaire $A\vec{x} = \vec{0}$.

b. Montrer que pour tout vecteur $\vec{b}$ de $\mathbf{R}^m$, le système linéaire $B\vec{x} = \vec{b}$ est consistant.

c. Que pouvez-vous dire du rang de A ? et du rang de B ?

d. Justifiez que l'on a l'inégalité $m \leq n$.

36. Déterminez toutes les matrices 2×2 , X telles que $AX = B$, où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

37. Déterminez toutes les matrices inversibles S telles que

$$S^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

38. Déterminez toutes les matrices inversibles S telles que

$$S^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

39. Déterminer les matrices 2×2 , X , qui commutent à toute matrice 2×2 .

40. Soit A et B deux matrices 2×2 telles que

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad (AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Déterminez A .

41. Considérons la matrice

$$D_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

C'est la matrice de la rotation d'angle α .

a. Étant donnés deux angles, α et β , décrivez géométriquement les applications linéaires données par $\vec{y} = D_\alpha D_\beta \vec{x}$ et $\vec{y} = D_\beta D_\alpha \vec{x}$. Coïncident-elles?

b. Calculez alors les produits $D_\alpha D_\beta$ et $D_\beta D_\alpha$. Le résultat est-il cohérent avec ce que vous avez répondu à la question a)? On rappelle les identités trigonométriques

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

42. Considérons les droites P et Q de $\mathbf{R}^2$ esquissées ci-dessous. Considérons l'application linéaire T donnée par $T(\vec{x}) = \text{sym}_Q(\text{sym}_P(\vec{x}))$; autrement dit, on calcule le symétrique de $\vec{x}$ par rapport à la droite P , puis celui du résultat obtenu par rapport à la droite Q .

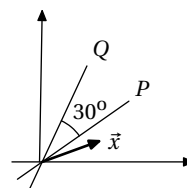


FIGURE 42A

a. Esquissez $T(\vec{x})$ si $\vec{x}$ est le vecteur indiqué sur la figure. Quel est l'angle formé par les vecteurs $\vec{x}$ et $T(\vec{x})$? Quelle relation y a-t-il entre les longueurs des vecteurs $\vec{x}$ et $T(\vec{x})$?

b. À l'aide des résultats obtenus dans la question a), décrivez géométriquement l'application linéaire T . Est-ce une réflexion, une rotation, une transvection ou une projection?

c. Calculez la matrice de T .

43. Déterminez une matrice 2×2 , $A \neq I_2$, telle que $A^3 = I_2$.

44. Déterminez toutes les applications linéaires T de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ telles que

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Indication : Il s'agit de trouver les matrices 2×2 , A , telles que

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ces deux équations peuvent être combinées en l'équation matricielle, d'inconnue A ,

$$A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

45. En utilisant l'exercice précédent comme guide, justifiez l'assertion suivante. Soit $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ des vecteurs de $\mathbf{R}^m$ tels que la matrice

$$S = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_m \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

soit inversible. Soit $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m$ des vecteurs quelconques dans $\mathbf{R}^n$. Alors, il existe une application linéaire T , et une seule, de $\mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}^n$ telle que $T(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$ pour tout entier i entre 1 et m . Déterminez la matrice A de cette application linéaire en fonction de S et de la matrice

$$B = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{w}_1 & \vec{w}_2 & \dots & \vec{w}_m \\ | & | & & | \end{bmatrix}.$$

46. Déterminez la matrice A de l'application linéaire T de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^3$ telle que

$$T \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(Cf. l'exercice 45.)

47. Déterminez la matrice A de l'application linéaire T de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ telle que

$$T \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(Cf. l'exercice 45.)

48. Considérons le tétraèdre régulier esquissé ci-dessous, dont le centre est en l'origine. Soit $T: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ la rotation (de centre O) autour de la droite (OP_2) qui applique le point P_1 sur le point P_3 . Déterminez les images des quatre sommets du tétraèdre par cette application.

$$\begin{array}{l} P_0 \xrightarrow{T} \\ P_1 \rightarrow \\ P_2 \rightarrow \\ P_3 \rightarrow \end{array}$$

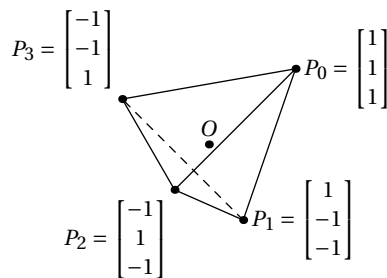


FIGURE 48A

Soit $L: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ la réflexion par rapport au plan passant par les points O , P_0 et P_3 . Déterminez les images des quatre sommets du tétraèdre par cette transformation.

$$\begin{array}{l} P_0 \xrightarrow{L} \\ P_1 \rightarrow \\ P_2 \rightarrow \\ P_3 \rightarrow \end{array}$$

