MATHÉMATIQUES : ALGÈBRE LINÉAIRE

A. CHAMBERT-LOIR

Les exercices qui suivent sont la traduction française des exercices des trois premiers chapitres du livre

Linear Algebra with Applications, 3rd edition
Otto BRETSCHER
Prentice Hall
ISBN : 013145336X

CHAPITRE 1. SYSTÈMES LINÉAIRES

1. Introduction aux systèmes linéaires

BUT. — Poser et résoudre des systèmes linéaires possédant jusqu'à trois équations et trois inconnues; savoir interpréter géométriquement les équations et leurs solutions.

Dans les exercices 1 à 10, déterminez les solutions des systèmes suivants par la méthode d'élimination. Vérifiez votre solution.

1. $\begin{vmatrix} x + 2y = 1 \\ 2x + 3y = 1 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 4x + 3y = 2 \\ 7x + 5y = 3 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 2x + 4y = 3 \\ 3x + 6y = 2 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 2x + 4y = 2 \\ 3x + 6y = 3 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 2x + 3y = 0 \\ 4x + 5y = 0 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} x + 2y + 3z = 8 \\ x + 3y + 3z = 10 \\ x + 2y + 4z = 9 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y + 4z = 3 \\ x + 4y + 5z = 4 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 10z = 0 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} x + 2y + 3z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 7x + 2y - 3z = 1 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 7z = 2 \\ 3x + 7y + 11z = 8 \end{vmatrix}$

Dans les exercices 11 à 13, déterminez les solutions des systèmes suivants. Représentez graphiquement les solutions, comme intersections de droites dans le plan x-y.

11. $\begin{vmatrix} x - 2y = 2 \\ 3x + 5y = 17 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = 6 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = 8 \end{vmatrix}$

Dans les exercices 14 à 16, déterminez les solutions des systèmes linéaires indiqués. Décrivez votre solution en termes d'intersections de plans. Il n'est pas nécessaire de faire un dessin.

14. $\begin{vmatrix} x + 4y + z = 0 \\ 4x + 13y + 7z = 0 \\ 7x + 22y + 13z = 1 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} x + y - z = 0 \\ 4x - y + 5z = 0 \\ 6x + y + 4z = 0 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} x + 4y + z = 0 \\ 4x + 13y + 7z = 0 \\ 7x + 22y + 13z = 0 \end{vmatrix}$

17. Déterminez les solutions du système linéaire :

$$\begin{vmatrix} x + 2y = a \\ 2x + 5y = b \end{vmatrix} \quad ,$$

a et b étant deux constantes arbitraires.

18. Déterminez les solutions du système linéaire :

$$\begin{vmatrix} x + 2y + 3z = a \\ x + 3y + 8z = b \\ x + 2y + 2z = c \end{vmatrix} \quad ,$$

a, b et c étant trois constantes arbitraires.

19. Un magazin vend deux types d'articles. Lorsque leurs prix unitaires sont P_1€ et P_2€, les quantités demandées pour chaque produit, D_1 et D_2, et les quantités disponibles de chaque produit (l'offre), S_1 et S_2, sont reliées par les équations

$$\begin{aligned} D_1 &= 70 - 2P_1 + P_2 \\ D_2 &= 105 + P_1 - P_2 \\ S_1 &= -14 + 3P_1 \\ S_2 &= -7 + 2P_2. \end{aligned}$$

a. Les deux articles sont-ils en compétition (comme le sont une Volvo et une BMW) ou sont-ils complémentaires (tels une chemise et une cravate) ?

b. Trouvez les prix d'équilibre de chaque produit, c'est-à-dire ceux pour lesquels l'offre et la demande sont égales.

20. L'économiste américain Wassily Leontief (1905–1999), prix Nobel d'économie en 1973, s'est intéressé au problème suivant : quelle doit être la production de chaque secteur d'une économie de sorte à ce que la demande totale soit satisfaite. Nous considérons ici un exemple très simple d'*analyse entrée-sortie*, une économie avec deux secteurs A et B. Supposons que la demande des consommateurs pour ses produits soit respectivement 1000 et 780 millions d'€ par année.

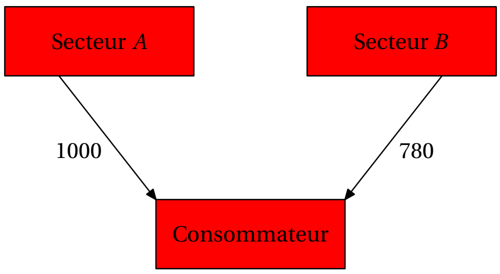


FIGURE 20A

Quelles productions a et b (en millions d'€ par an) doivent fournir les deux secteurs pour satisfaire la demande ? Vous pouvez être tentés de dire 1000 et 780, respectivement, mais les choses ne sont pas si simple que ça. Nous devons aussi prendre en compte la demande d'un secteur à l'autre. Supposons que le secteur A produise de l'électricité. Bien sûr, la production d'à peu près n'importe quel bien requiert de l'électricité. Supposons que le secteur B nécessite 10 centimes d'euro d'électricité par € que B produit, et que l'industrie A a besoin de 20 centimes d'euro de biens de B par € de production. Déterminez les productions a et b qui permettent de satisfaire à la fois la demande des consommateurs et la demande interindustrielle.

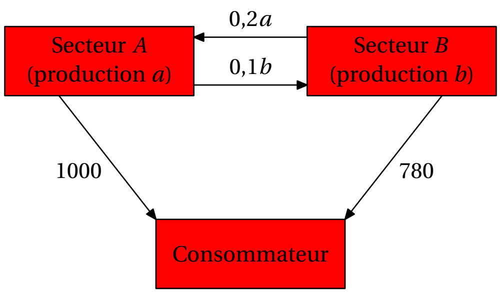


FIGURE 20B

21. Déterminez les productions a et b qui permettent de satisfaire à la fois la demande des consommateurs et la demande interindustrielle, représentées par la figure suivante. (Voir l'exercice 20)

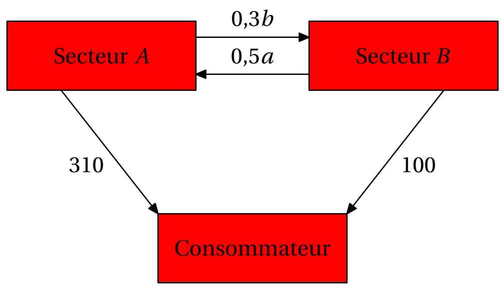


FIGURE 21A

22. Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - x = \cos(t).$$

Cette équation peut décrire un oscillateur forcé amorti comme vous l'avez vu en mécanique. Ce type d'équation admet une solution de la forme

$$x(t) = a\sin(t) + b\cos(t).$$

Trouvez a et b et dessinez le graphe de la solution.

23. Trouvez toutes les solutions du système suivant :

$$\left|\begin{array}{rcrcl} 7x & - & y & = & \lambda x \\ -6x & + & 8y & = & \lambda y \end{array}\right|,$$

pour a. $\lambda = 5$, b. $\lambda = 10$ et c. $\lambda = 15$.

24. Lors de votre dernier voyage en Suisse vous avez pris le bateau pour faire un aller-retour entre Rheinfall et Rheinau. L'aller a pris 20 minutes et le retour 40 minutes. La distance entre Rheinfall et Rheinau est de 8 kilomètres. À quelle vitesse navigue le bateau (par rapport à l'eau) et à quelle vitesse s'écoule la rivière ? Nous supposerons que ces deux vitesses sont constantes le temps du trajet.

25. Considérons le système suivant :

$$\left|\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -2 \\ 3x & - & 5y & + & 13z & = & 18 \\ x & - & 2y & + & 5z & = & k \end{array}\right|,$$

où k est un nombre arbitraire.

a. Pour quelles valeurs de k le système a-t-il au moins une solution ?

b. Pour chaque valeur de la question *a*), déterminez le nombre de solutions du système.

c. Déterminez toutes les solutions pour chaque valeur de k.

26. Considérons le système suivant :

$$\left|\begin{array}{rcl} x + y - z &=& 2 \\ x + 2y + z &=& 3 \\ x + y + (k^2-5)z &=& k \end{array}\right|,$$

où k est un nombre arbitraire. Pour quelles valeurs de k le système a-t-il une unique solution ? Pour quelles valeurs de k le système a-t-il une infinité de solutions ? Pour quelles valeurs de k le système est-il inconsistant ?

27. Émile et Gertrude sont frère et sœur. Émile a deux fois plus de sœurs que de frères et Gertrude a autant de frères que de sœurs. Combien y a-t-il d'enfants dans cette famille ?

28. Dans une grille de fils métalliques, la température aux points du bord est maintenue constante, comme indiqué sur le schéma. Quand l'équilibre thermique est atteint la température d'une maille intérieure est égale à la moyenne des températures des mailles adjacentes. Par exemple

$$T_2 = \frac{T_3 + T_1 + 200 + 0}{4}.$$

Trouvez les températures des trois mailles intérieures.

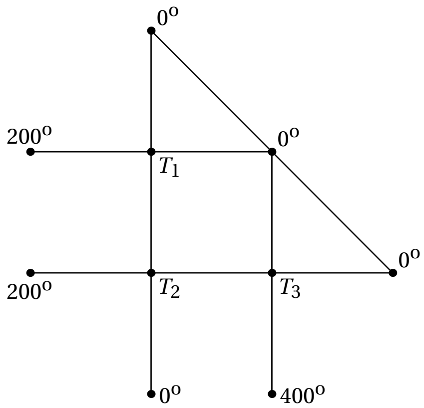


FIGURE 28A

29. Trouvez les polynômes de degré deux (c'est-à-dire un polynôme de la forme $f(t) = at^2 + bt + c$) dont le graphe passe par les points $(1,-1)$, $(2,3)$ et $(3,13)$. Esquissez les graphes de ces polynômes.

30. Trouvez un polynôme de degré inférieur ou égal à deux dont le graphe passe par les points $(1,p)$, $(2,q)$, $(3,r)$ où p, q et r sont des nombres arbitraires. Existe-t-il toujours un tel polynôme pour n'importe quelles valeurs de p, q, r ?

31. Trouvez tous les polynômes $f(t)$ de degré inférieur ou égal à deux dont le graphe passe par les points $(1,3)$ et $(2,6)$ dont la dérivée en 1 est égale à 1 ($f'(1) = 1$).

32. Trouvez tous les polynômes $f(t)$ de degré inférieur ou égal à deux dont le graphe passe par les points $(1,1)$ et $(2,0)$ dont l'intégrale entre 1 et 2 vaut -1 ($\int_1^2 f(t)dt = -1$).

33. Trouvez tous les polynômes $f(t)$ de degré inférieur ou égal à deux dont le graphe passe par les points $(1,1)$ et $(3,3)$ dont la dérivée en 2 est égale à 1 ($f'(2) = 1$).

34. Trouvez tous les polynômes $f(t)$ de degré inférieur ou égal à deux dont le graphe passe par les points $(1,1)$ et $(3,3)$ dont la dérivée en 2 est égale à 3 ($f'(2) = 3$).

35. Trouvez la fonction $f(t)$ de la forme $ae^{3t} + be^{2t}$ telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 4$.

36. Trouvez la fonction $f(t)$ de la forme $a\cos(2t) + b\sin(2t)$ telle que $f''(t) + 2f'(t) + 3f(t) = 17\cos(2t)$. (C'est le type d'équation différentielle que l'on doit résoudre lorsqu'on étudie des oscillateurs forcés amortis en ingénierie.)

37. Trouvez tous les points de coordonnées (a,b,c) dans l'espace pour lesquels le système

$$\left|\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z &=& a \\ 4x + 5y + 6z &=& b \\ 7x + 8y + 9z &=& c \end{array}\right|$$

a au moins une solution.

38. Un système est particulièrement simple à résoudre lorsque toutes les coefficients du système sont nuls au-dessus ou en dessous de la diagonal. Un tel système est dit *triangulaire.*

a. Résolvez le système *triangulaire inférieur* suivant

$$\left|\begin{array}{rcl} x_1 &=& -3 \\ -3x_1 + x_2 &=& 14 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &=& 9 \\ -x_1 + 8x_2 - 5x_3 + x_4 &=& 33 \end{array}\right|.$$

b. Résolvez le système *triangulaire supérieur* suivant

$$\left|\begin{array}{rrrrrrrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & = & -3 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & + & 7x_4 & = & 5 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ & & & & & & x_4 & = & 0 \end{array}\right|.$$

39. Considérons le système suivant

$$\left|\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ x & + & \frac{t}{2}\,y & = & t \end{array}\right|,$$

où t est un nombre non nul.

a. Déterminez les intersections des droites d'équations $x + y = 1$ et $x + (t/2)y = t$ avec les axes de coordonnées. Esquissez ces droites. Pour quelles valeurs de t ces droites s'intersectent-elles ? On appelle $(x(t), y(t))$ les coordonnées de ce point d'intersection pour les valeurs de t où ce point existe. Faire un croquis approximatif des graphes des fonctions $x(t)$ et $y(t)$. Expliquez

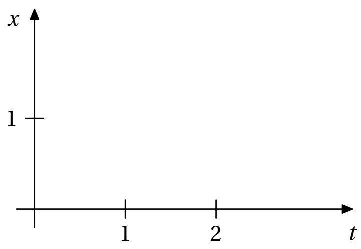


FIGURE 39A

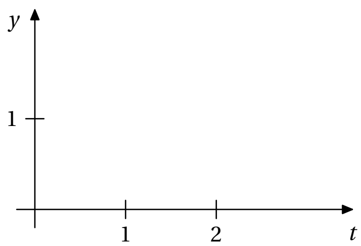


FIGURE 39B

sommairement comment vous avez fait ce croquis. Donnez des arguments géométriques, sans résoudre le système.

b. Résolvez le système et vérifiez que les graphes esquissés sont compatibles avec la solution que vous avez obtenue.

40. Trouvez un système d'équations linéaires à trois inconnues dont les solutions sont les points de la droite passant par les points de coordonnées $(1, 1, 1)$ et $(3, 5, 0)$.

41. Trouvez un système d'équations linéaires en x, y et z dont les solutions sont

$$x = 6 + 5t, \quad y = 4 + 3t, \quad et \quad z = 2 + t$$

pour tout nombre t.

42. Boris et Marina vont acheter des barres chocolatées. Boris observe : « Si j'ajoute la moitié de mon argent au tien, nous pourrons acheter deux barres chocolatées. » Marina lui demande naïvement « Et si j'ajoute la moitié de mon argent au tien, combien de barres pouvons nous acheter ? ». « Une » répond Boris. Combien d'argent a Boris ? (Yuri Chernyak et Robert Rose, *The Chicken from Minsk*, Basic Book, NY, 1995)

43. ***Méthode de substitution.*** Il existe une autre méthode pour résoudre des systèmes linéaires. On commence par résoudre une équation par rapport à une inconnue puis on substitue le résultat dans les autres équations. On répète ce procédé avec une nouvelle équation et une nouvelle variable jusqu'à épuisement des équations ou des variables. Considérons l'exemple suivant :

$$\left|\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 39 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 34 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 26 \end{array}\right|.$$

On résout la première équation par rapport à x :

$$x = 39 - 2y - 3z.$$

Lorsqu'on effectue la substitution dans les deux autres équations on obtient

$$\left|\begin{array}{rcrcrcr} (39 - 2y - 3z) & + & 3y & + & 2z & = & 34 \\ 3(39 - 2y - 3z) & + & 2y & + & z & = & 26 \end{array}\right|$$

$$\Longleftrightarrow \left|\begin{array}{rcrcr} y & - & z & = & -5 \\ -4y & - & 8z & = & -91 \end{array}\right|.$$

Ensuite on résout la première équation de ce nouveau système par rapport à y :

$$y = z - 5$$

et on substitue le résultat dans la dernière équation : $-4(z - 5) - 8z = -91$ c'est-à-dire

$$z = \frac{111}{12} = 9 + 1/4.$$

On trouve ensuite

$$y = 4 + 1/4 \quad \text{et enfin } x = 2 + 3/4.$$

Expliquez pourquoi cette méthode est essentiellement équivalente à la méthode utilisée jusqu'à maintenant.

44. Un ermite ne mange que deux types de nourriture : du riz et du yaourt. Une portion de riz contient 3 grammes de protéines et 30 grammes de glucides et un yaourt 12 grammes de protéines et 20 grammes de glucides.

a. Si l'ermite veut manger 60 grammes de protéines et 300 grammes de glucides par jour, de quoi doit se composer son repas ?

b. Si l'ermite veut manger P grammes de protéines et G grammes de glucides par jour, combien de portions de riz et de yaourts doit-il manger ?

45. J'ai 32 billets dans mon portefeuille de 1, 5 et 10 US$, pour une montant total de 100$. Combien de billets de chaque valeur ai-je ?

46. Les parcmètres de Milan acceptent les pièces de 20 centimes, 50 centimes et 2€. Pour motiver les pervenches [(1)], la mairie offre une récompense (une Ferrari toute neuve) à toutes celles qui ramèneraient 1000 pièces pour une valeur de 1000€ lors de leur tournée quotidienne. Quelle est la probabilité pour que quelqu'un réclame sa récompense un jour ou l'autre ?

1. *(Argot)* Auxiliaire de police chargée du contrôle du stationnement, ainsi appelée en raison de la couleur, bleu pervenche, de son uniforme.

2. Matrices, vecteurs et élimination de Gauss-Jordan

BUT. Utiliser la méthode d'élimination de Gauss-Jordan pour résoudre les systèmes linéaires. Faire les problèmes simples avec papier et crayon et utilisez la technologie pour résoudre les problèmes plus compliqués.

Dans les exercices 1 à 12, trouvez toutes les solutions des équations à la main en utilisant l'élimination de Gauss-Jordan. Montrez votre travail. Résoudre l'exercice 8 en les variables x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5.

1. $\left|\begin{array}{rcrcrcr} x &+& y &-& 2z &=& 5 \\ 2x &+& 3y &+& 4z &=& 2 \end{array}\right|$

2. $\left|\begin{array}{rcrcrcr} 3x &+& 4y &-& z &=& 8 \\ 6x &+& 8y &-& 2z &=& 3 \end{array}\right|$

3. $x+2y+3z=4$

4. $\left|\begin{array}{rcrcr} x &+& y &=& 1 \\ 2x &-& y &=& 5 \\ 3x &+& 4y &=& 2 \end{array}\right|$

5. $\left|\begin{array}{rcrcrcrcr} & & & & x_3 &+& x_4 &=& 0 \\ & & x_2 &+& x_3 & & &=& 0 \\ x_1 &+& x_2 & & & & &=& 0 \\ x_1 & & & & & +& x_4 &=& 0 \end{array}\right|$

6. $\left|\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 &-& 7x_2 & & & & +& x_5 &=& 0 \\ & & & & x_3 & & -& 2x_5 &=& 0 \\ & & & & & x_4 &-& x_5 &=& 0 \end{array}\right|$

7. $\left|\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 &-& 7x_2 & & & & & +& x_5 &=& 3 \\ & & & & x_3 &+& 3x_4 &+& 2x_5 &=& 0 \\ & & & & x_3 &+& 4x_4 &-& x_5 &=& 0 \\ & & & & & & & & x_5 &=& 0 \end{array}\right|$

8. $\left|\begin{array}{rcrcrcr} x_2 &+& 2x_4 &+& 3x_5 &=& 0 \\ & & 4x_4 &+& 8x_5 &=& 0 \end{array}\right|$

9. $\left|\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} & & & & & & x_4 &+& 2x_5 &-& x_6 &=& 2 \\ x_1 &+& 2x_2 & & & & & +& x_5 &-& x_6 &=& 0 \\ x_1 &+& 2x_2 &+& 2x_3 & & & -& x_5 &+& x_6 &=& 2 \end{array}\right|$

10. $\left|\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x_1 &+& 3x_2 &+& 2x_3 &-& x_4 &=& 4 \\ 5x_1 &+& 4x_2 &+& 3x_3 &-& x_4 &=& 4 \\ -2x_1 &-& 2x_2 &-& x_3 &+& 2x_4 &=& -3 \\ 11x_1 &+& 6x_2 &+& 4x_3 &+& x_4 &=& 11 \end{array}\right|$

11. $\left|\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & +& 2x_3 &+& 4x_4 &=& -8 \\ & & x_2 &-& 3x_3 &-& x_4 &=& 6 \\ 3x_1 &+& 4x_2 &-& 6x_3 &+& 8x_4 &=& 0 \\ & -& x_2 &+& 3x_3 &+& 4x_4 &=& -12 \end{array}\right|$

12. $\left|\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} 2x_1 & & & -& 3x_3 & & & +& 7x_5 &+& 7x_6 &=& 0 \\ -2x_1 &+& x_2 &+& 6x_3 & & & -& 6x_5 &-& 12x_6 &=& 0 \\ & & x_2 &-& 3x_3 & & & +& x_5 &+& 5x_6 &=& 0 \\ & -& 2x_2 & & & +& x_4 &+& x_5 &+& x_6 &=& 0 \\ 2x_1 &+& x_2 &-& 3x_3 & & & +& 8x_5 &+& 7x_6 &=& 0 \end{array}\right|$

Résoudre les systèmes linéaires des exercices 13 à 17. Vous pouvez utiliser la technologie.

13. $\left|\begin{array}{rcrcrcr} 3x &+& 11y &+& 19z &=& 22 \\ 7x &+& 23y &+& 39z &=& 10 \\ -4x &-& 3y &-& 2z &=& 6 \end{array}\right|$

14. $\left|\begin{array}{rcrcrcr} 3x &+& 6y &+& 14z &=& 22 \\ 7x &+& 14y &+& 30z &=& 46 \\ 4x &+& 8y &+& 7z &=& 6 \end{array}\right|$

15. $\left|\begin{array}{rcrcrcr} 3x &+& 5y &+& 3z &=& 25 \\ 7x &+& 9y &+& 19z &=& 65 \\ -4x &+& 5y &+& 11z &=& 5 \end{array}\right|$

16. $\left|\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 3x_1 &+& 6x_2 &+& 9x_3 &+& 5x_4 &+& 25x_5 &=& 53 \\ 7x_1 &+& 14x_2 &+& 21x_3 &+& 9x_4 &+& 53x_5 &=& 105 \\ -4x_1 &-& 8x_2 &-& 12x_3 &+& 5x_4 &-& 10x_5 &=& 11 \end{array}\right|$

17. $\left|\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 &+& 4x_2 &+& 3x_3 &+& 5x_4 &+& 6x_5 &=& 37 \\ 4x_1 &+& 8x_2 &+& 7x_3 &+& 5x_4 &+& 2x_5 &=& 74 \\ -x_1 &-& 4x_2 &+& 3x_3 &+& 4x_4 &-& 5x_5 &=& 20 \\ x_1 &+& 2x_2 &+& 2x_3 &-& x_4 &+& 2x_5 &=& 26 \\ 5x_1 &-& 10x_2 &+& 4x_3 &+& 6x_4 &+& 4x_5 &=& 24 \end{array}\right|$

18. Déterminer celles des matrices ci-dessous qui sont sous forme réduite échelonnée :

a. $\begin{bmatrix} 1&2&0&2&0 \\ 0&0&1&3&0 \\ 0&0&1&4&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$, b. $\begin{bmatrix} 0&1&2&0&3 \\ 0&0&0&1&4 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$,

c. $\begin{bmatrix} 1&2&0&3 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&1&2 \end{bmatrix}$, d. $\begin{bmatrix} 0&1&2&3&4 \end{bmatrix}$.

19. Trouver toutes les matrices 4×1 sous forme réduite échelonnée.

20. On dit que deux matrices $n \times m$ sous forme réduite échelonnée sont de même type si elles contiennent le même nombre de 1 en tête de ligne, aux mêmes positions. Par exemple,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sont du même type. Combien y a-t-il de types de matrices 2×2 sous forme réduite échelonnée ?

21. Combien y a-t-il de types de matrices 3×2 sous forme réduite échelonnée ? (Voir l'exercice 20.)

22. Combien y a-t-il de types de matrices 2×3 sous forme réduite échelonnée ? (Voir l'exercice 20.)

23. Lorsque vous appliquez la méthode d'élimination de Gauss-Jordan à une matrice, comment vous assurez-vous de ce que la matrice obtenue est sous forme réduite échelonnée ?

24. Lorsqu'une matrice A est transformée en une matrice B par une opération élémentaire sur les lignes, y a-t-il une opération élémentaire sur les lignes qui transforme B en A ? Justifier.

25. Lorsqu'une matrice A est transformée en une matrice B par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes, y a-t-il une opération élémentaire sur les lignes qui transforme B en A ? Justifier. (Voir l'exercice 24.)

26. Soit A une matrice $n \times m$. Pouvez-vous transformer $\mathrm{frel}(A)$ en A par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes ? (Voir l'exercice 25.)

27. Y a-t-il une suite d'opérations élémentaires sur les lignes qui transforme la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ?$$

Justifier.

28. On soustrait d'une équation d'un système un multiple d'une autre équation du système. Expliquer pourquoi les deux systèmes (avant et après cette opération) ont les mêmes solutions.

29. ***Équilibre d'une réaction chimique.*** Considérons la réaction chimique

$$a\mathrm{NO_2} + b\mathrm{H_2O} \to c\mathrm{HNO_2} + d\mathrm{HNO_3},$$

où a, b, c et d sont des entiers strictement positifs inconnus. La réaction doit être équilibrée : le nombre d'atomes de chaque élément doit être le même avant et après la réaction. Par exemple, comme le nombre d'atomes d'oxygène doit rester le même,

$$2a + b = 2c + 3d.$$

Bien qu'il y ait plusieurs valeurs possibles pour a, b, c et d qui équilibrent la réaction, on a coutume d'utiliser les entiers positifs les plus petits possibles. Équilibrez cette réaction.

30. Trouver le polynôme de degré 3 (un polynôme de la forme $f(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$) dont le graphe passe par les points $(0,1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$ et $(2,-15)$. Esquisser le graphe de cette cubique.

31. Trouver le polynôme de degré 4 dont le graphe passe par les points $(1,1)$, $(2,-1)$, $(3,-59)$, $(-1,5)$ et $(-2,-29)$. Tracer le graphe de ce polynôme.

32. ***Splines cubiques.*** Supposons que vous deviez dessiner le plan d'un circuit de montagnes russes. Le trajet ne tournera ni à gauche ni à droite ; autrement dit, le wagon reste dans un plan vertical. La figure ci-dessous montre le circuit, vu de profil. Les points (a_i, b_i) vous sont donnez et vous devez les connecter d'une façon raisonnablement douce. Supposons que $a_{i+1} > a_i$.

