Master Mathématiques fondamentales, 2^e année, 2^e semestre
Année 2022/2023

COHOMOLOGIE DES FAISCEAUX QUASI-COHÉRENTS SUR LES SCHÉMAS

Antoine Chambert-Loir

Examen final — 23 février 2023 (3 h)

Les exercices sont indépendants. Vous pouvez les résoudre dans un ordre arbitraire.

EXERCICE 1

Soit $\boldsymbol{C}$ une catégorie abélienne, soit $A = (A^p, d_A^p)_{p\in\mathbf{Z}}$ et $B = (B^p, d_B^p)_{p\in\mathbf{Z}}$ des complexes dans $\boldsymbol{C}$.

1 Soit $\varphi = (\varphi^p \colon A^p \to B^p)_{p\in\mathbf{Z}}$ une famille de morphismes dans $\boldsymbol{C}$. Pour tout $p \in \mathbf{Z}$, on pose $C = C(\varphi)^p = A^p \oplus B^{p-1}$ et on définit $d_C^p \colon C^p \to C^{p+1}$ par

$$d_C^p(a,b) = (d_A^p(a), \varphi^p(a) - d_B^{p-1}(b)),$$

pour $a \in A^p$ et $b \in B^{p-1}$.
Démontrer que $(C^p, d_C^p)_{p\in\mathbf{Z}}$ est un complexe si et seulement si φ définit un morphisme de complexes de A dans B.

2 On suppose désormais que φ est un morphisme de complexes. Construire une suite exacte de complexes

$$0 \to B(-1) \to C \to A.$$

Démontrer que le complexe C est exact si et seulement si φ est un homologisme (c'est-à-dire si, pour tout p, le morphisme φ^p induit un isomorphisme entre objets de cohomologie $H^p(A) \to H^p(B)$).

EXERCICE 2

Soit X un schéma noethérien. On appelle dimension cohomologique de X le plus petit entier d tel que $H^p(X, \mathscr{F}) = 0$ pour tout faisceau quasi-cohérent $\mathscr{F}$ sur X et tout entier $p > d$.

1 Justifier l'existence d'un tel entier d. Que signifie pour X l'égalité $d = 0$?

2 Pour tout ouvert U de X, on note $\mathscr{N}(U)$ le nilradical de $\mathscr{O}_X(U)$. Démontrer que $\mathscr{N}$ est un faisceau quasi-cohérent d'idéaux. On note X_{red} le sous-schéma fermé $V(\mathscr{N})$ qu'il définit.

3 Démontrer qu'il existe un entier k tel que $\mathscr{N}^k = 0$.

4 Démontrer que X et X_{red} ont même dimension cohomologique.

5 Démontrer que X_{red} est affine si et seulement si X est affine.

6 Démontrer que la dimension cohomologique de X est la borne supérieure des dimensions cohomologiques de ses composantes irréductibles (considérées comme sous-schémas réduits).

EXERCICE 3

Soit A un anneau noethérien, soit n un entier $\geqslant 0$, soit S l'anneau gradué $A[T_0, \dots, T_n]$ et soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur $\mathbf{P}^n_A = \mathrm{Proj}(S)$.

1 Expliquer la structure de S-module gradué sur $\bigoplus_{d \in \mathbf{Z}} \Gamma(\mathbf{P}^n_A, \mathscr{F}(d))$.

2 Donner un exemple où ce module gradué n'est pas de type fini.

3 Pour tout entier $k \in \mathbf{Z}$, on pose

$$\Gamma_{\geqslant k}(\mathscr{F}) = \bigoplus_{d \geqslant k} \Gamma(\mathbf{P}^n_A, \mathscr{F}(d)).$$

Expliquer sa structure de S-module gradué.

4 On suppose dans cette question que $\mathscr{F} = \mathscr{O}(e)$. Déterminer $\Gamma_{\geqslant k}(\mathscr{O}(e))$ pour tout entier k. Prouver que c'est un S-module de type fini.

5 Expliquer pourquoi il existe une suite finie $(d_1, \dots, d_m)$ d'entiers relatifs et un épimorphisme

$$\varphi \colon \bigoplus_{i=1}^{m} \mathscr{O}_{\mathbf{P}^n_A}(d_i) \to \mathscr{F}.$$

6 Démontrer que pour tout entier k assez grand, le morphisme φ induit un homomorphisme *surjectif* de S-modules, $\bigoplus_{i=1}^{m} \Gamma_{\geqslant k}(\mathscr{O}(d_i)) \to \Gamma_{\geqslant k}(\mathscr{F})$.

7 En déduire que pour tout entier k, $\Gamma_{\geqslant k}(\mathscr{F})$ est un S-module de type fini.

EXERCICE 4

Soit K un corps, on pose $S = K[T_0, \dots, T_n]$, on note $\mathbf{P}^n = \mathrm{Proj}(S)$, et on considère un faisceau cohérent $\mathscr{F}$ sur $\mathbf{P}^n_K$. Pour $m \in \mathbf{Z}$, on dit que $\mathscr{F}$ est m-régulier si $H^p(\mathbf{P}^n_K, \mathscr{F}(m-p)) = 0$ pour tout entier $p > 0$. La régularité de $\mathscr{F}$ est la borne inférieure des entiers m tel qu'il soit m-régulier.

1 Calculer la régularité de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n_K}$.

2 Soit X un sous-schéma fermé de $\mathbf{P}^n_K$. Relier la régularité du faisceau d'idéaux $\mathscr{I}_X$ et du faisceau $\mathscr{O}_X$ (considéré comme faisceau cohérent sur $\mathbf{P}^n_K$).

3 Dans la suite de cet exercice, on suppose que X est de dimension zéro. Démontrer que X est un schéma affine. Rappeler pourquoi $H^0(X, \mathscr{O}_X)$ est une K-algèbre de dimension finie ; on notera d sa dimension.

4 On suppose dans cette question que $n = 1$. Démontrer qu'il existe un isomorphisme $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^1_K}(-d) \simeq \mathscr{I}_X$. En déduire la régularité de $\mathscr{I}_X$.

5 On suppose désormais que $n \geqslant 2$. Démontrer que $\mathscr{I}_X$ est m-régulier si et seulement si l'homomorphisme $\Gamma(\mathbf{P}^n_K, \mathscr{O}_{\mathbf{P}^n_K}(m-1)) \to \Gamma(X, \mathscr{O}_X(m-1))$ est surjectif. Si $\mathscr{I}_X$ est m-régulier, en déduire que que $d \leqslant \binom{m-1+n}{n}$.

6 On suppose que $n = 2$ et que X est réduit, formé de trois points a, b, c de corps résiduel K. Déterminer la régularité de $\mathscr{I}_X$ suivant que les trois points a, b, c sont alignés ou non.