Séminaire Betty B. Septembre 2021
$5^e$ année, 2021–2022, n$^o$ ?

# LA CONJECTURE DE MORDELL: ORIGINES, APPROCHES, GÉNÉRALISATIONS

par **Antoine Chambert-Loir**

***Résumé.*** — La conjecture de Mordell prédit qu'une équation diophantienne définissant une courbe projective lisse de genre au moins deux n'a qu'un nombre fini de solutions dans un corps de nombres donné. Le siècle qui s'est écoulé depuis son énoncé, en 1922, a vu plusieurs approches, plusieurs démonstrations, ainsi que de vastes extensions dont la plupart sont encore conjecturales. Ce texte, qui reprend l'exposé oral, s'efforce de retracer cette histoire.

*Abstract* **(The Mordell conjecture: origins, approaches, generalizations)**

The Mordell conjecture predicts that a diophantine equation defining a smooth projective curve of genus at least two has only finity many solutions in a given number field. The century that ran since its statement, in 1922, gave rise to several approaches, several proofs, and vast extensions most of which are still conjectural. This text is based on the oral presentation and aims at recalling this story.

## 1. ORIGINES

### 1.1. La conjecture de Mordell

La conjecture dont il sera question dans cet exposé naît en 1922, dans un article (Mordell, 1922) consacré aux solutions rationnelles des équations du troisième ou quatrième degré en deux inconnues.

Le cas des équations du premier degré est évident, et l'étude des solutions rationnelles des équations du second degré relève du théorème de Minkowski sur les formes quadratiques (1893). Plus généralement, une telle équation, de degré quelconque, définit une courbe algébrique et les articles de Hilbert & Hurwitz (1900) et Poincaré (1901) semblent être les premiers à avoir abordé leur arithmétique de ce point de vue géométrique. Hilbert et Hurwitz se cantonnaient au genre nul, Poincaré abordait le genre 1 — les courbes elliptiques — en expliquant le procédé de construction de solutions à partir de sécantes (ou tangentes) : si $P, Q$ sont deux points de la courbe à coordonnées rationnelles, la droite qui les joint (la tangente à la courbe si $P = Q$) coupe la cubique en un troisième point dont les coordonnées sont également rationnelles.

Néanmoins, au début de son article, Mordell note avec quelque rudesse à quel point l'état des connaissances est maigre :

> Mathematicians have been familiar with very few questions for so long a period with so little accomplished in the way of general results, as that of finding the rational solutions, or say for shortness, the solutions of indeterminate equations of genus unity of the forms (...)
>
> $$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$
>
> and there is no loss of generality in assuming that the coefficients of all equations in this paper are integers.

Il y démontre que toutes les solutions rationnelles peuvent se déduire d'un nombre fini d'entre elles par le procédé géométrique de cordes et tangentes, de manière équivalente, à l'aide des formules d'addition pour les fonctions elliptiques. En termes modernes, le groupe des points rationnels d'une courbe elliptique est un groupe abélien de type fini. Il prouve ainsi un fait que Poincaré (1901) affirmait banalement, sans démonstration, mais ouvrant ainsi la voie à l'étude du *rang* de la courbe elliptique, c'est-à-dire celui du groupe abélien de ses points rationnels. (Notons que pour Poincaré, le rang était le plus petit nombre de points de la courbe elliptique à partir on peut en déterminer tous les autres ; c'est un invariant un peu plus compliqué.)

À la fin de son article, Mordell énonce plusieurs problèmes qu'il dit ne pas savoir résoudre :

- Les problèmes 1, 3, 4, et le 5$^{\text{e}}$ qui les englobe, forment ce qu'on appelle la *conjecture de Mordell* : les équations diophantiennes définissant une courbe de genre supérieur ou égal à 2 n'ont qu'un nombre fini de solutions rationnelles.
- Le problème 2 concerne les équations hyperelliptiques de genre au moins un, de la forme $y^2 = f(x)$, où $f$ est un polynôme à coefficients entiers de degré au moins 4 ; Mordell demande de prouver qu'une telle équation n'a qu'un nombre fini de solutions *entières*.

### 1.2. Le théorème de Weil

Dans sa thèse, Weil (1928) étend les résultats de Mordell à une courbe X de genre $g$ quelconque définie sur un corps de nombres $k$. Il ne démontra pas la conjecture de Mordell sur la finitude des points rationnels d'une telle courbe, et la version qu'il démontre, suggérée par le travail de Poincaré, concerne les « systèmes rationnels de $g$ points ».

La démonstration de Weil reprend, en la systématisant, celle de Mordell. En termes modernes, il s'agit de démontrer que le groupe $\mathrm{J}(k)$ des points rationnels de la jacobienne J de la courbe X est un groupe abélien de type fini. Weil raisonne uniquement en termes de diviseurs sur la courbe, qu'il appelle systèmes virtuels.

Aux anachronismes près, sa démonstration, valable pour toute variété abélienne A, est classiquement séparée en deux étapes :

- Le théorème faible que le groupe $\mathrm{A}(k)/2\mathrm{A}(k)$ est fini, permettant d'écrire un point $a \in \mathrm{A}(k)$ sous la forme $2a' + b$, où $b$ appartient à un ensemble fini ;
- La théorie des hauteurs exprimant que la hauteur du point $a'$ sera, à un terme d'erreur près, plus petite que celle du point $a$.

La *hauteur* d'un point généralise la notion naïve de taille d'un nombre rationnel (maximum de son numérateur et de son dénominateur) ; comme cette notion naïve, elle donne lieu à un théorème de finitude : l'ensemble des points rationnels de hauteur majorée par toute quantité donnée est fini.

Un argument de descente infinie, pour lequel tant Mordell que Weil invoquent le nom de Fermat, permet de conclure.

Weil termine son article en posant un certain nombre de questions arithmétiques sur ce groupe $\mathrm{J}(k)$ qui reviennent à la détermination de ses facteurs invariants (rang, torsion) et de son comportement par extension des scalaires. Il pose aussi la question de les déterminer effectivement.

C'était cependant la conjecture de Mordell que Weil avait en vue, et même si Hadamard lui avait recommandé de ne pas « se contenter d'un demi-résultat », le travail de Weil laissait cette conjecture ouverte.

### 1.3. Le théorème de Siegel

C'est à Siegel (1929) qu'on doit le premier énoncé de finitude conjecturé par Mordell, à savoir le cas des solutions entières d'équations diophantiennes définissant des courbes de genre 1 ou plus. (En fait, Siegel avait déjà obtenu quelques cas de finitude dans les années précédentes.)

Le théorème de Siegel vaut aussi pour une équation diophantienne courbe de genre 0 à condition qu'elle ait au moins trois points à l'infini. Pour être un peu plus précis, une équation $f(x, y) = 0$ en deux indéterminées fournit une courbe affine, à laquelle il manque donc un certain nombre de points à l'infini. Lorsqu'il s'agit d'une courbe elliptique dans la présentation $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$, seule l'origine de la courbe elliptique est absente.