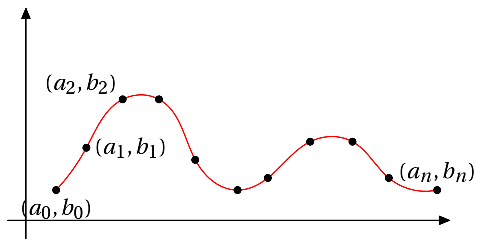


FIGURE 32A

Une méthode souvent utilisée dans de tels problèmes de design est celle des *splines cubiques.* On choisit un polynôme $f_i(t)$, de degré $\leqslant 3$, pour définir la forme du trajet entre les (a_{i-1}, b_{i-1}) et (a_i, b_i), pour $i = 1, \ldots, n$. Manifestement, il

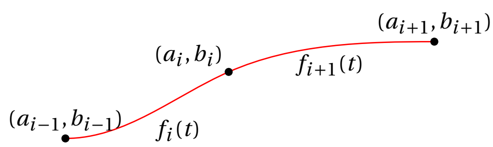


FIGURE 32B

faut imposer que $f_i(a_i) = b_i$ et $f_i(a_{i-1}) = b_{i-1}$, pour $i = 1, \ldots, n$. Pour garantir un trajet lisse aux points (a_i, b_i), on demande que la première et la seconde dérivée de f_i et f_{i-1} coïncident en ces points :

$$\begin{aligned} f_i'(a_i) &= f_{i+1}'(a_i) && \text{et} \\ f_i''(a_i) &= f_{i+1}''(a_i) && \text{pour } i = 1, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

Expliquez la signification concrète de ces conditions. Expliquez pourquoi, pour le confort des voyageurs, il faut aussi imposer que

$$f_1'(a_0) = f_n'(a_n) = 0.$$

Montrer que satisfaire toutes ces conditions revient à résoudre un système d'équations linéaires. Combien y a-t-il de variables dans ce système ? Combien d'équations ? (*NB.* On peut démontrer que ce système possède une solution et une seule.)

33. Trouver le polynôme $f(t)$ de degré 3 tel que $f(1) = 1$, $f(2) = 5$, $f'(1) = 2$ et $f'(2) = 9$, où $f'(t)$ est la dérivée de $f(t)$. Tracer le graphe de ce polynôme.

34. Le *produit scalaire* de deux vecteurs

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

de $\mathbb{R}^n$ est défini par

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Remarquez que le produit scalaire de deux vecteurs est un scalaire. On dit que les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont *perpendiculaires* si $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$.

Trouvez tous les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sont perpendiculaires à

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Faites un dessin.

35. Trouvez tous les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui sont perpendiculaires aux trois vecteurs

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

(Voir l'exercice 34.)

36. Trouvez toutes les solutions x_1, x_2, x_3 de l'équation

$$\vec{b} = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + x_3 \vec{v}_3,$$

où

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} -8 \\ -1 \\ 2 \\ 15 \end{bmatrix}, \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

37. Pour le contexte de cet exercice, voir l'exercice 1.1/20.

Considérons une économie avec trois secteurs industriels, I_1, I_2, I_3. Quelles quantités x_1, x_2, x_3 doivent-elles produire pour satisfaire à la fois la demande des consommateurs et celle des autres secteurs ? La demande requise de chaque secteur est représentée sur la figure ci-dessous.

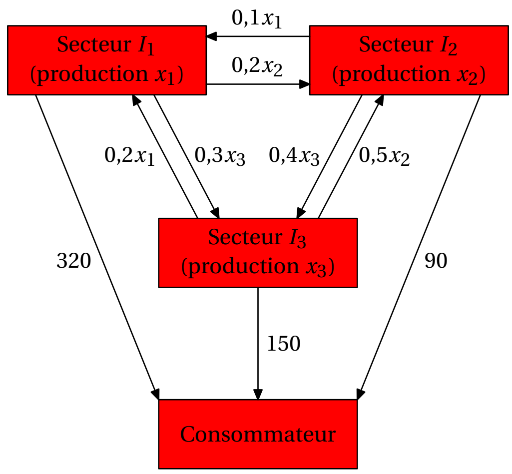


FIGURE 37A

38. Lorsqu'on considère un modèle *entrée-sortie* avec plus de trois secteurs industriels, il devient malaisé de représenter les demandes par un diagramme comme celui de l'exercice 37. Supposons qu'il y ait des secteurs $I_1, \ldots, I_n$, de productions $x_1, \ldots, x_n$. Le *vecteur de production* est

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Le *vecteur de demande des consommateurs* est

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

où b_i est la demande des consommateurs sur le secteur I_i. Le vecteur de demande pour le secteur I_j est

$$\vec{v}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix},$$

où a_{ij} est la demande du secteur I_j au secteur I_i, par € de production du secteur I_j. Par exemple, $a_{32} = 0{,}5$ signifie que le secteur I_2 requiert 50 c. de produits du secteur I_3 pour chaque € de biens que I_2 produit. Le coefficient a_{ii} n'est pas forcément égal à 0 : fabriquer un produit peut nécessiter des biens ou des services du même secteur.

a. Trouver les quatre vecteurs de demandes pour l'économie de l'exercice 37.

b. Quelle est la signification économique de $x_j \vec{v}_j$?

c. Quelle est la signification économique de $x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \cdots + x_n \vec{v}_n + \vec{b}$?

d. Quelle est la signification économique de l'équation

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \cdots + x_n \vec{v}_n + \vec{b} = \vec{x}\ ?$$

39. Considérons l'économie d'Israël en 1958.[(2)] Les trois secteurs industriels considérés sont

I_1	agriculture
I_2	biens manufacturés
I_3	énergie

Production et demande sont mesurés en millions de livres israéliennes, la monnaie d'Israël à cette époque. On nous dit que

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 13{,}2 \\ 17{,}6 \\ 1{,}8 \end{bmatrix}, \qquad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}293 \\ 0{,}014 \\ 0{,}044 \end{bmatrix},$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}207 \\ 0{,}01 \end{bmatrix}, \qquad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}017 \\ 0{,}216 \end{bmatrix}.$$

a. Pourquoi la première composante des vecteurs $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ est-elle nulle ?

b. Trouver les productions x_1, x_2, x_3 qui satisfont la demande.

40. Considérons des particules dans le plan, de vecteur-positions $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$ et de masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Le vecteur-position du *centre de gravité* de ce système est

$$\vec{r}_g = \frac{1}{M}(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \cdots + m_n \vec{r}_n),$$

où $M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$.

Considérons la plaque triangulaire représentée sur la figure ci-dessous. Comment une masse de 1 kg doit-elle être répartie aux trois sommets de la plaque pour qu'elle puisse reposer au point $\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$,

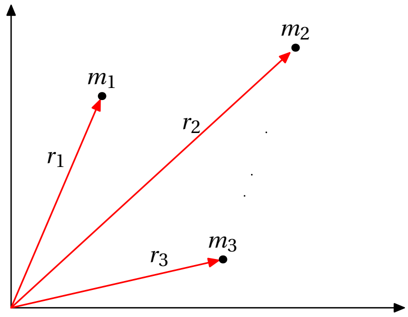


FIGURE 40A

c'est-à-dire pour que l'on ait $\vec{r}_g = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$? On suppose que la masse de la plaque elle-même est négligeable.

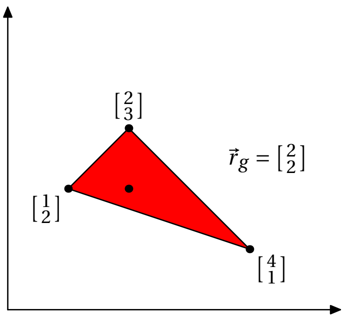


FIGURE 40B

41. La *quantité de mouvement* $\vec{P}$ d'un système de n particules dans l'espace, de masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$ et de vitesses $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ est définie par

$$\vec{P} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \cdots + m_n \vec{v}_n.$$

Considérons maintenant deux particules élémentaires de vitesses

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Les particules s'entrechoquent. Après la collision, on observe que leurs vitesses respectives sont

$$\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Supposons que la quantité de mouvement soit conservée lors du choc. Qu'est-ce que cette expérience vous dit concernant la masse des deux particules ? (Voir la figure ci-dessous.)

2. W. Leontief, *Input-Output Economics*, Oxford University Press, 1966

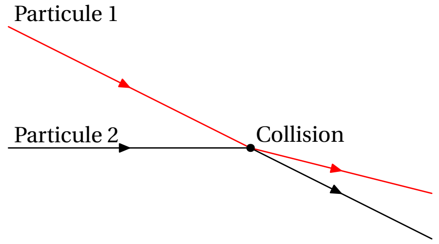


FIGURE 41A

42. Le croquis ci-contre représente un labyrinthe de rues à sens unique dans une ville des États-Unis. On a mesuré le trafic à certains endroits pendant une heure ; on suppose que les voitures ayant quitté une zone pendant cet intervalle de temps sont les mêmes que celles qui y ont pénétré.

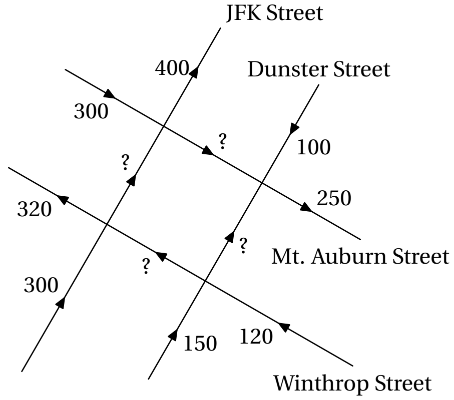


FIGURE 42A

Que pouvez-vous dire du trafic aux quatre endroits marqués d'un point d'interrogation ? Pouvez-vous dire le trafic exact dans chacune des rues ? Si non, décrivez un scénario possible. Pour chacun des quatre endroits, donner le trafic minimal et le trafic maximal.

43. Soit $S(t)$ la durée du t-ième jour de l'année à Mumbai (ex-Bombay), en Inde (durée mesurée en heures, de l'aurore au crépuscule). On dispose des valeurs suivantes :

t	$S(t)$
47	11,5
74	12
273	12

Par exemple, $S(47) = 11{,}5$ signifie que le temps entre l'aurore et le crépuscule du 16 février est de 11 heures et 30 minutes. Aux endroits proches de l'équateur, la fonction $S(t)$ est bien approchée par une fonction trigonométrique de la forme

$$S(t) = a + b\cos\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + c\sin\left(\frac{2\pi t}{365}\right).$$

(La période est de 365 jours, soit une année.) Trouvez cette approximation pour Mumbai et tracez votre solution. Selon ce modèle, quelle est la durée du plus long jour de l'année à Mumbai ?

44. Charles a prévu d'acheter des fleurs à Catherine, sa petite amie. Comme il est d'un naturel plutôt précis, il prévoit de dépenser exactement 24 € en achetant précisément deux douzaines de fleurs. La marchande de fleurs propose des iris (3 € l'un), des roses (2 € l'une) et des œillets (0,50 € l'un). Charles sait que Catherine adore les iris ; que doit-il faire ?

45. Considérons les équations

$$\left|\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & ky & + & 4z & = & 6 \\ x & + & 2y & + & (k+2)z & = & 6 \end{array}\right| ,$$

où k est une constante arbitraire.

a. Pour quelles valeurs de la constante k ce système a-t-il une seule solution ?

b. Quand n'a-t-il pas de solution ?

c. Quand a-t-il une infinité de solutions ?

46. Considérons les équations

$$\left|\begin{array}{ccccccc} & & y & + & 2kz & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 6z & = & 2 \\ kx & & & + & 2z & = & 1 \end{array}\right| ,$$

où k est une constante arbitraire.

a. Pour quelles valeurs de la constante k ce système a-t-il une seule solution ?

b. Quand n'a-t-il pas de solution ?

c. Quand a-t-il une infinité de solutions ?

47. a. Trouvez toutes les solutions x_1, x_2, x_3, x_4 du système $x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $x_3 = \frac{1}{2}(x_2 + x_4)$.

b. Y a-t-il une solution avec $x_1 = 1$ et $x_4 = 13$?

48. Soit n un entier naturel arbitraire tel que $n \geqslant 3$; trouvez toutes les solutions $x_1, x_2, \ldots, x_n$ du système d'équations $x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_3)$, $x_3 = \frac{1}{2}(x_2 + x_4)$, …, $x_{n-1} = \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_n)$. (On demande ainsi de résoudre les équations simultanées $x_k = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_{k+1})$, pour $k = 2, 3, \ldots, n-1$.)

49. Considérons le système

$$\left|\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & & & = & C \\ & & 3y & + & z & = & C \\ x & & & + & 4z & = & C \end{array}\right| ,$$

où C est une constante. Trouver le plus petit entier strictement positif C tel que ce système possède une solution (x, y, z) formée d'entiers.

50. Trouver tous les polynômes $f(t)$ de degré au plus 3 tels que $f(0) = 3$, $f(1) = 2$, $f(2) = 0$ et $\int_0^2 f(t)\,dt = 4$. (Si vous avez étudié la règle de Simpson dans un cours d'analyse, commentez le résultat obtenu.)

51. Les étudiants achètent leurs livres pour le nouveau semestre. Eddy achète le livre d'écologie statistique, et le livre de théorie des ensembles, pour un total de 178 €. Léa, qui achète des livres pour elle-même et son ami, dépense 319 € pour deux livres d'écologie statistique un de théorie des ensembles et un de psychologie infantile. Ahmed achète le livre de psychologie infantile et le livre de théorie des ensembles et a dépensé 147 €. Combien coûte chaque livre ?

52. Les étudiants achètent leurs livres pour le nouveau semestre. Brigitte achète le livre de grammaire allemande et une nouvelle, *Die Leiden des jungen Werther*, pour 64 € au total. Claude dépense 98 € avec un livre d'algèbre linéaire et le livre de grammaire allemande, tandis que Denise achète le livre d'algèbre linéaire et *Werther*, pour 76 €. Combien coûte chaque livre ?

53. Au début d'un cours de sciences politiques dans une grande université, on demanda aux étudiants lequel des termes, *conservateur* ou *réformiste*, décrivait le mieux leurs opinions politiques. On leur posa la même question à la fin du cours, afin de voir quel effet sur leurs idées les discussions en classes avaient eu. Parmi ceux qui se caractérisaient comme « réformiste », 30% se disaient conservateur à la fin. De ceux qui étaient initialement conservateurs, 40% passèrent dans le camp réformiste. Il est apparu qu'il y avait exactement autant d'étudiants conservateurs à la fin du cours qu'il n'y en avait de réformistes au début. Parmi les 260 étudiants du cours, combien étaient libéraux et combien étaient conservateurs, au début, et à la fin du cours ? (Aucun étudiant n'est entré ou parti du cours entre les deux sondages, et ils y ont tous participé.)

54. Au début du semestre, 55 étudiants se sont inscrits au cours d'algèbre linéaire. Ce cours est proposé à deux horaires différents. En raison de conflits d'emploi du temps et de préférences personnelles, 20% des étudiants du groupe A sont passés au groupe B au cours des premières semaines du cours, tandis que 30% des étudiants du groupe B sont allés dans le groupe A ; il en a résulté une perte nette de 4 étudiants pour le groupe A. Combien y avait-il d'étudiants dans chaque groupe au début du semestre ? Aucun étudiant n'a abandonné le cours d'algèbre linéaire (pourquoi le feraient-ils ?) ni ne s'est inscrit en retard.

Problèmes historiques

55. Cinq vaches et deux moutons coûtent au total dix *liang*(3) d'argent. Deux vaches et cinq moutons coûtent au total 8 *liang* d'argent. Quel est le coût d'une vache et d'un mouton, respectivement ? (*Neuf chapitres*(4), chapitre 8, problème 7)

56. Si vous vendez deux vaches et cinq moutons et achetez 13 cochons, vous gagnez 1000 pièces. Si vous vendez trois vaches et trois cochons et achetez neuf moutons, vous ne gagnez rien. Si vous vendez six moutons et huit cochons et achetez cinq vaches, vous perdez 600 pièces. Quels sont le prix d'une vache, d'un mouton et d'un cochon, respectivement ? (*Neuf chapitres*, chapitre 8, problème 8)

57. Vous placez cinq moineaux d'un côté d'une balance et six hirondelles de l'autre ; les moineaux sont plus lourds. Mais en échangeant un moineau et une hirondelle, la balance est parfaitement équilibrée. Tous ensemble, les oiseaux pèsent 1 *jin*. Quel est le poids d'un moineau et d'une hirondelle, respectivement ? Donnez votre réponse en *liang*, sachant qu'un *jin* équivaut à 16 *liang*. (*Neuf chapitres*, chapitre 8, problème 9)

58. Vous devez tirer un poids de 40 *dan*(5) en haut d'une colline ; afin de mener à bien cette tâche,

3. À l'époque de la dynastie Han, un *liang* valait environ 16 grammes.

4. Nous présentons quelques uns des *Neuf chapitres de l'art mathématique* dans une traduction libre, avec des explications supplémentaires car un lecteur moderne n'est pas très familiers avec les scénarios discutés dans certains d'entre eux.

5. 1 *dan* = 120 *jin* = 1920 *liang*. Ainsi, un *dan* équivalait à environ 30 kg à cette époque.

vous avez à votre disposition un cheval militaire, deux chevaux ordinaires et trois chevaux malades. Le cheval militaire et l'un des chevaux ordinaires, à eux deux, sont à peine capables de tirer ce poids (mais ne pourraient rien tirer de plus). De même, les deux chevaux ordinaires et un cheval malade sont tout juste capables de remplir cette mission, de même que les trois chevaux malades avec le cheval militaire. Quel poids peut tirer chacun des chevaux tout seul ? (*Neuf chapitres*, chapitre 8, problème 12)

59. Trois ménages partagent un puits profond qui les approvisionne en eau. Chaque ménage possède quelques cordes d'une certaine longueur (la même), différente pour chaque ménage. Les cinq ménages, A, B, C, D et E possèdent respectivement 2, 3, 4, 5 et 6 cordes. Même en mettant bout à bout toutes ses cordes, aucun ménage ne peut atteindre l'eau, mais deux cordes de A avec une corde de B atteignent tout juste l'eau. De même, trois cordes de B et une corde de C, quatre cordes de C et une corde de D, cinq cordes de D avec une seule corde de E, ou les six cordes de E avec une de A atteignent tout juste l'eau. De quelles longueurs sont les cordes de chaque ménage, et quelle est la profondeur du puits ?

Commentaire : tel quel, ce problème mène à un système de cinq équations linéaires en six variables ; les informations qu'il contient ne permettent pas de déterminer la profondeur du puits. Les *Neuf chapitres* donnent une solution particulière, dans laquelle la profondeur du puits est 7 *zhang*[6], 2 *chi*, 1*cun*, soit 721 *cun* (puisque 1 *zhang* = 10 *chi* et 1 *chi* = 10 *cun*). À l'aide de cette valeur particulière pour la profondeur du puits, déterminer les longueurs des différentes cordes.

60. « Un coq vaut cinq pièces, une poule trois pièces et trois poussins une. Avec 100 pièces, on veut acheter 100 volatiles. Combien de coqs, de poules et de poussins pouvons-nous acheter ? » (D'après le *Manuel mathématique* de Zhang Qiujian, chapitre 3, problème 38, Ve siècle ap. J.-C.)

Commentaire : Ce fameux problème des cent volailles a réapparu sous d'innombrables formes dans des textes indiens, arabes ou européens (voir les exercices 61 à 64) ; il est resté populaire jusqu'à ce jour (voir l'exercice 44 de cette section).

6. 1 *zhang* équivalait alors à environ 2,3 mètres.

61. « On vend cinq pigeons pour 3 *panas*, 7 oiseaux *sarasa* pour 5 *panas*, 9 cygnes pour 7 *panas* et trois paons pour 9 *panas*. On demande à un homme d'acheter 100 oiseaux pour 100 *panas* afin d'amuser le fils du roi. Combien paie-t-il pour chacune des espèces d'oiseaux qu'il achète ? » (D'après le *Ganita-Sara-Sangraha* de Mahavira, Inde, IXe siècle ap. J.-C.) Trouvez une solution à ce problème.

62. « Un canard vaut quatre pièces, cinq moineaux une pièce et un coq coûte une pièce. Quelqu'un achète 100 oiseaux pour un total de 100 pièces. Combien d'oiseaux de chaque espèce achète-t-il ? » (D'après la *Clé de l'arithmétique*, Al-Kashi, XVe siècle).

63. « Un quidam achète des moutons, des chèvres et des porcs, en nombre de 100, pour un total de 100 couronnes. Les moutons valent une demi-couronne pièce, les chèvres $1\frac{1}{2}$ couronne et les porcs $3\frac{1}{2}$. Combien d'animaux avait-il de chaque espèce ? » (D'après les *Éléments d'algèbre,* de Leonhard Euler, 1770)

64. « Un seigneur avait cent personnes à son service et ordonna qu'on leur distribue cent mesures de grain. Il précisa que chaque homme devait recevoir trois mesures, chaque femme deux mesures et chaque enfant une demi-mesure. Combien d'hommes, de femmes et d'enfant avait-il à son service ? » On précise qu'il y a au moins un homme, une femme et un enfant. (D'après les *Problèmes pour activer un jeune esprit* d'Alcuin (environ 732–804), l'abbé de St Martin de Tours. Alcuin était l'ami et le précepteur de Charlemagne et sa famille à Aix-la-Chapelle.)

65. Un père, à l'heure de sa mort, légua à ses fils 30 tonneaux, dont dix étaient pleins de vin, dix étaient à moitié pleins et les dix derniers étaient vides. Divisez le vin et les tonneaux de sorte que chacun des trois fils aient la même quantité de vin et le même nombre de tonneaux. Trouvez toutes les solutions possibles. (D'après Alcuin)

66. « Fabrique-moi une couronne qui pèse 60 *mines*, faite d'or, de bronze, d'étain et de fer forgé. L'or et le bronze ensemble en feront les deux tiers, l'or et l'étain les trois quarts, l'or et le fer les trois cinquièmes. Dis-moi de combien d'or, d'étain, de bronze et de fer tu dois faire usage ? » (D'après l'*Anthologie grecque* de Metrodore, VIe siècle ap. J.-C.)

67. Trois marchands trouvent une bourse sur la route. L'un des marchands dit : « Si je garde cette bourse, j'aurai deux fois plus d'argent que vous deux réunis. » « Donne moi la bourse et j'aurai trois fois plus que vous deux ensemble » répond alors le deuxième marchand. Le troisième marchand dit « Je serai bien plus riche que chacun d'entre vous si je garde cette bourse, et j'aurai cinq fois plus d'argent que vous deux réunis. » S'il y a 60 pièces (toutes de même valeur) dans la bourse, combien a chaque marchand ? (D'après Mahavira)

68. Trois vaches broutent un pré en deux jours
sept vaches broutent quatre prés en quatre jours, et
trois vaches broutent deux prés en cinq jours.

On suppose que chaque pré contient initialement la même quantité, x, d'herbe ; qu'il pousse la même quantité d'herbe, y, chaque jour, et que les vaches mangent la même quantité d'herbe, z, chaque jour. (Les quantités x, y, z sont exprimées en masse.) Trouvez toutes les solutions de ce problème. (C'est un cas particulier d'un problème discuté par Isaac Newton dans son *Arithmetica Universalis,* 1707.)

3. Solutions des systèmes linéaires ; algèbre matricielle

BUT. — Utiliser la forme réduite échelonnée par lignes de la matrice augmentée pour déterminer le nombre de solutions d'un système linéaire. Appliquer la définition du rang d'une matrice. Calculer le produit $A\vec{x}$ en fonction des colonnes ou des lignes de A. Représenter un système linéaire sous forme vectorielle ou matricielle.

1. Les formes réduites échelonnées par lignes de matrices augmentées sont données ci-dessous. Combien de solution le système linéaire correspondant a-t-il ?

a. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

b. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$

c. $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$

Dans les exercices 2 à 4, déterminer le rang des matrices indiquées.

2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

5. a. Écrire le système

$$\left| \begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 7 \\ 3x & + & y & = & 11 \end{array} \right|$$

sous forme vectorielle.

b. Utilisez la réponse à la question a) pour représenter géométriquement le système. Résoudre le système et représenter la solution géométriquement.

6. Considérons les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ de $\mathbb{R}^2$, esquissés sur la figure ci-dessous. Les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont parallèles. Combien de solutions x, y, le système

$$x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 = \vec{v}_3$$

a-t-il ? Raisonner géométriquement.

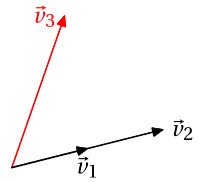


FIGURE 6A

7. Considérons les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ de $\mathbb{R}^2$, représentés ci-dessous. Combien de solutions x, y, le système

$$x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 = \vec{v}_3$$

a-t-il ? Raisonner géométriquement.

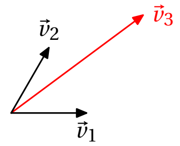


FIGURE 7A

8. Considérons les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$ de $\mathbb{R}^2$, représentés sur la figure ci-dessous. En raisonnant géométriquement, déterminer deux solutions x, y, z du système linéaire

$$x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 + z\vec{v}_3 = \vec{v}_4.$$

Pourquoi ce système a-t-il une infinité de solutions ?

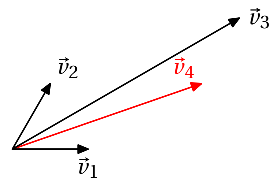


FIGURE 8A

9. Écrire le système

$$\left| \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 4x & + & 5y & + & 6z & = & 4 \\ 7x & + & 8y & + & 9z & = & 9 \end{array} \right|$$

sous forme matricielle.

Dans les exercices 10 à 12, calculer les produits scalaires indiqués (s'ils sont définis).

10. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 1 & 9 & 9 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$

Dans les exercices 13 à 15, calculer les produits $A\vec{x}$ à l'aide de papier et crayon. Dans chaque cas, calculer le produit de deux façons : en fonction des colonnes de A (définition 1.3.6) et en fonction des lignes de A (fait 1.3.8).

13. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$

Dans les exercices 16 à 19, calculer les produits $A\vec{x}$ (si les produits sont définis) à l'aide de papier et crayon.

16. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

20. a. Trouver $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

b. Trouver $9 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

21. Utiliser la technologie pour calculer le produit

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 9 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

22. Considérons un système linéaire de trois équations à trois inconnues. On sait qu'il a une seule solution ? À quoi ressemble la forme réduite échelonnée par lignes de la matrices des coefficients de ce système ? Justifier votre réponse.

23. Considérons un système linéaire de quatre équations à trois inconnues. On sait qu'il a une seule solution ? À quoi ressemble la forme réduite échelonnée par lignes de la matrices des coefficients de ce système ? Justifier votre réponse.

24. Soit A une matrice 4×4 et soit $\vec{b}$, $\vec{c}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$. On suppose que le système $A\vec{x} = \vec{b}$ possède une solution et une seule. Que pouvez-vous dire du système $A\vec{x} = \vec{c}$?

25. Soit A une matrice 4×4 et soit $\vec{b}$, $\vec{c}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$. On suppose que le système $A\vec{x} = \vec{b}$ est inconsistant. Que pouvez-vous dire du système $A\vec{x} = \vec{c}$?

26. Soit A une matrice 4×3 et soit $\vec{b}$, $\vec{c}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$. On suppose que le système $A\vec{x} = \vec{b}$ possède une solution et une seule. Que pouvez-vous dire du système $A\vec{x} = \vec{c}$?

27. Si le rang de la matrice 4×4, A, est égal à 4, que vaut $\text{frel}(A)$?

28. Si le rang de la matrice 5×3, A, est égal à 3, que vaut $\text{frel}(A)$?

Dans les problèmes 29 à 32, on pose $\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -9 \end{bmatrix}$ et

$\vec{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

29. Trouver une matrice *diagonale* A telle que $A\vec{x} = \vec{y}$.

30. Trouver une matrice A de rang 1 telle que $A\vec{x} = \vec{y}$.

31. Trouver une matrice *triangulaire supérieure* A telle que $A\vec{x} = \vec{y}$. On demande en outre que toutes les entrées de A sur et au-dessus de la diagonale soient non nulles.

32. Trouver une matrice A dont toutes les entrées sont non nulles telle que $A\vec{x} = \vec{y}$.

33. Soit A la matrice $n \times n$ avec des 1 sur la diagonale et de 0 partout ailleurs. Que vaut $A\vec{x}$ si $\vec{x}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$?

