Discerner un peu d'ordre dans un très grand désordre

Séminaire de l'IREM

Antoine Chambert-Loir

12 mai 2021

Université de Paris

La promesse...

Il y a déjà 6000 ans, nos ancêtres se sont efforcés de discerner, dans la multitude des étoiles, des formes géométriques qui permettaient d'organiser le ciel en constellations.

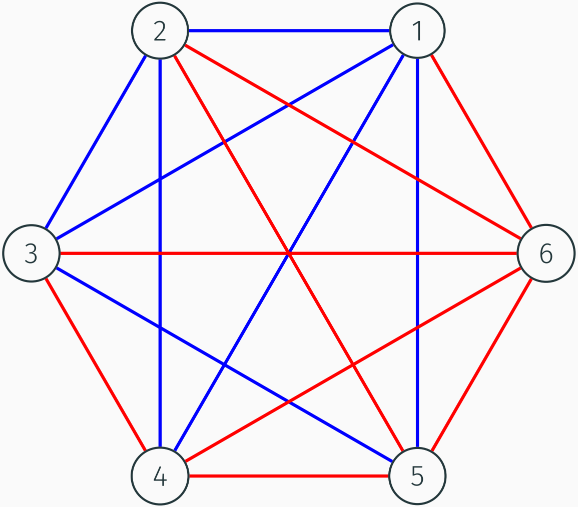
La théorie mathématique à laquelle on donne le nom du mathématicien Frank Ramsey repose sur la découverte inverse : *n'importe quelle forme donnée finit par apparaître dans une structure arbitraire, aussi désordonnée qu'on lui permette d'être, pourvu qu'elle soit assez grande.*

Dans l'exposé, je donnerai une introduction à quelques aspects de cette branche de la combinatoire en tâchant d'en évoquer quelques outils et quelques résultats récents.

Contents

Un jeu...

L'un après l'autre, deux joueurs (Richard et Bernard) colorient les $(6 \cdot 5)/2 = 15$ segments joignant les 6 sommets d'un hexagone en rouge ou en bleu. Gagne le premier qui parvient à tracer un triangle de sa couleur.



Un jeu...

L'un après l'autre, deux joueurs (Richard et Bernard) colorient les $(6 \cdot 5)/2 = 15$ segments joignant les 6 sommets d'un hexagone en rouge ou en bleu. Gagne le premier qui parvient à tracer un triangle de sa couleur.

À ce jeu, il y a toujours un gagnant – même si les joueurs jouent mal !

C'était le premier exemple d'un phénomène typique de la théorie de Ramsey.

Le théorème de Ramsey

Si S est un ensemble, on note $S^{(d)}$ l'ensemble des parties de S de cardinal d.

Théorème (Ramsey, 1930)

Soit m, d, r des entiers $\geqslant 1$. Il existe un entier $R(m, d, r)$ tel que si S est un ensemble de cardinal $\geqslant R(m, d, r)$ et $c \colon S^{(d)} \to \{1, \ldots, r\}$ un coloriage de $S^{(d)}$ en r « couleurs », il existe un entier $i \in \{1, \ldots, r\}$ et une partie T de S de cardinal m telle que $c(a) = i$ pour tout $a \in T^{(d)}$.

Le cas qu'on avait expliqué correspond à $d = 2$ (on colorie les *arêtes* d'un graphe), $r = 2$ (*deux* couleurs, rouge et bleu) et $m = 3$ (on cherche un *triangle*) ; on a $R(3, 2, 2) = 6$.

Existence du nombre de Ramsey $R(n, 2, 2)$

Par récurrence, on va démontrer que *s'il y a* $N = 2^m$ *sommets, les tailles* b, r *de la plus grande zone bleue et de la plus grande zone rouge vérifient* $b + r \geqslant m$.

En prenant $m = 2n$, on en déduira $R(n, 2, 2) \leqslant 2^{2n}$.

Existence du nombre de Ramsey $R(n, 2, 2)$

Par récurrence, on va démontrer que *s'il y a $N = 2^m$ sommets, les tailles b, r de la plus grande zone bleue et de la plus grande zone rouge vérifient $b + r \geqslant m$.*

En prenant $m = 2n$, on en déduira $R(n, 2, 2) \leqslant 2^{2n}$.

On fixe un sommet s ; il est relié aux $N - 1$ autres sommets par N' arêtes bleues et N'' arêtes rouges. Comme $N' + N'' = 2^m - 1$, on a $N' \geqslant 2^{m-1}$ ou $N'' \geqslant 2^{m-1}$.

Existence du nombre de Ramsey $R(n, 2, 2)$

Par récurrence, on va démontrer que *s'il y a $N = 2^m$ sommets, les tailles b, r de la plus grande zone bleue et de la plus grande zone rouge vérifient $b + r \geqslant m$.*

En prenant $m = 2n$, on en déduira $R(n, 2, 2) \leqslant 2^{2n}$.