Mahler (1934) a généralisé le théorème de Siegel au cas des S-entiers d'un corps de nombres $k$, S étant un ensemble fini de places finies de $k$. Autrement dit, en langage moderne :

Soit $k$ un corps de nombres, soit $\mathcal{O}$ un localisé de l'anneau des entiers algébriques par rapport à un nombre fini d'idéaux maximaux, soit X est une courbe affine lisse sur $k$ dont la caractéristique d'Euler est strictement négative ; géométriquement, X est le complémentaire d'un nombre fini, $r$, de points dans une courbe projective lisse connexe de genre $g$, et on suppose l'inégalité $2g - 2 - r < 0$. Alors pour tout schéma $\mathcal{X}$ de type fini sur $\mathcal{O}$ qui est un modèle de X, l'ensemble $\mathcal{X}(\mathcal{O})$ est fini.

Un cas particulier important est l'*équation aux* S-*unités :* l'équation $x + y = 1$ n'a qu'un nombre fini de solutions $(x, y)$ dans $\mathcal{O}^\times$.

La preuve de Siegel apporte une nouvelle idée, que d'exploiter les inégalités d'approximations diophantiennes initiées par Liouville (1844), Thue (1909), Siegel (1921), Dyson (1947), et qui culmineraient avec le théorème de Roth (1955) : *si $\alpha$ est un nombre algébrique irrationnel et $\rho > 1$, l'ensemble des couples $(p, q)$ tels que $q^\rho \left|q\alpha - p\right| \leq 1$ est fini.* Liouville exigeait l'inégalité $\rho > d - 1$, où $d$ est le degré de $\alpha$, Thue traitait le cas $\rho > d/2$, Siegel et Dyson les cas $\rho > 2\sqrt{d}$ et $\rho > \sqrt{2d}$.

Lorsque le corps de base est $k = \mathbf{Q}$, la première étape de la démonstration de Siegel consiste à raisonner par l'absurde et à considérer une suite $(a_n)$ de points de points entiers de X que, par compacité, on peut supposer converger, pour la topologie de $\mathbf{R}$, vers un des points à l'infini de la courbe, en particulier vers un point algébrique. L'intégralité des points $a_n$ fournit une inégalité dans un sens opposé à ce qu'interdisent les résultats d'approximation diophantienne, mais toutefois trop faible pour les contredire.

Dans une seconde étape, Siegel utilise les propriétés de division, via des revêtements non ramifiés appropriés, qui permettent d'améliorer l'inégalité d'approximation, jusqu'à contredire les théorèmes de Thue ou, plus précisément, le raffinement qu'il avait démontré.

## 2. APPROCHES

### 2.1. La méthode de Chabauty

La méthode de Chabauty (1941) est peut-être l'approche la plus simple de la conjecture de Mordell, mais elle fonctionne uniquement sous l'hypothèse restrictive que le rang de Mordell–Weil de la courbe X considérée soit strictement inférieur à son genre.

Dans ce cas, Chabauty (1941) fixe un nombre premier auxiliaire $p$ et considère l'adhérence $\Gamma$ dans $\mathrm{J}(\mathbf{Q}_p)$, pour la topologie $p$-adique, du groupe $\mathrm{J}(\mathbf{Q})$. Si $r$ est le rang de $\mathrm{J}(\mathbf{Q})$ et $g$ le genre de X, donc la dimension de J, cette adhérence est un sous-groupe de Lie $p$-adique de dimension $r < g$.

Il existe donc une forme différentielle invariante $\omega$ sur J, non nulle, dont la restriction à $\mathrm{J}(\mathbf{Q}_p)$, est nulle. On peut définir, si $a$ et $b$ sont des points de $\mathrm{J}(\mathbf{Q}_p)$ suffisamment proches, l'intégrale $\int_a^b \omega$ ; il suffit d'intégrer formellement dans une carte où tout cela fait sens. Si les points $a$ et $b$ appartiennent à $\Gamma$, cette intégrale sera nulle.

D'autre part, si $a$ et $b$ appartiennent à $\mathrm{X}(\mathbf{Q}_p)$, ces intégrales sont celles de la forme différentielle $\omega|_{\mathrm{X}}$. Comme le plongement d'Abel–Jacobi de X dans J induit une bijection de $\Omega^1_{\mathrm{J}}$ sur $\Omega^1_{\mathrm{X}}$, la forme $\omega|_{\mathrm{X}}$ n'est pas nulle. Par suite, le point $a$ étant fixé dans $\mathrm{X}(\mathbf{Q})$, l'intégrale $\int_a^x \omega$, qui est une fonction analytique locale sur $\mathrm{X}(\mathbf{Q}_p)$, n'a qu'un nombre fini de zéros proches de $a$. Cela entraîne que $\mathrm{X}(\mathbf{Q})$ n'a qu'un nombre fini de points proches de $a$.

Par compacité de $\mathrm{X}(\mathbf{Q}_p)$, il en résulte que $\mathrm{X}(\mathbf{Q})$ est fini.

Cette méthode a été précisée par Coleman (1985) qui propose une majoration effective, et souvent efficace, du nombre de points rationnels de X.

Elle a connu de nombreux développements dans les dernières années. La version non linéaire de Kim (2005, 2006) montre un lien entre des conjectures « motiviques » comme la conjecture de Bloch–Kato et la conjecture de Mordell. Si elle ne permet pas de démontrer la conjecture de Mordell en toute généralité, elle donne lieu à une nouvelle démonstration du théorème de Siegel. Une série d'articles remarquables (Balakrishnan & Dogra, 2018, 2021; Balakrishnan *et al.*, 2021) parvient à mettre en œuvre une partie de la méthode de Kim : c'est ce qu'on appelle la méthode « quadratique » de Chabauty. Elle a notamment permis à Balakrishnan *et al.* (2019) de déterminer les points rationnels de la courbe modulaire $X_{\mathrm{split}}(13)$, finissant ainsi la preuve par Bilu & Parent (2011); Bilu *et al.* (2013) du cas « sous-groupe de Cartan déployé » d'une conjecture de Serre sur l'image de la représentation galoisienne associée à une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$.

### 2.2. Le cas des corps de fonctions

La géométrie diophantienne « sur un corps de fonctions » cherche à étudier des questions analogues à des problèmes arithmétiques connus en remplaçant le corps des nombres rationnelles par le corps des fonctions d'une courbe. Ce glissement est motivé par la proximité algébrique des deux types de corps — ils sont par exemple tous deux le corps des fractions d'anneaux de Dedekind — et par la possibilité de mettre en œuvre les outils de la géométrie algébrique ou analytique.