34. On définit des vecteurs

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dans $\mathbb{R}^3$.

a. Pour

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix},$$

calculer $A\vec{e}_1$, $A\vec{e}_2$ et $A\vec{e}_3$.

b. Si B est une matrice $n \times 3$ de colonnes $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$, que valent $B\vec{e}_1$, $B\vec{e}_2$ et $B\vec{e}_3$?

35. Dans $\mathbb{R}^m$, on définit

$$\vec{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

vecteur dont toutes les composantes sont nulles, sauf la i-ième qui vaut 1. Si A est une matrice $n \times m$, que vaut $A\vec{e}_i$?

36. Trouver une matrice 3×3, A, telle que

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{et} \quad A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

37. Trouver tous les vecteurs $\vec{x}$ tels que $A\vec{x} = \vec{b}$, où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

38. a. À l'aide d'un ordinateur, construire une matrice aléatoire 3×3, A. (Les entrées peuvent être des entiers d'un seul chiffre, ou des nombres réels compris entre 0 et 1, suivant la technologie utilisée.) Calculer frel(A). Répéter cette expérience quelques fois.

b. À quoi ressemble la forme réduite échelonnée par lignes de la plupart des matrices 3×3 ? Expliquer.

39. Répéter l'exercice 38 pour des matrices 3×4.

40. Répéter l'exercice 38 pour des matrices 4×3.

41. Combien de solutions ont la plupart des systèmes linéaires de trois équations à trois inconnues ? Expliquez votre réponse à l'aide de votre travail dans l'exercice 38.

42. Combien de solutions ont la plupart des systèmes linéaires de trois équations à trois inconnues ? Expliquez votre réponse à l'aide de votre travail dans l'exercice 39.

43. Combien de solutions ont la plupart des systèmes linéaires de trois équations à trois inconnues ? Expliquez votre réponse à l'aide de votre travail dans l'exercice 40.

44. Soit A une matrice $n \times m$ avec plus de lignes que de colonnes ($n > m$). Montrer qu'il y a un vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ tel que le système $A\vec{x} = \vec{b}$ soit inconsistant.

45. Soit A une matrice $n \times m$, $\vec{x}$ un vecteur de $\mathbb{R}^m$ et k un scalaire. Montrer que

$$A(k\vec{x}) = k(A\vec{x}).$$

46. Trouver le rang de la matrice

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix},$$

où a, d et f sont non nuls, et b, c, e sont des nombres réels arbitraires.

47. On dit d'un système de la forme

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

qu'il est *homogène*. Justifiez les faits suivants :

a. Tous les systèmes homogènes sont consistants.

b. Un système homogène avec moins d'équations que d'inconnues a une infinité de solutions.

c. Si $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ sont des solutions du système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$, alors $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ est aussi une solution.

d. Si $\vec{x}$ est une solution du système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$ et k est un scalaire arbitraire, alors $k\vec{x}$ est aussi une solution.

48. Soit $\vec{x}_1$ une solution du système $A\vec{x} = \vec{b}$. Justifiez les faits énoncés dans les points a) et b) :

a. Si $\vec{x}_0$ est une solution du système $A\vec{x} = 0$, alors $\vec{x}_1 + \vec{x}_0$ est une solution du système $A\vec{x} = \vec{b}$.

b. Si $\vec{x}_2$ est une autre solution du système $A\vec{x} = \vec{b}$, alors $\vec{x}_2 - \vec{x}_1$ est une solution du système $A\vec{x} = \vec{0}$.

c. Supposons maintenant que A soit une matrice 2×2. On a représenté sur la figure ci-dessous une solution $\vec{x}_1$ du système $A\vec{x} = \vec{b}$. On nous dit aussi que les solutions du système $A\vec{x} = \vec{0}$ forment la droite tracée sur la figure. Tracez la droite consistant des solutions du système $A\vec{x} = \vec{b}$.

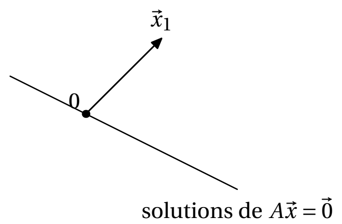


FIGURE 48A

Si vous êtes gênés par la généralité de ce problème, commencez par réfléchir à un exemple tel que :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

49. On considère un système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}$, où A est une matrice $n \times m$ et $\vec{b}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. La table ci-dessous donne le rang de la matrice A ou celui de la matrice augmentée $\left[\, A \,\vdots\, \vec{b} \,\right]$. dans chaque cas, dites s'il est possible que le système n'ait pas de solution, une seule solution, ou une infinité de solutions. Il peut y avoir plusieurs réponses possibles. Justifiez votre réponse.

	n	m	Rang de A	Rang de $\left[\, A \,\vdots\, \vec{b} \,\right]$
a.	3	4	?	2
b.	4	3	3	?
c.	4	3	?	4
d.	3	4	3	?

50. Considérons un système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}$, où A est une matrice 4×3. On sait que le rang de la matrice $\left[\, A \,\vdots\, \vec{b} \,\right]$ est égal à 4. Combien de solutions ce système a-t-il ?

51. Soit A une matrice $n \times m$, B une matrice $r \times s$ et $\vec{x}$ un vecteur de $\mathbb{R}^p$. Pour quelles valeurs de n, m, r, s et p le produit

$$A(B\vec{x})$$

est-il défini ?

52. Considérons les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pouvez-vous trouver une matrice 2×2, C, telle que

$$A(B\vec{x}) = C\vec{x}$$

pour tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^2$?

53. Si A et B sont deux matrices $n \times m$, est-ce que

$$(A + B)\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x}$$

pour tout $\vec{x}$ dans $\mathbb{R}^m$?

54. Considérons des vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ de $\mathbb{R}^3$ qui ne sont pas colinéaires. Quels vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont combinaisons linéaires de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$? Décrivez géométriquement l'ensemble de ces vecteurs. Faites une figure.

55. Est-ce que le vecteur $\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$ est une combinaison linéaire de

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} ?$$

56. Est-ce que le vecteur

$$\begin{bmatrix} 30 \\ -1 \\ 38 \\ 56 \\ 62 \end{bmatrix}$$

est une combinaison linéaire de

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} ?$$

57. Exprimer le vecteur $\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$ comme la somme d'un vecteur de la droite d'équation $y = 3x$ et d'un vecteur de la droite d'équation $y = x/2$.

58. Pour quelles valeurs des constantes b et c est-ce que le vecteur $\begin{bmatrix} 3 \\ b \\ c \end{bmatrix}$ est une combinaison linéaire de $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$?

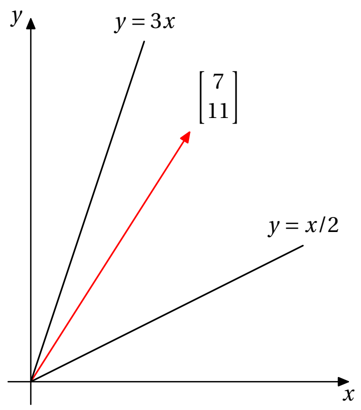


FIGURE 57A

59. Pour quelles valeurs des constantes c et d est-ce que le vecteur $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ c \\ d \end{bmatrix}$ est une combinaison linéaire de $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$?

60. Pour quelles valeurs des constantes a, b, c et d est-ce que le vecteur $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ est une combinaison linéaire de $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$?

61. Résoudre le système linéaire

$$\left| \begin{array}{ccccccc} & & y & + & z & = & a \\ x & & & + & z & = & b \\ x & + & y & & & = & c \end{array} \right|,$$

où a, b et c sont des constantes arbitraires.

62. Soit A la matrice $n \times n$ avec des 0 sur la diagonale principale et des 1 partout ailleurs. Si $\vec{b}$ est un vecteur arbitraire de $\mathbb{R}^n$, résoudre le système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}$, en exprimant les composantes $x_1, \ldots, x_n$ de $\vec{x}$ en termes des composantes de $\vec{b}$. (Voir l'exercice 61 pour le cas $n = 3$.)

CHAPITRE 1. SYSTÈMES LINÉAIRES

4. Récapitulation : Vrai ou faux ?

Déterminez si les énoncés suivants sont vrais ou faux en justifiant votre réponse.

1. La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est sous forme réduite échelonnée par lignes.

2. Un système de quatre équations linéaires à trois inconnues est toujours inconsistant.

3. Il existe une matrice 3×4 de rang 4.

4. Si A est une matrice 3×4 et $\vec{v}$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$, le vecteur $A\vec{v}$ appartient à $\mathbb{R}^3$.

5. Si la matrice 4×4, A, est de rang 4, n'importe quel système linéaire dont la matrice des coefficients est A possède une solution et une seule.

6. Il existe un système de trois équations linéaires à trois inconnues qui possède exactement trois solutions.

7. Il existe une matrice 5×5, A, de rang 4, telle que le système $A\vec{x} = \vec{0}$ n'ait que la solution $\vec{x} = \vec{0}$.

8. Si la matrice A est sous forme réduite échelonnée par lignes, au moins une des entrées de chaque colonne est égale à 1.

9. Si A est une matrice $n \times n$ et $\vec{x}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$, le produit $A\vec{x}$ est combinaison linéaire des colonnes de la matrice A.

10. Si le vecteur $\vec{u}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on peut écrire $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$, où a et b sont des scalaires convenables.

11. Le rang de la matrice $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ est égal à 2.

12. $\begin{bmatrix} 11 & 13 & 15 \\ 17 & 19 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 19 \\ 21 \end{bmatrix}$

13. Il existe une matrice A telle que

$$A \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

14. Le vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ est combinaison linéaire des vecteurs

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

15. Le système $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ est inconsistant.

16. Il existe une matrice 2×2, A, telle que $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

17. Si A est une matrice non nulle de la forme $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, le rang de la matrice A est égal à 2.

18. Le rang de la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ vaut 3.

19. Le système $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ est inconsistant pour toute matrice 4×3, A.

20. Il existe une matrice 2×2, A, telle que

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

21. Il existe des scalaires a et b tels que la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & 0 & b \\ -a & -b & 0 \end{bmatrix}$$

soit de rang 3.

22. Si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^4$, $\vec{v}$ est combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

23. Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$, alors $\vec{w}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

24. Si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^4$, le vecteur nul de $\mathbb{R}^4$ est combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

25. Si A et B sont des matrices 3×3 de rang 2, on peut transformer A en B à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes.

26. Si le vecteur $\vec{u}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$, et que $\vec{v}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{p}$, $\vec{q}$ et $\vec{r}$, alors $\vec{u}$ est combinaison linéaire de $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ et $\vec{w}$.

27. Un système linéaire avec (strictement) moins d'inconnues que d'équations possède ou bien une infinité de solutions ou bien aucune.

28. Le rang d'une matrice triangulaire supérieure est le nombre d'entrées non nulles sur la diagonale.

29. Si le système $A\vec{x} = \vec{b}$ a une seule solution, alors A est une matrice carrée.

30. Si A est une matrice 4×3, il existe un vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^4$ tel que le système $A\vec{x} = \vec{b}$ soit inconsistant.

31. Si A est une matrice 4×3 de rang 3 et que $A\vec{v} = A\vec{w}$ pour deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont égaux.

32. Si A est une matrice 4×4 et que le système $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ possède une unique solution, alors le système $A\vec{x} = \vec{0}$ n'a pour seule solution que $\vec{x} = \vec{0}$.

33. Si un vecteur $\vec{u}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$, alors $\vec{w}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

34. Si $A = \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{bmatrix}$ et que $\operatorname{frel}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, alors l'équation $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$ est satisfaite.

35. Si A et B sont des matrices de la même taille, on a $\operatorname{rang}(A+B) = \operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B)$.

36. Si A et B sont des matrices $n \times n$ de rang n, alors A peut être transformée en B par des opérations élémentaires sur les lignes.

37. Si un vecteur $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^4$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{w}$, et que A est une matrice 5×4, alors $A\vec{v}$ est combinaison linéaire de $A\vec{u}$ et $A\vec{w}$.

38. Si une matrice E est sous forme réduite échelonnée par lignes, et si l'on supprime une ligne de E, la matrice obtenue est encore sous forme réduite échelonne par lignes.

39. Il existe une matrice 4×3, A, de rang 3 telle que $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \vec{0}$.

40. Le système $A\vec{x} = \vec{b}$ est inconsistant si et seulement si $\operatorname{frel}(A)$ contient une ligne de 0.

41. Le système $A\vec{x} = \vec{b}$ est consistant si et seulement si $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}\left[\, A \,\vdots\, \vec{b} \,\right]$.

42. Si A est une matrice 3×4 de rang 3, le système $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ possède une infinité de solutions.

43. Si deux matrices, A et B, ont la même forme réduite échelonnée par lignes, les équations $A\vec{x} = \vec{0}$ et $B\vec{x} = \vec{0}$ ont les mêmes solutions.

44. Si la matrice E est sous forme réduite échelonnée par lignes, et si l'on supprime une colonne de E, la matrice obtenue est encore sous forme réduite échelonnée par lignes.

45. Si A et B sont deux matrices 2×2 telles que les équations $A\vec{x} = \vec{0}$ et $B\vec{x} = \vec{0}$ ont les mêmes solutions, alors $\operatorname{frel}(A) = \operatorname{frel}(B)$.

CHAPITRE 2. APPLICATIONS LINÉAIRES

1. Introduction aux applications linéaires et leurs inverses

BUT. — Utiliser le concept d'application linéaire en termes de la formule $\vec{y} = A\vec{x}$ et interpréter géométriquement des applications linéaires simples. Déterminer l'inverse d'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ (quand elle existe). Déterminer, colonne par colonne, la matrice d'une application linéaire.

Parmi les applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ données dans les exercices 1 à 3, lesquelles sont linéaires ? (Le vecteur $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ indiqué est l'image du vecteur $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.)

1. $$\begin{aligned} y_1 &= 2x_2 \\ y_2 &= x_2 + 2 \\ y_3 &= 2x_2 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} y_1 &= 2x_2 \\ y_2 &= 3x_3 \\ y_3 &= x_1 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} y_1 &= x_2 - x_3 \\ y_2 &= x_1 x_3 \\ y_3 &= x_1 - x_2 \end{aligned}$$

4. Trouver la matrice de l'application linéaire donnée par

$$\begin{aligned} y_1 &= 9x_1 + 3x_2 - 3x_3 \\ y_2 &= 2x_1 - 9x_2 + x_3 \\ y_3 &= 4x_1 - 9x_2 - 2x_3 \\ y_4 &= 5x_1 + x_2 + 5x_3 \end{aligned}$$

5. Considérons l'application linéaire T de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix},$$

$$\text{et} \quad T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

Déterminer la matrice de T.

6. Considérons l'application T de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Cette transformation est-elle linéaire ? Si oui, donner sa matrice.

7. Soit $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ des vecteurs arbitraires de $\mathbb{R}^n$. Considérons l'application de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ donnée par

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_m\vec{v}_m.$$

Cette transformation est-elle linéaire ? Si oui, donner sa matrice en fonction des vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$.

8. Déterminer l'inverse de l'application linéaire donnée par

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 7x_2 \\ y_2 &= 3x_1 + 20x_2 \end{aligned}$$

Dans les exercices 9 à 12, déterminer si la matrice indiquée est inversible. Trouver son inverse s'il existe. Dans l'exercice 12, la constante k est arbitraire.

9. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

13. Prouver les faits suivants :
a. La matrice 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. (*Indication :* distinguer les cas $a \neq 0$ et $a = 0$.)
b. Si la matrice

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

est inversible, alors

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

(La formule de la question *b*) mérite d'être retenue.)

14. a. Pour quelles valeurs de la constante k la matrice $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & k \end{bmatrix}$ est-elle inversible ?

b. Pour quelles valeurs de la constante k est-ce que tous les coefficients de la matrice $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & k \end{bmatrix}^{-1}$ sont des entiers ? (Voir l'exercice 13.)

15. Pour quelles valeurs des constantes a et b est-ce que la matrice

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

est inversible ? Quel est alors son inverse ? (Voir l'exercice 13.)

Donnez une interprétation géométrique des applications linéaires définies par les matrices des exercices 16 à 23. Montrez l'effet de ces applications sur la lettre L considérée dans l'exemple 5. Dans chaque cas, décidez si l'application est inversible. Trouvez son inverse s'il existe et interprétez-le géométriquement. Voir l'exercice 13.

16. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$	**19.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	**22.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
17. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	**20.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	**23.** $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$
18. $\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$	**21.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	

Considérer le visage circulaire de la figure ci-dessous. Pour chacune des matrices A des exercices 24 à 30, faites un dessin qui indique l'effet de l'application linéaire $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ sur ce visage.

24. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	**27.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	**30.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
25. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	**28.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	
26. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	**29.** $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	

31. Dans le chapitre 1, nous avons indiqué qu'un ancien billet de banque allemand représentait, en fait d'un portrait de Gauss, son image miroir. Quelle application linéaire T pouvez-vous utiliser pour retrouver le portrait original ?

32. Déterminer une matrice $n \times n$, A, telle que $A\vec{x} = 3\vec{x}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

33. Considérons l'application T de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui fait tourner un vecteur $\vec{x}$ d'un angle de 45° dans le

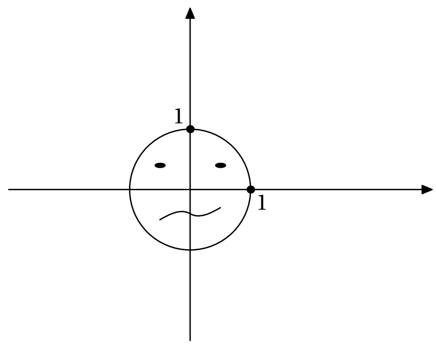


FIGURE 24A

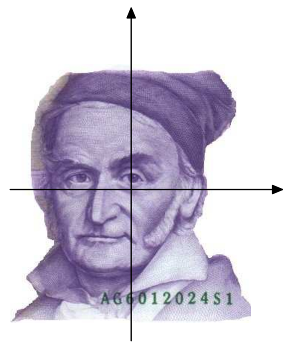


FIGURE 31A

sens inverse des aiguilles d'une montre, comme représenté sur la figure suivante. On vous dit que T

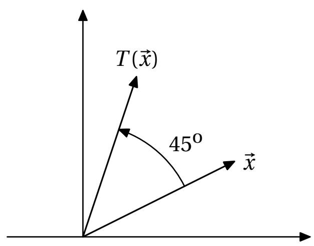


FIGURE 33A

est une application linéaire. (Cela sera démontré au paragraphe suivant.) Trouver la matrice de T.

34. Considérons l'application T de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui fait tourner un vecteur $\vec{x}$ d'un angle θ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. (Comparer avec l'exercice 33.) On vous dit que T est une application linéaire. Trouver sa matrice en fonction de θ.

35. Dans l'exemple de ce paragraphe qui parlait des garde-côtes français, imaginons que vous soyiez un espion qui observe le bateau et que vous écoutiez les messages émis par le bateau. Vous collectez les données suivantes : lorsque leur position est $\begin{bmatrix} 5 \\ 42 \end{bmatrix}$, ils envoient $\begin{bmatrix} 89 \\ 52 \end{bmatrix}$; lorsque leur position est $\begin{bmatrix} 6 \\ 41 \end{bmatrix}$, ils envoient $\begin{bmatrix} 88 \\ 53 \end{bmatrix}$.

Pouvez-vous casser leur code (c'est-à-dire trouver la matrice de codage), en supposant que ce soit un code linéaire ?

36. Soit T une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Soit $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$, comme sur la figure. On vous dit que $T(\vec{v}_1) = \vec{v}_1$ et $T(\vec{v}_2) = 3\vec{v}_2$. Sur la même figure, dessinez $T(\vec{w})$.

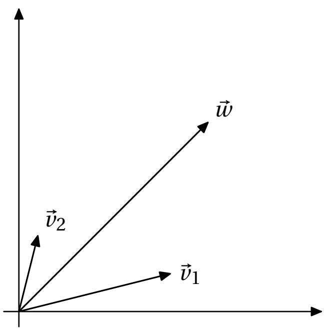


FIGURE 36A

37. Considérons une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Supposons que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et que $\vec{x}$ soit un vecteur dont l'extrémité est située sur le segment reliant les extrémités des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Est-ce que l'extrémité du vecteur $T(\vec{x})$ appartient nécessairement au segment qui relie les extrémités de $T(\vec{v})$ et $T(\vec{w})$? Justifiez votre réponse. (*Indication :* on peut écrire

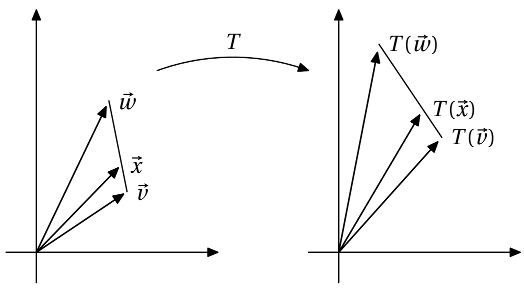


FIGURE 37A

$\vec{x} = \vec{v} + k(\vec{w} - \vec{v})$, où k est un scalaire convenable entre 0 et 1.)

On peut résumer cet exercice en disant qu'une application linéaire applique une droite sur une droite.

38. La figure ci-dessous représente les deux vecteurs colonnes $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ d'une matrice 2×2, A. Considérons l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ donnée par $T(\vec{x}) = A\vec{x}$. Tracez le vecteur

$$T\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

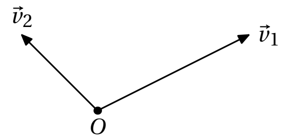


FIGURE 38A

39. Montrer que si T est une application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$, alors

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = x_1 T(\vec{e}_1) + x_2 T(\vec{e}_2) + \cdots + x_m T(\vec{e}_m),$$

où $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m$ sont les vecteurs standard de $\mathbb{R}^m$.

40. Décrire toute les applications linéaires de $\mathbb{R}$ (= $\mathbb{R}^1$) dans $\mathbb{R}$. À quoi ressemblent leurs graphes ?

41. Décrire toute les applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (= $\mathbb{R}^1$). À quoi ressemblent leurs graphes ?

42. Pour représenter graphiquement dans le plan (sur une feuille de papier, un tableau, un écran d'ordinateur) un objet trois-dimensionnel, vous devez transformer des coordonnées dans l'espace,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

en des coordonnées planes, $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$. Le choix le plus simple est une transformation linéaire, par exemple l'application linéaire donnée par la matrice

$$\begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

a. Utilisez cette application pour représenter le cube de sommets

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Tracez aussi les axes de coordonnées x_1, x_2, x_3.

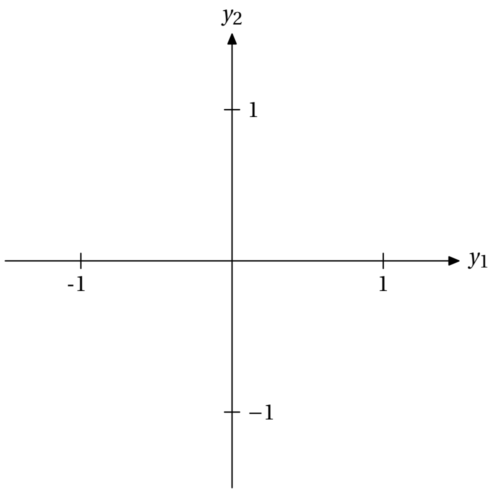


FIGURE 42A

b. Représentez sur la figure faite à la question *a*) l'image du point $\begin{bmatrix}1\\1/2\\1/2\end{bmatrix}$. Justifiez.

c. Trouvez tous les points

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \quad \text{de } \mathbb{R}^3$$

qui sont transformés en $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$. Justifiez.

43. a. Soit $\vec{v}$ le vecteur $\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$. Est-ce que l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ donnée par $T(\vec{x}) = \vec{v}\cdot\vec{x}$ (produit scalaire) est linéaire ? Si oui, donner la matrice de T.

b. Soit $\vec{v}$ un vecteur arbitraire de $\mathbb{R}^3$. Est-ce que l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ donnée par $T(\vec{x}) = \vec{v}\cdot\vec{x}$ est linéaire ? Si oui, donner la matrice de T (en fonction des composantes de $\vec{v}$).

c. Inversement, soit T une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ tel que $T(\vec{x}) = \vec{v}\cdot\vec{x}$) pour tout $\vec{x}$ dans $\mathbb{R}^3$.

44. Le produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est défini par

$$\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_2b_3 - a_3b_3\\a_3b_1 - a_1b_3\\a_1b_2 - a_2b_1\end{bmatrix} \quad .$$

Soit $\vec{v}$ un vecteur arbitraire de $\mathbb{R}^3$. Est-ce que l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par $T(\vec{x}) = \vec{v}\wedge\vec{x}$ est linéaire ? Si oui, donnez sa matrice en fonction des composantes du vecteur $\vec{v}$.

45. Considérons deux applications linéaires $\vec{y} = T(\vec{x})$ et $\vec{z} = L(\vec{y})$, où T va de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^p$ et L va de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$. Est ce que l'application $\vec{z} = L(T(\vec{x}))$ est aussi linéaire ? (Cette application est la *composée* de L et T.)

46. On pose

$$A = \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix}p & q\\r & s\end{bmatrix} \quad .$$

Trouver la matrice de l'application linéaire T donnée par $T(\vec{x}) = B(A\vec{x})$. (Voir l'exercice 45.) (*Indication :* déterminez $T(\vec{e}_1)$ et $T(\vec{e}_2)$.)

47. Soit T une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On a représenté sur la figure ci-dessous trois vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}$ de $\mathbb{R}^2$, ainsi que les vecteurs $T(\vec{v}_1)$, $T(\vec{v}_2)$. Dessinez $T(\vec{w})$. Justifiez votre réponse.

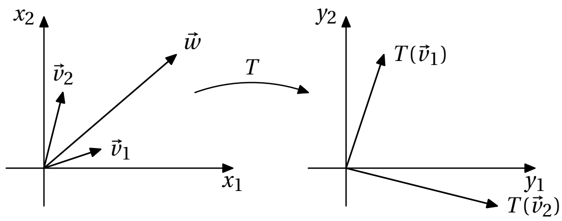


FIGURE 47A

48. Considérons deux applications linéaires T et L de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On vous dit que $T(\vec{v}_1) = L(\vec{v}_1)$ et $T(\vec{v}_2) = L(\vec{v}_2)$, où $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont les vecteurs esquissés sur la figure ci-dessous. Montrer que $T(\vec{x}) = L(\vec{x})$ pour tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^2$.

49. Dans le centre de Genève, Suisse, certains parc-mètres acceptent les pièces de 2 et 5 Francs.

a. Un officier chargé du stationnement récupère 51 pièces pour une valeur totale de 144

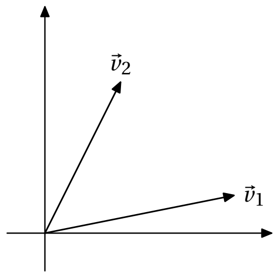


FIGURE 48A

Francs. Combien de pièces de chaque sorte y a-t-il ?

b. Déterminer la matrice A qui transforme le vecteur

$$\begin{bmatrix} \text{nombre de pièces de 2 Francs} \\ \text{nombre de pièces de 5 Francs} \end{bmatrix}$$

en le vecteur

$$\begin{bmatrix} \text{valeur totale des pièces} \\ \text{nombre total de pièces} \end{bmatrix}.$$

c. Est-ce que la matrice A déterminée dans la question *b*) est inversible ? Si oui, trouver son inverse (utiliser l'exercice 13). Utiliser le résultat obtenu pour vérifier votre réponse à la question *a*).

