MATHEMATIQUES ORSAY

Polytech Paris Sud *Année 2012/2013*

MATH3: ANALYSE

A. CHAMBERT-LOIR

Examen du 17 juin 2013 (rattrapage, 2h)

EXERCICE 1

1 Question de cours : donner l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

2 Soit X une variable aléatoire telle que $E(X) = 200$ et $\text{Var}(X) = 5$. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une majoration de $P(X \geq 210)$.

EXERCICE 2

On lance 3 dés à 6 faces (on suppose que les dés sont équilibrés, c'est-à-dire qu'on a la même probabilité de tomber sur chacune des faces). On obtient 3 nombres.

1 Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 2 nombres pairs ?

2 Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois le même nombre ?

EXERCICE 3

Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes, telles que que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$ et Y suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{4}$.

1 Calculer $P(X + Y = 1)$.

2 Calculer $P(X = 1 \mid X + Y = 1)$.

EXERCICE 4

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ (c'est-à-dire que la densité de la loi de X est la fonction f telle que $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$ et $f(x) = 0$ si $x < 0$).

1 Soit $a > 0$. Calculer $P(X > a)$.

2 Montrer que pour tous $a, b > 0$, on a $P(X > a + b \mid X > a) = P(X > b)$.

EXERCICE 5

Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

1 On pose $Y = 2X + 10$. Que valent $E(X)$ et $E(Y)$?

2 Que vaut $P(X > 0)$?

EXERCICE 6

On lance n fois un dé à 6 faces (on suppose que le dé est équilibré, c'est-à-dire qu'on a la même probabilité de tomber sur chacune des faces). On note X le nombre de fois qu'on tombe sur la face « 1 ».

1 Quelle est la loi de X ? Que valent son espérance et sa variance (en fonction de n) ?

2 On suppose que $n \geq 1000$. Déterminer un intervalle de confiance contenant X avec une probabilité de 95% (cet intervalle dépend de n).
On pourra utiliser la donnée suivante : $P(|N| \leq 2) \simeq 0,95$ si N est une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

EXERCICE 7

On considère le polynôme
$$g(z) = z^4 - z^3 - 2z^2.$$

1 Calculer les racines de g. Écrire ce polynôme comme produit de polynômes de degré 1.

2 Calculer le résidu de $z \mapsto 1/g(z)$ en chaque racine de g.

3 Lorsque C est le cercle de centre 0 et de rayon 1/2, parcouru dans le sens trigonométrique, calculer $\int_C \mathrm{d}z/g(z)$.

4 Même question avec l'intégrale $\int_{C'} \mathrm{d}z/g(z)$, lorsque C' est le cercle de centre 0 et de rayon 3/2.

EXERCICE 8

Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0\,; \\ 0 & \text{si } x = 0\,; \\ -e^{x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1 Démontrer que f est intégrable sur $\mathbf{R}$.

2 Calculer la transformée de Fourier de f.

3 Vérifier le théorème de Plancherel sur cet exemple.

4 Rappeler la définition de la dérivée d'une distribution.

5 Si g est une fonction continue sur $\mathbf{R}$, on note T_g la distribution associée. Rappeler la définition de cette distribution. Si g est de classe $\mathscr{C}^1$, *démontrer* que $T_{g'} = T'_g$.

6 On note δ la distribution de Dirac. Démontrer que
$$T''_f - T_f = 2\delta'.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.

1 $P(|X-E(X)| \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}$ pour tout $a>0$.
2 $P(X \geq 210) \leq P(|X-200| \geq 10) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{10^2} = 0,05$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.

1 $P(\text{exactement 2 nombres pairs}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} (1/2)^2 \times 1/2 = 3/8$.

2 $P(\text{3 fois le même nombre}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} (1/6)^3 = 1/36$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.

1
$$P(X+Y=1) = P((X,Y) = (0,1) \text{ ou } (1,0)) = P(X=0, Y=1) + P(X=1, Y=0)$$
(événements disjoints). L'indépendance donne
$$P(X+Y=1) = P(X=0)P(Y=1) + P(X=1)P(Y=0) = 2/3 \times 1/4 + 1/3 \times 3/4 = 5/12.$$
2 $P(X=1 \mid X+Y=1) = \frac{P(X=1 \text{ et } X+Y=1)}{P(X+Y=1)}$.
Or $P(X=1 \text{ et } X+Y=1) = P(X=1, Y=0) = 1/3 \times 3/4 = 1/4$.
D'où $P(X=1 \mid X+Y=1) = \frac{1/4}{5/12} = 3/5$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.

1 $P(X>a) = \int_a^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda a}$.
2
$$P(X > a+b \mid X > a) = \frac{P(X>a+b)}{P(X>a)} = \frac{e^{-\lambda(a+b)}}{e^{-\lambda a}} = e^{-\lambda b} = P(X>b).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.

1 $E(X) = 0$, $E(2X+10) = 2E(X) + 10 = 10$.
2 loi symétrique et $P(X=0) = 0$ donc $P(X>0) = P(X<0) = 1/2$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.

1 Pour chaque lancer, on a une loi de Bernoulli $b(1/6)$. Donc la loi de X est une binomiale $B(n, 1/6)$. $E(X) = n \times 1/6$, $\mathrm{Var}(X) = n \times 1/6 \times (1-1/6) = 5n/36$.
2 TCL : $\frac{X-E(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}$ suit à peu près une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Donc
$$P\left(\left|\frac{X-n/6}{\sqrt{5n/36}}\right| \leq 2\right) \simeq 0{,}95.$$
D'où l'intervalle de confiance $[\frac{n}{6} - \frac{\sqrt{5n}}{3}, \frac{n}{6} + \frac{\sqrt{5n}}{3}]$.