Soit B une courbe projective lisse sur un corps $k$ et soit X une courbe projective lisse sur le corps $K = k(B)$ des fonctions rationnelles sur B. À une réserve près que nous discuterons bientôt, l'analogue de la conjecture de Mordell demande par exemple de prouver que l'ensemble X(K) est fini. Adoptant un point de vue complètement géométrique, on peut considérer une surface lisse S sur $k$, fibrée en courbes sur B, dont la fibre générique est précisément la courbe X. Les points rationnels de X(K) correspondent alors à des *sections* $B \to S$ de la projection canonique.

Le problème contient ainsi, comme cas particulier, une question géométrique très simple. Supposons en effet que la surface S soit une famille de courbes essentiellement constante, birationnelle à un produit $B \times C$ de la courbe B par une courbe C, dont le genre est au moins 2. Les sections $B \to S$ correspondent alors aux morphismes de B dans C. La finitude de l'ensemble de ceux *qui ne sont pas constants* est le théorème de de Franchis, voir (Arbarello *et al.*, 2011, chap. 21, th. 8.27). Là est la réserve nécessaire à l'énoncé de la conjecture de Mordell sur les corps de fonctions : si l'ensemble des points rationnels est infini, c'est que la courbe initiale donne lieu à une famille essentiellement constante et sauf un nombre fini d'entre eux, ces points rationnels correspondent à des sections constantes.

On doit à Manin (1963) et Grauert (1965) des démonstrations de la conjecture de Mordell sur les corps de fonctions, en caractéristique zéro. Le cas de la caractéristique positive a été étudié par Samuel (1966). Ces preuves considèrent la différentielle d'une section $f$ de B dans S, c'est-à-dire l'application $f^*\Omega^1_S \to \Omega^1_B$ et exploitent que le genre de X est au moins 2 via la positivité du fibré relatif $\Omega_{S/B}$.

Peu après, Paršin (1968) a proposé une troisième démonstration, en caractéristique zéro, mais de nature fondamentalement différente.

### 2.3. La conjecture de Shafarevich et la construction de Kodaira–Parshin

Si l'on écrit une courbe elliptique sous la forme d'une équation $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$, son discriminant est défini par $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$. Lorsque $g_2$ et $g_3$ appartiennent à un anneau et que $\Delta$ y est inversible, la courbe elliptique a alors bonne réduction partout. Ainsi, prenant $g_2$ et $g_3$ dans l'anneau des entiers d'un corps de nombres, la courbe aura bonne réunion hors des idéaux premiers qui contiennent $\Delta$.

Shafarevich (1963) avait déduit du théorème de Siegel un énoncé de finitude : un corps de nombres $k$ et un ensemble fini de places de $k$ étant donnés, l'ensemble des courbes elliptiques sur $k$ qui ont bonne réduction hors des places de S est fini.

Il conjectura alors le résultat analogue pour les variétés abéliennes de dimension arbitraire, ainsi que pour les courbes projectives de genre arbitraire. Par la construction de la jacobienne d'une courbe, l'étude de sa mauvaise réduction, et le théorème de Torelli, le résultat pour les variétés abéliennes entraîne le cas des courbes. Il conjecture également l'inexistence de courbes projectives lisses et de variétés abéliennes sur $\mathbf{Q}$ qui aient bonne réduction partout, une conjecture qui sera démontrée par Fontaine (1985).

Paršin (1968) a montré comment déduire la conjecture de Mordell de celle de Shafarevich. Sa méthode consiste à construire, pour toute courbe B de genre $\geq 2$, une famille non isotriviale de courbes $S \rightarrow B$ paramétrée par B ; en fait, si $b \in B$, la courbe $S_b$ est construite comme un revêtement étale de B ramifié en $b$ uniquement. Par suite, pour tout $b \in B$, il n'y a qu'un nombre fini de $c \in B$ tels que les courbes $S_b$ et $S_c$ soient isomorphes. Une construction similaire avait également proposée par Kodaira (1967).

Lorsque $b$ varie dans $B(k)$, cela fournit une famille de courbes sur $k$, chacune n'étant isomorphe qu'à un nombre fini de membres de la famille. en faisant cette construction de façon arithmétique, on constate que les courbes $S_b$ n'ont mauvaise réduction qu'en un ensemble fini de places de $k$. D'après la conjecture de Shafarevich, l'ensemble $B(k)$ est fini.

Pour être précis, la construction requiert une extension finie K du corps de base ainsi que de remplacer B par un revêtement étale $B_1$. D'après le théorème de Chevalley–Weil, lui-même une conséquence du théorème de finitude de Hermite–Minkowski, il existe une extension finie $k_1$ de K telle que $B_1(k_1)$ contienne l'image réciproque de $B(k)$ dans $B_1$. La discussion précédente entraîne que $B_1(k_1)$ est fini, donc $B(k)$ aussi.

Par ailleurs, Paršin (1968) et Arakelov (1971) en caractéristique zéro, et Szpiro (1979) en caractéristique positive, démontrent l'analogue de la conjecture de Shafarevich sur les corps de fonctions de caractéristique zéro, ce qui fournit ainsi une troisième démonstration de la conjecture de Mordell dans ce cadre.

### 2.4. La démonstration de Faltings

C'est à FALTINGS (1983) qu'on doit la première démonstration de la conjecture de Mordell. Il suit l'idée de Parshin et Arakelov en ce qu'il démontre d'abord la conjecture de Shafarevich, en la réduisant à une autre conjecture, proposée par TATE (1966), sur la représentation galoisienne $\ell$-adique associée à une variété abélienne.

Soit A une variété abélienne sur un corps $k$, soit $g$ sa dimension, et soit $\ell$ un nombre premier distinct de la caractéristique de $k$. Pour tout entier $n \geq 1$, le groupe $\mathrm{A}_{\ell^n}$ des points $a \in \mathrm{A}(\overline{k})$ tels que $\ell^n a = 0$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})^{2g}$, et est muni d'une action du groupe $\mathrm{G} = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ Le module de Tate $\ell$-adique est la limite $\mathrm{T}_\ell(\mathrm{A}) \simeq \mathbf{Z}_\ell^{2g}$ des groupes finis $\mathrm{A}_{\ell^n}$ ; l'action de G sur les groupes finis $\mathrm{A}_{\ell^n}$ induit une action continue de G sur $\mathrm{T}_\ell(\mathrm{A})$. On peut d'ailleurs se contenter d'étudier la représentation galoisienne sur l'espace vectoriel $\mathrm{V}_\ell(\mathrm{A}) = \mathbf{Q}_\ell \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathrm{T}_\ell(\mathrm{A})$.