50. Un joaillier utilisait pour ses bijoux un alliage de platine et un alliage d'argent ; les densités de ces alliages étaient exactement 20 et 10 grammes par cm^3, respectivement.

a. Le roi Héron de Syracuse commanda à ce joailler une couronne d'une masse totale de 5 kg (5000 grammes), en demandant que l'alliage de platine constitue au moins 90% de la masse totale. Le joaillier lui procura une très belle pièce, mais Archimède, l'ami du roi, doutait de sa pureté. Alors qu'il prenait son bain, il découvrit une méthode pour vérifier la composition de la couronne (c'est alors qu'il s'écria « Eurêka ! » et se rua tout nu au palais du Roi). En plongeant la couronne dans l'eau, il constata que son volume était de 370 cm^3. De quelle quantité (en masse) de chaque alliage était constituée la couronne ? Le joaillier était-il un escroc ?

b. Déterminer la matrice A qui, étant donné un bijou produit par ce joaillier, applique le vecteur

$$\begin{bmatrix} \text{masse de l'alliage de platine} \\ \text{masse de l'alliage d'argent} \end{bmatrix}$$

en le vecteur

$$\begin{bmatrix} \text{masse totale} \\ \text{volume total} \end{bmatrix}.$$

c. La matrice A obtenue à la question *b*) est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse (utiliser l'exercice 13). À l'aide de ce résultat, vérifiez votre réponse à la question *a*).

51. La formule de conversion $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ des degrés Farenheit aux degrés Celsius (température) n'est pas linéaire au sens de l'algèbre linéaire (pourquoi ?). Pourtant, il y a un moyen pour représenter cette conversion à l'aide d'une matrice.

a. Déterminer la matrice 2×2, A, qui applique le vecteur $\begin{bmatrix} F \\ 1 \end{bmatrix}$ sur le vecteur $\begin{bmatrix} C \\ 1 \end{bmatrix}$. (La seconde ligne de A sera $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$.)

b. Est-ce que la matrice A obtenue à la question *a*) est inversible ? Si oui, calculer son inverse (utiliser l'exercice 13). Utiliser le résultat obtenu pour écrire une formule qui exprime F en fonction de C.

52. Dans les pages financières d'un journal, on peut parfois trouver une table (une matrice) qui énumère les taux de change entre certaines monnaies. Dans cet exercice, nous en considérons une version miniature qui se restreint au dollar canadien (C\$) et au rand sud-africain (R). Ainsi, la matrice

$$\begin{array}{c|cc|c} & \text{C\$} & \text{R} & \\ \hline & 1 & 1/5 & \text{C\$} \\ & 5 & 1 & \text{R} \end{array}$$

représente le fait qu'1 C$ vaut 5 R (en avril 2004).

a. Après un voyage, vous avez 100 C$ et 1 600 R en poche. Représentons ces deux valeurs par le vecteur $\vec{x} = \begin{bmatrix} 100 \\ 1600 \end{bmatrix}$. Calculez $A\vec{x}$. Quelle est la signification pratique des deux composantes du vecteur $A\vec{x}$?

b. Vérifiez que la matrice A n'est pas inversible. Pour quelles valeurs de $\vec{b}$ le système $A\vec{x} = \vec{b}$ est-il consistant ? Quelle est la signification pratique de votre réponse ? Dans le cas où le système $A\vec{x} = \vec{b}$ est consistant, combien de solutions $\vec{x}$ y a-t-il ? De nouveau, quelle est la signification pratique de votre réponse ?

53. Considérons une matrice de taux de change de plus grande taille (voir l'exercice 52) qui met en jeu quatre des monnaies mondiales dominantes :

l'euro (€), le dollar américain ($), le yen japonais (¥) et la livre sterling (£).

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc|c} € & \$ & ¥ & £ & \\ \hline * & 0{,}8 & * & 1{,}5 & € \\ * & * & * & * & \$ \\ * & * & * & 200 & ¥ \\ * & * & * & * & £ \end{array}$$

L'entrée a_{ij} donne la valeur d'une unité de la j-ième monnaie exprimée dans la i-ième monnaie. Par exemple, $a_{34} = 200$ signifie que 1 £=200 ¥ (en avril 2004). Déterminez exactement (sous forme de fractions) les valeurs des douzes entrées manquantes de la matrice A.

54. Considérons une matrice de taux de change A (voir les exercices 52 et 53).

a. Quels sont les coefficients diagonaux a_{ii} de A ?

b. Quelle relation y a-t-il entre a_{ij} et a_{ji} ?

c. Quelle relation y a-t-il entre a_{ik}, a_{kj} et a_{ij} ?

d. Quel est le rang de A ? Quelle relation y a-t-il entre A et frel(A) ?

BUT. — Vérifier si une application donnée est linéaire. Utiliser les matrices de projections, de réflexions et de rotations. Appliquer la définition des transvections, des projections et des réflexions.

1. Esquisser l'image du L standard par l'application linéaire T donnée par

$$T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

(Voir l'exemple 1.)

2. Trouver la matrice d'une rotation d'un angle de 60° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

3. Considérons une application linéaire T de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. À l'aide de $T(\vec{e}_1)$ et $T(\vec{e}_2)$, décrivez géométriquement l'image du carré unité.

4. Décrivez géométriquement l'application linéaire T suivante :

$$T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

5. La matrice

$$\begin{bmatrix} -0{,}8 & -0{,}6 \\ 0{,}6 & -0{,}8 \end{bmatrix}$$

représente une rotation. Déterminer son angle (en radians).

6. Soit L la droite de $\mathbb{R}^3$ formée des multiples du vecteur $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Déterminer la projection orthogonale du vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sur L.

7. Soit L la droite de $\mathbb{R}^3$ formée des multiples du vecteur $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Déterminer l'image du vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ par la réflexion par rapport à la droite L.

8. Décrivez géométriquement l'application linéaire T donnée par :

$$T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

9. Décrivez géométriquement l'application linéaire T donnée par :

$$T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

10. Déterminer la matrice de la projection sur la droite L de $\mathbb{R}^2$ représentée sur la figure ci-dessous.

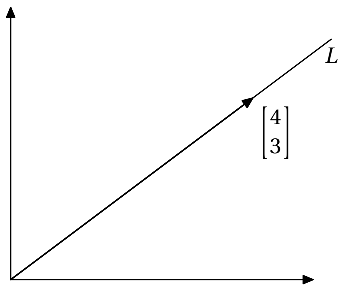


FIGURE 10A

11. Déterminer la matrice de la réflexion par rapport à la droite L définie dans l'exercice 10.

12. Soit L une droite de $\mathbb{R}^2$ qui contient le vecteur non nul

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Déterminer la matrice A de l'application linéaire donnée par $T(\vec{x}) = \mathrm{proj}_L(\vec{x})$. Exprimer ses coefficients en termes de v_1 et v_2.

13. Soit L une droite de $\mathbb{R}^2$ qui contient le vecteur unitaire

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Déterminer la matrice A de l'application linéaire donnée par $T(\vec{x}) = \mathrm{sym}_L(\vec{x})$. Exprimer ses coefficients en termes de u_1 et u_2. Montrer que A est de la forme $\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$, où $a^2 + b^2 = 1$.

14. Soit L une droite de $\mathbb{R}^3$ qui contient le vecteur unitaire

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

a. Déterminer la matrice A de l'application linéaire donnée par $T(\vec{x}) = \mathrm{proj}_L(\vec{x})$. Exprimer ses coefficients en fonction des composantes u_1, u_2, u_3 de $\vec{u}$.

b. Quelle est la somme des coefficients diagonaux de la matrice A obtenue à la question *a)* ?

15. Soit L une droite de $\mathbb{R}^3$ qui contient le vecteur unitaire

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

Déterminer la matrice A de l'application linéaire donnée par $T(\vec{x}) = \mathrm{sym}_L(\vec{x})$. Exprimer ses coefficients en fonction des composantes u_1, u_2, u_3 de $\vec{u}$.

16. Soit $T(\vec{x}) = \mathrm{sym}_L(\vec{x})$ la réflexion par rapport à la droite L de $\mathbb{R}^2$ tracée sur la figure ci-dessous.

a. Illustrez sur le dessin que T est une application linéaire.

b. Déterminer la matrice de T en fonction de θ.

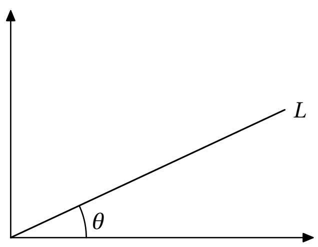


FIGURE 16A

17. Considérons une matrice A de la forme $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$, où $a^2 + b^2 = 1$. Trouver deux vecteurs non nuls perpendiculaires, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, tels que $A\vec{v} = \vec{v}$ et $A\vec{w} = -\vec{w}$ (exprimer leurs coefficients en fonction de a et b). En dédeuire que $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ représente la réflexion par rapport à la droite L de vecteur directeur $\vec{v}$.

18. L'application linéaire donnée par $T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -0{,}6 \end{bmatrix} \vec{x}$ est une réflexion par rapport à une droite L (voir l'exercice 17). Trouver l'équation de la droite L (sous la forme $y = mx$).

Dans les exercices 19 à 23, déterminer les matrices des applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ indiquées. Certaines de ces applications n'ont pas été définies formellement dans le cours : faites usage de bon sens. Vous pouvez supposer que ces applications sont bien linéaires.

19. La projection orthogonale sur le plan xy.

20. La réflexion par rapport au plan xz.

21. La rotation autour de l'axe des z d'un angle de $\pi/2$, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre lorsqu'on l'observe depuis le demi-axe des z positifs.

22. La rotation autour de l'axe des y d'un angle θ, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre lorsqu'on l'observe depuis le demi-axe des y positifs.

23. La réflexion par rapport au plan $y = z$.

24. Les rotations et les réflexions ont deux propriétés remarquables : elles préservent les longueurs des vecteurs et les angles entre les vecteurs. (Faites des figures pour illustrer ces propriétés.) Inversement, nous allons voir que toute application linéaire T de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui préserve longueurs et angles est ou bien une rotation ou bien une réflexion (par rapport à une droite).

a. Montrer que si $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ préserve longueurs et angles les deux vecteurs-colonnes $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de A sont perpendiculaires et de longueur 1.

b. Écrire le premier vecteur-colonne de A sous la forme $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$; observer que $a^2 + b^2 = 1$. Montrer que pour un tel vecteur $\vec{v}$ donné, il y a deux possibilités pour $\vec{w}$, le second vecteur-colonne de B. Faites un dessin qui représente $\vec{v}$ ainsi que les deux vecteurs $\vec{w}$ possibles. Exprimer les composantes de $\vec{w}$ en fonction de a et b.

c. Montrer que si T est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui préserve longueurs et angles, alors T est ou bien une réflexion ou bien une rotation (par rapport à une droite). Voir l'exercice 17.

25. Calculez l'inverse de la matrice $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, où k est une constante arbitraire. Décrivez géométriquement le résultat obtenu.

26. a. Déterminer la matrice A de l'homothétie qui applique $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ sur $\begin{bmatrix} 8 \\ -4 \end{bmatrix}$.

b. Déterminer la matrice B de la projection qui applique $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ sur $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

c. Déterminer la matrice C de la rotation qui applique $\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}$ sur $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$.

d. Déterminer la matrice D de la transvection qui applique $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ sur $\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}$.

e. Déterminer la matrice E de la réflexion qui applique $\begin{bmatrix}7\\1\end{bmatrix}$ sur $\begin{bmatrix}-5\\5\end{bmatrix}$.

27. Considérons les matrices A à E suivantes :

$$A = \begin{bmatrix}0{,}6 & 0{,}8\\0{,}8 & -0{,}6\end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix}0{,}36 & -0{,}48\\-0{,}48 & 0{,}64\end{bmatrix},\quad D = \begin{bmatrix}-0{,}8 & 0{,}6\\-0{,}6 & 0{,}8\end{bmatrix},$$
$$E = \begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}\quad .$$

Remplissez les blancs dans les assertions ci-dessous (il y a une solution dans chaque cas).

La matrice ___ représente une homothétie.
La matrice ___ représente une projection.
La matrice ___ représente une transvection.
La matrice ___ représente une réflexion.
La matrice ___ représente une rotation.

28. Chacune des applications linéaires *a*) à *e*) correspond à une (et une seule) des matrices A à J, laquelle ?

a. homothétie ; b. transvection ; c. rotation
d. projection ; e. réflexion

$$A = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix}-0{,}6 & 0{,}8\\-0{,}8 & -0{,}6\end{bmatrix}$$
$$D = \begin{bmatrix}7 & 0\\0 & 7\end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix}1 & 0\\-3 & 1\end{bmatrix},\quad F = \begin{bmatrix}0{,}6 & 0{,}8\\0{,}8 & -0{,}6\end{bmatrix}$$
$$G = \begin{bmatrix}0{,}6 & 0{,}6\\0{,}8 & 0{,}8\end{bmatrix},\quad H = \begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 2\end{bmatrix},\quad I = \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix},$$
$$J = \begin{bmatrix}0{,}8 & -0{,}6\\0{,}6 & -0{,}8\end{bmatrix}$$

29. Soit T et L des applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que L est l'inverse de T, c'est-à-dire

$$T\big(L(\vec{x})\big) = \vec{x} \quad\text{et}\quad L\big(T(\vec{x})\big) = \vec{x},$$

pour tout $\vec{x}$ dans $\mathbb{R}^n$. Si T est une application linéaire, est-ce que L l'est aussi ? *Indication :* $\vec{x}+\vec{y} = T\big(L(\vec{x})\big) + T\big(L(\vec{y})\big) = T\big(L(\vec{x}) + L(\vec{y})\big)$, car T est linéaire. Appliquez maintenant L aux deux membres de cette égalité.

30. Trouver une matrice 2×2 non nulle, A, telle que $A\vec{x}$ soit parallèle au vecteur $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, pour tout $\vec{x}$ dans $\mathbb{R}^2$.

31. Trouver une matrice 3×3 non nulle, A, telle que $A\vec{x}$ soit perpendiculaire au vecteur $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, pour tout $\vec{x}$ dans $\mathbb{R}^3$.

32. Considérons la matrice de rotation $D = \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$ et le vecteur $\vec{v} = \begin{bmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\end{bmatrix}$, où α et β sont des angles arbitraires.

a. Faites un croquis pour expliquer la relation $D\vec{v} = \begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta)\end{bmatrix}$.

b. Calculez $D\vec{v}$. À l'aide de ce résultat, retrouver les lois d'addition pour les sinus et cosinus :

$$\cos(\alpha+\beta) = \ldots,\quad \sin(\alpha+\beta) = \ldots\quad .$$

33. Considérons deux droites non parallèles, L_1 et L_2, dans $\mathbb{R}^2$. Expliquez pourquoi un vecteur $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$ s'exprime d'une et une seule manière sous la forme

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2,$$

où $\vec{v}_1$ est sur L_1 et $\vec{v}_2$ est sur L_2. Faites un dessin. L'application donnée par $T(\vec{v}) = \vec{v}_1$ est appelée la projection sur L_1 parallèlement à L_2. Montrer par le calcul que T est une application linéaire.

34. L'une des cinq matrices ci-dessous représente une projection orthogonale sur une droite et une autre une réflexion par rapport cette même droite. Identifiez-les et justifiez brièvement votre réponse.

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\2 & 1 & 2\\2 & 2 & 1\end{bmatrix},\quad B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix},$$
$$C = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\end{bmatrix},\quad D = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\2 & 1 & 2\\2 & 2 & 1\end{bmatrix},$$
$$E = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\2 & -1 & 2\\2 & 2 & -1\end{bmatrix}.$$

35. Soit T une application linéaire inversible de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Soit P un parallélogramme de $\mathbb{R}^2$ ayant un sommet à l'origine. Est-ce que l'image de P est encore un parallélogramme. Faites un croquis de cette image.

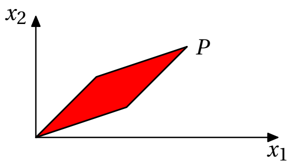


FIGURE 35A

36. Soit T une application linéaire inversible de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Soit P un parallélogramme de $\mathbb{R}^2$. Est-ce que l'image de P est encore un parallélogramme. Expliquez.

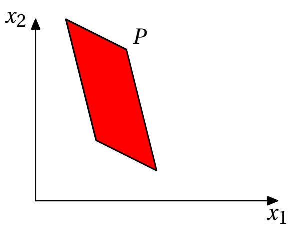


FIGURE 36A

37. On appelle *trace* d'une matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ la somme $a+d$ de ses coefficients diagonaux. Que pouvez-vous dire de la trace d'une matrice suivant qu'elle représente :
a. une projection ,
b. une réflexion par rapport à une droite ;
c. une rotation ;
d. une transvection (horizontale ou verticale).

Dans les trois cas, précisez la valeur de la trace ou, dans un des cas, un intervalle constitué des valeurs possibles.

38. On appelle *déterminant* d'une matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ l'expression $ad-bc$ (que nous avons déjà rencontrée dans l'exercice 2.1/13). Que pouvez-vous dire du déterminant d'une matrice suivant qu'elle représente :
a. une projection ,
b. une réflexion par rapport à une droite ;
c. une rotation ;
d. une transvection (horizontale ou verticale).

Que pouvez-vous en conclure concernant l'inversibilité de ces matrices ?

39. Décrivez géométriquement chacune des applications définies par les matrices des questions *a*) à *c*), comme la composition d'une transformation bien connue et d'une homothétie dont vous préciserez le rapport.
a. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$.

40. Soit P et Q des droites perpendiculaires dans $\mathbb{R}^2$. Si $\vec{x}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$, que vaut $\mathrm{proj}_P\,\vec{x}+\mathrm{proj}_Q\,\vec{x}$? Donnez votre réponse en fonction de $\vec{x}$. Faites un dessin qui illustre votre réponse.

41. Soit P et Q des droites perpendiculaires dans $\mathbb{R}^2$. Si $\vec{x}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$, quelle relation y a-t-il entre $\mathrm{sym}_P\,\vec{x}$ et $\mathrm{sym}_Q\,\vec{x}$? Faites un dessin qui illustre votre réponse.

42. Soit $T(\vec{x}) = \mathrm{proj}_L(\vec{x})$ la projection sur une droite de $\mathbb{R}^2$. Quelle relation y a-t-il entre $T(\vec{x})$ et $T(T(\vec{x}))$? Justifiez soigneusement votre réponse.

43. Utiliser la formule de l'exercice 2.1/13 pour trouver l'inverse de la matrice de rotation

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} .$$

Interprétez géométriquement l'application linéaire définie par A^{-1}. Expliquez.

44. Une matrice non nulle de la forme $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ représente la composée d'une rotation et d'une homothétie. Utiliser la formule de l'exercice 2.1/13 pour trouver l'inverse de A. Interprétez géométriquement l'application linéaire définie par A^{-1}. Expliquez.

45. Une matrice de la forme $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$ avec $a^2+b^2=1$ représente une réflexion par rapport à une droite (voir l'exercice 17). Utiliser la formule de l'exercice 2.1/13 pour trouver l'inverse de A. Expliquez.

46. Une matrice non nulle de la forme $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$ représente la composée d'une réflexion par rapport à une droite et d'une homothétie. (Pourquoi ? Quel est le rapport de l'homothétie ?) Utiliser la formule de l'exercice 2.1/13 pour trouver l'inverse de A. Interprétez géométriquement l'application linéaire définie par A^{-1}. Expliquez.

47. Soit T une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Considérons la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par

$$f(t) = \left(T\begin{bmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{bmatrix}\right)\cdot\left(T\begin{bmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\end{bmatrix}\right).$$

(Il s'agit du produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.)

Montrer les propriétés suivantes :

a. La fonction f est continue. Vous pourrez admettre que les fonctions sinus et cosinus sont continues, ainsi que la continuité de la somme et du produit de fonctions continues.

b. $f(\pi/2) = -f(0)$.

c. Il existe un nombre réel c compris entre 0 et $\pi/2$ tel que $f(c) = 0$. Vous utiliserez le théorème des valeurs intermédiaires, à savoir : si une fonction g est continue sur un intervalle $[a,b]$ et que L est un nombre réel compris entre $g(a)$ et $g(b)$, il existe au moins un nombre réel c entre a et b tel que $g(c) = L$.

d. Il existe deux vecteurs unitaires perpendiculaires $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ dans $\mathbb{R}^2$ tels que les vecteurs $T(\vec{v}_1)$ et $T(\vec{v}_2)$ soient eux-mêmes perpendiculaires. Voir la figure ci-dessous. (Voir le chapitre 8 pour une généralisation.)

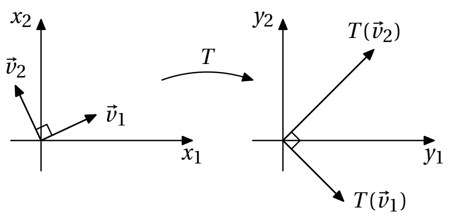


FIGURE 47A

48. Voir l'exercice 47. Considérons l'application linéaire donnée par

$$T(\vec{x}) = \begin{bmatrix}0 & 4\\ 5 & -3\end{bmatrix}\vec{x}.$$

Calculer la fonction f définie dans l'exercice 47, tracez-la (à l'aide de technologie) et déterminez un nombre réel c compris entre 0 et $\pi/2$ tel que $f(c) = 0$. À l'aide de votre réponse, déterminez deux vecteurs unitaires perpendiculaires $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ tels que $T(\vec{v}_1)$ et $T(\vec{v}_2)$ soient perpendiculaires. Faites un dessin.

49. Esquissez l'image d'un cercle unité par l'application linéaire donnée par

$$T(\vec{x}) = \begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\vec{x}.$$

50. On peut définir une ellipse dans $\mathbb{R}^2$ comme une courbe susceptible d'être paramétrée comme

$$\cos(t)\vec{w}_1 + \sin(t)\vec{w}_2,$$

où $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$ sont des vecteurs perpendiculaires. Supposons que la longueur de $\vec{w}_1$ soit supérieure à celle de $\vec{w}_2$. Les vecteurs $\pm\vec{w}_1$ sont alors appelés demi-grands-axes de l'ellipse, tandis que les vecteurs $\pm\vec{w}_2$ sont appelés demi-petits-axes. Par convention, et sauf mention explicite du contraire, toutes les ellipses considérées dans ce livre sont centrées à l'origine.

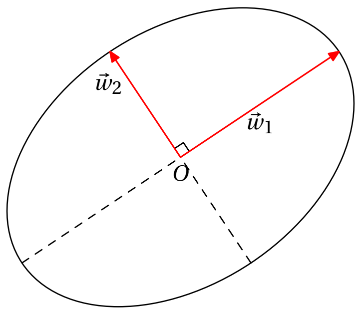


FIGURE 50A

Soit T une application linéaire inversible de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'image du cercle unité est une ellipse centrée à l'origine. *Indication :* Considérer des vecteurs unitaires perpendiculaires $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ tels que $T(\vec{v}_1)$ et $T(\vec{v}_2)$ soient perpendiculaires. (Voir l'exercice 47.) On rappelle que le cercle unité est formé des vecteurs de la forme

$$\vec{v} = \cos(t)\vec{v}_1 + \sin(t)\vec{v}_2,$$

où t est un paramètre.

51. Soit $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$ des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ qui ne sont pas parallèles. Considérons la courbe C dans $\mathbb{R}^2$ formée des vecteurs de la forme $\cos(t)\vec{w}_1 + \sin(t)\vec{w}_2$, où t est un paramètre. Montrer que C est une ellipse. (*Indication :* interprétez C comme l'image du cercle unité par une application linéaire convenable, puis utilisez l'exercice 50.)

52. Soit T une application linéaire inversible de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Soit C une ellipse de $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'image de C par T est encore une ellipse. (*Indication :* utilisez le résultat de l'exercice 51.)

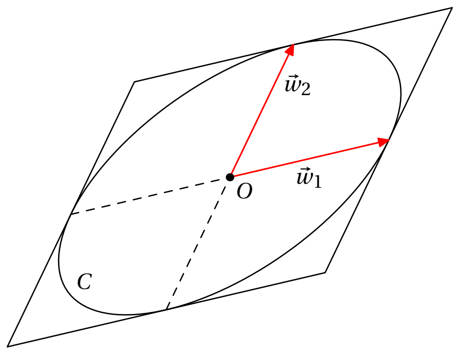


FIGURE 51A

CHAPITRE 2. APPLICATIONS LINÉAIRES

3. L'inverse d'une application linéaire

BUT. — Appliquer la notion d'application bijective. Déterminer si une matrice est inversible, ou une application linéaire est bijective ; trouver la matrice inverse et l'application réciproque quand elles existent.

Dans les exercices 1 à 15, décider si les matrices indiquées sont inversibles. Si oui, calculer leur inverse. Faites les calculs à la main. Justifiez toutes les étapes du calcul.

1. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 11 \\ 3 & 7 & 14 & 25 \\ 4 & 11 & 25 & 50 \end{bmatrix}$

Dans les exercices 16 à 20, décider si les applications linéaires indiquées sont bijectives. Déterminer leur inverse quand il existe. Faites les calculs à la main. Justifiez toutes les étapes.

16. $\begin{aligned} y_1 &= 3x_1 + 5x_2, \\ y_2 &= 5x_1 + 8x_2 \end{aligned}$

17. $\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 2x_2, \\ y_2 &= 4x_1 + 8x_2 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} y_1 &= x_2, \\ y_2 &= x_3, \\ y_3 &= x_1 \end{aligned}$

19. $\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 + x_3, \\ y_2 &= x_1 + 2x_2 + 3x_3, \\ y_3 &= x_1 + 4x_2 + 9x_3 \end{aligned}$

20. $\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 3x_2 + 3x_3, \\ y_2 &= x_1 + 4x_2 + 8x_3, \\ y_3 &= 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 \end{aligned}$

Des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ données par les exercices 21 à 24, lesquelles sont bijectives ?

21. $f(x) = x^2$

22. $f(x) = 2^x$

23. $f(x) = x^3 + x$

24. $f(x) = x^3 - x$

Des applications (non linéaires) de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ données par les exercices 25 à 27, lesquelles sont bijectives ? Calculer leur inverse quand il existe.

25. $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_2 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1^3 + x_2 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}$

28. Déterminer l'inverse de l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ donnée par

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 22 \\ -16 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 13 \\ -3 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

29. Pour quelles valeurs de k la matrice suivante est-elle inversible ?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ 1 & 4 & k^2 \end{bmatrix}$$

30. Pour quelles valeurs des constantes b et c la matrice suivante est-elle inversible ?

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & b \\ -1 & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

31. Pour quelles valeurs des constantes a, b et c la matrice suivante est-elle inversible ?

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

32. Déterminer toutes les matrices $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ telles que $ad - bc = 1$ et $A^{-1} = A$.

33. Considérons des matrices de la forme $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$, où a et b sont des constantes arbitraires. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $A^{-1} = A$?

34. Considérons la matrice diagonale

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

a. Pour quelles valeurs de a, b et c la matrice A est-elle inversible ? Lorsqu'elle l'est, que vaut A^{-1} ?

b. À quelle condition sur ses coefficients diagonaux une matrice diagonale (de taille arbitraire) est-elle inversible ?

35. Considérons la matrice triangulaire supérieure de taille 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}.$$

a. Pour quelles valeurs de a, b, c, d, e, f la matrice A est-elle inversible ?

b. Plus généralement, à quelle condition une matrice triangulaire supérieure (de taille arbitraire) est-elle inversible ?

c. Si une matrice triangulaire supérieure est inversible, est-il vrai que son inverse est encore triangulaire supérieure ?

d. À quelle condition une matrice triangulaire inférieure est-elle inversible ?

36. Pour déterminer si une matrice carrée A est inversible, il n'est pas toujours nécessaire de calculer sa forme réduite échelonnée. Justifiez la règle suivante : pour décider si une matrice carrée A est inversible, mettez-la sous forme triangulaire (inférieure ou supérieure) à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes. Alors, A est inversible si et seulement si aucun coefficient diagonal de cette matrice triangulaire n'est égal à zéro.

37. Si A est une matrice inversible et c un scalaire non nul, est-ce que la matrice cA est inversible ? Si oui, quelle relation y a-t-il entre A^{-1} et $(cA)^{-1}$?

38. Calculer A^{-1} si $A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

39. Considérons une matrice carrée qui diffère de la matrice identité par un seul coefficient, situé hors de la diagonale, par exemple

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De manière générale, est-ce qu'une matrice de cette forme est inversible ? Si oui, quel est son inverse ?

40. Montrer qu'une matrice qui a deux colonnes égales n'est pas inversible.

41. Parmi les applications linéaires T de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui suivent, lesquelles sont inversibles ? Donner l'inverse quand il existe.

a. La réflexion par rapport à un plan

b. La projection sur un plan

c. Une homothétie de rapport 5 (c'est-à-dire que $T(\vec{v}) = 5\vec{v}$ pour tout vecteur $\vec{v}$)

d. Une rotation autour d'un axe

42. On dit qu'une matrice carrée est une *matrice de permutation* si elle contient exactement un 1 dans chaque ligne et chaque colonne, les autres coefficients étant nuls. Par exemple, les matrices I_n et

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

sont des matrices de permutation. Une telle matrice est-elle inversible ? Si oui, est-ce que son inverse est encore une matrice de permutation ?

43. Considérons deux matrices $n \times n$ inversibles, A et B. Est-ce que l'application linéaire donnée par $\vec{y} = A(B(\vec{x}))$ est inversible ? Si oui, quel est son inverse ? (*Indication :* résoudre l'équation $\vec{y} = A(B\vec{x})$ d'abord pour $B\vec{x}$, puis pour $\vec{x}$.)

44. Considérons la matrice $n \times n$, M_n, dont les coefficients sont $1, 2, 3, \ldots, n^2$, écrits l'un à la suite de l'autre, colonne par colonne. Par exemple,

$$M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{bmatrix} .$$

a. Calculer le rang de M_4.

b. Calculer, pour tout entier $n \geqslant 2$, le rang de M_n.

c. Pour quels entiers n la matrice M_n est-elle inversible ?

45. Pour mesurer la complexité d'une tâche algorithmique, les mathématiciens et les informaticiens comptent le nombre d'opérations élémentaires (additions, soustractions, multiplications et divisions) requises par son exécution. On se contente parfois d'un décompte grossier dans lequel on ne considère que les multiplications et les divisions. Examinons par exemple le calcul par élimination de l'inverse d'une matrice 2×2.

$$\left[\begin{array}{cc:cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \div a$$

requiert deux opérations : b/a et $1/a$;

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & b' & e & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] - c\mathrm{L}_1$$

(où $b' = b/a$ et $e = 1/a$) requiert deux opérations : cb' et ce ;

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & b' & e & 0 \\ 0 & d' & g & 1 \end{array}\right] \div d'$$

requiert deux opérations ;

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & b' & e & 0 \\ 0 & 1 & g' & h \end{array}\right] - b\mathrm{L}_2$$

requiert deux opérations ;

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & e' & g' \\ 0 & 1 & f & h \end{array}\right]$$

L'ensemble du calcul requiert donc 8 opérations. Observez qu'on ne compte pas celles dont le calcul est prévisible, comme $1a$, $0a$, a/a et $0/a$.

a. Combien d'opérations (multiplications ou divisions) sont requises par l'inversion d'une matrice 3×3 ?

b. Combien d'opérations (multiplications ou divisions) sont requises par l'inversion d'une matrice $n \times n$?

c. S'il faut une seconde à une calculatrice de poche, lente, pour inverser une matrice 3×3, combien de temps faudra-t-il pour inverser une matrice 12×12 ? On suppose que les matrices sont inversées par l'algorithme d'élimination de Gauss-Jordan et que le temps de calcul est proportionnel au nombre de multiplications et divisions effectuées.

46. Considérons le système linéaire

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

où A est une matrice inversible. On peut le résoudre de deux façons différentes :

— en calculant la forme réduite échelonnée suivant les lignes de la matrice augmentée $A \,\vdots\, \vec{b}$;

— en calculant A^{-1} et en utilisant la formule $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

En général, laquelle de ces deux méthodes requiert le moins d'opérations (multiplications ou divisions) ? (Voir l'exercice 45.)

47. Donner un exemple d'application non bijective f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et un nombre réel b tel que l'équation $f(x) = b$ ait une solution et une seule.

48. Donner un exemple de matrice 3×2, A, et un vecteur $\vec{b}$ dans $\mathbb{R}^3$ tel que le système linéaire

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

ait une solution et une seule. En quoi cet exemple ne contredit-il pas le Fait 2.3.4a du cours ?

49. ***Analyse demande/production.*** (Cet exercice repose sur les exercices 1.1/20, 1.2/37, 1.2/38 et 1.2/39.) Considérons des secteurs industriels $J_1, J_2, \ldots, J_n$ d'une économie. Soit $\vec{b}$ le vecteur de demande des consommateurs, $\vec{x}$ le vecteur de production, et $\vec{v}_j$ le vecteur de demande de l'industrie J_j. (La i-ième composante a_{ij} de $\vec{v}_j$ est la demande de l'industrie J_j en biens de l'industrie J_i, par unité produite par J_j.) Comme nous l'avons vu dans l'exercice 1.2/38, la production $\vec{x}$ équilibre parfaitement la demande si

$$\underbrace{x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_n\vec{v}_n + \vec{b}}_{\text{demande totale}} = \underbrace{\vec{x}}_{\text{production}} .$$

Cette équation peut être récrite de façon plus concise en

$$\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \vec{b} = \vec{x},$$

soit encore $A\vec{x} + \vec{b} = \vec{x}$. La matrice A est appelée *matrice technologique* de cette économie, ses coefficients décrivent la demande inter-industrielle, qui dépend de la technologie utilisée dans le processus de production. L'équation

$$A\vec{x} + \vec{b} = \vec{x}$$

décrit un système linéaire que nous pouvons écrire sous la forme habituelle :

$$\begin{aligned} \vec{x} - A\vec{x} &= \vec{b} \\ I_n\vec{x} - A\vec{x} &= \vec{b} \\ (I_n - A)\vec{x} &= \vec{b}. \end{aligned}$$

Si nous voulons connaître la production $\vec{x}$ qui satisfait un vecteur de demande des consommateurs $\vec{b}$ (c'était notre objectif dans les exercices précédents), nous pouvons résoudre ce système linéaire, de préférence via la matrice augmentée.

En économie toutefois, nous devons répondre à d'autres questions : Si $\vec{b}$ change, comment changera $\vec{x}$ en réponse ? Si la demande des consommateurs de la production d'un secteur augmente d'une unité, celle des autres secteurs restant inchangée, comment changera $\vec{x}$? (7) Si nous nous posons de telles questions, nous considérons le vecteur de production $\vec{x}$ comme une *fonction* du vecteur de demande des consommateurs $\vec{b}$.

Si la matrice $(I_n - A)$ est inversible (8), on peut exprimer $\vec{x}$ en fonction de $\vec{b}$ (en fait, comme une application linéaire) :

$$\vec{x} = (I_n - A)^{-1}\vec{b}.$$

a. Reprenons l'exemple tiré de l'économie d'Israël en 1958 que nous avions discuté dans l'exercice 1.2/39. Calculer la matrice technologique A, la matrice $(I_n - A)$ et son inverse $(I_n - A)^{-1}$.

b. Dans cet exemple, supposons que la demande des consommateurs sur le secteur agricole (secteur 1) soit d'une unité (en l'occurrence, un million de livres), et que la demande sur les deux autres secteurs soit nulle. Quel vecteur de production $\vec{x}$ permet d'atteindre l'équilibre production/demande ? Comment votre réponse est-elle reliée à la matrice $(I_n - A)^{-1}$?

c. Expliquez en termes économiques pourquoi les coefficients diagonaux de la matrice $(I_n - A)^{-1}$ déterminée dans la question *a*) sont supérieurs à 1.

d. Si la demande des consommateurs en biens manufacturés augemente d'une unité (quelle que soit sa valeur initiale) et que la demande des consommateurs en biens des deux autres industries reste inchangée, comment est modifié le vecteur de production ? Comment votre réponse est-elle reliée à la matrice $(I_n - A)^{-1}$?

e. En utilisant vos réponses aux questions *a*) à *d*), expliquez en général (et pas seulement sur cet exemple) ce que signifient en termes économiques les colonnes et les coefficients de la matrice $(I_n - A)^{-1}$. Si vous avez étudié le calcul différentiel à plusieurs variables, vous pouvez utiliser les dérivées partielles

$$\frac{\partial x_i}{\partial b_j}.$$

50. Cet exercice fait suite à la question *a*) de l'exercice 49. Considérons le coefficient $k = a_{11} = 0{,}293$ de la matrice technologique. Vérifiez que le coefficient de la première ligne et première colonne de $(I_n - A)^{-1}$ est la somme de la série géométrique $1 + k + k^2 + \dots$. Interprétez cette observation en termes économiques.

51. a. Considérons une matrice $n \times m$, A, telle que $\operatorname{rang}(A) < n$. Montrez qu'il existe un vecteur $\vec{b}$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que le système $A\vec{x} = \vec{b}$ soit inconsistant. *Indication :* Si $E = \operatorname{frel}(A)$, montrez qu'il existe un vecteur $\vec{c}$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que le système $E\vec{x} = \vec{c}$ soit inconsistant ; travaillez alors « à l'envers ».

7. L'acuité de questions de ce genre est apparue clairement au cours de la Seconde Guerre mondiale, lorsque la demande sur certains secteurs a changé de façon brutale. Lorsque le président américain F. D. Roosevelt demanda qu'on construisit 50 000 avions, il était facile de prévoir que le pays devrait produire plus d'aluminium. De manière inattendue, la demande en cuivre crût remarquablement (pourquoi ?). Il s'ensuivit une pénurie de cuivre, résolue en empruntant de l'argent (métal) à Fort Knox. Les gens réalisèrent alors que l'analyse production/demande modélise et prédit efficacement de tels accroissements de la demande. Après la Guerre, cette technique a été rapidement acceptée et fut utilisée pour modéliser les économies de plus de 50 pays.

8. Cela sera toujours le cas pour une économie « productive », voir l'exercice 2.4/85.

b. Considérons une matrice $n \times m$, A, où $n > m$. Montrez qu'il existe un vecteur $\vec{b}$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que le système $A\vec{x} = \vec{b}$ soit inconsistant.

52. Si

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix},$$

déterminez un vecteur $\vec{b}$ dans $\mathbb{R}^4$ tel que le système $A\vec{x} = \vec{b}$ soit inconsistant. Voir l'exercice 51.

53. Dans cet exercice, on pose $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

a. Déterminez un scalaire λ (*lambda*) tel que la matrice $A - \lambda I_2$ ne soit pas inversible. Il y a deux solutions, choisissez-en une et résolvez alors les questions *b*) et *c*).

b. Pour la valeur de λ choisie, calculez $A - \lambda I_2$ et déterminez un vecteur non nul $\vec{x}$ tel que $(A - \lambda I_2)\vec{x} = \vec{0}$. (C'est possible puisque $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.)

c. Observez que l'équation $(A - \lambda I_2)\vec{x} = \vec{0}$ peut être récrite $A\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{0}$, ou encore $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Vérifiez que cette relation est bien vérifiée si λ et $\vec{x}$ ont les valeurs obtenues aux questions précédentes.

54. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ -3 & 12 \end{bmatrix}$. En utilisant l'exercice 53 comme guide, déterminez un scalaire λ et un vecteur non nul $\vec{x}$ tels que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

4. Produits de matrices

BUT. — Savoir calculer des produits de matrices colonne par colonne et coefficient par coefficient. Interpréter la multiplication des matrices comme la composition des applications linéaires correspondantes. Savoir utiliser les règles de calcul de l'algèbre matricielle. Multiplier des matrices par blocs.

Dans les exercices 1 à 13, calculer à la main, lorsqu'ils sont définis, les produits de matrices indiqués.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 8 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & 1 \\ g & h & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

14. Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}.$$

Des 25 produits $AA, AB, AC, \ldots, ED, EE$, déterminez et calculez ceux qui sont définis.

15. Calculer le produit de matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -2 & 5 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Expliquez pourquoi le résultat ne contredit pas le fait 2.4.9 du cours.

Soit A et B des matrices $n \times n$ inversibles. Parmi les formules des exercices 16 à 25, lesquelles sont vraies indépendamment du choix de A et B.

16. $(I_n - A)(I_n + A) = I_n - A^2$

17. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

18. A^2 est inversible et $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$

19. $A+B$ est inversible et $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

20. $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$

21. $ABB^{-1}A^{-1} = I_n$

22. $ABA^{-1} = B$

23. $(ABA^{-1})^3 = AB^3A^{-1}$

24. $(I_n + A)(I_n + A^{-1}) = 2I_n + A + A^{-1}$

25. $A^{-1}B$ est inversible et $(A^{-1}B)^{-1} = B^{-1}A$.

Effectuer les produits par blocs demandés dans les exercices 26 et 27. Effectuer ensuite les mêmes calculs sans utiliser les blocs. Justifiez toutes les étapes de vos calculs.

26. $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right]$

27. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 4 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ \hline 3 & 4 \end{array}\right]$

28. Déterminer une matrice 2×2 non nulle, A, telle que $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

29. Détemriner une matrice 2×2, B, telle que $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

30. Si A une matrice $n \times n$, non inversible, existe-t-il toujours une matrice non nulle $n \times n$, B, telle que $AB = 0$?

31. Étant donnée la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

détemriner une matrice A telle que $BA = I_2$. Combien de solutions A ce problème a-t-il ?

32. Existe-t-il une matrice 3×2, A, et une matrice 2×3, B, telles que le produit AB soit égal à I_3. *Indication :* étant données des matrices A et B, de tailles 3×2 et 2×3, il existe un vecteur non nul $\vec{x}$ tel que $B\vec{x} = \vec{0}$ (pourquoi ?). Considérez alors $AB\vec{x}$.

33. Existe-t-il une matrice 3×2, A, et une matrice 2×3, B, dont le produit AB soit inversible ? (Suivre l'indication de l'exercice précédent.)

34. Soit A et B deux matrice $n \times n$ dont le produit AB est inversible. Montrer que les matrices A et B sont toutes deux inversibles. *Indication :* on a $AB(AB)^{-1} = I_n$ et $(AB)^{-1}AB = I_n$. Utiliser alors le fait 2.4.9 du cours.

35. Considérons une matrice $m \times n$, B, et une matrice $n \times m$, A, telles que $BA = I_m$.

a. Déterminez toutes les solutions du système linéaire $A\vec{x} = \vec{0}$.

b. Montrer que pour tout vecteur $\vec{b}$ de $\mathbb{R}^m$, le système linéaire $B\vec{x} = \vec{b}$ est consistant.

c. Que pouvez-vous dire du rang de A ? et du rang de B ?

d. Justifiez que l'on a l'inégalité $m \leqslant n$.

36. Déterminez toutes les matrices 2×2, X telles que $AX = B$, où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

37. Déterminez toutes les matrices inversibles S telles que

$$S^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad .$$

38. Déterminez toutes les matrices inversibles S telles que

$$S^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

39. Déterminer les matrices 2×2, X, qui commutent à toute matrice 2×2.

40. Soit A et B deux matrices 2×2 telles que

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad (AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad .$$

Déterminez A.

41. Considérons la matrice

$$D_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad .$$

C'est la matrice de la rotation d'angle α.

a. Étant donnés deux angles, α et β, décrivez géométriquement les applications linéaires données par $\vec{y} = D_\alpha D_\beta \vec{x}$ et $\vec{y} = D_\beta D_\alpha \vec{x}$. Coïncident-elles ?

b. Calculez alors les produits $D_\alpha D_\beta$ et $D_\beta D_\alpha$. Le résultat est-il cohérent avec ce que vous avez répondu à la question a) ? On rappelle les identités trigonométriques

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

42. Considérons les droites P et Q de $\mathbb{R}^2$ esquissées ci-dessous. Considérons l'application linéaire T donnée par $T(\vec{x}) = \mathrm{sym}_Q(\mathrm{sym}_P(\vec{x}))$; autrement dit, on calcule le symétrique de $\vec{x}$ par rapport à la droite P, puis celui du résultat obtenu par rapport à la droite Q.

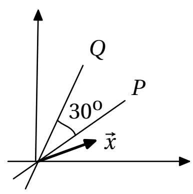


FIGURE 42A

a. Esquissez $T(\vec{x})$ si $\vec{x}$ est le vecteur indiqué sur la figure. Quel est l'angle formé par les vecteurs $\vec{x}$ et $T(\vec{x})$? Quelle relation y a-t-il entre les longueurs des vecteurs $\vec{x}$ et $T(\vec{x})$?

b. À l'aide des résultats obtenus dans la question a), décrivez géométriquement l'application linéaire T. Est-ce une réflexion, une rotation, une transvection ou une projection ?

c. Calculez la matrice de T.

43. Déterminez une matrice 2×2, $A \neq I_2$, telle que $A^3 = I_2$.

44. Déterminez toutes les applications linéaires T de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telles que

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad .$$

Indication : Il s'agit de trouver les matrices 2×2, A, telles que

$$A\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} \quad .$$

Ces deux équations peuvent être combinées en l'équation matricielle, d'inconnue A,

$$A\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 3\end{bmatrix} \quad .$$

45. En utilisant l'exercice précédent comme guide, justifiez l'assertion suivante. Soit $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ des vecteurs de $\mathbb{R}^m$ tels que la matrice

$$S = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \ldots & \vec{v}_m \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

soit inversible. Soit $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$ des vecteurs quelconques dans $\mathbb{R}^n$. Alors, il existe une application linéaire T, et une seule, de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $T(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$ pour tout entier i entre 1 et m. Déterminez la matrice A de cette application linéaire en fonction de S et de la matrice

$$B = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{w}_1 & \vec{v}_2 & \ldots & \vec{w}_m \\ | & | & & | \end{bmatrix} \quad .$$

46. Déterminez la matrice A de l'application linéaire T de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}7\\5\\3\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T\left(\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \quad .$$

(Cf. l'exercice 45.)

47. Déterminez la matrice A de l'application linéaire T de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$T\left(\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right) = 3\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \quad .$$

(Cf. l'exercice 45.)

48. Considérons le tétraèdre régulier esquissé ci-dessous, dont le centre est en l'origine. Soit $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la rotation (de centre O) autour de la droite (OP_2) qui applique le point P_1 sur le point P_3. Déterminez les images des quatre sommets du tétraèdre par cette application.

$$\begin{aligned} P_0 &\xrightarrow{T} \\ P_1 &\rightarrow \\ P_2 &\rightarrow \\ P_3 &\rightarrow \end{aligned}$$

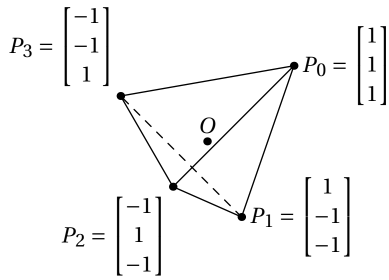


FIGURE 48A

Soit $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la réflexion par rapport au plan passant par les points O, P_0 et P_3. Déterminez les images des quatre sommets du tétraèdre par cette transformation.

$$\begin{aligned} P_0 &\xrightarrow{L} \\ P_1 &\rightarrow \\ P_2 &\rightarrow \\ P_3 &\rightarrow \end{aligned}$$

Décrivez géométriquement les applications linéaires suivantes :

a. T^{-1} ;
b. L^{-1} ;
c. $T^2 = T \circ T$ (la composée de T avec elle-même).

d. Déterminez les images des quatre sommets du tétraèdre par les applications $T \circ L$ et $L \circ T$:

$$\begin{aligned} P_0 &\xrightarrow{T\circ L} & \qquad P_0 &\xrightarrow{L\circ T} \\ P_1 &\longrightarrow & \qquad P_1 &\longrightarrow \\ P_2 &\longrightarrow & \qquad P_2 &\longrightarrow \\ P_3 &\longrightarrow & \qquad P_3 &\longrightarrow \end{aligned}$$

e. Déterminez les images des quatre sommets par l'application $L \circ T \circ L$. Décrivez géométriquement cette application linéaire.

49. Déterminez les matrices des applications linéaires T et L étudiées dans l'exercice 48.

50. Considérons la matrice

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ainsi qu'une matrice arbitraire 3×3,

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} \quad .$$

a. Calculer EA. Comparez A et EA, compte-tenu de la technique d'élimination étudiée au paragraphe 1.2.

b. Considérons la matrice

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ainsi qu'une matrice arbitraire 3×3, A. Calculez EA. Quels commentaires faites-vous à propos du lien entre A et EA.

c. Déterminez une matrice 3×3, E, telle que EA soit obtenue à partir de A en échangeant les deux dernières lignes (A étant une matrice 3×3 arbitraire).

d. Les matrices de la forme introduite aux questions a), b), c) sont appelées *élémentaires* : une matrice $n \times n$ est dite élémentaire si elle est obtenue à partir de I_n par l'une des trois opérations élémentaires sur les lignes de I_n. Décrivez la forme des trois types de matrices élémentaires.

51. Une matrice élémentaire est-elle inversible ? Si oui, est-ce que l'inverse d'une matrice élémentaire est encore élémentaire ? Expliquez la signification de vos réponses en termes d'opérations élémentaires sur les lignes.

52. a. Justifiez l'assertion suivante : si A est une matrice $n \times m$, il existe des matrices élémentaires $n \times n$, $E_1, E_2, \ldots, E_p$, telles que

$$\operatorname{frel}(A) = E_1 E_2 \ldots E_p A \quad .$$

b. Déterminez de telles matrices élémentaires $E_1, E_2, \ldots, E_p$ lorsque

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad .$$

53. a. Justifiez l'assertion suivante : si A est une matrice $n \times m$, il existe une matrice inversible $n \times n$, S, telle que

$$\operatorname{frel}(A) = SA \quad .$$

b. Déterminez une telle matrice inversible S lorsque

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \quad .$$

54. a. Justifiez l'assertion suivante : toute matrice inversible est produit de matrices élémentaires.

b. Écrivez $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ comme produit de matrices élémentaires.

55. Énumérez tous les types possibles de matrices élémentaires E de taille 2×2. Dans chaque cas, décrivez géométriquement l'application linéaire donnée par $\vec{y} = E\vec{x}$.

56. Considérons une matrice inversible $n \times n$, A, et une matrice $n \times n$, B. Une suite donnée d'opérations élémentaires transforme A en I_n.

a. Qu'obtient-on en appliquant les mêmes opérations élémentaires, dans le même ordre, à la matrice AB ?

b. Qu'obtient-on en appliquant les mêmes opérations élémentaires, dans le même ordre, à la matrice I_n ?

57. Est-ce que le produit de deux matrices triangulaires inférieures est encore une matrice triangulaire inférieure ? Justifiez votre réponse.

58. Considérons la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad .$$

a. Déterminez des matrices élémentaires, triangulaires inférieures, $E_1, E_2, \ldots, E_m$, telles que le produit

$$E_m \ldots E_2 E_1 A$$

soit une matrice triangulaire supérieure U. *Indication :* Modifiez comme-suit l'algorithme d'élimination de Gauss-Jordan. Dans l'étape 3, n'éliminez que les entrées de la colonne du curseur qui sont *sous* le pivot. Cela peut être effectué à l'aide de matrices élémentaires triangulaires *inférieures*. Vous pouvez aussi omettre l'étape 2 (division par l'entrée du curseur).

b. Déterminez des matrices élémentaires triangulaires inféreures $M_1, M_2, \ldots, M_m$ et une matrice triangulaire supérieure U telles que

$$A = M_1 M_2 \ldots M_m U \quad .$$

c. Déterminez une matrice triangulaire inférieure L et une matrice triangulaire supérieure U telles que

$$A = LU \quad .$$

Une telle écriture d'une matrice inversible est appelée *factorisation LU*. [9] La méthode décrite dans cet exercice pour obtenir une factorisation LU peut être systématisée quelque peu, mais les principales idées sont déjà là. Une factorisation LU

9. La terminologie vient de l'anglais *L-lower*/inférieur et *U-upper*/supérieur [NdT].

(comme défini ici) n'existe pas toujours (voir l'exercice 60).

d. Déterminez une matrice triangulaire inférieure L n'ayant que des 1 sur la diagonale, une matrice triangulaire supérieure U n'ayant que des 1 sur la diagonale, et une matrice diagonale D, telles que $A = LDU$. Une telle écriture d'une matrice inversible est appelée *factorisation LDU*.

59. Lorsqu'on connaît une factorisation LU d'une matrice A, la résolution d'un système linéaire

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

est bien plus facile. Considérons par exemple la factorisation LU

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & 6 & -5 \\ 1 & 4 & 6 & 20 \\ -1 & 6 & 20 & 43 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 8 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= LU \end{aligned}$$

Supposons qu'on ait à résoudre le système $A\vec{x} = LU\vec{x} = \vec{b}$ où

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 14 \\ 9 \\ 33 \end{bmatrix} .$$

a. Posez $\vec{y} = U\vec{x}$ et résolvez le système $L\vec{y} = \vec{b}$ par substitution (trouvez d'abord y_1, puis y_2, etc.) Faites cela à la main, en explicitant toutes les étapes.

b. Résolvez le système $U\vec{x} = \vec{y}$ par substitution de sorte à obtenir la solution $\vec{x}$ du système $A\vec{x} = \vec{b}$. Faites cela à la main, en explicitant toutes les étapes.

$$\begin{tikzcd} & \vec{y} \arrow[dr, "L"] & \\ \vec{x} \arrow[ur, "U"] \arrow[rr, "A"] & & \vec{b} \end{tikzcd}$$

60. Montrez que la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ne peut pas être écrite sous la forme LU, où L est triangulaire inférieure et U est triangulaire supérieure.

61. Dans cet exercice, nous allons étudier à quelle condition une matrice inversible $n \times n$, A, possède une factorisation LU (voir l'exercice 58). La définition suivante sera utile : pour $m = 1, \ldots, n$, on appelle mineur principal de taille m la matrice $A^{(m)}$ obtenue à partir de A en ne gardant que les m premières lignes et les m premières colonnes ; c'est une matrice $m \times m$. Par exemple, la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

admet pour mineurs principaux les matrices

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 7 \end{bmatrix}.$$

Nous allons montrer qu'une matrice inversible $n \times n$, A, possède une factorisation LU si et seulement si tous ses mineurs principaux sont inversibles.

a. Soit $A = LU$ une factorisation LU de A. À l'aide de produits par blocs, montrez que $A^{(m)} = L^{(m)}U^{(m)}$ pour $m = 1, \ldots, n$.

b. Déduire de la question a) que si une matrice inversible $n \times n$ possède une factorisation LU, ses mineurs principaux sont tous inversibles.

c. Soit A une matrice $n \times n$ dont les mineurs principaux sont tous inversibles. Montrez que A possède une factorisation LU. *Indication :* par récurrence, on peut supposer que $A^{(n-1)}$ possède une factorisation LU, $A^{(n-1)} = L'U'$. Utilisez des produits par bloc pour obtenir une factorisation LU de A. Alternativement, vous pouvez expliquer ce résultat en termes d'élimination de Gauss-Jordan : justifiez que si tous les mineurs principaux sont inversibles, aucun échange de lignes n'est nécessaire.

62. a. Démontrez que si une matrice A possède une factorisation LU, elle possède aussi une factorisation LDU (voir l'exercice 58, question d)).

b. Démontrez que si une matrice inversible inversible $n \times n$, A possède une factorisation LDU, cette factorisation est unique. *Indication.* Supposez que $A = L_1 D_1 U_1 = L_2 D_2 U_2$. Alors $U_2 U_1^{-1} = D_2^{-1} L_2^{-1} L_1 D_1$ est diagonale (pourquoi ?). En conclure que $U_1 = U_2$.

63. Démontrez que la multiplication des matrices est distributive sur l'addition :

$$A(C + D) = AC + AD \quad \text{et} \quad (A + B)C = AC + BC \quad .$$

64. Soit A une matrice $n \times p$, B une matrice $p \times m$ et k un nombre réel. Montrez que

$$(kA)B = A(kB) = k(AB).$$

65. Considérons une matrice par blocs

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \quad ,$$

où A_{11} et A_{22} sont des matrices carrées. Pour quelles valeurs de A_{11} et A_{22} la matrice A est-elle inversible ? Quelle est alors l'inverse de A ?

66. Considérons une matrice par blocs

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad ,$$

où A_{11} et A_{22} sont des matrices carrées. Pour quelles valeurs de A_{11}, A_{21} et A_{22} la matrice A est-elle inversible ? Quelle est alors l'inverse de A ?

67. On se donne deux matrices A et B dont le produit AB est défini. Décrire la i-ième ligne du produit AB en fonction des lignes de A et de la matrice B.

68. Considérons les matrices par blocs

$$A = \begin{bmatrix} k & \vec{v} \\ 0 & B \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \quad ,$$

où B et R sont des matrices $n \times n$ (R étant inversible), k est un nombre réel, et $\vec{v}$ un vecteur-ligne à n colonnes. Calculer $S^{-1}AS$.

69. Considérons la matrice par blocs

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & 0 & A_{23} \end{bmatrix},$$

où A_{11} est inversible. Déterminez le rang de A en fonction des rangs des matrices A_{11}, A_{12}, A_{13} et A_{23}.

70. Considérons la matrice par blocs

$$A = \begin{bmatrix} I_n & \vec{v} \\ \vec{w} & 1 \end{bmatrix} \quad ,$$

où $\vec{v}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $\vec{w}$ un vecteur-ligne à n colonnes. Pour quelles valeurs de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ la matrice A est-elle inversible ? Dans ce cas, que vaut A^{-1} ?

71. Déterminez toutes les matrices inversibles $n \times n$, A, telles que $A^2 = A$.

72. Trouvez une matrice non nulle, $n \times n$, A, dont tous les coefficients sont égaux à un même nombre réel, telle que $A^2 = A$.

Dans les exercices 73 à 82, déterminez toutes les matrices qui commutent avec la matrice donnée, A.

73. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

74. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

75. $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

76. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

77. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

78. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

79. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

80. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

81. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

82. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

83. Soit A et B des matrices $n \times n$ dont les coefficients sont des nombres réels positifs ou nuls. On suppose que les coefficients de A sont inférieurs ou égaux à un nombre réel s, et que la somme des coefficients de chaque ligne de B est inférieure ou égale à un nombre réel r. Montrer que tous les coefficients de la matrice AB sont inférieurs ou égaux à sr.

84. (Cet exercice est la suite de l'exercice 83.) Soit A une matrice $n \times n$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls. Supposons que la somme des coefficients de chaque colonne de A soit strictement inférieure ou égale à 1. Soit r la plus grande somme des coefficients d'une colonne de A.

a. Montrez que pour tout entier positif m, les coefficients de A^m sont positifs ou nuls, et inférieurs ou égaux à r^m.

b. Montrez que l'on a

$$\lim_{m \to \infty} A^m = 0$$

au sens où chaque coefficient de A^m tend vers 0.

c. Montrez que la série de matrices

$$I_n + A + A^2 + \cdots + A^m + \ldots$$

est convergente (coefficient par coefficient).

d. Calculez le produit

$$(I_n - A)(I_n + A + A^2 + \cdots + A^m).$$

Simplifiez le résultat. Faites alors tendre m vers l'infini et montrez que la matrice $(I_n - A)$ est inversible, d'inverse

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \cdots + A^m + \ldots \quad .$$

85. (Cet exercice fait suite aux exercices 83 et 84 ainsi qu'à l'exercice 2.3/49.)

a. Considérons les secteurs industriels $J_1, \ldots, J_n$ d'une économie. On dit que le secteur J_j est *productif* si la somme des coefficients de la j-ième colonne de la matrice technologique A est strictement inférieure à 1. Qu'est-ce que cela signifie en termes économiques ?

b. On dit qu'une économie est productive si toutes ses secteurs industriels sont productifs. L'exercice 84 montre que si A est la matrice technologique d'une économie productive, la matrice $I_n - A$ est inversible. Qu'en déduisez-vous quant à la possibilité d'une économie productive de satisfaire la demande des consommateurs ?

c. Interprétez en termes économiques la formule

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \cdots + A^m + \ldots$$

établie dans l'exercice 84, d).

86. La couleur de la lumière peut être représentée par un vecteur

$$\begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix},$$

où R représente la quantité de rouge, G celle de vert, et B celle de bleu. L'œil humain et le cerveau transforment le signal reçu en un vecteur

$$\begin{bmatrix} I \\ L \\ S \end{bmatrix}$$

donné par

$$\begin{aligned} I &= \frac{R+G+B}{3} && \text{intensité} \\ L &= R - G && \text{signal grandes ondes} \\ S &= B - \frac{R+G}{2} && \text{signal ondes courtes.} \end{aligned}$$

a. Déterminez la matrice P qui représente l'application linéaire appliquant

$$\begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} \quad \text{sur} \quad \begin{bmatrix} I \\ L \\ S \end{bmatrix} .$$

b. Considérons une paire de lunettes de soleil pour sports aquatiques qui filtre toute la lumière bleue et laisse passer toute la lumière rouge et verte. Déterminez la matrice 3×3 de l'application linéaire qui correspond à la transformation subie par la lumière lorsqu'elle passe par les lunettes de soleil.

c. Déterminez alors la matrice de l'application linéaire composée que subit la lumière en passant d'abord par les lunette puis jusqu'à l'œil.

d. Lorsque vous mettez des lunettes de soleil, le signal (intensité, signal grandes ondes, signal ondes courtes) subit aussi une transformation. Déterminez sa matrice M.

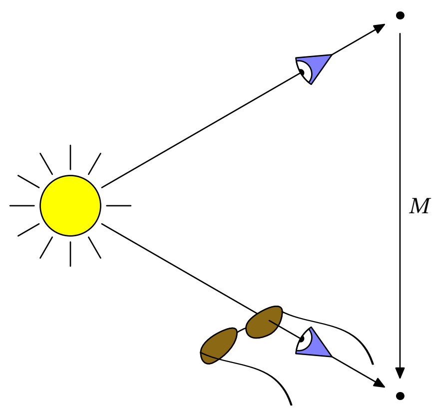


FIGURE 86A

87. La population d'un village est constituée de trois *clans* : chaque personne appartient de manière permanente à un clan. Il y a des règles strictes de mariage ; en particulier, une personne d'un clan ne peut épouser qu'une personne d'un autre clan. Ces règles sont résumées par la matrice A ci-dessous ; le fait que l'entrée $(2,3)$ soit égale à 1 signifie que le mariage entre un homme du clan III et d'une femme du clan II est autorisé.

$$\begin{array}{cccc} & \multicolumn{3}{c}{\text{Clan du mari}} & \\ & \text{I} & \text{II} & \text{III} & \\ A = & \left|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right| & & & \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \quad \text{Clan de l'épouse} \\ \text{III} \end{array} \end{array} .$$

Le clan d'un enfant est déterminé par celui de la mère, comme indiqué par la matrice B. Selon ce schéma, les membres d'une même fratrie appartiennent au même clan.

$$\begin{array}{cccc} & \multicolumn{3}{c}{\text{Clan de la mère}} & \\ & \text{I} & \text{II} & \text{III} & \\ B = & \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right| & & & \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \quad \text{Clan de l'enfant} \\ \text{III} \end{array} \end{array} .$$

L'appartenance d'une personne au clan I peut être représentée par le vecteur

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

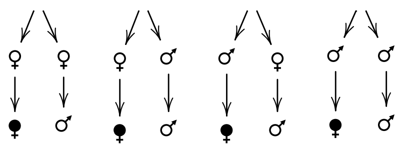
et de même pour les deux autres clans. La matrice A transforme le clan du mari en celui de l'épouse (si $\vec{x}$ représente le clan du mari, celui de l'épouse est représenté par $A\vec{x}$).

a. Les matrices A et B sont-elles inversibles ? Si oui, déterminez leur inverse. De manière concrète, que signifient les réponses obtenues ?

b. En termes des règles de communauté, quelle est la signification de la matrice B^2 ?

c. De même, quelle est la signification des matrices AB et BA ? Ces deux matrices sont-elles égales ?

d. Bueya est une jeune femme qui a de nombreux cousins (mâles), tant du côté de son père que de sa mère. Les tableau ci-dessous représentent les quatre rapports de filiation possibles :



Dans chacun des quatre cas, déterminez la matrice qui donne le clan du cousin en fonction de celui de Bueya.

e. Selon les lois de ce village, Bueya peut-elle épouser un de ses cousins ? (On ne connaît pas son clan.)

88. Pour le contexte de cet exercice, référez-vous à l'exercice 2.3/45.

a. Selon le fait 2.4.4 du cours, combien de multiplications de nombres réels sont requises par le calcul du produit de deux matrices 2×2 ?

b. Toujours selon le fait 2.4.4, combien de multiplications faut-il effectuer pour calculer le produit d'une matrice $n \times p$ et d'une matrice $p \times m$?

En 1969, le mathématicien allemand Volker Strassen a surpris la communauté mathématique en montrant que l'on pouvait multiplier deux matrices 2×2 en ne faisant que sept multiplications de nombres réels. Voilà son astuce : Supposons qu'il faille calculer le produit AB, où $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$. Calculez d'abord

$$\begin{aligned}
h_1 &= (a+d)(p+s) \\
h_2 &= (c+d)p \\
h_3 &= a(q-s) \\
h_4 &= d(r-p) \\
h_5 &= (a+b)s \\
h_6 &= (c-a)(p+q) \\
h_7 &= (b-d)(r+s)
\end{aligned}$$

Alors,

$$AB = \begin{bmatrix} h_1 + h_4 - h_5 + h_7 & h_3 + h_5 \\ h_2 + h_4 & h_1 + h_3 - h_2 + h_6 \end{bmatrix} \quad .$$

89. Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers positifs ou nuls : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. On définit deux fonctions f et g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par

$$f(x) = 2x \quad ;$$

$$g(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } x \text{ est pair ;} \\ (x+1)/2 & \text{si } x \text{ est impair.} \end{cases}$$

Explicitez les fonctions composées $g \circ f$ et $f \circ g$? Est-ce que l'une d'entre elles est l'application identique de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$? Est-ce que les fonctions f et g sont inversibles ?

90. ***Optique géométrique.*** Considérons une lentille mince biconvexe avec deux faces sphériques.

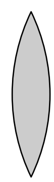


FIGURE 90A

C'est un bon modèle pour les lentilles de l'œil humain ainsi que celles utilisées dans de nombreux instruments optiques tels que les lunettes de lecture, appareils photo, microscopes ou télescopes. La ligne joignant les centres des sphères qui définissent les deux faces est appelée l'*axe optique* de la lentille.

Dans cet exercice, nous apprenons comment rendre compte du trajet d'un rayon lumineux lorsqu'il traverse la lentille, sous réserve que les conditions suivantes soient satisfaites :

— le rayon et l'axe optique sont dans un même plan ;

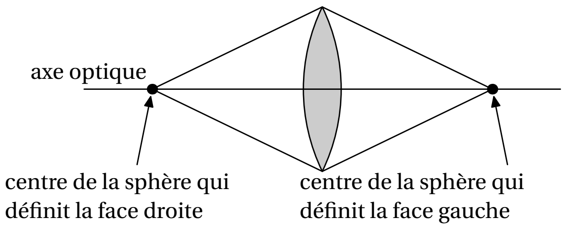


FIGURE 90B

— l'angle que fait le rayon avec l'axe optique est petit.

Pour étudier ces rayons lumineux, on introduit deux *plans de référence*, à la gauche et à la droite de la lentille. On peut alors caractériser un rayon

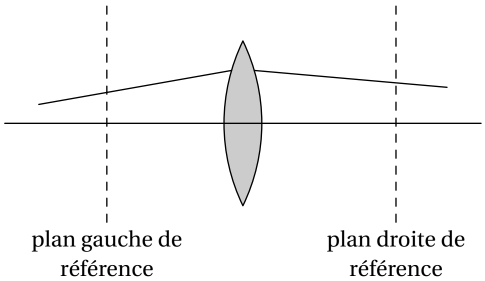


FIGURE 90C

incident par sa pente m et l'ordonnée x du point d'intersection avec le plan de référence de gauche. De même, on peut caractériser le rayon émergent par sa pente n et l'ordonnée y du point d'intersection avec le plan de référence de droite.

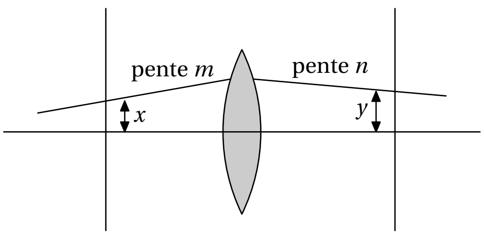


FIGURE 90D

On veut savoir comment le rayon émergent dépend du rayon incident ; autrement dit, nous nous intéressons à la transformation

$$T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{bmatrix} x \\ m \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y \\ n \end{bmatrix} \quad .$$

Nous allons voir que T peut être assimilée à une application linéaire, pour autant que m soit petit, ce que nous avons supposé. Pour étudier cette transformation, nous divisions le trajet du rayon en trois segments, tels que représentés sur la figure 90E ci-dessous. On a introduit deux plans de

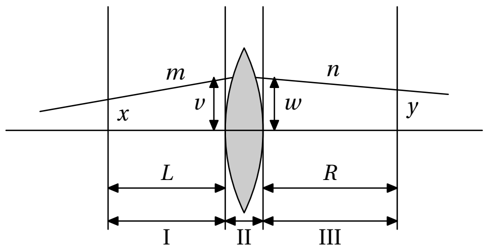


FIGURE 90E

référence auxiliaires, directement à gauche et à droite de la lentille. Notre transformation

$$\begin{bmatrix} x \\ m \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y \\ n \end{bmatrix}$$

peut alors être représentée par la composition de trois transformations plus simples

$$\begin{bmatrix} x \\ m \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} v \\ m \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} w \\ n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} y \\ n \end{bmatrix} \quad .$$

De la définition de la pente d'une droite, on trouve les relations $v = x + Lm$ et $y = w + Rn$.

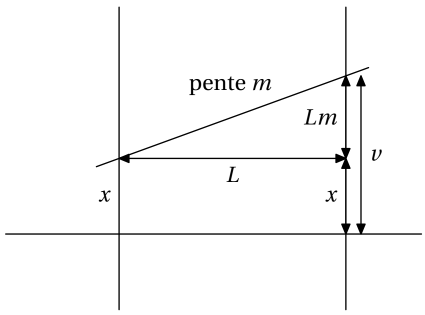


FIGURE 90F

$$\begin{bmatrix} v \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + Lm \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ m \end{bmatrix} \quad ;$$

$$\begin{bmatrix} y \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ m \end{bmatrix} \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]} \begin{bmatrix} v \\ m \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} w \\ n \end{bmatrix} \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]} \begin{bmatrix} y \\ n \end{bmatrix} \quad .$$

Cela nous emmenerait trop loin dans le cours de physique que d'établir ici une formule pour l'application

$$\begin{bmatrix} v \\ m \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} w \\ n \end{bmatrix} \quad .$$

Sous les hypothèses que nous avons faites, cette transformation est bien approchée (10) par

$$\begin{bmatrix} w \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ m \end{bmatrix}$$

où k est un nombre réel positif (cette formule implique $w = v$), d'où :

$$\begin{bmatrix} x \\ m \end{bmatrix} \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]} \begin{bmatrix} v \\ m \end{bmatrix} \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{smallmatrix}\right]} \begin{bmatrix} w \\ n \end{bmatrix} \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]} \begin{bmatrix} y \\ n \end{bmatrix} \quad .$$

La transformation $\begin{bmatrix} x \\ m \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y \\ n \end{bmatrix}$ est représentée par le produit de matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - Rk & L + R - kLR \\ -k & 1 - kL \end{bmatrix} \quad .$$

a. *Focalisation de rayons parallèles.* — Considérons la lentille de l'œil humain, où la rétine est le plan de référence de droite. Chez l'adulte, la distance R est de l'ordre de 0,025 m (un pouce...). Les muscles ciliaires permettent de modifier la forme de la lentille, et donc la constante k, dans un certain domaine. Quelle valeur de k vous permet-elle de focaliser des rayons incidents parallèles, tels que représentés par la figure ? Cette valeur de k vous permettra de voir clairement un objet distant. (L'unité de mesure communément adoptée pour k est la dioptrie, à savoir le m^{-1}.)

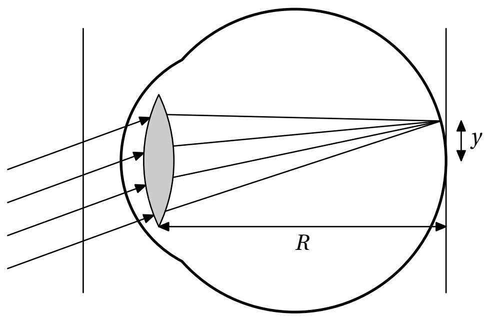


FIGURE 90G

10. Voir par exemple, P. BAMBERG et S. STERNBERG, *A Course in Mathematics for Students of Physics 1*, Cambridge University Press, 1991.

b. Quelle valeur de k vous permet de lire ce texte à une distance de $L = 0{,}3$ mètres ? Aidez-vous de la figure suivante (qui n'est pas à l'échelle).

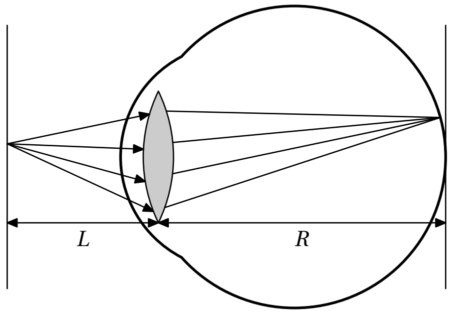


FIGURE 90H

c. *Le télescope.* — Un télescope astronomique est constitué de deux lentilles de même axe optique.

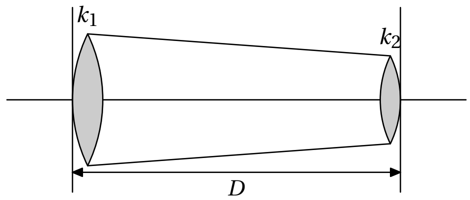


FIGURE 90I

Déterminez la matrice de la transformation

$$\begin{bmatrix} x \\ m \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} y \\ n \end{bmatrix},$$

en termes des paramètres k_1 et k_2 des deux lentilles, et de D. Pour des valeurs données de k_1 et k_2, comment choisir D de sorte que des rayons incidents parallèles soient transformés en des rayons parallèles ? Quelle est la relation entre D et les distances focales, $1/k_1$ et $1/k_2$, des deux lentilles ?

5. Récapitulation : Vrai ou faux ?

Déterminez si les énoncés suivants sont vrais ou faux en justifiant votre réponse.

1. La fonction T donnée par $T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x-y\\y-x\end{bmatrix}$ est une application linéaire.

2. La matrice $\begin{bmatrix}1/2 & -1/2\\1/2 & 1/2\end{bmatrix}$ représente une rotation.

3. Si A est une matrice inversible $n \times n$, alors $\mathrm{frel}(A) = I_n$.

4. La formule $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$ est vérifiée quelle que soit la matrice inversible A.

5. Pour toutes matrices $n \times n$, A et B, on a $AB = BA$.

6. Si A et B sont deux matrices $n \times n$ telles que $AB = I_n$, alors A est l'inverse de B.

7. Si A est une matrice 3×4 et B est une matrice 4×5, alors AB est une matrice 5×3.

8. La fonction T donnée par $T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y\\1\end{bmatrix}$ est une application linéaire.

9. La matrice $\begin{bmatrix}5 & 6\\-6 & 5\end{bmatrix}$ représente une similitude directe (rotation composée avec une homothétie).

10. Si A est une matrice inversible $n \times n$, alors A commute avec A^{-1}.

11. La matrice $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 6\end{bmatrix}$ est inversible.

12. La matrice $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ est inversible.

13. Il existe une matrice triangulaire supérieure 2×2, A, telle que $A^2 = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$.

14. La fonction T donnée par $T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(y+1)^2-(y-1)^2\\(x-3)^2-(x+3)^2\end{bmatrix}$ est une application linéaire.

15. La matrice $\begin{bmatrix}k & -2\\5 & k-6\end{bmatrix}$ est inversible quel que soit le nombre réel k.

16. Il existe un nombre réel k tel que la matrice $\begin{bmatrix}k-1 & -2\\-4 & k-3\end{bmatrix}$ ne soit pas inversible.

17. Il existe un nombre réel k tel que la matrice $\begin{bmatrix}k-2 & 3\\-3 & k-2\end{bmatrix}$ ne soit pas inversible.

18. La matrice $\begin{bmatrix}-0{,}6 & 0{,}8\\-0{,}8 & -0{,}6\end{bmatrix}$ représente une rotation.

19. La formule $\det(2A) = 2\det(A)$ est valable quelle que soit la matrice 2×2, A.

20. Il existe une matrice A telle que

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} A \begin{bmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} \quad .$$

21. Il existe une matrice A telle que

$$A\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{bmatrix} \quad .$$

22. Il existe une matrice A telle que

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{bmatrix} A = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} \quad .$$

23. La matrice $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$ représente une réflexion par rapport à une droite.

24. Pour tout nombre réel k, on a

$$\begin{bmatrix}1 & k\\0 & 1\end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix}1 & 3k\\0 & 1\end{bmatrix} \quad .$$

25. Le produit de matrices $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d & -b\\-c & a\end{bmatrix}$ est toujours un multiple scalaire de I_2.

26. Il existe une matrice triangulaire supérieure, non nulle, 2×2, A, telle que $A^2 = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$.

27. Il existe un entier positif n tel que $\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}^n = I_2$.

28. Il existe une matrice inversible 2×2, A, telle que $A^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$.

29. Il existe une matrice inversible $n \times n$ ayant deux lignes identiques.

30. Si $A^2 = I_n$, la matrice A est nécessairement inversible.

31. Si $A^{17} = I_2$, la matrice A est égale à I_2.

32. Si $A^2 = I_2$, la matrice A est ou bien I_2 ou bien $-I_2$.

33. Si la matrice A est inversible, la matrice $5A$ l'est aussi.

34. Si A et B sont des matrices 4×3 telles que $A\vec{v} = B\vec{v}$ pour tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$, les matrices A et B sont égales.

35. Si les matrices A et B commutent, alors $A^2B = BA^2$.

36. Si A est une matrice inversible $n \times n$ telle que $A^2 = A$, alors $A = I_n$.

37. Si les matrices A et B sont inversibles, la matrice $A + B$ est aussi inversible.

38. Pour toute matrice 2×2, A, qui représente une projection, on a $A^2 = A$.

39. Si la matrice $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ est inversible, la matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}$ est aussi inversible.

40. Si A^2 est inversible, la matrice A est elle-même inversible.

41. Si A est une matrice 2×2 qui représente une réflexion, on a $A^{-1} = A$.

42. Si A est une matrice inversible 2×2 et $\vec{v}$, $\vec{w}$ des vecteurs arbitraires de $\mathbb{R}^2$, on a $(A\vec{v}) \cdot (A\vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{w}$. (Il s'agit du produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.)

43. Il existe une matrice 2×3, A, et une matrice 3×2, B, telles que $AB = I_2$.

44. Il existe une matrice 3×2, A, et une matrice 2×3, B, telles que $AB = I_3$.

45. Si A est une matrice 3×3 telle que $A^2 + 3A + 4I_3 = 0$, alors A est inversible.

46. Si A est une matrice $n \times n$ telle que $A^2 = 0$, alors la matrice $I_n + A$ est inversible.

47. Si la matrice A commute avec B et que la matrice B commute avec C, alors A commute avec C.

48. Si T est une application linéaire arbitraire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, alors $T(\vec{v} \wedge \wedge w) = T(\vec{v}) \wedge T(\vec{w})$ four tous vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$. (Il s'agit du produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.)

49. Il existe une matarice inversible 10×10 dont 92 des coefficients sont égaux à 1.

50. Si A est une matrice $n \times p$ et B une matrice $p \times m$, on a $\operatorname{frel}(AB) = \operatorname{frel}(A)\operatorname{frel}(B)$.

51. Il existe une matrice inversible S telle que $S^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}S$ soit une matrice diagonale.

52. Si le système linéaire $A^2\vec{x} = \vec{b}$ est consistant, le système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}$ est aussi consistant.

53. Il existe une matrice inversible 2×2, A, telle que $A^{-1} = -A$.

54. Il existe une matrice inversible 2×2, A, telle que $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

55. Si une matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ représente la projection orthogonale sur une droite L, alors on a la relation $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$.

56. Si A est une matrice inversible 2×2 et que B est une matrice 2×2 arbitraire, on a $\operatorname{frel}(AB) = \operatorname{frel}(B)$.

CHAPITRE 3. SOUS-ESPACES DE R^n ET LEUR DIMENSION

1. Image et noyau d'une application linéaire

BUT. — Utiliser les concepts d'image et de noyau d'une application linéaire (ou d'une matrice). Exprimer l'image et le noyau d'une matrice comme espace engendré par certains vecteurs. Utiliser le noyau et l'image pour déterminer quand une matrice est inversible.

Pour chaque matrice A des exercices 1 à 13, trouvez des vecteurs qui engendrent le noyau de A. Utilisez du papier et un crayon.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & -6 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

13. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Pour chaque matrice A des exercices 14 à 16, trouvez des vecteurs qui engendrent l'image de A. Donnez aussi peu de vecteurs que possible. Utilisez du papier et un crayon.

14. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

15. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

16. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Pour chaque matrice A des exercices 17 à 22, décrivez l'image de la transformation $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ géométriquement (en tant que droite, plan, etc. dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$).

17. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$

19. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -4 & -6 & -8 \end{bmatrix}$

20. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

21. $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 1 & 9 & 2 \\ 5 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

22. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

Décrivez géométriquement les images et les noyaux des applications linéaires des exercices 23 à 25.