Décrivez géométriquement les applications linéaires suivantes :

- T^{-1} ;
- L^{-1} ;
- $T^2 = T \circ T$ (la composée de T avec elle-même).
- Déterminez les images des quatre sommets du tétraèdre par les applications $T \circ L$ et $L \circ T$:

$$\begin{array}{ll} P_0 \xrightarrow{T \circ L} & P_0 \xrightarrow{L \circ T} \\ P_1 \longrightarrow & P_1 \longrightarrow \\ P_2 \longrightarrow & P_2 \longrightarrow \\ P_3 \longrightarrow & P_3 \longrightarrow \end{array}$$

- Déterminez les images des quatre sommets par l'application $L \circ T \circ L$. Décrivez géométriquement cette application linéaire.

49. Déterminez les matrices des applications linéaires T et L étudiées dans l'exercice 48.

50. Considérons la matrice

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ainsi qu'une matrice arbitraire 3×3 ,

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}.$$

a. Calculer EA . Comparez A et EA , comptez la technique d'élimination étudiée au paragraphe 1.2.

b. Considérons la matrice

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ainsi qu'une matrice arbitraire 3×3 , A . Calculez EA . Quels commentaires faites-vous à propos du lien entre A et EA .

c. Déterminez une matrice 3×3 , E , telle que EA soit obtenue à partir de A en échangeant les deux dernières lignes (A étant une matrice 3×3 arbitraire).

d. Les matrices de la forme introduite aux questions a), b), c) sont appelées *élémentaires* : une matrice $n \times n$ est dite élémentaire si elle est obtenue à partir de I_n par l'une des trois opérations élémentaires sur les lignes de I_n . Décrivez la forme des trois types de matrices élémentaires.

51. Une matrice élémentaire est-elle inversible ? Si oui, est-ce que l'inverse d'une matrice élémentaire est encore élémentaire ? Expliquez la signification de vos réponses en termes d'opérations élémentaires sur les lignes.

52. a. Justifiez l'assertion suivante : si A est une matrice $n \times m$, il existe des matrices élémentaires $n \times n$, $E_1, E_2, \dots, E_p$, telles que

$$\text{frel}(A) = E_1 E_2 \dots E_p A \quad .$$

b. Déterminez de telles matrices élémentaires $E_1, E_2, \dots, E_p$ lorsque

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad .$$

53. a. Justifiez l'assertion suivante : si A est une matrice $n \times m$, il existe une matrice inversible $n \times n$, S , telle que

$$\text{frel}(A) = SA \quad .$$

b. Déterminez une telle matrice inversible S lorsque

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \quad .$$

54. a. Justifiez l'assertion suivante : toute matrice inversible est produit de matrices élémentaires.

b. Écrivez $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ comme produit de matrices élémentaires.

55. Énumérez tous les types possibles de matrices élémentaires E de taille 2×2 . Dans chaque cas, décrivez géométriquement l'application linéaire donnée par $\vec{y} = E\vec{x}$.

56. Considérons une matrice inversible $n \times n$, A , et une matrice $n \times n$, B . Une suite donnée d'opérations élémentaires transforme A en I_n .

a. Qu'obtient-on en appliquant les mêmes opérations élémentaires, dans le même ordre, à la matrice AB ?

b. Qu'obtient-on en appliquant les mêmes opérations élémentaires, dans le même ordre, à la matrice I_n ?

57. Est-ce que le produit de deux matrices triangulaires inférieures est encore une matrice triangulaire inférieure ? Justifiez votre réponse.

58. Considérons la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad .$$

a. Déterminez des matrices élémentaires, triangulaires inférieures, $E_1, E_2, \dots, E_m$, telles que le produit

$$E_m \dots E_2 E_1 A$$

soit une matrice triangulaire supérieure U . *Indication* : Modifiez comme-suit l'algorithme d'élimination de Gauss-Jordan. Dans l'étape 3, n'éliminez que les entrées de la colonne du curseur qui sont sous le pivot. Cela peut être effectué à l'aide de matrices élémentaires triangulaires *inférieures*. Vous pouvez aussi omettre l'étape 2 (division par l'entrée du curseur).

b. Déterminez des matrices élémentaires triangulaires inférieures $M_1, M_2, \dots, M_m$ et une matrice triangulaire supérieure U telles que

$$A = M_1 M_2 \dots M_m U \quad .$$

c. Déterminez une matrice triangulaire inférieure L et une matrice triangulaire supérieure U telles que

$$A = LU \quad .$$

Une telle écriture d'une matrice inversible est appelée *factorisation LU*.⁽¹⁾ La méthode décrite dans cet exercice pour obtenir une factorisation LU peut être systématisée quelque peu, mais les principales idées sont déjà là. Une factorisation LU

⁽¹⁾La terminologie vient de l'anglais *L-lower*/inférieur et *U-upper*/supérieur [NdT].

