



GÉOMÉTRIE ALGÈBRIQUE

Cohomologie des faisceaux cohérents — extensions, cohomologie, etc.^(*)

ANTOINE CHAMBERT-LOIR

EXERCICE 1

Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne. Si A et B sont des objets de \mathcal{C} , on appelle *extension* de A par B un triplet (E, i, p) où $i: B \rightarrow E$ et $p: E \rightarrow A$ sont des morphismes de \mathcal{C} tels que la suite $0 \rightarrow B \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} A \rightarrow 0$ soit exacte.

Un *morphisme* d'extensions de (E, i, p) dans $(E', i': B' \rightarrow E', p': E' \rightarrow A')$ est un diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{p} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow v & & \downarrow f & & \downarrow u & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{i} & E' & \xrightarrow{p} & A' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

- 1 Vérifier que f détermine u et v . Démontrer aussi que si u et v sont des isomorphismes, alors f est un isomorphisme.
- 2 Démontrer que i admet une rétraction (un inverse à gauche, un morphisme $r: E \rightarrow B$ tel que $r \circ i = \text{id}_B$) si et seulement si p possède une section (un inverse à droite, un morphisme $s: A \rightarrow E$ tel que $p \circ s = \text{id}_A$). On dit alors que E est *scindée*.
- 3 Soit $u: A \rightarrow A'$ et soit E' une extension de A' par B' ; construire une extension u^*E' de A par B' et un morphisme de u^*E' vers E' induisant u et $\text{id}_{B'}$.
- 4 Soit $v: B \rightarrow B'$ et soit E une extension de A par B ; construire une extension v_*E de A par B' et un morphisme $E \rightarrow v_*E$ induisant id_A et v .
- 5 Soit E et E' des extensions de A par B ; on note δ le morphisme diagonal de A dans $A \times A$ et σ le morphisme somme de $B \times B$ dans B ; on considère $E \oplus E'$ comme une extension de $A \times A$ par $B \times B$ et l'on pose $E + E' = \sigma_* \delta^*(E \oplus E')$. Démontrer que cette opération munit l'ensemble des classes d'isomorphisme d'extensions de A par B d'une structure de groupe abélien, d'élément neutre la classe des extensions scindées.

^(*)Il manquait une hypothèse dans l'exercice 3, question 2, ainsi que dans l'exercice 5, question 5 (j'ai ajouté deux questions intermédiaires) — 14 février 2023

EXERCICE 2

Soit (X, \mathcal{O}_X) un espace annelé.

- 1 Soit \mathcal{F}, \mathcal{G} des \mathcal{O}_X -modules et soit \mathcal{E} une extension de \mathcal{F} par \mathcal{G} .
Si \mathcal{F} et \mathcal{G} sont (quasi-)cohérents, démontrer qu'il en est de même de \mathcal{E} .
Si \mathcal{E} est une extension de \mathcal{O}_X par un \mathcal{O}_X -module \mathcal{F} , on note $\delta(\mathcal{E}) \in H^1(X, \mathcal{F})$ l'image de $1 \in H^0(X, \mathcal{O}_X)$ par le cobord de la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$ qui définit l'extension \mathcal{E} .
- 2 Démontrer que δ est un homomorphisme de groupes du groupe $\text{Ext}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$ des classes d'extensions de \mathcal{O}_X par \mathcal{F} dans $H^1(X, \mathcal{F})$.
- 3 Démontrer que \mathcal{E} est scindée si et seulement si $\delta(\mathcal{E}) = 0$.
- 4 Démontrer que δ est un isomorphisme.

EXERCICE 3

Soit X un schéma.