23. La réflexion par rapport à la droite d'équation $y = x/3$ dans $\mathbb{R}^2$.

24. La projection orthogonale sur le plan d'équation $x + 2y + 3z = 0$ dans $\mathbb{R}^3$.

25. La rotation d'angle $\pi/4$ dans le sens direct (sens inverse des aiguilles d'une montre).

26. Quel est l'image d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par

$$f(t) = t^3 + at^2 + bt + c,$$

où a, b, c sont des constantes arbitraires ?

27. Donnez un exemple de fonction non inversible de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ avec $\operatorname{im}(f) = \mathbb{R}$.

28. Donnez un exemple de paramétrisation de l'ellipse

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

dans $\mathbb{R}^2$.

29. Donnez un exemple de fonction dont l'image est la sphère unité

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

dans $\mathbb{R}^3$.

30. Donnez un exemple de matrice A dont l'image est engendrée par le vecteur $\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}$.

31. Donnez un exemple de matrice A dont l'image est le plan orthogonal au vecteur $\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$.

32. Donnez un exemple d'application linéaire dont l'image est engendrée par $\begin{bmatrix}7\\6\\5\end{bmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$.

33. Donnez un exemple de transformation linéaire dont le noyau est le plan d'équation $x+2y+3z=0$ dans $\mathbb{R}^3$.

34. Donnez un exemple de transformation linéaire dont le noyau est la droite engendrée par $\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$.

35. Considérons un vecteur non nul $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$. En argumentant géométriquement, décrivez l'image et le noyau de l'application linéaire T de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ donnée par

$$T(\vec{x}) = \vec{v}\cdot\vec{x}.$$

36. Considérons un vecteur non nul $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$. En argumentant géométriquement, décrivez l'image et le noyau de la transformation linéaire T de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donné par

$$T(\vec{x}) = \vec{v}\wedge\vec{x}.$$

37. Soit A la matrice

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Décrivez l'image et le noyau des matrices A, A^2 et A^3 géométriquement.

38. Considérons une matrice carrée A.

a. Quelle relation y a-t-il entre $\ker(A)$ et $\ker(A^2)$? Sont-ils nécessairement égaux ? L'un est-il nécessairement inclus dans l'autre ? Plus généralement, que pouvez-vous dire de $\ker(A)$, $\ker(A^2)$, $\ker(A^3)$, $\ker(A^4)$,… ?

b. Que pouvez-vous dire de $\mathrm{im}(A)$, $\mathrm{im}(A^2)$, $\mathrm{im}(A^3)$,… ? *Indice :* on peut s'aider de l'exercice 37.

39. Considérons une matrice $n\times p$, A, et une matrice $p\times m$, B.

a. Quelle relation y a-t-il entre $\ker(AB)$ et $\ker(B)$? Sont-ils égaux ? L'un est-il nécessairement inclus dans l'autre ?

b. Quelle relation y a-t-il entre $\mathrm{im}(AB)$ et $\mathrm{im}(A)$?

40. Considérons une matrice $n\times p$, A, et une matrice $p\times m$, B. Si $\ker(A) = \mathrm{im}(B)$, que peut-on dire sur le produit AB ?

41. Considérons la matrice $A = \begin{bmatrix}0{,}36 & 0{,}48\\0{,}48 & 0{,}64\end{bmatrix}$.

a. Décrivez $\ker(A)$ et $\mathrm{im}(A)$ géométriquement.

b. Déterminez A^2. Si $\vec{v}$ est dans l'image de A, que pouvez vous dire de $A\vec{v}$?

c. Décrivez géométriquement l'application linéaire donnée par $T(\vec{x}) = A\vec{x}$.

42. Ecrivez l'image de la matrice

$$A = \begin{bmatrix}1&1&1&6\\1&2&3&4\\1&3&5&2\\1&4&7&0\end{bmatrix}$$

comme le noyau d'une matrice B.

Indication : l'image de A consiste en tous les vecteurs $\vec{y}$ de $\mathbb{R}^4$ tel que le système $A\vec{x} = \vec{y}$ soit consistant. Écrivez le système de manière plus explicite :

$$\left|\begin{array}{ccccccccccc} x_1 &+& x_2 &+& x_3 &+& 6x_4 &=& y_1 &&&& \\ x_1 &+& 2x_2 &+& 3x_3 &+& 4x_4 &=& & y_2 &&& \\ x_1 &+& 3x_2 &+& 5x_3 &+& 2x_4 &=& && y_3 && \\ x_1 &+& 4x_2 &+& 7x_3 && &=& &&& y_4 \end{array}\right|.$$

Puis mettez le sous forme échelonnée réduite :

$$\left|\begin{array}{lcl} x_1 - x_3 + 8x_4 &=& 4y_3 - 3y_4 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 &=& -y_3 + y_4 \\ 0 &=& y_1 - 3y_3 + 2y_4 \\ 0 &=& y_2 - 2y_3 + y_4 \end{array}\right|.$$

Pour quels vecteurs $\vec{y}$ ce système est-il consistant ? La réponse vous permettra d'exprimer $\mathrm{im}(A)$ comme le noyau d'une matrice 2×4.

43. En utillisant l'exercice 42, expliquez comment vous pouvez écrire l'image de n'importe quelle matrice A comme le noyau d'une autre matrice B.

44. Considérons une matrice A et posons $B = \mathrm{frel}(A)$.

a. Le noyau $\ker(A)$ est-il nécessairement égal à $\ker(B)$? Expliquez.

b. L'image $\operatorname{im}(A)$ est-elle nécessairement égale à $\operatorname{im}(B)$? Expliquez.

45. Considérons une matrice $n \times m$, A, telle que $\operatorname{rang}(A) = r < m$. Expliquez comment on peut écrire $\ker(A)$ comme espace engendré par $m - r$ vecteurs.

46. Considérons une matrice 3×4, A, sous forme réduite échelonnée. Que peut-on dire de l'image de A ? Décrivez tous les cas en fonction de $\operatorname{rang}(A)$ et dessinez un schéma dans chaque cas.

47. Soit T la projection suivant une droite L_1 sur une droite L_2. Décrivez géométriquement l'image et le noyau de T.

48. Considérons une matrice 2×2, A, avec $A^2 = A$.

a. Si $\vec{w}$ est dans l'image de A, quelle relation y a-t-il entre $\vec{w}$ et $A\vec{w}$?

b. Que peut-on dire sur A si $\operatorname{rang}(A) = 2$? Et si $\operatorname{rang}(A) = 0$?

c. Si $\operatorname{rang}(A) = 1$, montrez que la transformation linéaire donnée par $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ est la projection sur $\operatorname{im}(A)$ suivant $\ker(A)$.

49. Vérifiez que le noyau d'une transformation linéaire est stable par addition et par multiplication par un scalaire.

50. Considérons une matrice carrée A avec $\ker(A^2) = \ker(A^3)$. Est-ce que $\ker(A^3) = \ker(A^4)$? Justifiez votre réponse.

51. Considérons une matrice $n \times p$, A, et une autre matrice $p \times m$, B, telles que $\ker(A) = \{\vec{0}\}$ et $\ker(B) = \{\vec{0}\}$. Trouvez $\ker(AB)$.

52. Considérons une matrice $p \times m$, A, une autre matrice $q \times m$, B, et la matrice

$$C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}.$$

Quelles sont les relations entre $\ker(A)$, $\ker(B)$ et $\ker(C)$?

Dans les exercices 53 et 54, nous travaillerons avec les chiffres binaires (ou bits*) 0 et 1 à la place des nombres réels $\mathbb{R}$. L'addition et la multiplication de ces nombres sont définies comme d'habitude sauf pour $1 + 1 = 0$. Nous noterons ce système de deux nombres par $\mathbf{F}_2$ ou plus simplement $\mathbf{F}$[11]). L'ensemble des vecteurs ayant n composantes dans $\mathbf{F}$ est noté $\mathbf{F}^n$, notez que $\mathbf{F}^n$ ne contient que 2^n vecteurs (pourquoi ?). En informatique, un vecteur de $\mathbf{F}^8$ est appelé un* octet *(anglais :* byte*). (Un octet est une chaîne de huit chiffres binaires.)*

53. Les idées élémentaires de l'algèbre linéaire introduites jusqu'à présent (pour les nombres réels) s'appliquent sans modification à $\mathbf{F}$.

Une *matrice de Hamming* à n lignes est une matrice qui contient tous les vecteurs non nuls de $\mathbf{F}^n$ comme colonnes (dans n'importe quel ordre). Notez que cette matrice doit avoir $2^n - 1$ colonnes. Voici un exemple :

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} 3 \text{ lignes} \\ 2^3 - 1 = 7 \text{ colonnes.} \end{array}$$

a. Exprimez le noyau de H comme un espace engendré par quatre vecteurs de $\mathbf{F}^7$ de la forme

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b. Formez la matrice 7×4

$$M = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 & \vec{v}_4 \\ | & | & | & | \end{bmatrix}.$$

Expliquez pourquoi $\operatorname{im}(M) = \ker(H)$. Si $\vec{x}$ est un vecteur de $\mathbf{F}^4$ arbitraire, que vaut $H(M\vec{x})$?

54. (Voir l'exercice 53 pour la terminologie.) Lorsqu'une information est transmise, il peut y avoir des erreurs pendant la communication. Nous présentons ici une méthode pour ajouter de l'information aux messages de telle manière que la plupart des erreurs se produisant pendant la transmission puissent être détectées et corrigées. Une telle méthode s'appelle un *code correcteur d'erreurs.* (Comparez ces codes avec ceux dont le but est de masquer l'information.) Les images du premier homme sur la lune (en 1969) n'étaient pas très claires à cause d'erreurs dans le signal

11. un ensemble contenant au moins deux éléments 0 et 1 et muni des quatre opérations arithmétiques est appelé un *corps* (« *field* » en anglais.

après transmission. Lors des mission ultérieures, l'utilisation de codes correcteurs plus performants permit d'obtenir des images plus claires.

En informatique, l'information est mémorisée et traitée sous forme de chaines de chiffres binaires 0 et 1. Le défilé des chiffres binaires est souvent coupé en blocs de huit chiffres (*octets*). Pour plus de simplicité, nous travaillerons avec des blocs de seulement quatre chiffres (*i.e.* avec des vecteurs de $\mathbf{F}^4$), par exemple

$$\cdots | \, 1\,0\,1\,1 \, | \, 1\,0\,0\,1 \, | \, 1\,0\,1\,0 \, | \, 1\,0\,1\,1 \, | \, 1\,0\,0\,0 \cdots .$$

Supposons que ces vecteurs de $\mathbf{F}^4$ ont été transmis d'un ordinateur à un autre, disons, d'un satellite au centre de contrôle de Kourou (station de l'Agence Européenne pour l'Espace en Guyane française). Un vecteur $\vec{u}$ de $\mathbf{F}^4$ est transformé en un vecteur $\vec{v} = M\vec{u}$ de $\mathbf{F}^7$, où la matrice M est celle de l'exercice 53. Les quatre derniers coordonnées de $\vec{v}$ sont juste les coordonnées de $\vec{u}$; les trois premières ont été ajoutées pour détecter les erreurs de transmission. Supposons qu'au plus une erreur se soit produite durant la transmission, le vecteur $\vec{w}$ reçu à Kourou est soit $\vec{v}$ (s'il n'y a pas eu d'erreur) soit $\vec{v} + \vec{e}_i$ (si la i-ième coordonnée a été altérée.)

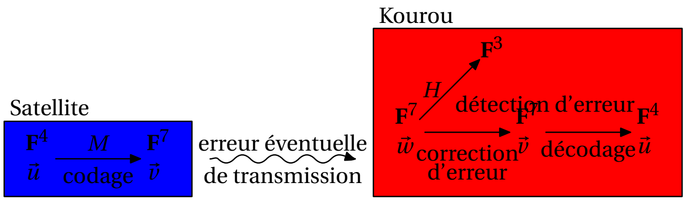


FIGURE 54A

a. Soit H la matrice de Hamming introduite dans l'exercice 53. Comment l'ordinateur de Kourou peut-il utiliser $H\vec{w}$ pour déterminer s'il y a eu une erreur lors de la transmission ? S'il y a eu une erreur, comment l'ordinateur peut-il trouver l'erreur ?

b. Le vecteur reçu à Kourou est

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Déterminez s'il y a eu une erreur pendant la transmission et le cas échéant corrigez-la. (C'est-à-dire, trouvez $\vec{v}$ et $\vec{u}$.)

2. Sous-espaces de $\mathbb{R}^n$; bases et indépendance linéaire

BUT. — Vérifier si un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace. Appliquer le concept d'indépendance linéaire. Appliquer le concept de base.

Quels ensembles W des exercices 1 à 3 sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^n$?

1. $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x+y+z=1 \right\}$

2. $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x \leqslant y \leqslant z \right\}$

3. $W = \left\{ \begin{bmatrix} x+2y+3z \\ 4x+5y+6z \\ 7x+8y+9z \end{bmatrix} : x, y, z \text{ des nombres arbitraires} \right\}$

4. Considérons des vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs est-il toujours un sous-espace de $\mathbb{R}^n$? Justifiez votre réponse.

5. Donnez une description géométrique de tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$. Justifiez votre réponse.

6. Considérons deux sous-espaces V et W de $\mathbb{R}^n$.
a. Est-ce que l'intersection $V \cap W$ est toujours un sous-espace de $\mathbb{R}^n$?
b. Est-ce que l'union $V \cup W$ est toujours un sous-espace de $\mathbb{R}^n$?

7. Considérons un ensemble non vide dans $\mathbb{R}^n$ stable par addition et par multiplication par un nombre. Est-ce toujours un sous-espace de $\mathbb{R}^n$? Expliquez.

8. Trouvez une relation non triviale entre les vecteurs suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

9. Considérons des vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ de $\mathbb{R}^n$, avec $\vec{v}_m = \vec{0}$. Ces vecteurs sont-ils linéairement indépendants ?

Dans les exercices 10 à 20, utilisez du papier et un crayon pour identifier les vecteurs redondants. Déterminez ensuite si les vecteurs donnés sont linéairement indépendants.

10. $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Dans les exercices 21 à 26, trouvez un vecteur colonne redondant de la matrice A donnée et écrivez-le comme combinaison linéaire des colonnes précédentes. Utilisez cette représentation pour trouver une relation non triviale entre les colonnes et trouver un vecteur non nul dans le noyau de A. (Cette procédure est illustrée dans le cours.)

21. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

22. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

23. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

24. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

25. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Dans les exercices 27 à 33, trouvez une base de l'image des matrices données.

27. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

34. Considérons la matrice 5×4

$$A = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 & \vec{v}_4 \\ | & | & | & | \end{bmatrix}.$$

Si le vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ est dans le noyau de A, écrivez $\vec{v}_4$ comme combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.

35. Montrez qu'il existe une relation non triviale entre les vecteurs $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ si et seulement si au moins un de ces vecteurs est une combinaison linéaire des autres vecteurs.

36. Considérons une application linéaire T de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ et des vecteurs linéairement dépendants $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ de $\mathbb{R}^n$. Les vecteurs $T(\vec{v}_1), \ldots, T(\vec{v}_m)$ sont-ils nécessairement linéairement dépendants ? Comment pouvez-vous le prouver ?

37. Considérons une application linéaire T de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ et des vecteurs linéairement indépendants $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ de $\mathbb{R}^n$. Les vecteurs $T(\vec{v}_1), \ldots, T(\vec{v}_m)$ sont-ils nécessairement linéairement indépendants ? Comment pouvez-vous le prouver ?

38. a. Soient V un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ et m le plus grand nombre de vecteurs linéairement indépendants que l'on peut trouver dans V. (Nous avons vu en cours que $m \leqslant n$.) Choisissez des vecteurs linéairement indépendants $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ de V. Montrez que ces vecteurs engendrent V et donc qu'ils forment une basse de V. Cette exercice montre que tout sous-espace de $\mathbb{R}^n$ a une base.

Si vous êtes intrigué par cette exercice, pensez d'abord à des cas particuliers comme un plan dans $\mathbb{R}^3$. Que vaut m dans ce cas ?
b. Montrez que tout sous-espace V de $\mathbb{R}^n$ peut être représenté comme l'image d'une matrice.

39. Considérons des vecteurs linéairement indépendants $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ de $\mathbb{R}^n$ et un vecteur $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$ qui ne soit pas contenu dans l'espace engendré par $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$. Les vecteurs $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m, \vec{v}$ sont-ils nécessairement indépendants ? Justifiez votre réponse.

40. Considérons une matrice $n \times p$, A, et une matrice $p \times m$, B. Supposons que les colonnes de A soient linéairement indépendantes et les colonnes de B aussi. Les colonnes du produit AB sont-elles linéairement indépendantes ? (L'exercice 3.1/51 peut être utile.)

41. Considérons une matrice $m \times n$, A, et une matrice $n \times m$, B, telles que $AB = I_m$. (On dit que A est un inverse à gauche de B.) On suppose que $n \neq m$. Les colonnes de B sont-elles linéairement indépendantes ? Et celles de A ?

42. Considérons des vecteurs $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ de $\mathbb{R}^n$ deux-à-deux orthogonaux (c'est-à-dire $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j$ sauf si $i = j$). Montrez que ces vecteurs sont nécessairement linéairement indépendants.

Indice : Prenez le produit scalaire avec $\vec{v}_i$ des deux membres d' une relation de dépendance linéaire

$$c_1 \vec{v}_1 + \ldots + c_i \vec{v}_i + \ldots + c_m \vec{v}_m = \vec{0}.$$

43. Considérons trois vecteurs linéairement indépendants $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ de $\mathbb{R}^3$. Les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ sont-ils linéairement indépendants ? Comment le prouvez-vous ?

44. Considérons des vecteurs linéairement indépendants $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ de $\mathbb{R}^n$ et A une matrice inversible de taille $m \times m$. Les colonnes de la matrice

$$\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \ldots & \vec{v}_m \\ | & | & & | \end{bmatrix} A$$

sont-elles linéairement indépendantes ?

45. Les colonnes d'une matrice inversible sont-elles linéairement indépendantes ?

46. Trouvez une base du noyau de la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Justifiez votre réponse soigneusement, c'est-à-dire, expliquez pourquoi les vecteurs que vous avez trouvés sont linéairement indépendants et pourquoi ils engendrent le noyau.

47. Considérons trois vecteurs linéairement indépendants $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ de $\mathbb{R}^4$. Trouvez la forme échelonnée réduite de la matrice

$$\begin{bmatrix} | & | & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}.$$

48. Exprimez le plan d'équation $3x_1+4x_2+5x_3 = 0$ de $\mathbb{R}^3$ comme le noyau d'une matrice A puis comme l'image d'une matrice B.

49. Exprimez la droite L de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ comme l'image d'une matrice A puis comme le noyau d'une matrice B.

50. Considérons deux sous-espaces V et W de $\mathbb{R}^n$. Soit $V+W$ l'ensemble de tous les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ de la forme $\vec{v} + \vec{w}$ avec $\vec{v}$ dans V et $\vec{w}$ dans W. Est-ce que $V + W$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$?

Si V et W sont deux droites distinctes de $\mathbb{R}^3$, qu'est $V + W$? Faites un dessin.

51. Considérons deux sous-espaces V et W de $\mathbb{R}^n$ dont l'intersection ne contient que le vecteur nul $\vec{0}$.

a. Considérons des vecteurs linéairement indépendants $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_p$ de V et des vecteurs linéairement indépendants $\vec{w}_1,\ldots,\vec{w}_q$ de W. Expliquez pourquoi les vecteurs $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_p, \vec{w}_1,\ldots,\vec{w}_q$ sont linéairement indépendants.

b. Considérons une base $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_p$ de V et une base $\vec{w}_1,\ldots,\vec{w}_q$ de W. Expliquez pourquoi $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_p, \vec{w}_1,\ldots,\vec{w}_q$ est une base de $V + W$ (voir l'exercice 50).

52. Pour quelles valeurs des constantes a, b, c, d, e et f les vecteurs

$$\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b \\ c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \\ 0 \end{bmatrix}$$

sont-ils linéairement indépendants ? Justifiez votre réponse.

53. Considérons un sous-espaces V de $\mathbb{R}^n$. On définit son complémentaire orthogonal $V^\perp$ comme l'ensemble des vecteurs $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^n$ orthogonaux à tous les vecteurs de V, c'est-à-dire $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$ pour tout $\vec{v}$ dans V. Montrez que $V^\perp$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.

54. Considérons la droite L engendrée par $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$. Trouvez une base de $L^\perp$ (voir l'exercice 53).

55. Considérons le sous-espace L de $\mathbb{R}^5$ engendré par

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Trouvez une base de $L^\perp$.

56. Pour quelles valeurs des constantes a, b, …, m les vecteurs

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} e \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f \\ g \\ h \\ i \\ j \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} k \\ m \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sont-ils linéairement indépendants ?

57. Considérons la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notez qu'elle est sous forme échelonnée réduite.

Pour quels entiers j compris entre 1 et 7 existe-t-il un vecteur $\vec{x}$ dans le noyau de A tel que sa j-ième composante x_j est non nulle alors que les composantes suivantes $x_{j+1},\ldots,x_7$ sont nulles ?

58. Considérons une matrice $n \times m$, A. Pour quels entiers j compris entre 1 et m existe-t-il un vecteur dans le noyau de A tel que sa j-ième composante x_j est non nulle alors que les composantes suivantes $x_{j+1},\ldots,x_m$ sont nulles ? Suivez l'exemple donné par l'exercice 57. Donnez votre réponse en termes de vecteurs colonnes redondants de la matrice A.

CHAPITRE 3. SOUS-ESPACES DE R^n ET LEUR DIMENSION

3. Dimension d'un sous-espaces de $\mathbb{R}^n$

BUT. — Utiliser le concept de dimension. Trouver une base pour le noyau et pour l'image d'une application linéaire.

Dans les exercices 1 à 20, trouvez sans calculs les colonnes redondantes des matrices données. Trouvez une base de l'image de la matrice et une base du noyau de la matrice.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Dans les les exercices 21 à 25, trouvez la forme échelonnée réduite de la matrice A. Trouvez ensuite une base de l'image de A et une base du noyau de A.

21. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 8 \\ 7 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

22. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & 9 & 3 \end{bmatrix}$

23. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & -6 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

24. $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

25. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 9 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

26. Considérons les matrices

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a. Quelles matrices de la liste ont le même noyau que C ?

b. Quelles matrices de la liste ont la même image que C ?

c. Quelles matrices de la liste ont une image différente de toutes les images des autres matrices de la liste ?

27. Déterminez si les vecteurs

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix},$$

forment une base de $\mathbb{R}^4$.

28. Pour quelle(s) valeur(s) de k, les vecteurs

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ k \end{bmatrix},$$

forment-ils une base de $\mathbb{R}^4$?

29. Trouvez une base du sous-espace de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0.$$

30. Trouvez une base du sous-espace de $\mathbb{R}^4$ défini par l'équation

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0.$$

31. Soit V le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ défini par l'équation

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0.$$

Trouvez une application linéaire T de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ telle que $\ker(T) = \{\vec{0}\}$ et $\mathrm{im}(T) = V$. Décrivez T par sa matrice.

32. Trouvez une base du sous-espace de $\mathbb{R}^4$ formé de tous les vecteurs orthogonaux à

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

33. Un sous-espace V de $\mathbb{R}^n$ est appelé *hyperplan* si V est défini par une équation linéaire homogène

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = 0$$

dont au moins un coefficient c_i est non nul. Quelle est la dimension d'un hyperplan de $\mathbb{R}^n$? Justifiez votre réponse soigneusement. Qu'est-ce qu'un hyperplan de $\mathbb{R}^3$? Qu'est-ce qu'un hyperplan de $\mathbb{R}^2$?

34. Considérons un sous-espace V de $\mathbb{R}^m$ défini par n équations linéaires homogènes :

$$\left| \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \ldots + & a_{1m}x_m & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \ldots + & a_{2m}x_m & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + \ldots + & a_{nm}x_m & = & 0 \end{array} \right|$$

Quelle relation y a-t-il entre la dimension de V et la quantité $m - n$? La réponse est une inégalité. Expliquez-la soigneusement.

35. Considérons un vecteur non nul $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$. Quelle est la dimension de l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{v}$?

36. Pouvez-vous trouver une matrice 3×3, A, telle que $\mathrm{im}(A) = \ker(A)$? Expliquez.

37. Donnez un exemple de matrice 4×5, A, avec $\dim(\ker(A)) = 3$.

38. a. Considérons une application linéaire T de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^3$. Quelles sont les valeurs possibles de $\dim(\ker(T))$? Expliquez.

b. Considérons une application linéaire T de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^7$. Quelles sont les valeurs possibles de $\dim(\mathrm{im}(T))$? Expliquez.

39. Soit A une matrice 5×5 qui s'écrive

$$A = BC$$

où B est une matrice 5×4 et C est une matrice 4×5. Expliquez pourquoi A n'est pas inversible.

40. Considérons deux sous-espaces V et W de $\mathbb{R}^n$, V étant contenu dans W. Expliquez pourquoi $\dim(V) \leqslant \dim(W)$. (Ceci parait intuitivement évident mais il ne faut pas trop compter sur votre intuition dans $\mathbb{R}^n$.)

41. Considérons deux sous-espaces V et W de $\mathbb{R}^n$, V étant contenu dans W. Montrez que si $\dim(V) = \dim(W)$ alors $V = W$.

42. Considérons un sous-espaces V de $\mathbb{R}^n$ avec $\dim(V) = n$. Expliquez pourquoi $V = \mathbb{R}^n$.

43. Considérons deux sous-espaces V et W de $\mathbb{R}^n$ avec $V \cap W = \{\vec{0}\}$. Quelle est la relation entre $\dim(V)$, $\dim(W)$ et $\dim(V + W)$? (La définition de $V + W$ se trouve dans l'exercice 3.2/50. L'exercice 3.2/51 peut être utile.)

44. Deux sous-espaces V et W de $\mathbb{R}^n$ sont dit complémentaires si tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$ s'exprime de manière unique comme $\vec{x} = \vec{v} + \vec{w}$ avec $\vec{v}$ dans V et $\vec{w}$ dans W. Montrez que V et W sont complémentaire si et seulement si $V \cap W = \{\vec{0}\}$ et $\dim(V) + \dim(W) = n$.

45. Considérons des vecteurs linéairement indépendants $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ dans un sous-espace V de $\mathbb{R}^n$ et des vecteurs $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_q$ qui engendrent V. Montrez qu'il existe une base de V contenant tous les vecteurs $\vec{v}_i$ et certains vecteurs $\vec{w}_j$.

Indice : Trouvez une base de l'image de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} | & & | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \ldots & \vec{v}_p & \vec{w}_1 & \ldots & \vec{v}_q \\ | & & | & | & & | \end{bmatrix}.$$

46. En utilisant l'exercice 46, construisez une base de $\mathbb{R}^4$ formée des vecteurs

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\4\\6\\8\end{bmatrix}$$

et de certains des vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ et $\vec{e}_4$ de $\mathbb{R}^4$.

47. Considérons deux sous-espaces V et W de $\mathbb{R}^n$. Montrez que

$$\dim(V) + \dim(W) = \dim(V \cap W) + \dim(V + W).$$

(La définition de $V + W$ est donnée dans l'exercice 3.2/50.)