(comme défini ici) n'existe pas toujours (voir l'exercice 60).

d. Déterminez une matrice triangulaire inférieure L n'ayant que des 1 sur la diagonale, une matrice triangulaire supérieure U n'ayant que des 1 sur la diagonale, et une matrice diagonale D , telles que $A = LDU$. Une telle écriture d'une matrice inversible est appelée *factorisation LDU*.

59. Lorsqu'on connaît une factorisation LU d'une matrice A , la résolution d'un système linéaire

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

est bien plus facile. Considérons par exemple la factorisation LU

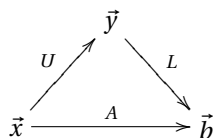
$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & 6 & -5 \\ 1 & 4 & 6 & 20 \\ -1 & 6 & 20 & 43 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 8 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= LU \end{aligned}$$

Supposons qu'on ait à résoudre le système $A\vec{x} = LU\vec{x} = \vec{b}$ où

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 14 \\ 9 \\ 33 \end{bmatrix}.$$

a. Posez $\vec{y} = U\vec{x}$ et résolvez le système $L\vec{y} = \vec{b}$ par substitution (trouvez d'abord y_1 , puis y_2 , etc.) Faites cela à la main, en explicitant toutes les étapes.

b. Résolvez le système $U\vec{x} = \vec{y}$ par substitution de sorte à obtenir la solution $\vec{x}$ du système $A\vec{x} = \vec{b}$. Faites cela à la main, en explicitant toutes les étapes.



60. Montrez que la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ne peut pas être écrite sous la forme LU , où L est triangulaire inférieure et U est triangulaire supérieure.

61. Dans cet exercice, nous allons étudier à quelle condition une matrice inversible $n \times n$, A , possède

une factorisation LU (voir l'exercice 58). La définition suivante sera utile : pour $m = 1, \dots, n$, on appelle mineur principal de taille m la matrice $A^{(m)}$ obtenue à partir de A en ne gardant que les m premières lignes et les m premières colonnes ; c'est une matrice $m \times m$. Par exemple, la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

admet pour mineurs principaux les matrices

$$A^{(1)} = [1], A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 7 \end{bmatrix}.$$

Nous allons montrer qu'une matrice inversible $n \times n$, A , possède une factorisation LU si et seulement si tous ses mineurs principaux sont inversibles.

a. Soit $A = LU$ une factorisation LU de A . À l'aide de produits par blocs, montrez que $A^{(m)} = L^{(m)}U^{(m)}$ pour $m = 1, \dots, n$.

b. Dédurre de la question a) que si une matrice inversible $n \times n$ possède une factorisation LU , ses mineurs principaux sont tous inversibles.

c. Soit A une matrice $n \times n$ dont les mineurs principaux sont tous inversibles. Montrez que A possède une factorisation LU . *Indication* : par récurrence, on peut supposer que $A^{(n-1)}$ possède une factorisation LU , $A^{(n-1)} = L'U'$. Utilisez des produits par bloc pour obtenir une factorisation LU de A . Alternativement, vous pouvez expliquer ce résultat en termes d'élimination de Gauss-Jordan : justifiez que si tous les mineurs principaux sont inversibles, aucun échange de lignes n'est nécessaire.

62. a. Démontrez que si une matrice A possède une factorisation LU , elle possède aussi une factorisation LDU (voir l'exercice 58, question d)).

b. Démontrez que si une matrice inversible $n \times n$, A possède une factorisation LDU , cette factorisation est unique. *Indication*. Supposez que $A = L_1 D_1 U_1 = L_2 D_2 U_2$. Alors $U_2 U_1^{-1} = D_2^{-1} L_2^{-1} L_1 D_1$ est diagonale (pourquoi?). En conclure que $U_1 = U_2$.

63. Démontrez que la multiplication des matrices est distributive sur l'addition :

$$A(C + D) = AC + AD \quad \text{et} \quad (A + B)C = AC + BC.$$

64. Soit A une matrice $n \times p$, B une matrice $p \times m$ et k un nombre réel. Montrez que

$$(kA)B = A(kB) = k(AB).$$

65. Considérons une matrice par blocs

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

où A_{11} et A_{22} sont des matrices carrées. Pour quelles valeurs de A_{11} et A_{22} la matrice A est-elle inversible? Quelle est alors l'inverse de A ?

66. Considérons une matrice par blocs

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

où A_{11} et A_{22} sont des matrices carrées. Pour quelles valeurs de A_{11} , A_{21} et A_{22} la matrice A est-elle inversible? Quelle est alors l'inverse de A ?

67. On se donne deux matrices A et B dont le produit AB est défini. Décrire la i -ième ligne du produit AB en fonction des lignes de A et de la matrice B .