- 1 On suppose que X est affine. Démontrer que tout \mathcal{O}_X -module localement libre est un objet projectif de la catégorie des \mathcal{O}_X -modules quasi-cohérents.
- 2 On suppose que X est quasi-compact et que \mathcal{O}_X est un objet projectif de la catégorie des \mathcal{O}_X -modules quasi-cohérents. Démontrer que X est affine. (Démontrer que pour tout \mathcal{O}_X -module quasi-cohérent \mathcal{F} , on a $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$.)
- 3 Soit n un entier ≥ 1 et soit \mathcal{F} un faisceau cohérent non nul sur \mathbf{P}_K^n , où K est un corps. Démontrer successivement qu'il existe :
 - a) Un entier relatif a et un homomorphisme non nul $u: \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(a) \rightarrow \mathcal{F}$;
 - b) Des entiers relatifs b_1, \dots, b_m strictement inférieurs à a et un homomorphisme surjectif $v: \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(b_i) \rightarrow \mathcal{F}$.En déduire que v n'admet pas de section. En particulier, \mathcal{F} n'est pas un objet projectif de la catégorie des faisceaux cohérents sur \mathbf{P}_K^n .^(†)
- 4 Généraliser la question précédente en remplaçant \mathbf{P}_K^n par un sous-schéma intègre de \mathbf{P}_K^n de dimension strictement positive.

EXERCICE 4

Soit A un anneau noethérien, soit P un idéal premier de A et soit K le corps des fractions de l'anneau intègre A/P , considéré comme A -algèbre.

Si $u: M \rightarrow N$ est morphismes de A -modules et B une A -algèbre, on note $u \otimes B: M \otimes_A B \rightarrow N \otimes_A B$ le morphisme de B -modules déduit de u par produit tensoriel par B .

^(†)Je tiens cet argument de l'utilisateur *Angel of the bottomless pit* du site MathOverflow, <https://mathoverflow.net/q/289632>.

- 1 Soit $u: M \rightarrow N$ un homomorphisme de A -modules de type fini. On suppose que $u \otimes K$ est surjectif. Démontrer qu'il existe un élément $a \in A - P$ tel que l'homomorphisme $u \otimes A_a$ soit surjectif. (*Commencer par traiter le cas où A est un anneau local.*)
- 2 On suppose de plus que N est plat et que $u \otimes K$ est injectif. Démontrer qu'il existe un élément $a \in A - P$ tel que $u \otimes A_a$ est injectif.
- 3 Donner un exemple montrant que dans la question précédente, on ne peut omettre l'hypothèse de platitude sur N .
- 4 Soit M^\bullet un complexe borné de A -modules à termes *plats* et de type fini. On suppose que le complexe $M^\bullet \otimes K$ est exact. Démontrer qu'il existe un élément $a \in A - P$ tel que le complexe $M^\bullet \otimes A_a$ soit exact.
- 5 Dans la question précédente, on suppose que A est un anneau local. Démontrer que pour tout A -module Q , le complexe $M^\bullet \otimes Q$ est exact.

EXERCICE 5

Soit A un anneau noethérien, soit $f: X \rightarrow \text{Spec}(A)$ un morphisme quasi-compact et séparé. Si B est une A -algèbre, on note X_B le schéma $X \otimes_{\text{Spec}(A)} \text{Spec}(B)$, $p: X_B \rightarrow X$ et $f_B: X_B \rightarrow \text{Spec}(B)$ les deux projections. Si \mathcal{F} est un faisceau quasi-cohérent sur X , on note \mathcal{F}_B le faisceau quasi-cohérent $p^* \mathcal{F}$ sur X_B .

- 1 Si X est un schéma affine, expliquer pourquoi X_B est un schéma affine.
- 2 Construire pour tout faisceau quasi-cohérent \mathcal{F} des homomorphismes $H^p(X, \mathcal{F}) \otimes_A B \rightarrow H^p(X_B, \mathcal{F}_B)$ qui sont fonctoriels en \mathcal{F} .
- 3 Si B est une A -algèbre plate, démontrer que ces homomorphismes sont des isomorphismes. Dans la suite de l'exercice, on considère une A -algèbre B qui est *fidèlement* plate, c'est-à-dire plate et telle que le morphisme de schémas $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ soit surjectif.
- 4 On suppose que X_B est vide; démontrer que X est vide.
- 5 On suppose que X_B est quasi-compact; démontrer que X est quasi-compact.
- 6 On suppose que X_B est un schéma affine. Démontrer que pour tout faisceau quasi-cohérent \mathcal{F} sur X et tout idéal premier P de A , on a $H^1(X, \mathcal{F}) \otimes K(P) = 0$. En déduire que $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$ puis que X est un schéma affine.