Indication : Choisissez une base $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \dots \vec{u}_m$ de $V \cap W$. Utilisez l'exercice 45 pour construire une base $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \dots \vec{u}_m, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_p$ de V et une base $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \dots \vec{u}_m, \vec{w}_1, \vec{w}_2 \dots \vec{w}_q$ de W. Montrez $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \dots \vec{u}_m, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_p, \vec{w}_1, \vec{w}_2 \dots \vec{w}_q$ est une base de $V + W$. La preuve de l'indépendance linéaire n'est pas évident.

48. En utilisant l'exercice 47, répondez à la question suivante : si V et W sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^{10}$ avec $\dim(V) = 6$ et $\dim(W) = 7$, quelles sont les dimensions possibles pour $V \cap W$?

Dans les exercices 49 à 52, nous allons étudier l'espace des lignes d'une matrice. L'espace des lignes d'une matrice A de taille $n \times m$ est le sous-espace engendré par les lignes de A dans $\mathbb{R}^m$. Par exemple, l'espace des lignes de la matrice

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\1 & 1 & 1 & 1\\2 & 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

est l'ensemble des vecteurs de la forme

$$a\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}2 & 2 & 2 & 3\end{bmatrix} \quad .$$

49. Trouvez une base de l'espace des lignes de la matrice

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 1 & 3 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

50. Considérons une matrice $n \times n$, E, sous forme échelonnée réduite. En utilisant l'exercice 49, expliquez comme vous pouvez trouver une base de l'espace des lignes de E. Quelle est la relation entre la dimension de l'espace des lignes de E et son rang ?

51. Considérons une matrice $n \times m$ arbitraire, A.

a. Quelle relation y a-t-il entre l'espace des lignes de A et l'espace des lignes de $E = \text{frel}(A)$?

Indication : examinez comment les lignes sont modifiées lors de transformations élémentaires.

b. Quel est la relation entre la dimension de l'espace des lignes de A et son rang ?

52. Trouvez une base de l'espace des lignes de la matrice

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\2 & 2 & 2 & 2\\1 & 2 & 3 & 4\\1 & 3 & 5 & 7\end{bmatrix}.$$

53. Considérons une matrice $n \times n$, A. Montrez qu'il existe des nombres réels $c_0, c_1, \dots, c_n$ (non tous nuls) tels que la matrice $c_0 I_n + c_1 A + \dots + c_n A^n$ ne soit pas inversible.

Indication : Prenez un vecteur quelconque $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$. Alors les $n+1$ vecteurs $\vec{v}, A\vec{v}, \dots, A^n\vec{v}$ seront linéairement dépendants. (En fait, on peut choisir ces nombres réels c_i de telle manière que $c_0 I_n + c_1 A + \dots + c_n A^n = 0$. Vous pouvez essayer de le démontrer.)

54. Considérons la matrice

$$A = \begin{bmatrix}1 & -2\\2 & 1\end{bmatrix}.$$

Déterminez trois nombres réels c_0, c_1 et c_2 non tous nuls tels que la matrice $c_0 I_2 + c_1 A + c_2 A^2$ ne soit pas inversible.

55. Considérons une matrice $n \times m$, A. Montrez que le rang de A est n si et seulement si A a une sous-matrice $n \times n$ inversible (*i. e.* une matrice obtenue en effaçant $m - n$ colonnes de A).

56. Une matrice $n \times n$, A, est dite *nilpotente* si $A^m = 0$ pour un certain entier m. Les matrices triangulaires avec des 0 sur la diagonale sont des exemples de matrices nilpotentes. Considérons une matrice nilpotente A de taille $n \times n$ et m le plus petit entier tel que $A^m = 0$. Prenez un vecteur $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $A^{m-1}\vec{v} \neq \vec{0}$. Montrez que les vecteurs $\vec{v}, A\vec{v}, \dots, A^{m-1}\vec{v}$ sont linéairement indépendants.

Indication : Considérons une relation $c_0\vec{v} + c_1 A\vec{v} + \dots + c_{m-1} A^{m-1}\vec{v} = 0$. Multipliez par A^{m-1} pour obtenir $c_0 = 0$, puis montrez que $c_1 = 0$, etc.

57. Considérons une matrice nilpotente A de taille $n \times n$. En utilisant le résultat de l'exercice 56, montrez que $A^n = 0$.

58. Expliquez pourquoi il est nécessaire de prendre au moins m vecteurs pour engendrer un sous-espace de dimension m.

59. Prouvez que si m vecteurs engendrent un espace de dimension m, alors ils forment une base de cet espace.

60. Si une matrice 3×3, A, représente la projection sur un plan de $\mathbb{R}^3$, quel est le rang de A ?

61. Considérons une matrice 4×2, A, et une matrice 2×5, B.

a. Quelles sont les dimensions possibles du *noyau* de AB ?

b. Quelles sont les dimensions possibles de l'*image* de AB ?

62. Considérons deux matrices $n\times m$, A et B. Que pouvez vous dire des relations entre rang(A), rang(B) et rang$(A+B)$?

63. Considérons une matrice $n\times p$, A, et une matrice $p\times m$, B.

a. Que pouvez vous dire des relations entre rang(A) et rang(AB) ?

b. Que pouvez vous dire des relations entre rang(B) et rang(AB) ?

64. Considérons les matrices

$$A=\begin{bmatrix}1&0&2&0&4&0\\0&1&3&0&5&0\\0&0&0&1&6&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

et

$$B=\begin{bmatrix}1&0&2&0&4&0\\0&1&3&0&5&0\\0&0&0&1&7&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

Montrez que les noyaux et les images de A et B sont différents.

Indication : Pensez à écrire la cinquième colonne comme combinaison linéaire des premières colonnes.

65. Considérons les matrices

$$A=\begin{bmatrix}1&0&2&0&4&0\\0&1&3&0&5&0\\0&0&0&1&6&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

et

$$B=\begin{bmatrix}1&0&2&0&0&4\\0&1&3&0&0&5\\0&0&0&1&0&6\\0&0&0&0&1&7\end{bmatrix}$$

Montrez que les noyaux et les images de A et B sont différents.

Indication : Pensez à écrire la cinquième colonne comme combinaison linéaire des premières colonnes.

66. Soit A et B deux matrices de même taille, toutes les deux sous forme échelonnée réduite, distinctes. Montrez que les noyaux de A et B sont différents.

Indication : Considérez la première colonne où les deux matrices diffèrent, disons la k-ième, c'est-à-dire $\vec{a}_k$ pour A et $\vec{b}_k$ pour B. Expliquez pourquoi les colonnes $\vec{a}_k$ et $\vec{b}_k$ ne contiennent pas de pivot. On peut alors exprimer $\vec{a}_k$ comme combinaison linéaire des premières colonnes et trouver ainsi un vecteur dans le noyau de A. Montrez que ce vecteur n'est pas dans le noyau de B. Suivez les exemples 64 et 65.

67. Supposons qu'une matrice A sous forme échelonnée réduite puisse être obtenue à partir d'une matrice M par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes. Montrez que $A=\text{frel}(M)$.

Indication : Les matrices A et frel(M) sont sous forme echelonnée réduites et ont le même noyau. L'exercice 66 peut être utile.

CHAPITRE 3. SOUS-ESPACES DE $\mathbf{R}^n$ ET LEUR DIMENSION

4. Coordonnées

BUT. — Utiliser le concept de coordonnées. Appliquer la définition de matrice d'une application linéaire par rapport à une base. Trouver cette matrice à partir de la matrice standard de l'application. Trouver la matrice d'une application linéaire (dans n'importe quelle base) colonne par colonne. Utiliser le concept de matrices semblables.

Dans les exercices 1 à 18, déterminez si le vecteur $\vec{x}$ est dans l'espace V engendré par les vecteurs $\vec{v}_1, \dots \vec{v}_m$ (donnez la réponse sans calculs si possible et en utilisant la forme échelonnée réduite si nécessaire). Si $\vec{x}$ est dans V déterminez ses coordonnées dans la base $\mathfrak{B} = (\vec{v}_1, \dots \vec{v}_m)$ de V et écrivez $[\vec{x}]_{\mathfrak{B}}$.

1. $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. $\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

3. $\vec{x} = \begin{bmatrix} 31 \\ 37 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 23 \\ 29 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 31 \\ 37 \end{bmatrix}$

4. $\vec{x} = \begin{bmatrix} 23 \\ 29 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 46 \\ 58 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 61 \\ 67 \end{bmatrix}$

5. $\vec{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ 16 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}$

6. $\vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

7. $\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

8. $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

9. $\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

10. $\vec{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

11. $\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

12. $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

13. $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

14. $\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

15. $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$

16. $\vec{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

17. $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

18. $\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Dans les exercices 19 à 24 trouvez la matrice B de l'application linéaire donnée par $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ dans la base $\mathfrak{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. Pour vous entraîner, faites les calculs de trois manières : (a) utilisez la formule $B = S^{-1}AS$, (b) utilisez un diagramme commutatif et (c) construisez B colonne par colonne.

19. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

20. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

21. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

22. $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

23. $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

24. $A = \begin{bmatrix} 13 & -20 \\ 6 & -9 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

Dans les exercices 25 à 30 trouvez la matrice B de l'application linéaire $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ dans la base $\mathfrak{B} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m)$.

25. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

27. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$;

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

28. $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$;

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

29. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 3 & -9 & 6 \end{bmatrix}$;

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

30. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$;

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Soit $\mathfrak{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs orthogonaux de longueurs 1, tels que $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$. Dans les exercices 31 à 36, trouvez la matrice dans la base $\mathfrak{B}$ de l'application linéaire T de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Dans les exercices 33, 34 et 36, interprétez T géométriquement.

31. $T(\vec{x}) = \vec{v}_2 \times \vec{x}$

32. $T(\vec{x}) = \vec{x} \times \vec{v}_3$

33. $T(\vec{x}) = (\vec{v}_2 \cdot \vec{x})\vec{v}_2$

34. $T(\vec{x}) = \vec{x} - 2(\vec{v}_3 \cdot \vec{x})\vec{v}_3$

35. $T(\vec{x}) = \vec{x} - 2(\vec{v}_1 \cdot \vec{x})\vec{v}_2$

36. $T(\vec{x}) = \vec{v}_1 \times \vec{x} + (\vec{v}_1 \cdot \vec{x})\vec{v}_1$

Dans les exercices 37 à 42, trouvez une base $\mathfrak{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice de l'application linéaire T dans la base $\mathfrak{B}$ soit diagonale.

37. La projection orthogonale sur la droite de $\mathbb{R}^2$ engendrée par $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

38. La réflexion par rapport à la droite de $\mathbb{R}^2$ engendrée par $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

39. La réflexion par rapport à la droite de $\mathbb{R}^3$ engendrée par $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

40. La projection orthogonale sur la droite de $\mathbb{R}^3$ engendrée par $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

41. La projection orthogonale sur le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$.

42. La réflexion par rapport au plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$.

43. Considérons le plan d'équation $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ avec pour base les vecteurs $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Si $[\vec{x}]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, trouvez $\vec{x}$.

44. Considérons le plan d'équation $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0$ avec pour base les vecteurs $\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Si $[\vec{x}]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, trouvez $\vec{x}$.

45. Considérons le plan d'équation $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0$. Trouvez une base $\mathfrak{B}$ du plan telle que le vecteur $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ s'écrive $[\vec{x}]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

46. Considérons le plan d'équation $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$. Trouvez une base $\mathfrak{B}$ du plan telle que le vecteur $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ s'écrive $[\vec{x}]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

47. Considérons une application linéaire T de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Supposons que la matrice de T dans la base $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ soit $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$. Trouvez la matrice standard de T en fonction de a, b, c, d.

48. Sur la figure suivante dessinez le vacteur $\vec{x}$ avec $[\vec{x}] = \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$ où $\mathfrak{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ formée des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

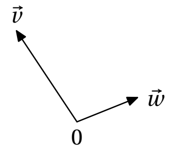


FIGURE 48A

49. Considérons les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dessinés sur la figure suivante. Trouvez les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

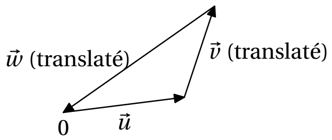


FIGURE 49A

50. Considérons un pavage hexagonal du plan du type de celui que vous pouvez trouver dans une cuisine. Notons $\mathfrak{B}$ la base de $\mathbb{R}^2$ formée des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ du dessin suivant :

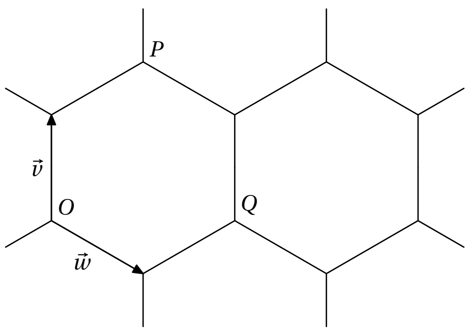


FIGURE 50A

a. Trouver les vecteurs coordonnées $[\vec{OP}]_{\mathfrak{B}}$ et $[\vec{OQ}]_{\mathfrak{B}}$.

Indication : Dessinez le réseau des coordonnées entières des la base $\mathfrak{B}$.

b. Soit R un point tel que $[\vec{OR}]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$. Dessinez R. Est-ce que R est un sommet ou un centre d'un hexagone ?

c. Soit S un point tel que $[\vec{OS}]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$. Dessinez S. Est-ce que S est un sommet ou un centre d'un hexagone ?

51. Prouvez la partie (a) du fait 3.4.2.

52. Si $\mathfrak{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ donnée par

$$T(\vec{x}) = [\vec{x}]_{\mathfrak{B}}$$

est-elle linéaire ? Justifiez votre réponse.

53. Considérons la base $\mathfrak{B}$ de $\mathbb{R}^2$ formée des vecteurs $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$. Soit $\vec{x}$ un vecteur tel que $[\vec{x}]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix}7\\11\end{bmatrix}$. Trouvez $\vec{x}$.

54. Soit $\mathfrak{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$ formée des vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ et $\mathfrak{I}$ une autre base de $\mathbb{R}^n$. Les vecteurs

$$[\vec{v}_1]_{\mathfrak{I}}, [\vec{v}_2]_{\mathfrak{I}}, \dots, [\vec{v}_n]_{\mathfrak{I}}$$

forment-ils une base de $\mathbb{R}^n$?

55. Soit $\mathfrak{B}$ la base de $\mathbb{R}^2$ formée des vecteurs $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ et $\mathfrak{R}$ la base formée des vecteurs $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$. Trouvez une matrice P telle que

$$[\vec{x}]_{\mathfrak{R}} = P\,[\vec{x}]_{\mathfrak{B}}$$

pour tout $\vec{x}$ dans $\mathbb{R}^2$.

56. Trouvez une base $\mathfrak{B}$ de $\mathbb{R}^2$ telle que

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}_{\mathfrak{R}} = \begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}_{\mathfrak{R}} = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}.$$

57. Montrez qu'une matrice 3×3 représentant une réflexion par rapport à un plan est semblable à la matrice $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}$.

58. Considérons une matrice 3×3, A, et un vecteur $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ tels que $A^3\vec{v} = 0$ mais $A^2\vec{v} \neq 0$.

a. Montrez que les vecteurs $\vec{v}, A\vec{v}, A^2\vec{v}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Indication : Il suffit de montrer l'indépendance linéaire : soit $c_1\vec{v} + c_2A\vec{v} + c_3A^2\vec{v} = 0$ une relation entre ces vecteurs, multipliez par A^2 et montrez que $c_1 = 0$.

b. Trouvez la matrice dans la base $\vec{v}, A\vec{v}, A^2\vec{v}$ de l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par $T(\vec{x}) = A\vec{x}$.

59. La matrice $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ est-elle semblable à $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$?

60. La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ est-elle semblable à $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$?

61. Trouvez une base $\mathfrak{B}$ de $\mathbb{R}^2$ telle que la matrice en base $\mathfrak{B}$ de l'application linéaire

$$T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} -5 & -9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{soit } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

62. Trouvez une base $\mathfrak{B}$ de $\mathbb{R}^2$ telle que la matrice en base $\mathfrak{B}$ de l'application linéaire

$$T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{soit } B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

63. La matrice $\begin{bmatrix} p & -q \\ q & p \end{bmatrix}$ est-elle semblable à $\begin{bmatrix} p & q \\ -q & p \end{bmatrix}$ pour tout p et q ?

64. La matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est-elle semblable à $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ pour tout a, b, c, d ?

65. Prouvez les parties (a) et (b) du fait 3.4.6.

66. Considérons une matrice A de la forme $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ et $a \neq 1$. Trouvez la matrice B de l'application lilnéaire de matrice standard A dans la base $\begin{bmatrix} b \\ 1-a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a-1 \\ b \end{bmatrix}$. Interprétez la réponse géométriquement.

67. Si $c \neq 0$, trouvez la matrice de l'application linéaire $T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \vec{x}$ dans la base $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$.

68. Trouvez une matrice 2×2 inversible S telle que

$$S^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} S$$

soit de la forme $\begin{bmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{bmatrix}$. Voir l'exercice 67.

69. Si A est une matrice 2×2 telle que

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{et } A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

montrez que A est semblable à une matrice diagonale D. Trouvez S inversible telle que $S^{-1}AS = D$.

70. Existe-t-il une base $\mathfrak{B}$ de $\mathbb{R}^2$ telle que la matrice dans la base $\mathfrak{B}$ de l'application linéaire

$$T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}$$

soit triangulaire supérieure ?

Indication : Pensez à la première colonne de B.

71. Supposons qu'une matrice A soit similaire à une matrice B, avec $B = S^{-1}AS$.

a. Montrez que si $\vec{x}$ est dans le noyau de B alors $S\vec{x}$ est dans le noyau de A.

b. Montrez que les noyaux de A et de B ont même dimension.

Indication : Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ est une base de $\ker(A)$ alors les vecteurs $S\vec{v}_1, S\vec{v}_2, \ldots, S\vec{v}_n$ sont linéairement indépendants dans le noyau de A. Inversez ensuite les rôles de A et B.

72. Si A et B sont semblables, quelle relation y a-t-il entre $\operatorname{rang}(A)$ et $\operatorname{rang}(B)$? Voir l'exercice 71.

73. Soit L la droite de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur

$$\begin{bmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}8 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Soit T l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par la rotation autour de cette droite et d'angle $\pi/2$ dans le sens du dessin. Déterminez la matrice A telle que $T(\vec{x}) = A\vec{x}$.

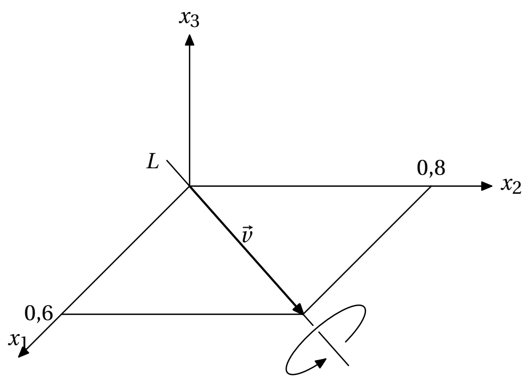


FIGURE 73A

74. Considérons le tétraèdre régulier de la figure ci-dessous dont le centre est à l'origine. Soient $\vec{v}_0, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ les vecteurs positions des quatre sommets :

$$\vec{v}_0 = \vec{OP_0}, \ldots, \vec{v}_3 = \vec{OP_3}.$$

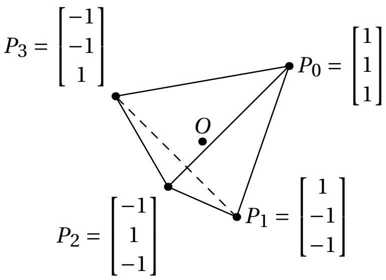


FIGURE 74A

a. Trouvez la somme $\vec{v}_0 + \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$.

b. Trouvez les coordonnées du vecteur $\vec{v}_0$ dans la base $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.

c. Soit T l'application linéaire telle que $T(\vec{v}_0) = \vec{v}_3$, $T(\vec{v}_3) = \vec{v}_1$ et $T(\vec{v}_1) = \vec{v}_0$. Que vaut $T(\vec{v}_2)$? Décrivez T géométriquement. Trouvez la matrice B de T dans la base $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$. Que vaut B^3 ? Expliquez.

75. Trouvez la matrice B de la rotation $T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}$ dans la base $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Interprétez votre réponse géométriquement.

76. Si t est un nombre réel, quelle est la batrice B de l'application linéaire

$$T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \vec{x}$$

dans la base $\begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$? Interprétez votre réponse géométriquement.

77. Considérons une application linéaire $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$. Soit B la matrice de T dans la base $\vec{e}_n, \vec{e}_{n-1}, \ldots, \vec{e}_1$ de $\mathbb{R}^n$. Décrivez les coefficients de B en fonction des coefficients de A.

78. Ce problème est la suite des exercices 1.1/20 et 1.2/37 sur le modèle entrée-sortie de Leontief. Considérons trois industries I_1, I_2 et I_3 produisant seulement un produit chacune et dont les prix à l'unité de ces produits sont, respectivement, $p_1 = 2$, $p_2 = 5$ et $p_3 = 10$ (en \$ U.S.). Étiquetons bien 1, bien 2 et bien 3 les trois produits en question. Soit

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

la matrice listant les demandes inter-industrielles en dollars. Le coefficient a_{ij} dit combien de dollars du bien i sont nécessaires pour produire un dollar du produit j. Alternativement, la demande inter-industrielle peut être mesurée en unités de bien par la matrice

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

où b_{ij} est la quantité de bien i nécessaire à la production d'une unité de bien j. Trouvez la matrice B pour le système économique discuté ici. Écrivez une relation entre les matrices A, B et

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Justifiez votre réponse.

5. Récapitulation : Vrai ou faux

1. L'image d'une matrice 3×4 est un sous espace de $\mathbb{R}^4$.

2. L'espace engendré par les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_n$ est formé de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_n$.

3. Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_n$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^n$ alors ils forment une base de $\mathbb{R}^n$.

4. Il existe une matrice 5×4 dont l'image est $\mathbb{R}^5$.

5. Le noyau d'une matrice inversible ne contient que le vecteur nul.

6. La matrice identité est semblable à toutes les matrices inversibles.

7. Si $2\vec{u}+3\vec{v}+4\vec{w} = 5\vec{u}+6\vec{v}+7\vec{w}$ alors les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont linéairement dépendants.

8. Les vecteurs-colonnes d'une matrice 5×4 sont linéairement dépendants.

9. Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_n$ et $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \dots \vec{w}_m$ sont deux bases d'un sous-espace V de $\mathbb{R}^10$ alors $n = m$.

10. Si A est une matrice 5×6 de rang 4 alors la dimension de son noyau est égale à 1.

11. Si le noyau d'une matrice A ne contient que le vecteur nul alors les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

12. Si l'image d'une matrice $n\times n$ est $\mathbb{R}^n$ alors cette matrice est inversible.

13. Si les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_n$ engendrent $\mathbb{R}^4$ alors $n = 4$.

14. Si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ appartiennent à un sous-espace V de $\mathbb{R}^4$ alors le vecteur $2\vec{u}-3\vec{v}+4\vec{w}$ appartient aussi à V.

15. Si une matrice A est semblable à une matrice B et B est semblable à C alors C est semblable à A.

16. Si un sous-espace V de $\mathbb{R}^n$ ne contient aucun vecteurs standards $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \dots \vec{e}_n$ alors il ne contient que le vecteur nul.

17. Si les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ sont linéairement indépendants alors les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ le sont aussi.

18. Les vecteurs de la forme $\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$, avec a et b des nombres réels, forment un sous-espace de $\mathbb{R}^4$.

19. La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ est semblable à $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

20. Les vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

21. La matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est semblable à $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

22. Les vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ sont linéairement indépendants.

23. Si un sous-espace V de $\mathbb{R}^3$ contient les vecteurs standards $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ alors $V = \mathbb{R}^3$.

24. Si une matrice 2×2, P, représente la projection orthogonale sur une droite de $\mathbb{R}^2$ alors P est semblable à la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

25. Si A et B sont des matrices $n\times n$ et $\vec{v}$ est un vecteur dans le noyau de A et dans le noyau de B alors $\vec{v}$ est aussi dans le noyau de AB.

26. Si deux vecteurs non nuls sont linéairement dépendants alors chacun est un multiple scalaire de l'autre.

27. Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sont trois vecteurs distincts de $\mathbb{R}^3$ alors il existe une application linéaire T de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $T(\vec{v}_1) = \vec{e}_1, T(\vec{v}_2) = \vec{e}_2$ et $T(\vec{v}_3) = \vec{e}_3$.

28. Si les vecteurs$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants alors $\vec{w}$ est une conbinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

29. Si A et B sont des matrices $n\times n$ inversibles alors AB est semblable à BA.

30. Si A est une matrice $n\times n$ inversible alors les noyaux de A et A^{-1} sont égaux.

31. Si V est un sous-espace de dimension 3 de $\mathbb{R}^5$ alors V a une infinité de bases.

32. La matrice I_n est semblable à $2I_n$.

33. Si $AB = 0$ pour deux matrices 2×2, A et B, alors BA doit être nulle.

34. Si A et B sont des matrices $n \times n$ et $\vec{v}$ un vecteurs de l'image de A et de l'image de B alors $\vec{v}$ est aussi dans l'image de $A+B$.

35. Si V et W sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^n$, leur union $V \cup W$ est aussi un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.

36. Si le noyau d'une matrice 5×4, A, ne contient que le vecteur nul et si $A\vec{v} = A\vec{w}$ pour deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^4$ alors $\vec{v} = \vec{w}$.

37. Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_n$ et $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \dots \vec{w}_n$ sont deux bases de $\mathbb{R}^n$ alors il existe une application linéaire T de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ telles que $T(\vec{v}_1) = \vec{w}_1, \dots, T(\vec{v}_n) = \vec{w}_n$.

38. Si la matrice A représente une rotation d'angle $\pi/2$ et la matrice B représente une rotation d'angle $\pi/4$, alors A est semblable à B.

39. $\mathbb{R}^2$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$.

40. Si une matrice $n \times n$, A, est semblable à une matrice B alors $A + 7I_n$ est semblable à $B + 7I_n$.

41. IL existe une matrice $n \times n$, A, tel que $\mathrm{im}(A) = \ker(A)$.

42. Si deux matrices A et B on le même rang alors elles sont semblables.

43. Si A est semblable à B et A est inversible alors B est aussi inversible.

44. Si A est une matrice 10×10 et $A^2 = 0$ alors son rang est inférieur ou égal à cinq.

45. Pour tout sous-espace V de $\mathbb{R}^3$ il existe une matrice 3×3, A, telle que $\mathrm{im}(A) = V$.

46. Il existe une matrice 2×2 non nulle A telle que A soit semblable à $2A$.

47. Si la matrice 2×2, R, représente une réflexion par rapport à une droite de $\mathbb{R}^2$ alors R est semblable à $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

48. Si A est semblable à B alors il existe une unique matrice S telle que $S^{-1}AS = B$.

49. Si le noyau d'une matrice 5×4, A, ne contient que le vecteur nul et si $AB = AC$ pour deux matrices 4×5, B et C, alors $B = C$.

50. Si A est une matrice $n\times n$ telle que $A^2 = A$ alors l'image de A et son noyau n'ont que la vecteur nul en commun.

51. Il existe une matrice 2×2, A, telle que $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$.

52. Si A et B sont des matrices $n \times m$ telles que l'image de A soit incluse dans celle de B alors il existe une matrice $m \times m$, C, telle que $A = BC$.

53. Parmi les matrices 3×3 dont les coefficients sont des zéros ou des uns, la plupart sont inversible.