68. Considérons les matrices par blocs

$$A = \begin{bmatrix} k & \vec{v} \\ 0 & B \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix},$$

où B et R sont des matrices $n \times n$ (R étant inversible), k est un nombre réel, et $\vec{v}$ un vecteur-ligne à n colonnes. Calculer $S^{-1}AS$.

69. Considérons la matrice par blocs

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & 0 & A_{23} \end{bmatrix},$$

où A_{11} est inversible. Déterminez le rang de A en fonction des rangs des matrices A_{11} , A_{12} , A_{13} et A_{23} .

70. Considérons la matrice par blocs

$$A = \begin{bmatrix} I_n & \vec{v} \\ \vec{w} & 1 \end{bmatrix},$$

où $\vec{v}$ est un vecteur de $\mathbf{R}^n$ et $\vec{w}$ un vecteur-ligne à n colonnes. Pour quelles valeurs de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ la matrice A est-elle inversible? Dans ce cas, que vaut A^{-1} ?

71. Déterminez toutes les matrices inversibles $n \times n$, A , telles que $A^2 = A$.

72. Trouvez une matrice non nulle, $n \times n$, A , dont tous les coefficients sont égaux à un même nombre réel, telle que $A^2 = A$.

Dans les exercices 73 à 82, déterminez toutes les matrices qui commutent avec la matrice donnée, A .

$$\mathbf{73.} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{79.} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{74.} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{80.} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{75.} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{81.} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{76.} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{77.} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{82.} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{78.} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

83. Soit A et B des matrices $n \times n$ dont les coefficients sont des nombres réels positifs ou nuls. On suppose que les coefficients de A sont inférieurs ou égaux à un nombre réel s , et que la somme des coefficients de chaque ligne de B est inférieure ou égale à un nombre réel r . Montrer que tous les coefficients de la matrice AB sont inférieurs ou égaux à sr .

84. (Cet exercice est la suite de l'exercice 83.) Soit A une matrice $n \times n$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls. Supposons que la somme des coefficients de chaque colonne de A soit strictement inférieure ou égale à 1. Soit r la plus grande somme des coefficients d'une colonne de A .

a. Montrez que pour tout entier positif m , les coefficients de A^m sont positifs ou nuls, et inférieurs ou égaux à r^m .

b. Montrez que l'on a

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A^m = 0$$

au sens où chaque coefficient de A^m tend vers 0.

c. Montrez que la série de matrices

$$I_n + A + A^2 + \cdots + A^m + \cdots$$

est convergente (coefficient par coefficient).

d. Calculez le produit

$$(I_n - A)(I_n + A + A^2 + \cdots + A^m).$$

Simplifiez le résultat. Faites alors tendre m vers l'infini et montrez que la matrice $(I_n - A)$ est inversible, d'inverse

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \cdots + A^m + \cdots.$$

85. (Cet exercice fait suite aux exercices 83 et 84 ainsi qu'à l'exercice 2.3/49.)

a. Considérons les secteurs industriels $J_1, \dots, J_n$ d'une économie. On dit que le secteur J_j est *productif* si la somme des coefficients de la j -ième colonne de la matrice technologique A est strictement inférieure à 1. Qu'est-ce que cela signifie en termes économiques?

b. On dit qu'une économie est productive si toutes ses secteurs industriels sont productifs. L'exercice 84 montre que si A est la matrice technologique d'une économie productive, la matrice $I_n - A$ est inversible. Qu'en déduisez-vous quant à la possibilité d'une économie productive de satisfaire la demande des consommateurs?

c. Interprétez en termes économiques la formule

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \dots + A^m + \dots$$

établie dans l'exercice 84, d).

86. La couleur de la lumière peut être représentée par un vecteur

$$\begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix},$$

où R représente la quantité de rouge, G celle de vert, et B celle de bleu. L'œil humain et le cerveau transforment le signal reçu en un vecteur

$$\begin{bmatrix} I \\ L \\ S \end{bmatrix}$$

donné par

$$I = \frac{R + G + B}{3} \quad \text{intensité}$$

$$L = R - G \quad \text{signal grandes ondes}$$

$$S = B - \frac{R + G}{2} \quad \text{signal ondes courtes.}$$

a. Déterminez la matrice P qui représente l'application linéaire appliquant

$$\begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} \quad \text{sur} \quad \begin{bmatrix} I \\ L \\ S \end{bmatrix}.$$

b. Considérons une paire de lunettes de soleil pour sports aquatiques qui filtre toute la lumière bleue et laisse passer toute la lumière rouge et verte. Déterminez la matrice 3×3 de l'application linéaire qui correspond à la transformation subie par la lumière lorsqu'elle passe par les lunettes de soleil.

c. Déterminez alors la matrice de l'application linéaire composée que subit la lumière en passant d'abord par les lunettes puis jusqu'à l'œil.

d. Lorsque vous mettez des lunettes de soleil, le signal (intensité, signal grandes ondes, signal ondes courtes) subit aussi une transformation. Déterminez sa matrice M .

