EXERCICE D'ALGÈBRE À TRAVAILLER LE LUNDI 15 JUIN 2020

Exercice 1 - Exercice 4 du sujet MD18. Dans un espace affine euclidien, soit (ABC) un triangle non aplati dont les longueurs des côtés BC, CA et AB sont notées respectivement a, b et c. À tout point M de l'espace affine engendré par A, B et C, correspond un unique triplet (α, β, γ) de réels vérifiant $\alpha+\beta+\gamma = 1$ et tels que M soit le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients α, β et γ. Les coefficients α, β et γ sont appelés les coordonnées barycentriques normalisées de M dans le repère affine A, B, C.

On note I_A le point d'intersection de la bissectrice intérieure Δ_A de l'angle $\widehat{BAC}$ et de la droite (BC).

(1) Montrer que la parallèle à (AC) passant par B coupe Δ_A en un point A_1.

(2) On note I_AB la distance de I_A à B, exprimer $\frac{I_AB}{I_AC}$ et $\frac{A_1B}{AC}$ en fonction de a, b et c.

(3) En déduire les coordonnées barycentriques normalisées de I_A .

(4) En déduire une propriété remarquable du point I dont les coordonnées barycentriques normalisées dans le repère affine (A, B, C) sont

$$\left(\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c},\right) .$$

Correction

Tous les points et droites considérés appartiennent au plan affine (ABC) donc on peut supposer que l'espace affine euclidien est égal à (ABC).

On rappelle par ailleurs que pour tout point M et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, il y a équivalence entre les assertions "$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$" et "*$M$ est barycentre de $\{(A, 1-x-y), (B, x), (C, y)\}$*", comme on le voit en utilisant la définition des barycentres et la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AM} - x\overrightarrow{AB} - y\overrightarrow{AC} = (1-x-y)\overrightarrow{AM} + x\overrightarrow{BM} + y\overrightarrow{CM} .$$

(1) Δ_A est une bissectrice de $((AB), (AC))$ donc $2 \cdot \widehat{(AC), \Delta_A} = \widehat{(AC), (AB)}$. Le triangle ABC n'est pas aplati donc l'angle orienté de droites $\widehat{(AC), (AB)}$ est non nul. Donc $\widehat{(AC), \Delta_A}$ est non nul. Donc (AC) et Δ_A ne sont pas parallèles. L'intersection de Δ_A et de la droite affine parallèle à (AC) contenant B est donc un singleton.

(2) On étudie les coordonnées barycentriques normalisées de I_A

(a) $I_A \in (BC)$ donc il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que I_A soit le barycentre de

$$\{(A, 0), (B, s), (C, 1-s)\} ;$$

(b) $I_A \in \Delta_A$ (qui est la bissectrice intérieure $A + \mathrm{Vect}\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}\right)$ de $\widehat{BAC}$) donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AI_A} = \lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{c} + \frac{\overrightarrow{AC}}{b}\right)$, de sorte que I_A est barycentre de

$$\{(A, 1-\frac{\lambda}{c}-\frac{\lambda}{b}), (B, \frac{\lambda}{c}), (C, \frac{\lambda}{b})\} .$$

On reconnaît là des coordonnées barycentriques normalisées de I_A, donc

$$0 = 1 - \frac{\lambda}{c} - \frac{\lambda}{b}\,,\ s = \frac{\lambda}{c}\,,\ 1 - s = \frac{\lambda}{b}\,,$$

Donc

$$\lambda = \frac{bc}{b+c}\,,\ s = \frac{b}{b+c}\,,\ 1 - s = \frac{c}{b+c}\,.$$

Donc

$$\begin{cases} \overrightarrow{BI_A} &= 0 \cdot \overrightarrow{BA} + s \cdot \overrightarrow{BB} + (1-s) \cdot \overrightarrow{BC} &= \frac{c}{b+c}\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{CI_A} &= 0 \cdot \overrightarrow{CA} + s \cdot \overrightarrow{CB} + (1-s) \cdot \overrightarrow{CC} &= \frac{b}{b+c}\overrightarrow{CB} \end{cases}$$

Donc

$$\frac{I_A B}{I_A C} = \frac{c}{b}\,.$$

L'étude faite établit par ailleurs que I_A est barycentre de

$$\{(A, 0), (B, \frac{b}{b+c}), (C, \frac{c}{b+c})\}\,.$$

On peut démontrer que $\frac{BA_1}{BA} = 1$ en utilisant la même méthode. Voici une démonstration qui utilise des outils différents.

(a) $\widehat{BA_1A} = \widehat{\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1A}}$ et $\widehat{CAI_A} = \widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI_A}}$, de plus, du fait de l'alignement des points en jeu, il existe $\alpha, \beta \in \{-1, 1\}$ tels que $\overrightarrow{A_1B}$ et $\alpha\overrightarrow{AC}$ (resp.$\overrightarrow{A_1A}$ et $\beta\overrightarrow{AI_A}$) sont (non nuls) colinéaires et de même sens [1], ainsi

$$\widehat{\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1A}} = \widehat{\alpha\overrightarrow{AC}, \beta\overrightarrow{AI_A}}$$

de sorte que, on notant $\widehat{p}$ l'angle plat

$$\widehat{BA_1A} \in \{\widehat{CAI_A}, \widehat{CAI_A} + \widehat{p}\}\,;$$

(b) Δ_A est bissectrice intérieure de $\widehat{BAC}$ et $I_A \in \Delta_A$ donc $\widehat{CAI_A} = \widehat{I_AAB}$, or

$$\widehat{I_AAB} = \widehat{\overrightarrow{AI_A}, \overrightarrow{AB}} = \beta\widehat{\overrightarrow{A_1A}, \overrightarrow{AB}} \in \{\widehat{A_1AB}, \widehat{A_1AB} + \widehat{p}\}\,,$$

donc

$$\widehat{CAI_A} \in \{\widehat{A_1AB}, \widehat{A_1AB} + \widehat{p}\}\,.$$

Ainsi, $\widehat{BA_1A} \in \{\widehat{A_1AB}, \widehat{A_1AB} + \widehat{p}\}$. Le triangle A_1AB est donc isocèle en B, de sorte que

$$\frac{BA_1}{BA} = 1\,.$$

(3) Vu l'étude faite à la question précédente, les coordonnées barycentriques normalisées de I_A sont $0, \frac{b}{b+c}, \frac{c}{b+c}$.

(4) D'après (3), I_A est barycentre de $\{(A, 0), (B, b), (C, c)\}$. De plus A est barycentre de $\{(A, 1), (B, 0), (C, 0)\}$. D'après le théorème du barycentre partiel, le barycentre de $\{(A, a), (I_A, b + c)\}$ est égal au barycentre de $\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$. Par définition, il s'agit de I. Puisque $A, I_A \in \Delta_A$ on déduit que $I \in \Delta_A$:

$$I \text{ appartient à la bissectrice intérieure de } \widehat{BAC}.$$

En effectuant une permutation cyclique des lettres A, B, C, ce raisonnement démontre que I appartient à toutes les bissectrices intérieures du triangle (ABC). Donc I est le point de concours des bissectrices intérieures du triangle ABC (en supposant avoir démontré que celles-ci sont concourantes).

1. on pourrait même établir que $\alpha = \beta = -1$, ce qui n'est pas nécessaire ici.