On fixe un sommet s ; il est relié aux $N - 1$ autres sommets par N' arêtes bleues et N'' arêtes rouges. Comme $N' + N'' = 2^m - 1$, on a $N' \geqslant 2^{m-1}$ ou $N'' \geqslant 2^{m-1}$.

Dans le premier cas, on trouve dans le premier groupe une zone bleue de taille b', une zone rouge de taille r', avec $b' + r' \geqslant m - 1$. En ajoutant le sommet choisi, cela fournit une zone bleue de taille $b = 1 + b'$ et une zone rouge de taille $r = r'$; on a $b + r \geqslant m$.

Le raisonnement est analogue si $N'' \geqslant 2^{m-1}$.

La détermination explicite des *nombres de Ramsey* $R(m,d,r)$ est une tâche très ardue.

On connaît $R(4,2,2) = 18$ mais on sait seulement que $43 \leqslant R(5,2,2) \leqslant 48$.

Majoration (Szekeres, 1935) :

$$R(n,2,2) \leqslant \binom{2n-2}{n-1} \leqslant (1+o(1))\frac{2^{2n}}{4\sqrt{\pi n}}.$$

Minoration (Erdős, 1947) – par la « méthode probabiliste » :

$$R(n,2,2) \geqslant (1+o(1))\frac{n}{e\sqrt{2}}2^{n/2}.$$

Minoration du nombre de Ramsey $R(n,2,2)$

Soit S un ensemble de cardinal N.

Il y a $N(N-1)/2$ paires d'éléments de S, donc $2^{N(N-1)/2}$ coloriages possibles de ces paires en deux couleurs.

Si T est une partie de S de cardinal n, il y a $2 \cdot 2^{N(N-1)/2-n(n-1)/2}$ coloriages possibles de $S^{(2)}$ qui rendent cette partie T monocolore.

Il y a $\binom{N}{n}$ façons de choisir une partie T de cardinal n dans S.

Si $2\binom{N}{n}2^{N(N-1)/2-n(n-1)/2} < 2^{N(N-1)/2}$, il y a donc des coloriages de S qui ne fournissent aucun coloriage satisfaisant la conclusion du théorème de Ramsey.

On vérifie que c'est le cas si $N \leqslant 2^{n/2}$ et $n \geqslant 3$.

On ne connaît pas de construction explicite qui fournisse une minoration exponentielle…

Le principe de Ramsey

"There are numerous theorems in mathematics which assert, crudely speaking, that every system of a certain class possesses a large subsystem with a higher degree of organization than the original system." – Harry BURKILL & Leonid MIRSKY, *Monotonicity* (1973)

« Il y a de nombreux théorèmes en mathématiques qui, grossièrement, affirment que tout système d'un certain type possède un grand sous-système avec un niveau d'organisation plus grand que le système initial. »

Le principe de Ramsey (bis)

Complete disorder is impossible." – Theodore S. Motzkin, cité par R. Graham, B. Rothschild et J. Spencer

« Le désordre complet est impossible. »

Le théorème de Ramsey (version infinie)

Théorème (Ramsey, 1930)

Soit d, r des entiers $\geqslant 1$. Si S est un ensemble infini et $c\colon S^{(d)} \to \{1, \ldots, r\}$ un coloriage de $S^{(d)}$ en r « couleurs », il existe un entier $i \in \{1, \ldots, r\}$ et une partie infinie T de S telle que $c(a) = i$ pour tout $a \in T^{(d)}$.

D'après le principe de compacité en logique mathématique, les versions finie et infinie sont équivalentes.

Contents

Proposition (« Bolzano–Weierstrass »)

De toute suite de nombres réels, on peut extraire une sous-suite monotone.

Application 1 : monotonie

Proposition (« Bolzano–Weierstrass »)

De toute suite de nombres réels, on peut extraire une sous-suite monotone.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. Si $m < n$, on colore $\{m, n\}$ en bleu si $u_m \leqslant u_n$ et en rouge si $u_m > u_n$. D'après le théorème de Ramsey (version infinie, cas $d = r = 2$), il existe une partie infinie M de $\mathbf{N}$ telle que les paires $\{m, n\}$ soient toujours de la même couleur pour $m, n \in M$.

Si cette couleur est bleue, la suite extraite $(u_m)_{m\in M}$ est croissante ; si elle est rouge, la suite extraite $(u_m)_{m\in M}$ est strictement décroissante.

Application 1 : monotonie (remords)

Proposition (« Bolzano–Weierstrass »)

De toute suite de nombres réels, on peut extraire une sous-suite monotone.

Application 1 : monotonie (remords)

Proposition (« Bolzano–Weierstrass »)

De toute suite de nombres réels, on peut extraire une sous-suite monotone.