La construction de $\mathrm{V}_\ell(\mathrm{A})$ est fonctorielle. Si $f\colon \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est un homomorphisme de variétés abéliennes sur $k$, elle donne lieu à un morphisme $f_*$, $\mathbf{Q}_\ell$-linéaire, G-équivariant, de $\mathrm{V}_\ell(\mathrm{A})$ dans $\mathrm{V}_\ell(\mathrm{B})$. La *conjecture de Tate* est que cette fonctorialité donne lieu à une bijection

$$\mathbf{Q}_\ell \otimes_{\mathbf{Z}} \mathrm{Hom}_k(\mathrm{A},\mathrm{B}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}_\ell(\mathrm{A}), \mathrm{V}_\ell(\mathrm{B})).$$

Comme la $\mathbf{Q}$-algèbre $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathrm{End}_k(\mathrm{A})$ déduite de celle des endomorphismes d'une variété abélienne est semi-simple, une conséquence de cette conjecture de Tate est la semi-simplicité de la représentation galoisienne $\mathrm{V}_\ell(\mathrm{A})$.

Le théorème principal de TATE (1966) est la démonstration de cette conjecture lorsque $k$ est un corps fini. Un argument essentiel est la finitude de l'ensemble de classes d'isomorphismes de variétés abéliennes sur $k$ munies d'une polarisation de degré donné et d'une isogénie vers A de degré une puissance de $\ell$. Comme le fait remarquer FALTINGS (1986), cette démonstration déduit la conjecture de Tate de la conjecture de Shafarevich, alors que FALTINGS (1983) déduit la conjecture de Shafarevich de la conjecture de Tate.

Il n'est pas possible ici de résumer fidèlement cette démonstration de Faltings. Disons seulement que trois théorèmes de finitude interviennent. Le premier repose sur la notion de hauteur que Faltings introduit sur l'espace des modules des variétés abéliennes et sur la finitude de l'ensemble des classes d'isomorphie de variétés abéliennes définies sur un corps de nombres donné, munie d'une polarisation de degré donné, et de hauteur bornée. En étudiant le comportement de cette hauteur par isogénie, Faltings en déduit la finitude de l'ensemble des classes d'isomorphie de variétés abéliennes sur un corps de nombres qui isogènes à une variété abélienne donnée puis, par la méthode de Tate, la conjecture de Tate elle-même.

Le troisième théorème de finitude que intervient pour démontrer la conjecture de Shafarevich est celui de Hermite–Minkowski, à savoir la finitude de l'ensemble des corps de nombres de degré donné et qui sont non ramifiés en dehors d'un ensemble fini de nombres premiers donné.

Soit alors $k$ un corps de nombres, soit S un ensemble fini de places de $k$ et soit A une variété abélienne de dimension $g$ définie sur $k$ et ayant bonne réduction hors des places de S. Choisissons un nombre premier $\ell$ et adjoignons à S, si nécessaire, toutes les places divisant $\ell$. Du théorème de Hermite–Minkowski, du critère de Néron–Ogg–Shafarevich qui assure que la représentation $V_\ell(A)$ est non ramifiée hors des places de S, et du théorème de densité de Čebotarev, on déduit — voir (Deligne, 1985, th. 3.1) — que la représentation galoisienne $V_\ell(A)$ est déterminée par les traces d'un nombre fini d'endomorphismes de Frobenius agissant sur $V_\ell(A)$. Compte tenu du théorème de Weil qui les majore par $2g\sqrt{q}$ (si $q$ est le cardinal du corps résiduel de ces endomorphismes de Frobenius), il n'y a qu'un nombre fini de représentations galoisiennes possibles pour $V_\ell(A)$.

### 2.5. La démonstration de Vojta

L'article de Vojta (1991) propose une nouvelle preuve, totalement différente, de la conjecture de Mordell, reposant sur une inégalité de hauteurs.

Pour évoquer cette inégalité, il faut rappeler que la hauteur des points d'une variété abélienne A définie sur un corps de nombres $k$, hauteur dont Mordell et Weil avaient fait un usage fondamental, peut être promue en une forme quadratique définie positive sur le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}\otimes_{\mathbf{Z}} A(k)$, espace vectoriel qui est de dimension finie en raison du théorème de Mordell–Weil. Par la fonctorialité approchée des hauteurs, cette hauteur est une « forme quadratique approchée », mais Néron et Tate avaient construit une forme quadratique canonique qui en diffère par une fonction bornée. Cette forme quadratique, qu'on appelle maintenant *hauteur de Néron–Tate*, est a priori positive sur l'espace vectoriel réel $\mathbf{R}\otimes_{\mathbf{Z}} A(k)$, mais on déduit du théorème de finitude de Northcott qu'elle est effectivement définie positive. De plus, l'homomorphisme canonique de $A(k)$ dans $\mathbf{R}\otimes_{\mathbf{Z}} A(k)$ a pour noyau le sous-groupe $A_{\mathrm{tors}}$, et le théorème de Mordell–Weil (ou, plus directement, celui de Northcott) entraîne également que ce sous-groupe est fini.

Soit X une courbe projective lisse de genre $g \geq 2$ définie sur un corps de nombres, considérée comme plongée dans sa jacobienne J — au moyen d'un point rationnel arbitraire. Posons $V = \mathbf{R}\otimes_{\mathbf{Z}} J(k)$ et soit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et $\|\cdot\|$ le produit scalaire et la norme de Néron–Tate sur V. Le théorème de Vojta (1991) est une inégalité pour l'angle $\angle(x,y)$ que forment deux points $x$ et $y$ de $X(k)$ dans l'espace vectoriel V : il existe des nombres réels $c$ et $c'$ tels que si $x, y \in X(k)$ satisfont $\|x\| \geq c$ et $\|y\| \geq c'\|x\|$, alors $\cos(\angle(x,y)) \geq 3/4$.

La conjecture de Mordell en résulte par un argument géométrique très simple. On commence par recouvrir l'espace vectoriel V par un nombre fini de cônes d'angle strictement inférieur à $\arccos(3/4)$ et l'on prouve que chacun de ces cônes C ne contient qu'un nombre fini de points de $X(k)$. Si tous les points $x \in X(k)$ de C vérifient $\|x\| \leq c$, alors C ne contient qu'un nombre fini de points de $X(k)$. Supposons que C contienne un point $x$ tel que $\|x\| \geq c$ ; d'après l'inégalité de Vojta, tous les autres points $y$ de $X(k)$ contenus dans ce cône satisfont $\|y\| \leq c'\|x\|$ ; il s'ensuit que C ne contient qu'un nombre fini de points de $X(k)$.

