FORMES DIFFÉRENTIELLES RÉELLES ET COURANTS SUR LES ESPACES DE BERKOVICH

Antoine Chambert-Loir

Antoine Ducros

Antoine Chambert-Loir

Université Paris Cité, Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche, F-75013, Paris, France.

E-mail : antoine.chambert-loir@math.univ-paris-diderot.fr

Antoine Ducros

Sorbonne Université, Université de Paris, CNRS, Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche, IMJ-PRG, F-75005, Paris, France.

E-mail : antoine.ducros@imj-prg.fr

25 juillet 2025, 21h18

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 9
§ 0.1. Contexte et philosophie 9
§ 0.2. Cet article 11
§ 0.3. Prolongements 16
§ 0.4. Perspectives 17
§ 0.5. Remerciements 18

Partie I. Géométrie tropicale 19

1. Superformes sur un espace vectoriel réel (d'après Lagerberg) 21
§ 1.1. Superformes sur un espace vectoriel réel 21
§ 1.2. Superformes positives 22
§ 1.3. Superformes différentielles, d'après A. Lagerberg 28
§ 1.4. Superformes à coefficients 32
§ 1.5. Intégrale d'une (p, n)-forme sur un sous-espace de dimension p 33
§ 1.6. Supercourants 37
§ 1.7. Un calcul d'opérateur de Monge-Ampère 39
§ 1.8. Cellules et polyèdres 45
§ 1.9. Formes différentielles sur un sous-espace paralinéaire 50
§ 1.10. G-formes positives sur un sous-espace paralinéaire 55

2. Espaces paralinéaires (PL) 61
§ 2.1. Notion d'espace paralinéaire 61
§ 2.2. Décompositions cellulaires 64
§ 2.3. Décompositions cellulaires relatives 69

3. Espaces G-tropicaux 73
§ 3.1. Espaces G-tropicaux 73
§ 3.2. Parties paralinéaires d'un espace G-tropical 75
§ 3.3. Formes de type (p, q) sur un espace G-tropical 79
§ 3.4. Nullité des G-formes 81
§ 3.5. Formes positives sur un espace G-tropical 85

§ 3.6. Topologies sur l'espace des G-formes 86
§ 3.7. Passages à la limite 92

4. Calibrages et intégration sur les espaces paralinéaires 97
§ 4.1. Négligeabilité paralinéaire 97
§ 4.2. Orientations d'un espace paralinéaire 100
§ 4.3. Formes-volume sur un espace paralinéaire 102
§ 4.4. Mesure associée à une forme-volume 105
§ 4.5. Calibrages et intégrales des (n, n)-formes 108
§ 4.6. Calibrages et intégrales des $(n-1, n)$-formes 111

5. Espaces G-tropicaux calibrés 119
§ 5.1. Espaces G-tropicaux chordés 119
§ 5.2. Espaces G-tropicaux vertébrés 123
§ 5.3. Supports forts 127
§ 5.4. Cartes agréables, polyèdres et cônes tropicaux 129
§ 5.5. Espaces G-tropicaux calibrés 131
§ 5.6. Formes-volume sur un espace G-tropical vertébré 132
§ 5.7. Mesures associées à une forme-volume p-dimensionnelle 134
§ 5.8. Intégration des formes différentielles 136
§ 5.9. Mesures de bord 137
§ 5.10. Intégrales et tropicalisations 139
§ 5.11. Formules de Stokes et Green 140

6. Espaces tropicaux 141
§ 6.1. Espaces G-tropicaux affinés 141
§ 6.2. Formes lisses sur un espace G-tropical affiné 142
§ 6.3. Description locale d'objets G-locaux 144
§ 6.4. Topologies sur les espaces de formes lisses 146
§ 6.5. Formes positives 147
§ 6.6. Espaces tropicaux 149
§ 6.7. Exemples 151

7. Courants sur un espace tropical 155
§ 7.1. Courants 155
§ 7.2. Courants positifs 160
§ 7.3. Courants d'intégration 164
§ 7.4. Courants positifs et G-topologie 168
§ 7.5. Courants squelettiques 172
§ 7.6. Courants squelettiques et G-topologie 180
§ 7.7. Calcul différentiel sur les courants 186
§ 7.8. Cartes harmoniques 190

8. Théorie de Bedford–Taylor 195
§ 8.1. Fonctions plurisousharmoniques 195
§ 8.2. Convexité tropicale 198
§ 8.3. Fonctions psh et courants positifs 201
§ 8.4. Inégalités de Chern–Levine–Nirenberg 202
§ 8.5. Théorie de Bedford–Taylor : produit par un courant positif de bidegré $(1, 1)$ 205

