Master Mathématiques fondamentales, 2e année, 2e semestre
Année 2022/2023

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Catégories abéliennes, cohomologie des faisceaux [(*)]

ANTOINE CHAMBERT-LOIR

EXERCICE 1

Soit $f\colon \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ et $g\colon \mathrm{B} \to \mathrm{C}$ des morphismes dans une catégorie abélienne. Construire une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Ker}(g \circ f) \to \mathrm{Ker}(g) \to \mathrm{Coker}(f) \to \mathrm{Coker}(g \circ f) \to \mathrm{Coker}(g) \to 0.$$

EXERCICE 2

Soit X un espace topologique et soit $\mathscr{F}$ un faisceau en groupes abéliens sur X. Soit U un ouvert de X et soit $s \in \mathscr{F}(\mathrm{U})$. On appelle support de s l'ensemble $\mathrm{supp}(s)$ des points $x \in \mathrm{U}$ tels que $s_x \neq 0$.

1 Démontrer que $\mathrm{supp}(s)$ est une partie fermée de U.

2 Démontrer que $\mathrm{U} - \mathrm{supp}(s)$ est le plus grand ouvert V de U tel que $s|_{\mathrm{V}} = 0$.

EXERCICE 3

1 Démontrer qu'un produit d'objets injectifs d'une catégorie abélienne est un objet injectif.

2 On considère un couple de foncteurs $\mathrm{F}\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ et $\mathrm{G}\colon \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{C}$ entre catégories abéliennes. On suppose que G est adjoint à gauche de F.

a) Démontrer que G est exact si et seulement si G préserve les monomorphismes.

b) Si G est exact, alors F applique objet injectif sur objet injectif.

c) Si G est exact et fidèle et si $\boldsymbol{C}$ possède assez d'objets injectifs, alors $\boldsymbol{D}$ possède assez d'objets injectifs.

3 Soit $f\colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ une application continue entre espaces topologiques et soit $\mathscr{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur Y. Si $\mathscr{F}$ est injectif, démontrer que $f^{-1}\mathscr{F}$ est injectif.

EXERCICE 4

1 Démontrer qu'un facteur direct d'un faisceau flasque est flasque.

2 Démontrer qu'un produit de faisceaux flasques est flasque.

3 Soit $f\colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ une application continue entre espaces topologiques et soit $\mathscr{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur X. Si $\mathscr{F}$ est flasque, alors $f_*\mathscr{F}$ est flasque.

$*$. L'énoncé de l'exercice 3 comportaient deux erreurs, corrigées le 22 janvier 2023

EXERCICE 5

Soit X un espace topologique, soit U un ouvert de X, soit A le fermé complémentaire, notons $i\colon \mathrm{A} \to \mathrm{X}$ et $j\colon \mathrm{U} \to \mathrm{X}$ les injections canoniques.

Soit $\mathscr{F}$ un faisceau en groupes abéliens sur U ; on définit un préfaisceau $j_!^{\mathrm{p}}\mathscr{F}$ sur X en posant $j_!^{\mathrm{p}}\mathscr{F}(\mathrm{W}) = \mathscr{F}(\mathrm{W})$ si $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{U}$, et $j_!^{\mathrm{p}}\mathscr{F}(\mathrm{W}) = 0$ sinon, les applications de restriction étant déduites de celles de $\mathscr{F}$ (ou nulles). On définit $j_!\mathscr{F}$ comme le faisceau associé à $j_!^{\mathrm{p}}\mathscr{F}$.

1 Démontrer que la fibre de $j_!\mathscr{F}$ en un point $x \in \mathrm{X} - \mathrm{U}$ est nulle.

2 Soit $u^{\mathrm{p}}\colon j_!\mathscr{F} \to j_*\mathscr{F}$ l'unique morphisme de préfaisceaux tel que $u^{\mathrm{p}}_{\mathrm{W}}$ est l'identité pour tout ouvert W contenu dans U. Démontrer qu'il est injectif. Soit $u\colon j_!\mathscr{F} \to j_*\mathscr{F}$ l'homomorphisme de faisceaux qui lui est associé. Montrer que pour tout ouvert W de X, u_{W} est injectif et son image est l'ensemble des sections $s \in \mathscr{F}(\mathrm{U} \cap \mathrm{W})$ dont le support est fermé dans u.

3 Soit $v\colon j^{-1} j_!\mathscr{F} \to \mathscr{F}$ le morphisme de faisceaux qui correspond à u par adjonction. Démontrer que v est un isomorphisme.

4 Prolonger la construction $j_!$ en un foncteur. Démontrer qu'il est exact, pleinement fidèle et que son image essentielle est formée des faisceaux en groupes abéliens sur X dont les fibres en tout point de $\mathrm{X} - \mathrm{U}$ est nulle.

5 Soit $\mathscr{G}$ un faisceau en groupes abéliens sur X. Construire un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{X}}(j_!\mathscr{F}, \mathscr{G}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Y}}(\mathscr{F}, j^{-1}\mathscr{G}).$$

Autrement dit, $j_!$ est adjoint à gauche du foncteur j^{-1}, lequel est adjoint à gauche du foncteur j_*.

6 Soit $\mathscr{G}$ un faisceau sur X. Déduire des adjonctions $(j_!, j^{-1})$ et (i^{-1}, i_*) un diagramme

$$0 \to j_! j^{-1}\mathscr{G} \to \mathscr{G} \to i_* i^{-1}\mathscr{G} \to 0.$$

Prouver que c'est une suite exacte.

EXERCICE 6

Soit $\mathrm{X} = \mathbf{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[\mathrm{T}])$ la droite affine sur un corps k. Soit U un ouvert non vide de X et soit F le fermé complémentaire, on note $j\colon \mathrm{U} \to \mathrm{X}$ et $i\colon \mathrm{F} \to \mathrm{X}$ les injections canoniques. On note aussi $m = \mathrm{Card}(\mathrm{F})$. On s'intéresse à la cohomologie du faisceau $j_!(\mathbf{Z}_{\mathrm{U}})$ sur X, prolongement par zéro du faisceau constant $\mathbf{Z}_{\mathrm{U}}$ sur U, ainsi qu'à celle du faisceau $i_*(\mathbf{Z}_{\mathrm{F}})$.

1 Que valent-elle lorsque $\mathrm{U} = \mathrm{X}$?

On suppose maintenant que $\mathrm{U} \neq \mathrm{X}$.

2 Que valent les groupes $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, j_!(\mathbf{Z}_{\mathrm{U}}))$? et les groupes $\mathrm{H}^n(\mathrm{X}, j_!(\mathbf{Z}_{\mathrm{U}}))$ pour $n > 1$?

3 Démontrer que $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, i_*(\mathbf{Z}_{\mathrm{F}})) \simeq \mathrm{H}^0(\mathrm{F}, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}^m$. Démontrer aussi que $\mathrm{H}^n(\mathrm{X}, i_*(\mathbf{Z}_{\mathrm{F}})) = 0$ pour $n > 0$.

4 En considérant la suite exacte courte reliant les faisceaux $j_!(\mathbf{Z}_{\mathrm{U}})$, $\mathbf{Z}_{\mathrm{X}}$ et $i_*(\mathbf{Z}_{\mathrm{F}})$, et la suite exacte longue de cohomologie associée, calculer les groupes $\mathrm{H}^n(\mathrm{X}, j_!(\mathbf{Z}_{\mathrm{U}}))$ pour $n \in \mathbf{N}$.