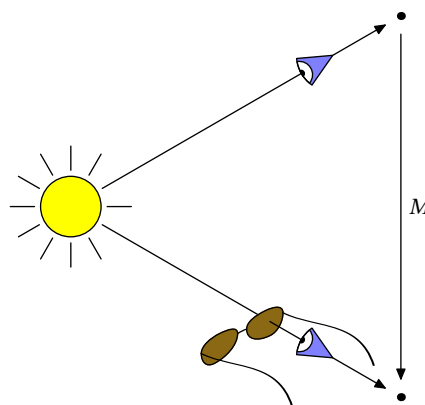


FIGURE 86A

87. La population d'un village est constituée de trois *clans* : chaque personne appartient de manière permanente à un clan. Il y a des règles strictes de mariage ; en particulier, une personne d'un clan ne peut épouser qu'une personne d'un autre clan. Ces règles sont résumées par la matrice A ci-dessous ; le fait que l'entrée $(2,3)$ soit égale à 1 signifie que le mariage entre un homme du clan III et d'une femme du clan II est autorisé.

		Clan du mari				
		I	II	III		
$A =$	0	1	0	I	Clan de l'épouse	
	0	0	1			II
	1	0	0			III

Le clan d'un enfant est déterminé par celui de la mère, comme indiqué par la matrice B . Selon ce schéma, les membres d'une même fratrie appartiennent au même clan.

		Clan de la mère				
		I	II	III		
$B =$	1	0	0	I	Clan de l'enfant	
	0	0	1			II
	0	1	0			III

L'appartenance d'une personne au clan I peut être représentée par le vecteur

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

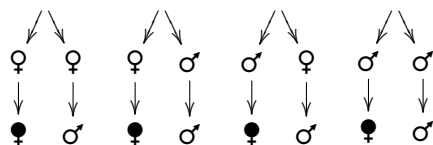
et de même pour les deux autres clans. La matrice A transforme le clan du mari en celui de l'épouse (si $\vec{x}$ représente le clan du mari, celui de l'épouse est représenté par $A\vec{x}$).

a. Les matrices A et B sont-elles inversibles? Si oui, déterminez leur inverse. De manière concrète, que signifient les réponses obtenues?

b. En termes des règles de communauté, quelle est la signification de la matrice B^2 ?

c. De même, quelle est la signification des matrices AB et BA ? Ces deux matrices sont-elles égales?

d. Bueya est une jeune femme qui a de nombreux cousins (mâles), tant du côté de son père que de sa mère. Les tableaux ci-dessous représentent les quatre rapports de filiation possibles :



Dans chacun des quatre cas, déterminez la matrice qui donne le clan du cousin en fonction de celui de Bueya.

e. Selon les lois de ce village, Bueya peut-elle épouser un de ses cousins? (On ne connaît pas son clan.)

88. Pour le contexte de cet exercice, référez-vous à l'exercice 2.3/45.

a. Selon le fait 2.4.4 du cours, combien de multiplications de nombres réels sont requises par le calcul du produit de deux matrices 2×2 ?

b. Toujours selon le fait 2.4.4, combien de multiplications faut-il effectuer pour calculer le produit d'une matrice $n \times p$ et d'une matrice $p \times m$?

En 1969, le mathématicien allemand Volker Strassen a surpris la communauté mathématique en montrant que l'on pouvait multiplier deux matrices 2×2 en ne faisant que sept multiplications de nombres réels. Voilà son astuce : Supposons qu'il faille calculer le produit AB , où $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et

$$B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}. \text{ Calculez d'abord}$$

$$h_1 = (a + d)(p + s)$$

$$h_2 = (c + d)p$$

$$h_3 = a(q - s)$$

$$h_4 = d(r - p)$$

$$h_5 = (a + b)s$$

$$h_6 = (c - a)(p + q)$$

$$h_7 = (b - d)(r + s)$$

Alors,

$$AB = \begin{bmatrix} h_1 + h_4 - h_5 + h_7 & h_3 + h_5 \\ h_2 + h_4 & h_1 + h_3 - h_2 + h_6 \end{bmatrix}.$$

89. Soit $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers positifs ou nuls : $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. On définit deux fonctions f et g de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ par

$$f(x) = 2x \quad ;$$

$$g(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } x \text{ est pair;} \\ (x+1)/2 & \text{si } x \text{ est impair.} \end{cases}$$

Explicitiez les fonctions composées $g \circ f$ et $f \circ g$? Est-ce que l'une d'entre elles est l'application identique de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$? Est-ce que les fonctions f et g sont inversibles?