§ 8.6. Courants de Bedford–Taylor . . . 207
§ 8.7. Théorie de Bedford–Taylor : itération . . . 209
§ 8.8. Extension aux différences de fonctions psh . . . 211
§ 8.9. Un exemple de calcul de mesure de Monge-Ampère . . . 213
§ 8.10. Produits de courants squelettiques . . . 215
§ 8.11. Tropicalisations harmoniques et courants de Bedford–Taylor . . . 220
§ 8.12. Négligeabilité des ensembles polaires . . . 223

9. Intersection tropicale . . . 225
§ 9.1. Produit d'espaces tropicaux . . . 225
§ 9.2. Formes sur un espace tropical produit . . . 232
§ 9.3. Intégrales dépendant de paramètres . . . 236
§ 9.4. Produit tensoriel de courants . . . 243
§ 9.5. Morphisme de Gysin . . . 247
§ 9.6. Intersection tropicale . . . 250
§ 9.7. Exemples . . . 255

Partie II. Géométrie analytique . . . 259

10. Algèbre graduée et réduction des anneaux normés . . . 261
§ 10.1. Algèbre graduée . . . 261
§ 10.2. Schémas et fibrés vectoriels gradués . . . 266
§ 10.3. Schémas et fibrés vectoriels gradués stricts . . . 269
§ 10.4. Descente de la dimension et des degrés d'intersection . . . 273
§ 10.5. Espaces de Zariski-Riemann sur les corps gradués . . . 278
§ 10.6. Fibrés vectoriels sur un espace de Zariski-Riemann . . . 283
§ 10.7. Nombres d'intersection sur un espace de Zariski-Riemann . . . 288
§ 10.8. Réduction graduée des anneaux et modules normés . . . 294

11. Rappels de géométrie analytique . . . 297
§ 11.1. Géométrie analytique : conventions, notations, premiers rappels . . . 297
§ 11.2. Topologie de Zariski, théorie de la dimension . . . 304
§ 11.3. Propriétés locales des espaces analytiques et des faisceaux cohérents . . . 309
§ 11.4. Propriétés des morphismes . . . 310
§ 11.5. Utilisation de l'invariant $d_k(x)$ . . . 314
§ 11.6. Morphismes finis et plats . . . 317
§ 11.7. Réduction graduée des germes d'espaces analytiques . . . 318
§ 11.8. Espaces stricts et réduction de Temkin ; le cas trivialement valué . . . 322
§ 11.9. Réduction de Temkin et modèles formels . . . 324
§ 11.10. Structures faiblement analytiques . . . 326

12. Parties squelettiques d'un espace analytique . . . 329
§ 12.1. Tores et leurs squelettes canoniques . . . 329
§ 12.2. Moments, tropicalisations, polyèdres . . . 334
§ 12.3. Compléments sur les tropicalisations . . . 339
§ 12.4. Structure G-tropicale affinée sur un espace analytique . . . 344
§ 12.5. Quelques classes de fonctions paralinéaires . . . 347
§ 12.6. Polyèdre caractéristique d'un moment . . . 350
§ 12.7. Polyèdres caractéristiques et changement de base . . . 354

§ 12.8. Polyèdres caractéristiques et dimension tropicale . . . 356
§ 12.9. Parties squelettiques d'un espace analytique . . . 358
§ 12.10. Les espaces de Berkovich sont riches . . . 364
§ 12.11. Les espaces de Berkovich sans bord sont très riches . . . 369

13. Compléments de géométrie analytique . . . 371
§ 13.1. Anneaux G-locaux . . . 371
§ 13.2. Longueurs et multiplicités génériques . . . 375
§ 13.3. Degré et degré calibré d'un morphisme quasi-fini . . . 378
§ 13.4. Semi-continuité du degré . . . 381
§ 13.5. Cycles . . . 384
§ 13.6. Fonctions méromorphes en géométrie analytique . . . 387
§ 13.7. Diviseur d'une fonction méromorphe régulière . . . 388
§ 13.8. Extensions d'Abhyankar et leur défaut . . . 389

14. Calibrage canonique d'un espace analytique . . . 395
§ 14.1. Cellules commodes et moments agréables . . . 395
§ 14.2. Moments et degrés . . . 399
§ 14.3. Calibrages canoniques . . . 406
§ 14.4. Calibrages canoniques et morphismes finis . . . 409
§ 14.5. Calibrages et tropicalisations . . . 410
§ 14.6. Cônes tropicaux . . . 412
§ 14.7. Variation des tropicalisations . . . 417

15. