Université de Paris *Master Mathématiques fondamentales, 2e année, 2e semestre*
Année 2022/2023

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Cohomologie des faisceaux cohérents — schémas affines et exemples(*)

ANTOINE CHAMBERT-LOIR

EXERCICE 1

Soit A un anneau noethérien et soit M un A-module; on note $\widetilde{M}$ le faisceau quasi-cohérent sur $\operatorname{Spec}(A)$ qui est associé à M.

1 Soit a un élément de A. Construire un homomorphisme de A-modules

$$\varinjlim_n \operatorname{Hom}_A((a^n), M) \to M_a$$

qui applique la classe d'un homomorphisme $f\colon (a^n) \to M$ sur $f(a^n)/a^n$. Démontrer que c'est un isomorphisme.

2 Soit J un idéal de A et soit U l'ouvert $\operatorname{Spec}(A) - V(J)$ de $\operatorname{Spec}(A)$. généraliser la question précédente en construisant un homomorphisme de A-modules (Deligne) :

$$\varinjlim_n \operatorname{Hom}_A(J^n, M) \to \Gamma(U, \widetilde{M}).$$

Démontrer que c'est un isomorphisme.

3 On suppose que M est un A-module injectif. Prouver que le faisceau quasi-cohérent $\widetilde{M}$ sur $\operatorname{Spec}(A)$ est flasque.

EXERCICE 2

Soit K un corps et soit A le quotient de l'anneau $K[X, Y, T_1, T_2, \dots]$ des polynômes par l'idéal engendré par la suite $(X^n T_n)_n$. On note x, y, t_n les images de X, Y, T_n dans A.

1 Soit $n \geqslant 1$. Démontrer qu'il n'existe pas d'homomorphisme $f\colon (x^n) \to A$ tel que $f(x^n) = x^{n-1}y$.

2 En déduire que l'homomorphisme de l'exercice 1, question 1, n'est pas surjectif.

3 Soit M un A-module injectif contenant A. Démontrer que le faisceau quasi-cohérent $\widetilde{M}$ n'est pas flasque.

EXERCICE 3

Soit K un corps. Soit X le schéma réunion de deux droites affines $\mathbf{A}^1_K = \operatorname{Spec}(K[T])$ le long de l'identité sur l'ouvert $U = D(T)$ complémentaire de l'origine o. (« Droite affine dont l'origine est dédoublée »).

(*) L'énoncé de l'exercice 2 comportait une erreur, corrigée le 2 février 2023 ; celui de l'exercice 6 une autre, corrigée le 20 février 2023.

1 Construire un morphisme de X vers $\mathbf{A}^1_\mathrm{K}$ qui est un isomorphisme au-dessus de $\mathrm{D(T)}$ tel que l'image réciproque de o soit la réunion de deux points de corps résiduels K.

2 Démontrer que X n'est pas séparé.

3 Calculer les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathscr{O}_\mathrm{X})$, pour $p \geqslant 0$.

EXERCICE 4

1 Soit K un corps. Soit X le complémentaire de l'origine dans le plan $\mathbf{A}^2_\mathrm{K} = \mathrm{Spec}(\mathrm{K}[\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2])$. En écrivant X comme la réunion des deux ouverts $\mathrm{D}(\mathrm{T}_1)$ et $\mathrm{D}(\mathrm{T}_2)$ de $\mathbf{A}^2_\mathrm{K}$, calculer les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathscr{O}_\mathrm{X})$.

2 En déduire que X n'est pas un schéma affine.

3 Variante : complémentaire de $\mathrm{V}(\langle 2, \mathrm{T}\rangle)$ dans $\mathbf{A}^1_\mathbf{Z} = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[\mathrm{T}])$.

EXERCICE 5

Soit K un corps. Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$, soit $f \in \mathrm{K}[\mathrm{T}_0, \dots, \mathrm{T}_n]$ un polynôme homogène non nul et soit e son degré ; on note X le sous-schéma $\mathrm{V}_+(f)$ de $\mathbf{P}^n_\mathrm{K}$ et $i\colon \mathrm{X} \to \mathbf{P}^n_\mathrm{K}$ l'immersion canonique.

1 Construire une suite exacte

$$0 \to \mathscr{O}_{\mathbf{P}^n_\mathrm{K}}(-e) \to \mathscr{O}_{\mathbf{P}^n_\mathrm{K}} \to i_* \mathscr{O}_\mathrm{X} \to 0.$$

2 Calculer les dimensions des groupes de cohomologie $\mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathscr{O}_\mathrm{X}(d))$, pour $p \in \mathbf{N}$ et $d \in \mathbf{Z}$.

Plus généralement, on considère une intersection complète de codimension c dans $\mathbf{P}^n_\mathrm{K}$, c'est-à-dire un sous-schéma X de dimension $n - c$ défini par l'annulation de polynômes homogènes $f_1, \dots, f_c$ et de degrés $e_1, \dots, e_c$. On suppose que $c < n$.

3 Prouver que pour tout $d \in \mathbf{Z}$, l'application de restriction $\mathrm{H}^0(\mathbf{P}^n_\mathrm{K}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}^n_\mathrm{K}}(d)) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathscr{O}_\mathrm{X}(d))$ est surjective.

4 Démontrer que X est connexe.

5 Démontrer que $\mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathscr{O}_\mathrm{X}(d)) = 0$ pour tout entier p tel que $0 < p < n - c$ et tout entier $d \in \mathbf{Z}$.

EXERCICE 6

Soit K un corps et soit $\varphi\colon \mathbf{P}^1_\mathrm{K} \to \mathbf{P}^3_\mathrm{K}$ le morphisme de K-schémas donné par $\varphi([u : v]) = [u^3 : u^2 v : u v^2 : v^3]$. Soit C son image (« cubique gauche »).

1 Soit I l'idéal $\langle \mathrm{T}_0\mathrm{T}_3 - \mathrm{T}_1\mathrm{T}_2, \mathrm{T}_1^2 - \mathrm{T}_0\mathrm{T}_2, \mathrm{T}_2^2 - \mathrm{T}_1\mathrm{T}_3 \rangle$ de $\mathrm{K}[\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \mathrm{T}_3]$. Démontrer que $\mathrm{C} = \mathrm{V}_+(\mathrm{I})$.

2 Construire une résolution de $\mathscr{I}_\mathrm{C}$ de la forme

$$0 \to \mathscr{O}_{\mathbf{P}^3_\mathrm{K}}(-3)^2 \to \mathscr{O}_{\mathbf{P}^3_\mathrm{K}}(-2)^3 \to \mathscr{I}_\mathrm{C} \to 0.$$

3 Calculer les polynômes de Hilbert de $\mathscr{I}_\mathrm{C}$ et $\mathscr{O}_\mathrm{C}$.

4 Plus précisément, calculer les dimensions des groupes de cohomologie $\mathrm{H}^p(\mathbf{P}^3_\mathrm{K}, \mathscr{I}_\mathrm{C}(d))$ et $\mathrm{H}^p(\mathrm{C}, \mathscr{O}_\mathrm{C}(d))$ pour $p \geqslant 0$ et $d \in \mathbf{Z}$.