90. Optique géométrique. Considérons une lentille mince biconvexe avec deux faces sphériques.



FIGURE 90A

C'est un bon modèle pour les lentilles de l'œil humain ainsi que celles utilisées dans de nombreux instruments optiques tels que les lunettes de lecture, appareils photo, microscopes ou télescopes. La ligne joignant les centres des sphères qui définissent les deux faces est appelée l'axe optique de la lentille.

Dans cet exercice, nous apprenons comment rendre compte du trajet d'un rayon lumineux lorsqu'il traverse la lentille, sous réserve que les conditions suivantes soient satisfaites :

– le rayon et l'axe optique sont dans un même plan ;

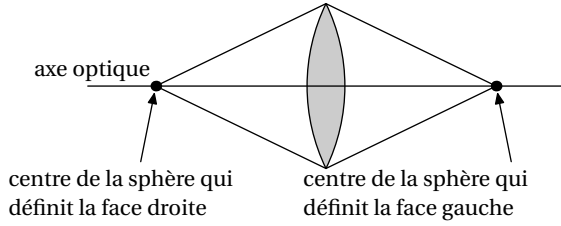


FIGURE 90B

– l'angle que fait le rayon avec l'axe optique est petit.

Pour étudier ces rayons lumineux, on introduit deux *plans de référence*, à la gauche et à la droite de la lentille. On peut alors caractériser un rayon

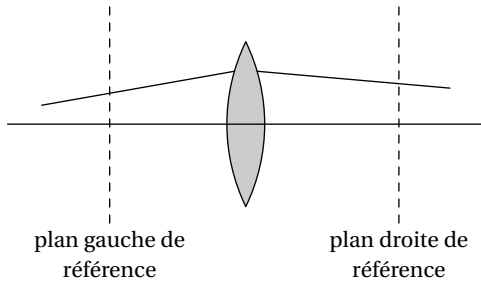


FIGURE 90C

incident par sa pente m et l'ordonnée x du point d'intersection avec le plan de référence de gauche. De même, on peut caractériser le rayon émergent par sa pente n et l'ordonnée y du point d'intersection avec le plan de référence de droite.

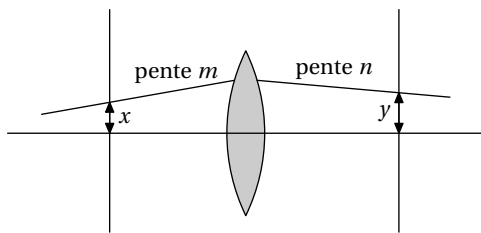


FIGURE 90D

On veut savoir comment le rayon émergent dépend du rayon incident; autrement dit, nous nous intéressons à la transformation

$$T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad \begin{bmatrix} x \\ m \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y \\ n \end{bmatrix}.$$

Nous allons voir que T peut être assimilée à une application linéaire, pour autant que m soit petit,

ce que nous avons supposé. Pour étudier cette transformation, nous divisons le trajet du rayon en trois segments, tels que représentés sur la figure 90E ci-dessous. On a introduit deux plans de

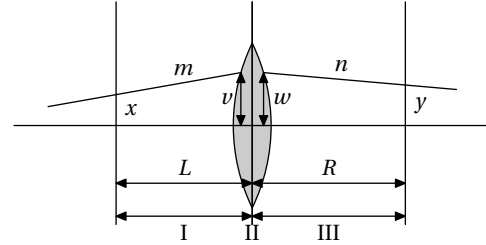


FIGURE 90E

référence auxiliaires, directement à gauche et à droite de la lentille. Notre transformation

$$\begin{bmatrix} x \\ m \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y \\ n \end{bmatrix}$$

peut alors être représentée par la composition de trois transformations plus simples

$$\begin{bmatrix} x \\ m \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} v \\ m \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} w \\ n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y \\ n \end{bmatrix}.$$

De la définition de la pente d'une droite, on trouve les relations $v = x + Lm$ et $y = w + Rn$.

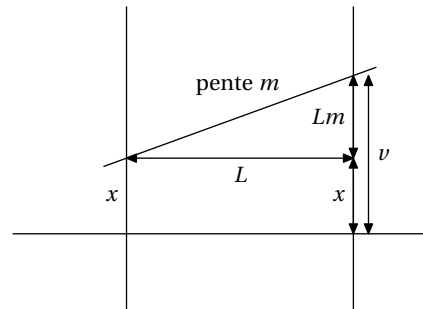


FIGURE 90F

$$\begin{bmatrix} v \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + Lm \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ m \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} y \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ m \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} v \\ m \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} w \\ n \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} y \\ n \end{bmatrix}.$$

Cela nous emmènerait trop loin dans le cours de physique que d'établir ici une formule pour l'application

$$\begin{bmatrix} v \\ m \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} w \\ n \end{bmatrix}.$$

Sous les hypothèses que nous avons faites, cette transformation est bien approchée⁽²⁾ par

$$\begin{bmatrix} w \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ m \end{bmatrix}$$

où k est un nombre réel positif (cette formule implique $w = v$), d'où :

$$\begin{bmatrix} x \\ m \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} v \\ m \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} w \\ n \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} y \\ n \end{bmatrix}.$$

La transformation $\begin{bmatrix} x \\ m \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y \\ n \end{bmatrix}$ est représentée par le produit de matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - Rk & L + R - kLR \\ -k & 1 - kL \end{bmatrix}.$$

a. *Focalisation de rayons parallèles.* — Considérons la lentille de l'œil humain, où la rétine est le plan de référence de droite. Chez l'adulte, la distance R est de l'ordre de 0,025 m (un pouce...). Les muscles ciliaires permettent de modifier la forme de la lentille, et donc la constante k , dans un certain domaine. Quelle valeur de k vous permet-elle de focaliser des rayons incidents parallèles, tels que représentés par la figure? Cette valeur de k vous permettra de voir clairement un objet distant. (L'unité de mesure communément adoptée pour k est la dioptrie, à savoir le m^{-1} .)

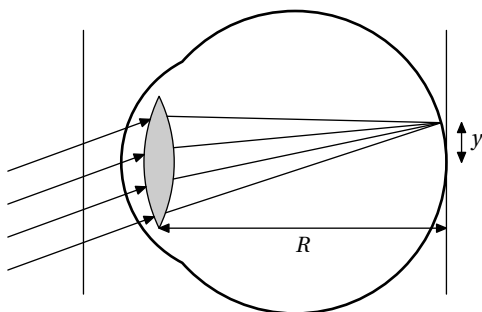


FIGURE 90G

b. Quelle valeur de k vous permet de lire ce texte à une distance de $L = 0,3$ mètres? Aidez-vous de la figure suivante (qui n'est pas à l'échelle).

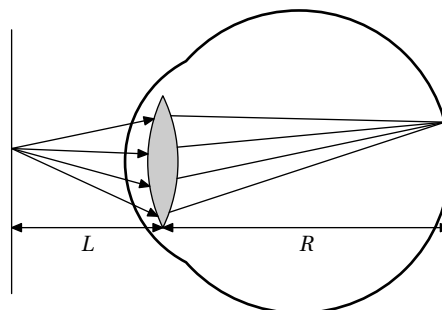


FIGURE 90H

c. *Le télescope.* — Un télescope astronomique est constitué de deux lentilles de même axe optique.

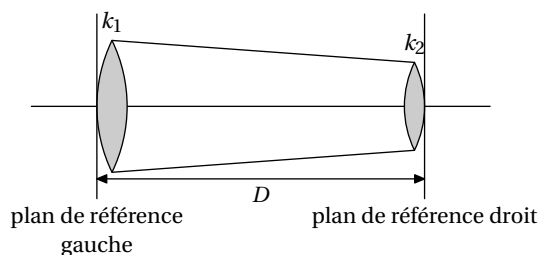


FIGURE 90I

Déterminez la matrice de la transformation

$$\begin{bmatrix} x \\ m \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y \\ n \end{bmatrix},$$

en termes des paramètres k_1 et k_2 des deux lentilles, et de D . Pour des valeurs données de k_1 et k_2 , comment choisir D de sorte que des rayons incidents parallèles soient transformés en des rayons parallèles? Quelle est la relation entre D et les distances focales, $1/k_1$ et $1/k_2$, des deux lentilles?

⁽²⁾Voir par exemple, P. BAMBERG et S. STERNBERG, *A Course in Mathematics for Students of Physics 1*, Cambridge University Press, 1991.

CHAPITRE 2. APPLICATIONS LINÉAIRES

5. Récapitulation : Vrai ou faux ?

Déterminez si les énoncés suivants sont vrais ou faux en justifiant votre réponse.

1. La fonction T donnée par $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y \\ y-x \end{bmatrix}$ est une application linéaire.

2. La matrice $\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ représente une rotation.

3. Si A est une matrice inversible $n \times n$, alors $\text{frel}(A) = I_n$.

4. La formule $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$ est vérifiée quelle que soit la matrice inversible A .

5. Pour toutes matrices $n \times n$, A et B , on a $AB = BA$.

6. Si A et B sont deux matrices $n \times n$ telles que $AB = I_n$, alors A est l'inverse de B .

7. Si A est une matrice 3×4 et B est une matrice 4×5 , alors AB est une matrice 5×3 .

8. La fonction T donnée par $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix}$ est une application linéaire.

9. La matrice $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$ représente une similitude directe (rotation composée avec une homothétie).

10. Si A est une matrice inversible $n \times n$, alors A commute avec A^{-1} .

11. La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ est inversible.

12. La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ est inversible.

13. Il existe une matrice triangulaire supérieure 2×2 , A , telle que $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

14. La fonction T donnée par

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y+1)^2 - (y-1)^2 \\ (x-3)^2 - (x+3)^2 \end{bmatrix}$$

est une application linéaire.

