Préparation à l'agrégation *Année 2019/2020*

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

Algèbre linéaire — formes réduites échelonnées

A. CHAMBERT-LOIR

Soit K un corps (commutatif) et m, n des entiers naturels.

1 *a*) Pour $1 \leqslant i \neq j \leqslant m$ et $a \in K$, on note $E_{i,j}(a)$ la matrice de diagonale 1, dont le coefficient (i, j) est égal à a et dont tous les autres coefficients sont nuls.
Démontrer la formule, pour $a, b \in K$:

$$E_{i,j}(a)E_{i,j}(b) = E_{i,j}(a+b).$$

En déduire que $E_{i,j}(a)$ est inversible, d'inverse $E_{i,j}(-a)$.

b) Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_m$, on note P_σ la matrice dont le coefficient (i, j) est égal à 1 si $i = \sigma(j)$, et 0 sinon.
Démontrer que l'on a $P_{\sigma\tau} = P_\sigma P_\tau$ et $P_{\mathrm{id}} = I_m$. En déduire que l'ensemble W des matrices P_σ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_m(K)$.

c) Pour $i \in \{1, \dots, m\}$ et $a \in K$, on note $D_i(a) \in \mathrm{Mat}_m(K)$ la matrice diagonale dont tous les coefficients sont égaux à 1, sauf le coefficient (i, i) qui est égal à a.
Démontrer que l'on a

$$D_i(a)D_i(b) = D_i(ab)$$

pour $a, b \in K$ En déduire que les matrices $D_i(a)$, pour $a \in K^\times$, sont inversibles.

2 On note $\mathrm{GE}_m(K)$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_m(K)$ engendré par les « matrices élémentaires » $E_{i,j}(a)$ (pour $a \in K$ et $1 \leqslant i \neq j \leqslant m$), P_σ (pour $\sigma \in \mathfrak{S}_m$) et $D_i(a)$ (pour $1 \leqslant i \leqslant m$ et $a \in K^\times$).
Soit $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$.

a) Démontrer que $E_{i,j}(a)A$ est obtenue en remplaçant dans la matrice A la ligne L_i par la combinaison $L_i + aL_j$.

b) Démontrer que la ligne d'indice i de A est la ligne d'indice $\sigma(i)$ de $P_\sigma A$.

c) Démontrer que $D_i(a)A$ est obtenue en remplaçant dans la matrice A la ligne L_i par son multiple aL_i.

d) On dit que deux matrices A et A' sont *équivalentes par lignes* s'il existe une matrice $E \in \mathrm{GE}_m(K)$ telle que $A' = EA$. Observer qu'alors les systèmes $AX = 0$ et $A'X = 0$ (d'inconnue $X \in K^n$) sont équivalents.
Plus généralement, on écrit $A = [A_1 Y_1]$ et $A' = [A'_1 Y'_1]$, avec $A_1, A'_1 \in \mathrm{Mat}_{m,n-1}(K)$ et $Y_1, Y'_1 \in K^m$. Observer que les systèmes $A_1X_1 = Y_1$ et $A'_1X_1 = Y'_1$, d'inconnue $X_1 \in K^{n-1}$, sont équivalents.

3 On dit qu'une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ est sous forme *réduite échelonnée par lignes* s'il existe un entier naturel $r \leqslant m$ et une suite $(j_1, \dots, j_r)$ d'entiers tels que $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leqslant n$ de sorte que pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et tout $j \in \{1, \dots, n\}$, les conditions suivantes soient vérifiées :

(1) Si $1 \leqslant i \leqslant r$, on a $a_{i,j_i} = 1$;
(2) Si $1 \leqslant i \leqslant r$ et $j < j_i$, alors $a_{i,j} = 0$;
(3) Si $1 \leqslant i \leqslant r$, alors $a_{i,j_k} = 0$ si $i < k \leqslant r$;
(4) Si $r < i \leqslant m$, alors $a_{i,j} = 0$.

On suppose que A est réduite échelonnée par lignes. Les entiers j_i sont appelés *indices de pivot;* l'entier r est appelé *rang des lignes de* A.

a) Vérifier que $0 \leqslant r \leqslant \min(m, n)$.

b) Soit $Y \in K^m$. Suivant Y, décrire l'ensemble des solutions du système linéaire $AX = Y$, d'inconnue $X \in K^n$.

c) Soit $p \leqslant n$. Démontrer que la matrice $A' \in \mathrm{Mat}_{m,p}(K)$ constituée des p premières colonnes de A est réduite échelonnée par lignes.

d) On écrit $A = [A'Y]$, où $A' \in \mathrm{Mat}_{m,n-1}(K)$ et $Y \in K^m$. Décrire l'ensemble des solutions du système linéaire $A'X = Y$, d'inconnue $X \in K^{n-1}$.