Preuve élémentaire : on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a un *pic* en n si $u_m < u_n$ pour tout $m \geqslant n$. Soit M l'ensemble des pics.

Si M est infini, la suite $(u_m)_{m\in M}$ est strictement décroissante.

Si M est fini, on définit une suite extraite croissante : on choisit $m_0 > \sup(M)$; comme m_0 n'est pas un pic, il existe $m_1 > m_0$ tel que $u_{m_1} \geqslant u_{m_0}$; puis m_1 n'est pas un pic, donc il existe etc.

Application 1 : monotonie (version finie)

Proposition (P. Erdős & G. Szekeres, 1935)

Soit n un entier $\geqslant 1$. De toute suite $(u_0, \ldots, u_{n^2})$ de nombres réels, on peut extraire une suite monotone de longueur n.

Application 1 : monotonie (version finie)

Proposition (P. Erdős & G. Szekeres, 1935)

Soit n un entier $\geqslant 1$. De toute suite $(u_0, \ldots, u_{n^2})$ de nombres réels, on peut extraire une suite monotone de longueur n.

L'application du théorème de Ramsey donnerait la borne $R(n, 2, 2)$ plutôt que n^2.

Application 1 : monotonie (version finie)

Proposition (P. Erdős & G. Szekeres, 1935)

Soit n un entier $\geqslant 1$. De toute suite $(u_0, \ldots, u_{n^2})$ de nombres réels, on peut extraire une suite monotone de longueur n.

Démonstration (Blackwell/Hammersley) : On « récolte » les termes de la suite en les rangeant, l'un après l'autre, en sous-suites strictement croissantes, de façon « gloutonne ».

Si l'une de ces sous-suites est de longueur $\geqslant n$, la proposition est démontrée.

Sinon, elles ont au plus n termes, donc on a $> n$ sous-suites qui se terminent chacune par un pic et ces pics forment une suite décroissante de longueur au moins n.

Application 2 : convexité

Proposition ("Happy end problem", Erdős & Szekeres, 1935)

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Il existe un entier $K(n)$ tel que dans toute partie du plan de cardinal $K(n)$, on puisse extraire les n sommets d'un polygone convexe.

Application 2 : convexité

Proposition ("Happy end problem", Erdős & Szekeres, 1935)

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Il existe un entier $K(n)$ tel que dans toute partie du plan de cardinal $K(n)$, on puisse extraire les n sommets d'un polygone convexe.

Démonstration (M. Tarsi) : On pose $N = R(n, 3, 2)$ et on considère un ensemble $\{p_1, \ldots, p_N\}$ de N points du plan. On colorie les triplets $\{i, j, k\}$ (où $i < j < k$) en rouge si le chemin $p_i - p_j - p_k$ tourne dans le sens trigonométrique, en bleu sinon. D'après le théorème de Ramsey, il existe une partie M de $\{1, \ldots, N\}$ tels que tous les triplets $\{i, j, k\}$, pour $i, j, k \in M$, soient de même couleur. Les points p_i, pour $i \in M$ sont les sommets d'un polygone convexe.

Application 3 : équations colorées

Proposition (Schur, 1916)

Soit $r \geqslant 1$ un entier. Il existe un entier $S(r)$ tel que pour toute partition $(A_1, \ldots, A_r)$ de $\{1, \ldots, S(r)\}$, il existe un entier i et trois éléments a, b, c de A_i tels que $a + b = c$.

Application 3 : équations colorées

Proposition (Schur, 1916)

Soit $r \geqslant 1$ un entier. Il existe un entier $S(r)$ tel que pour toute partition $(A_1, \ldots, A_r)$ de $\{1, \ldots, S(r)\}$, il existe un entier i et trois éléments a, b, c de A_i tels que $a + b = c$.

Démonstration : posons $N = R(3, 2, r) + 1$ et colorions l'arête $\{x, y\}$ (où $0 \leqslant x < y \leqslant N$) en la couleur i si $y - x \in A_i$. Un triangle monocolore est de la forme $\{x, y, z\}$, avec $0 \leqslant x < y < z \leqslant N$ et les trois différences $a = y - x$, $b = z - y$ et $c = z - x$ appartiennent à A_i ; on a $c = a + b$.

Application 3 : équations colorées

Proposition (Schur, 1916)

Soit $r \geqslant 1$ un entier. Il existe un entier $S(r)$ tel que pour toute partition $(A_1, \ldots, A_r)$ de $\{1, \ldots, S(r)\}$, il existe un entier i et trois éléments a, b, c de A_i tels que $a + b = c$.

Démonstration : posons $N = R(3, 2, r) + 1$ et colorions l'arête $\{x, y\}$ (où $0 \leqslant x < y \leqslant N$) en la couleur i si $y - x \in A_i$. Un triangle monocolore est de la forme $\{x, y, z\}$, avec $0 \leqslant x < y < z \leqslant N$ et les trois différences $a = y - x$, $b = z - y$ et $c = z - x$ appartiennent à A_i ; on a $c = a + b$.

Schur propose $S(r) = \lceil r!\, e \rceil$.

Progressions arithmétiques

Schur avait conjecturé que l'on pouvait remplacer l'équation $a + b = c$ par l'équation $a + b = 2c$ qui signifie que a, c, b forment une progression arithmétique de longueur 3.

Plus généralement :

Proposition (van der Waerden, 1927)

Soit r un entier et $(A_1, \ldots, A_r)$ une partition de $\mathbf{N}$. L'un des A_i contient des progressions arithmétiques de longueur arbitrairement longue.

La conjecture est passée de Schur à Landau qui l'aurait mentionnée au mathématicien Baudet, et à qui van der Waerden l'attribue.

Progressions arithmétiques (version finie)

Proposition (van der Waerden, 1927)

Soit r et ℓ des entiers $\geqslant 1$. Il existe un entier $W(r,\ell)$ tel que pour toute partition $(A_1,\ldots,A_r)$ de l'ensemble $\{1,\ldots,W(r,\ell)\}$, il existe $i \in \{1,\ldots,r\}$ tel que la partie A_i contienne une progression arithmétique $\{a, a+d,\ldots,a+\ell d\}$ de longueur $\ell+1$.

Elle est équivalente à la version infinie.

La démonstration initiale utilise une *double* récurrence, sur r et ℓ. Elle fournit des entiers astronomiques, de type Ackermann.

Les nombres de van der Waerden

Imaginez une hiérarchie de croissance : niveau 1 : linéaire, $2x$; niveau 2 : exponentielle, 2^x ; niveau 3 : tour d'exponentielles : $2^{2^{2^{\cdots^{2}}}}$; niveau 4 : "wow" ; … ; ET au niveau « infini », en prenant la diagonale, Ackermann.

En 1987, Saharon Shelah a proposé une démonstration totalement différente, qui n'utilise qu'une récurrence simple sur ℓ. Elle fournit des entiers $W(r, \ell)$ au niveau 4.

En 2001, Timothy Gowers a démontré une borne au niveau 3 :

$$W(2, \ell) \leqslant 2^{2^{2^{2^{2^{\ell+9}}}}}.$$

En 2021, Ben Green a établi une borne inférieure pour $W(r, \ell)$ de la forme $\ell^{b(\ell)}$, où $b(\ell) \to +\infty$.

Contents

Choisir la couleur de sa progresssion ?

Dans le théorème de Ramsey, on ne sait pas *a priori* quelle couleur est « gagnante ».

Dans le théorème de VAN DER WAERDEN, on ne sait pas *a priori* quelle partie contiendra des progressions arithmétiques.

On pourrait vouloir chercher des conditions naturelles qui assurent, par exemple :

- qu'une famille d'arêtes donnée joignant n sommets dessine au moins un triangle ;
- qu'une partie donnée de $\mathbf{N}$ contienne nécessairement une progression arithmétique.

Théorème (Roth, 1952 pour $\ell = 3$; Szemerédi, 1974)

Soit $A \subset \mathbf{N}$ un ensemble d'entiers et ℓ un entier. Si la densité de A est strictement positive, alors A contient une progression arithmétique de longueur ℓ.

Cet énoncé avait été proposé en 1936 par Erdős et Turán.

Densité : $\delta(A) = \liminf_n \left(\mathrm{Card}(A \cap [1; n])/n\right)$.

Dire que A est de densité strictement positive signifie qu'il existe $\delta > 0$ et m tels que

$$\mathrm{Card}(A \cap [1; n]) \geqslant \delta n$$

pour tout entier $n \geqslant m$.

La barrière logarithmique

Théorème (Bloom & Sisask, 2020)

Soit A un ensemble d'entiers tel que $\sum_{a\in A} \frac{1}{a} = +\infty$. Alors A contient une progression arithmétique de longueur 3.

Version finie :

Théorème

Il existe un nombre réel $c > 1$ tel que pour tout entier $N \geqslant 1$, toute partie A de $\{1, \ldots, N\}$ de cardinal $\geqslant N/\log(N)^c$ contienne une progression arithmétique de longueur 3.

Progressions arithmétiques de grande longueur

C'est encore une conjecture :

Conjecture (Erdős)

Soit A un ensemble d'entiers tel que $\sum_{a\in A} \frac{1}{a} = +\infty$. Alors A contient des progressions arithmétiques de longueur arbitrairement longue.

Parmi les ensembles d'entiers auxquels s'appliquerait cette conjecture, il y a l'ensemble des nombres premiers :

Théorème (Green & Tao, 2004)

L'ensemble des nombres premiers contient des progressions arithmétiques de longueur arbitrairement longue.