15. La matrice $\begin{bmatrix} k & -2 \\ 5 & k-6 \end{bmatrix}$ est inversible quel que soit le nombre réel k .

16. Il existe un nombre réel k tel que la matrice $\begin{bmatrix} k-1 & -2 \\ -4 & k-3 \end{bmatrix}$ ne soit pas inversible.

17. Il existe un nombre réel k tel que la matrice $\begin{bmatrix} k-2 & 3 \\ -3 & k-2 \end{bmatrix}$ ne soit pas inversible.

18. La matrice $\begin{bmatrix} -0,6 & 0,8 \\ -0,8 & -0,6 \end{bmatrix}$ représente une rotation.

19. La formule $\det(2A) = 2\det(A)$ est valable quelle que soit la matrice 2×2 , A .

20. Il existe une matrice A telle que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

21. Il existe une matrice A telle que

$$A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

22. Il existe une matrice A telle que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

23. La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ représente une réflexion par rapport à une droite.

24. Pour tout nombre réel k , on a

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

25. Le produit de matrices $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ est toujours un multiple scalaire de I_2 .

26. Il existe une matrice triangulaire supérieure, non nulle, 2×2 , A , telle que $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

27. Il existe un entier positif n tel que $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = I_2$.

28. Il existe une matrice inversible 2×2 , A , telle que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

- 29.** Il existe une matrice inversible $n \times n$ ayant deux lignes identiques.
- 30.** Si $A^2 = I_n$, la matrice A est nécessairement inversible.
- 31.** Si $A^{17} = I_2$, la matrice A est égale à I_2 .
- 32.** Si $A^2 = I_2$, la matrice A est ou bien I_2 ou bien $-I_2$.
- 33.** Si la matrice A est inversible, la matrice $5A$ l'est aussi.
- 34.** Si A et B sont des matrices 4×3 telles que $A\vec{v} = B\vec{v}$ pour tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathbf{R}^3$, les matrices A et B sont égales.
- 35.** Si les matrices A et B commutent, alors $A^2B = BA^2$.
- 36.** Si A est une matrice inversible $n \times n$ telle que $A^2 = A$, alors $A = I_n$.
- 37.** Si les matrices A et B sont inversibles, la matrice $A + B$ est aussi inversible.
- 38.** Pour toute matrice 2×2 , A , qui représente une projection, on a $A^2 = A$.
- 39.** Si la matrice $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ est inversible, la matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}$ est aussi inversible.
- 40.** Si A^2 est inversible, la matrice A est elle-même inversible.
- 41.** Si A est une matrice 2×2 qui représente une réflexion, on a $A^{-1} = A$.
- 42.** Si A est une matrice inversible 2×2 et $\vec{v}, \vec{w}$ des vecteurs arbitraires de $\mathbf{R}^2$, on a $(A\vec{v}) \cdot (A\vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{w}$. (Il s'agit du produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbf{R}^2$.)
- 43.** Il existe une matrice 2×3 , A , et une matrice 3×2 , B , telles que $AB = I_2$.
- 44.** Il existe une matrice 3×2 , A , et une matrice 2×3 , B , telles que $AB = I_3$.
- 45.** Si A est une matrice 3×3 telle que $A^2 + 3A + 4I_3 = 0$, alors A est inversible.
- 46.** Si A est une matrice $n \times n$ telle que $A^2 = 0$, alors la matrice $I_n + A$ est inversible.
- 47.** Si la matrice A commute avec B et que la matrice B commute avec C , alors A commute avec C .
- 48.** Si T est une application linéaire arbitraire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$, alors $T(\vec{v} \wedge \vec{w}) = T(\vec{v}) \wedge T(\vec{w})$ pour tous vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathbf{R}^3$. (Il s'agit du produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbf{R}^3$.)
- 49.** Il existe une matrice inversible 10×10 dont 92 des coefficients sont égaux à 1.
- 50.** Si A est une matrice $n \times p$ et B une matrice $p \times m$, on a $\text{frel}(AB) = \text{frel}(A) \text{frel}(B)$.
- 51.** Il existe une matrice inversible S telle que $S^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S$ soit une matrice diagonale.
- 52.** Si le système linéaire $A^2 \vec{x} = \vec{b}$ est consistant, le système linéaire $A \vec{x} = \vec{b}$ est aussi consistant.
- 53.** Il existe une matrice inversible 2×2 , A , telle que $A^{-1} = -A$.
- 54.** Il existe une matrice inversible 2×2 , A , telle que $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
- 55.** Si une matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ représente la projection orthogonale sur une droite L , alors on a la relation $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$.
- 56.** Si A est une matrice inversible 2×2 et que B est une matrice 2×2 arbitraire, on a $\text{frel}(AB) = \text{frel}(B)$.