Signalons que Mumford (1965) avait établi une inégalité de hauteurs similaire : si $a > 1/2g$, il existe un nombre réel $c$ tel que pour tous $x, y \in X(k)$ tels que $x \neq y$, on ait $\langle x, y\rangle \leq a(\|x\|^2 + \|y\|^2) + c$, soit encore $\|x-y\|^2 \geq (1-2a)(\|x\|^2 + \|y\|^2) - 2c$. Chez Mumford, cette inégalité est utilisée comme un principe d'espacement, il en déduit que parmi les $\approx \mathrm{T}^r$ points $x$ de $\mathrm{J}(k)$ tels que $\|x\| \leq \mathrm{T}$, au plus $\approx \log(\mathrm{T})$ appartiennent à $\mathrm{X}(k)$.

Dans le titre de l'article de Vojta (1991), l'allusion au théorème de Siegel montre qu'il s'agit de nouveau de techniques approximation diophantienne. Dans cet article, ces méthodes sont exprimées dans le langage de la géométrie d'Arakelov, telle que développée par Arakelov (1974), Faltings (1986), Gillet & Soulé (1990). Bombieri (1990) en a aussitôt donné une présentation dans le langage de la géométrie diophantienne classique.

Au dialecte utilisé près, toutes les démonstrations d'approximation diophantienne depuis Liouville suivent un schéma similaire. Dans une première phase, on construit un polynôme auxiliaire en les données, non nul, qui s'annule sur un ensemble prescrit avec des multiplicités prescrites, dont les coefficients sont de taille contrôlée. C'est ici qu'interviennent le *lemme de Siegel* ou, chez Vojta, le théorème d'« amplitude arithmétique » de Gillet & Soulé (1988). Il s'agit alors d'étudier une dérivée convenable de ce polynôme auxiliaire, a priori non nulle, et d'utiliser le « théorème fondamental de l'arithmétique » selon lequel un entier positif non nul est au moins égal à 1. Garantir cette non-annulation est évident dans l'inégalité de Liouville, mais l'est beaucoup moins pour les développements ultérieurs. Vojta utilise un énoncé géométrique (Vojta, 1989*a*) qu'il avait démontré pour donner une démonstration (Vojta, 1989*b*) de la conjecture de Mordell sur les corps de fonctions. Bombieri utilise un énoncé arithmétique plus élémentaire, le « lemme de Roth » de Roth (1955).

### 2.6. La démonstration de Lawrence et Venkatesh

C'est la dernière en date (Lawrence & Venkatesh, 2020), nous n'en dirons rien ici en renvoyant à l'exposé de Marco Maculan au Séminaire Bourbaki.

## 3. GÉNÉRALISATIONS

### 3.1. Dimension supérieure

On doit à Lang d'avoir posé la question d'une généralisation de la conjecture de Mordell pour les variétés de dimension arbitraire, d'abord pour des variétés abéliennes dans (Lang, 1960), et surtout en général dans (Lang, 1986).

Il y a en fait deux façons d'étendre la conjecture de Mordell en dimension supérieure : on peut demander que l'ensemble des points rationnels soit fini, ou bien simplement qu'il ne soit pas dense pour la topologie de Zarisi.

De même, si X est une variété algébrique sur un corps $k$, il y a plusieurs façons d'étendre l'hypothèse « $g \geq 2$ » dans la conjecture de Mordell :

– Si X est lisse, que $\omega_{\mathrm{X}}$ soit ample (Lang dit que X est *canonique*) ;

– Quitte à considérer une désingularisation de X est lisse, que $\omega_X$ (et ses puissances) définisse une application birationnel vers un espace projectif (X est de *type général* ; Lang dit que X est *pseudo-canonique*) ;
– Qu'il n'existe aucun morphisme non constant de $\mathbf{P}_1$ ou d'une variété abélienne vers X ;
– Si $k$ est un sous-corps de **C**, qu'il n'existe aucune application holomorphe de **C** dans X(**C**) (c'est-à-dire que B soit *hyperbolique au sens de Brody*) ;
– Toujours si $k$ est un sous-corps de **C**, que X(**C**) soit *hyperbolique au sens de Kobayashi.*

L'article de Lang (1986) discute ces variantes, et leurs relations possibles avec les points rationnels. On peut espérer les énoncés suivants, pour une variété projective lisse sur un corps de nombres $k$ :

– Si X est de type général, l'ensemble X($k$) n'est pas dense pour la topologie de Zariski, un énoncé également proposé par Bombieri ;
– Si X(**C**) est hyperbolique, l'ensemble X($k$) est fini.

Ces énoncés sont encore complètement ouverts, et en suggèrent de nombreux autres. Par exemple, si X est de type général, quelle est la réunion des sous-variétés de dimension strictement positive de X qui ne sont pas de type général ?

On doit à Campana (2004) d'avoir proposé une description conjecturale complète de ce que pourrait être l'adhérence de X($k$) pour la topologie de Zariski lorsque X est une variété projective X arbitraire sur un corps de nombres $k$.

Vojta (1987) a proposé un dictionnaire entre géométrie arithmétique et théorie de Nevanlinna qui, en particulier, fait correspondre le théorème de Roth (1955) avec le deuxième théorème principal de Nevanlinna. La théorie de Nevanlinna en dimension supérieure de Griffiths suggère une conjecture remarquable d'approximation diophantienne en toute dimension dont Vojta a démontré qu'elle entraîne non seulement la conjecture de Bombieri–Lang que les points rationnels d'une variété de type général ne sont pas denses pour la topologie de Zariski, mais également des énoncés analogues pour les points entiers.

Enfin, ces questions peuvent être posées, non seulement sur un corps de nombres, mais sur tout corps de type fini, voire sur tout corps de type fini sur un corps algébriquement clos.

### 3.2. La conjecture de Zilber–Pink

Il y a cependant un cas des conjectures de Bombieri–Lang où l'on sait quelque chose, encore une fois grâce à Faltings (1991, 1994) : lorsque X est une sous-variété d'une variété abélienne A définie sur un corps de nombres $k$, l'adhérence de X($k$) pour la topologie de Zariski est une réunion finie de translatées de sous-variétés abéliennes de A. Il faut mettre cet énoncé en relation avec le théorème de Kawamata (1980) qui affirme qu'une sous-variété d'une variété abélienne est de type général si et seulement si ce n'est pas un translaté d'une sous-variété abélienne.

Plus généralement, Hindry (1988) remplace $X(k)$ par l'intersection de $X(\bar{k})$ avec un sous-groupe $\Gamma$ de rang fini de $A(\bar{k})$, c'est-à-dire tel que $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} \Gamma$ soit un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de dimension finie.

Ces théorèmes ont été généralisés par McQuillan (1995) au cas des sous-variétés de variétés semi-abéliennes.

Par ailleurs, Rémond (2000*b*) a démontré l'analogue de l'inégalité de Vojta dans ce contexte.

Pour conclure, mentionnons que Zilber (2002) et Pink (2005*a*,*b*), de façon indépendante, ont émis des conjectures sur les intersections atypiques d'une sous-variété d'une variété semi-abélienne avec des sous-groupes algébriques propres. *Atypique* signifie ici que l'intersection est de dimension strictement supérieure à ce qu'un décompte de paramètre permet d'escompter. En fait, l'énoncé proposé par Pink prend en compte les variétés de Shimura mixtes — il impliquerait également la conjecture d'André–Oort. Ce sujet a connu une intense activité dans ces dernières années, je renvoie à la synthèse de Habegger *et al.* (2017).

### 3.3. Uniformité

Rappelons que la méthode de Chabauty–Coleman, lorsqu'elle s'applique, fournit une majoration explicite du nombre de points rationnels d'une courbe de genre au moins 2.

Dès la preuve par Faltings (1983) de la conjecture de Mordell, il était apparu possible d'en déduire des informations plus précises. Si $X$ est une courbe projective lisse de genre $g$ définie sur un corps de nombres $k$, l'exposé XI de Szpiro (1985) propose ainsi une majoration du cardinal de $X(k)$ qui fait intervenir un certain nombre d'expressions, dont le rang du groupe de Mordell–Weil $J(k)$ de la jacobienne de $X$.

La démonstration de Vojta (1991) donne également lieu à de telles majorations. Leur intérêt est d'être relativement uniforme (à l'utilisation du rang de Mordell–Weil près) lorsque la courbe $X$ varie dans une famille. Cela était par exemple indiqué par un théorème de de Diego (1997) qui, cependant, ne décomptait que les points de hauteur assez grande.

Dans le contexte de la conjecture de Lang sur les sous-variétés de variétés abéliennes, Rémond (2000*a*) a majoré de façon explicite le nombre de translatés de sous-variétés de variétés abéliennes et les degrés de ces sous-variétés qui interviennent par une expression ne dépendant que de la dimension du degré de la sous-variété, la dimension de la variété abélienne ambiante, et le rang du groupe $\Gamma$.

Tout récemment, Dimitrov *et al.* (2021) ont démontré une majoration du cardinal de $X(k)$ par une expression de la forme $c^{1+\rho}$, où $c$ est une constante ne dépendant que du genre de $X$ et du degré du corps de nombres $k$, et $\rho$ est le rang de $J(k)$.

Peut-on aller plus loin ? C'est bien possible. Même si elle semble largement inaccessible, une piste consisterait à majorer uniformément le rang de $J(k)$ ; il n'est en fait même pas clair que ce soit vrai. Toutefois, sous l'hypothèse que la conjecture de Bombieri–Lang est vérifiée, Caporaso *et al.* (1997) et Pacelli (1997) ont démontré que sur un corps de nombres $k$ de degré donné, le nombre de points rationnels d'une courbe de genre $g$ est uniformément borné ! Leur démonstration repose sur un énoncé géométrique inconditionnel : l'existence, pour une famille $f : X \to B$ de courbes, propre, génériquement lisse, d'un entier $n$ tel que le produit symétrique fibré $S^n_B X$ admette une application rationnelle dominante vers une variété W de type général. Appliquée à W, la conjecture de Bombieri–Lang contraint les points rationnels de $S^n_B X$ (qui sont, en famille, les diviseurs effectifs de degré $n$ d'une même courbe $X_b$, pour $b \in B(k)$) à être contenus dans une sous-variété stricte. En partant d'une famille (uni)verselle de courbes de genre $g$, un argument de récurrence leur permet de conclure.

### 3.4. Variantes de la conjecture de Shafarevich

Il s'agit de démontrer, si possible, une finitude de l'ensemble des classes d'isomorphie de variétés d'un type géométrique donné, définies sur un corps de nombres, et ayant bonne réduction en dehors d'un ensemble fini de places donné.

Du théorème de Faltings pour les variétés abéliennes, André (1996) a par exemple déduit le cas des surfaces K3 (plus généralement, de certaines classes de variétés hyperkählériennes), tandis que Javanpeykar & Loughran (2017) traitaient le cas des hypersurfaces de niveau de Hodge $\leq 1$, ou de certaines surfaces de type général.

L'approche de Lawrence & Venkatesh (2020) permet d'établir de nouveaux cas. Par exemple, si $n$ est assez grand et $d$ est assez grand (dépendant de $n$), alors pour tout entier $N \geq 1$, dans l'espace projectif des hypersurfaces de degré $d$ de $\mathbf{P}_n$, celles qui ont bonne réduction en toute place ne divisant pas N ne sont pas denses pour la topologie de Zariski. La conjecture de Lang–Vojta entraîne que cet ensemble est fini modulo l'action de $\mathrm{PGL}(n+1, \mathbf{Z}[1/N])$.

### 3.5. Effectivité

Pour terminer sur une note spéculative, il faut mentionner la question de l'effectivité. Dans le cadre de la conjecture de Mordell, cela voudrait dire un moyen pratique de déterminer l'ensemble des points rationnels d'une courbe de genre $\geq 2$ définie sur un corps de nombres, dans celui du théorème de Siegel, l'ensemble des points entiers de la courbe en question, dans celui du théorème de Mordell–Weil, un ensemble générateur du groupe des points rationnels d'une variété abélienne définie sur un corps de nombres ; dans celui de la conjecture de Shafarevich, l'ensemble des variétés abéliennes de dimension donnée définies sur un corps de nombres donné ayant bonne réduction en dehors d'un ensemble fini donné de places.

Bien sûr, on peut tenter d'énumérer les solutions mais, même en présence de majorations du nombre de ces solutions, comment savoir que la recherche est achevée ?

Le point de vue des hauteurs offre une formulation possible : il suffirait de démontrer une majoration explicite (ou explicitable) pour la hauteur des points en question, pour la hauteur de Faltings des variétés abéliennes en question.

Même s'il faut mentionner que la théorie des formes linéaires en logarithmes de Baker (1975) permet de traiter le cas des points entiers des courbes hyperelliptiques, les résultats sont hélas très partiels.

En ce qui concerne le groupe de Mordell–Weil, Tate (1974) propose un algorithme, conditionnel à la finitude du groupe de Tate–Shafarevich, finirait par le déterminer explicitement.

Moret-Bailly (1990) introduit une version effective relativement explicite de la conjecture de Mordell : si X est une courbe de genre $g \geq 2$ définie sur un corps de nombres $k$, la hauteur de tout point algébrique P de X devrait être majorée par une expression de la forme

$$\mathrm{A}([k(\mathrm{P}):k])\log(\mathrm{disc}(k(\mathrm{P})) + \mathrm{B}([k(\mathrm{P}):k]),$$

où A est une fonction dépendant de la définition choisie pour la hauteur sur X.

Cet article explicite également les interactions entre cette conjecture et d'autres énoncés de géométrie diophantienne, la conjecture de Szpiro sur le discriminant minimal des courbes elliptiques et la conjecture ABC de Masser et Oesterlé, voir aussi Oesterlé (1988). Indépendamment, Elkies (1991) avait montré que cette dernière conjecture implique la conjecture de Mordell.

## INDICATIONS BIBLIOGRAPHIQUES

Il y a trois magnifiques ouvrages d'introduction à la géométrie diophantienne, ceux de Serre (1997), Hindry & Silverman (2000) et Bombieri & Gubler (2006). Le premier, antérieur à la démonstration de Faltings, couvre néanmoins le théorème de Mordell–Weil, le théorème de Siegel et les théorèmes de Chabauty et Mumford ; les deux autres présentent en outre la démonstration du théorème de Roth et celle de la conjecture de Mordell par Bombieri.

Le survol de Lang (1991) aborde la première démonstration de la conjecture de Mordell par Faltings, ainsi que les conjectures en dimension supérieure. Une analyse détaillée de cette démonstration fait l'objet des comptes rendus de séminaires de Szpiro (1985) et Faltings & Wüstholz (1992). Le séminaire de Szpiro (1990) est guidé par l'étude d'une version effective de la conjecture de Mordell.

## BIBLIOGRAPHIE

Y. André (1996), « On the Shafarevich and Tate conjectures for hyperkähler varieties ». *Mathematische Annalen*, **305** (1), p. 205–248.

S. J. Arakelov (1971), « Families of algebraic curves with fixed degeneracies ». *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*, **35**, p. 1269–1293.

S. J. Arakelov (1974), « An intersection theory for divisors on an arithmetic surface ». *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **38**, p. 1179–1192.

E. Arbarello, M. Cornalba & P. A. Griffiths (2011), *Geometry of Algebraic Curves*, Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften **2**, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.

A. Baker (1975), *Transcendental Number Theory*, Cambridge University Press, London.

J. S. Balakrishnan, A. Besser, F. Bianchi & J. S. Müller (2021), « Explicit quadratic Chabauty over number fields ». *Israel Journal of Mathematics*, **243** (1), p. 185–232.

J. S. Balakrishnan & N. Dogra (2018), « Quadratic Chabauty and rational points, I : P-adic heights ». *Duke Mathematical Journal*, **167** (11).

J. S. Balakrishnan & N. Dogra (2021), « Quadratic Chabauty and Rational Points II : Generalised Height Functions on Selmer Varieties ». *International Mathematics Research Notices*, **2021** (15), p. 11923–12008.

J. S. Balakrishnan, N. Dogra, J. S. Müller, J. Tuitman & J. Vonk (2019), « Explicit Chabauty—Kim for the split Cartan modular curve of level 13 ». *Annals of Mathematics*, **189** (3), p. 885–944.

Y. Bilu & P. Parent (2011), « Serre's uniformity problem in the split Cartan case ». *Annals of Mathematics*, **173** (1), p. 569–584.

Y. Bilu, P. Parent & M. Rebolledo (2013), « Rational points on $X_0^+(p^r)$ ». *Annales de l'Institut Fourier*, **63** (3), p. 957–984.

E. Bombieri (1990), « The Mordell conjecture revisited ». *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie IV*, **17** (4), p. 615–640.

E. Bombieri & W. Gubler (2006), *Heights in Diophantine Geometry*, New Mathematical Monographs **4**, Cambridge University Press, Cambridge.

F. Campana (2004), « Orbifolds, special varieties and classification theory ». *Annales de l'institut Fourier*, **54** (3), p. 499–630.

L. Caporaso, J. Harris & B. Mazur (1997), « Uniformity of rational points ». *Journal of the American Mathematical Society*, **10** (1), p. 1–35.

C. Chabauty (1941), « Sur les points rationnels des courbes algébriques de genre supérieur à l'unité ». *C. R. Acad. Sci. Paris*, **212**, p. 882–885.

R. F. Coleman (1985), « Effective Chabauty ». *Duke Mathematical Journal*, **52** (3).

T. de Diego (1997), « Points rationnels sur les familles de courbes de genre au moins 2 ». *Journal of Number Theory*, **67** (1), p. 85–114.

P. Deligne (1985), « Preuve des conjectures de Tate et de Shafarevitch ». *Séminaire Bourbaki 1983/84*, Astérisque **121–122**, p. 25–41, Société mathématique de France, Paris.

V. Dimitrov, Z. Gao & P. Habegger (2021), « Uniformity in Mordell-Lang for curves ». *Annals of Mathematics. Second Series. 2001.10276.*

F. J. Dyson (1947), « The approximation to algebraic numbers by rationals ». *Acta Mathematica*, **79**, p. 225–240.

N. D. Elkies (1991), « ABC implies Mordell ». *International Mathematics Research Notices*, (7), p. 99–109.

G. Faltings (1983), « Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern ». *Inventiones Mathematicae*, **73** (3), p. 349–366.

G. Faltings (1986), « Some historical notes ». *Arithmetic Geometry (Storrs, Conn., 1984)*, p. 1–8, Springer, New York.

G. Faltings (1991), « Diophantine Approximation on Abelian Varieties ». *The Annals of Mathematics*, **133** (3), p. 549.

G. Faltings (1994), « The General Case of S. Lang's Conjecture ». *Barsotti Symposium in Algebraic Geometry*, édité by V. Cristante & W. Messing, Perspectives in Mathematics **15**, p. 175–182, Academic Press.

G. Faltings & G. Wüstholz (1992), *Rational Points*, Aspects of Mathematics **6**, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden.

J.-M. Fontaine (1985), « Il n'y a pas de variété abélienne sur $\mathbf{Z}$ ». *Inventiones Mathematicae*, **81**, p. 515–538.

H. Gillet & C. Soulé (1988), « Amplitude arithmétique ». *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **307**, p. 887–890.

H. Gillet & C. Soulé (1990), « Arithmetic intersection theory ». *Publications mathématiques de l'IHÉS*, **72** (1), p. 94–174.

H. Grauert (1965), « Mordells Vermutung über rationale Punkte auf algebraischen Kurven und Funktionenkörper ». *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, **25**, p. 131–149.

P. Habegger, G. Rémond, T. Scanlon, E. Ullmo & A. Yafaev (2017), *Autour de La Conjecture de Zilber–Pink*, Panorama et Synthèses **52**, Société mathématique de France, Paris.

D. Hilbert & A. Hurwitz (1900), « Über die diophantischen Gleichungen vom Geschlecht Null ». *Acta Mathematica*, **14**, p. 217–224.

M. Hindry (1988), « Autour d'une conjecture de Serge Lang ». *Inventiones Mathematicae*, **94** (3), p. 575–603.

M. Hindry & J. H. Silverman (2000), *Diophantine Geometry*, Graduate Texts in Mathematics **201**, Springer-Verlag, New York.

A. Javanpeykar & D. Loughran (2017), « Complete intersections : moduli, Torelli, and good reduction ». *Math. Ann.*, **368** (3-4), p. 1191–1225.

Y. Kawamata (1980), « On Bloch's conjecture ». *Inventiones Mathematicae*, **57** (1), p. 97–100.

M. Kim (2005), « The motivic fundamental group of $\mathbf{P}_1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ and the theorem of Siegel ». *Inventiones mathematicae*, **161** (3), p. 629–656.

M. Kim (2006), « The non-abelian (or non-linear) method of Chabauty ». *Noncommutative Geometry and Number Theory. Where Arithmetic Meets Geometry and Physics*, édité by C. Consani & M. Marcolli, Aspects of Mathematics **E37**, p. 179–185, Friedr. Vieweg, Wiesbaden.

K. Kodaira (1967), « A certain type of irregular algebraic surfaces ». *Journal d'Analyse Mathématique*, **19** (1), p. 207–215.

S. Lang (1960), « Integral points on curves ». *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, **6**, p. 27–43.

S. Lang (1986), « Hyperbolic and Diophantine analysis ». *American Mathematical Society. Bulletin. New Series*, **14** (2), p. 159–205.

S. Lang (1991), *Number Theory. III*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences **60**, Springer-Verlag, Berlin.

B. Lawrence & A. Venkatesh (2020), « Diophantine problems and $p$-adic period mappings ». *Inventiones Mathematicae*, **221** (3), p. 893–999.

K. Mahler (1934), « Über die rationalen Punkte auf Kurven vom Geschlecht Eins. » *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **170**, p. 168–178.

J. I. Manin (1963), « Rational points on algebraic curves over function fields ». *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*, **27**, p. 1395–1440.

M. McQuillan (1995), « Division points on semi-abelian varieties ». *Inventiones mathematicae*, **120** (1), p. 143–159.

L. J. Mordell (1922), « On the Rational Solutions of the Indeterminate Equations of the Third and Fourth Degrees ». *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **21**, p. 179–192.

L. Moret-Bailly (1990), « Hauteurs et classes de Chern sur les surfaces arithmétiques ». *Séminaire Sur Les Pinceaux de Courbes Elliptiques (Paris, 1988)*, Astérisque **183**, p. 37–58, Société mathématique de France, Paris.

D. Mumford (1965), « A Remark on Mordell's Conjecture ». *American Journal of Mathematics*, **87** (4), p. 1007.

J. Oesterlé (1988), « Nouvelles approches du "théorème" de Fermat ». *Séminaire Bourbaki 1987/1988*, Astérisque **161-162**, p. 165–186, Exp. No. 69, Société mathématique de France, Paris.

P. L. Pacelli (1997), « Uniform boundedness for rational points ». *Duke Mathematical Journal*, **88** (1).

A. N. Paršin (1968), « Algebraic curves over function fields. I ». *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, **2** (5), p. 1145.

R. Pink (2005*a*), « A Combination of the Conjectures of Mordell-Lang and André-Oort ». *Geometric Methods in Algebra and Number Theory*, édité by F. Bogomolov & Y. Tschinkel, **235**, p. 251–282, Birkhäuser-Verlag, Boston.

R. Pink (2005*b*), « A Common Generalization of the Conjectures of André-Oort, Manin-Mumford, and Mordell-Lang ». Prépublication, ETH, Zürich.

H. Poincaré (1901), « Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques ». *Journal de mathématiques pures et appliquées, 5e série*, **7** (2), p. 161–233.

G. Rémond (2000*a*), « Décompte dans une conjecture de Lang ». *Inventiones mathematicae*, **142** (3), p. 513–545.

G. Rémond (2000*b*), « Inégalité de Vojta en dimension supérieure ». *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie IV*, **29** (1), p. 101–151.

K. F. Roth (1955), « Rational approximations to algebraic numbers ». *Mathematika*, **2** (1), p. 1–20.

P. Samuel (1966), « Compléments a un article de Hans Grauert sur la conjecture de Mordell ». *Publications mathématiques de l'IHÉS*, **29** (1), p. 55–62.

J.-P. Serre (1997), *Lectures on the Mordell-Weil Theorem*, Aspects of Mathematics **E15**, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, third édition.

I. R. Shafarevich (1963), « Algebraic number fields ». *Proceedings of the International Congress (Stockholm, 1962)*, American Mathematical Society Translations : Series 2 **3**, p. 25–39, American Mathematical Society, Providence, R.I.

C. Siegel (1921), « Approximation algebraischer Zahlen ». *Mathematische Zeitschrift*, **10** (3), p. 173–213.

C. L. Siegel (1929), « Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen ». *Abhandlungen der PreuBischen Akademie der Wissenschaften. Physikalisch-mathematische Klasse*, **1** (1), p. 209–226.

L. Szpiro (1979), « Sur le théorème de rigidité de Paršin et Arakelov ». *Journées de Géométrie Algébrique de Rennes (Rennes, 1978), Vol. II*, Astérisque **64**, p. 169–202, Société mathématique de France, Paris.

L. Szpiro (1985), « La conjecture de Mordell (d'après G. Faltings) ». *Astérisque*, **121-122**, p. 83–103.

L. Szpiro (1990), « Sur les solutions d'un système d'équations polynomiales sur une variété abélienne (d'après G. Faltings et P. Vojta) ». *Astérisque*, **189-190**, p. 429–446, Exp.n° 729.

J. Tate (1966), « Endomorphisms of abelian varieties over finite fields ». *Inventiones mathematicae*, **2** (2), p. 134–144.

J. T. Tate (1974), « The arithmetic of elliptic curves ». *Inventiones mathematicae*, **23** (3), p. 179–206.

A. Thue (1909), « Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen ». *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **135**, p. 284–305.

P. Vojta (1987), *Diophantine Approximations and Value Distribution Theory*, Lecture Notes in Mathematics **1239**, Springer-Verlag, Berlin.

P. Vojta (1989*a*), « Dyson's lemma for products of two curves of arbitrary genus ». *Inventiones Mathematicae*, **98** (1), p. 107–113.

P. Vojta (1989*b*), « Mordell's conjecture over function fields ». *Inventiones Mathematicae*, **98** (1), p. 115–138.

P. Vojta (1991), « Siegel's theorem in the compact case ». *Annals of Mathematics. Second Series*, **133** (3), p. 509–548.

A. Weil (1928), « L'arithmétique sur les courbes algébriques ». *Acta Mathematica*, **52**, p. 281–315.

B. Zilber (2002), « Exponential sums equations and the Schanuel conjecture ». *Journal of the London Mathematical Society*, **65** (01), p. 27–44.

Antoine Chambert-Loir

Université de Paris
IMJ-PRG
F-75013, Paris, France
*E-mail* : `antoine.chambert-loir@u-paris.fr`