4 *a*) Décrire un algorithme qui, pour toute matrice $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$, fournit une matrice $A' \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$, équivalente par lignes à A et réduite échelonnée par lignes. Estimer le nombre d'opérations qu'il doit effectuer.

b) Soit A et A' des matrices réduites échelonnées par lignes qui sont équivalentes par lignes. Démontrer que $A = A'$. (Prouver par récurrence sur p que les matrices A_p et A'_p formées des p colonnes de A et A' sont égales ; pour cela, comparer les solutions des systèmes linéaires $A_pX = Y$ et $A'_pX = Y'$, où Y et Y' sont les $(p+1)$-èmes colonnes de A et A'.)

c) En déduire qu'une matrice $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ est équivalente par lignes à exactement une matrice réduite échelonnée par lignes. On appellera rang des lignes de A, et indices de pivot de A, ceux de cette matrice réduite échelonnée par lignes.

d) En déduire que dans toute orbite du groupe $\mathrm{GE}_m(K)$ agissant par multiplication à gauche dans $\mathrm{Mat}_{m,n}(K)$, il existe une matrice réduite échelonnée par lignes, et une seule.

5 Soit $f\colon K^n \to K^m$ une application linéaire de matrice $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$. Soit r le rang des lignes de A et $j_1, \ldots, j_r$ ses indices de pivot.

a) Démontrer que f est injective si et seulement si $r = n$.

b) Démontrer que f est surjective si et seulement si $r = m$.

c) En déduire que f est bijective si et seulement si $r = m = n$.

d) En déduire que $\mathrm{GL}_m(K) = \mathrm{GE}_m(K)$.

e) En déduire que dans toute orbite du groupe $\mathrm{GL}_m(K)$ agissant par multiplication à gauche dans $\mathrm{Mat}_{m,n}(K)$, il existe une matrice réduite échelonnée par lignes et une seule.

6 Soit $Y_1, \ldots, Y_n$ des vecteurs de K^m, soit A la matrice $[Y_1 \ldots Y_n] \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ et soit V le sous-espace engendré par les Y_j. Soit r le rang des lignes de A et $j_1, \ldots, j_r$ les indices de pivot de A.

a) Démontrer que $Y_{j_1}, \ldots, Y_{j_r}$ est une base de V.

b) Soit Y le vecteur colonne d'indéterminées $(y_1, \ldots, y_m)$. En calculant une matrice $[A'Y']$ équivalentes par lignes à $[AY]$ telle que A' soit réduite échelonnée par lignes, décrire une famille d'équations linéaires définissant V.

7 Soit V un sous-espace vectoriel de K^m.

a) Soit $(Y_1, \ldots, Y_p)$ une famille libre dans V ; démontrer que $p \leqslant m$.

b) Démontrer qu'il existe une famille libre $(Y_1, \dots, Y_p)$ dans V qui engendre V.

c) Démontrer que V possède une base, et que deux bases de V ont même cardinal.

8 *a*) Répondre aux questions de la question 2 lorsqu'on considère les produits AE, pour $E \in \mathrm{GE}_n(K)$ des différents types.

b) Définir une notion de *matrice réduite échelonnée par colonnes* et de *matrices équivalentes par colonnes.* Démontrer un analogue de la question 4. Définir le *rang des colonnes* d'une matrice.

c) Soit $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$, de forme réduite échelonnée par colonnes $A' = [Y'_1 \dots Y'_n]$, notons s le rang des colonnes de A. Démontrer que le sous-espace V de K^m engendré par les Y_i coïncide avec le sous-espace V' de K^m engendré par $Y'_1, \dots, Y'_s$.

d) En déduire que le rang des colonnes et le rang des lignes d'une matrice $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ coïncident.

e) Notons $i_1, \dots, i_s$ les indices de pivot de la matrice A'. Soit $j \in \{0, \dots, s\}$ et soit $i \in \{0, \dots, m\}$ tels que $i_j \leqslant i < i_{j+1}$. On pose $W_i = \{0\}^i \times K^{m-i}$. Démontrer que $W_i \cap V$ est engendré par $Y'_1, \dots, Y'_j$ et que $\dim(W_i \cap V) = j$.

Le procédé de mise d'une matrice sous forme échelonnée réduite (par lignes ou par colonnes) s'appelle aussi réduction de Gauss–Jordan. Il est hélas peu enseigné en France, a fortiori peu utilisé, au profit de la réduction de Gauss où l'on ne prend pas soin d'annuler les coefficients qui se trouvent au-dessus d'un pivot. En pratique, le gain est d'avoir à faire moitié moins d'opérations, au prix de se contenter d'un système triangulaire. En acceptant de ne pas fournir un système complètement résolu, on perd également la force d'un outil théorique admirable, comme en témoigne la question 4 d).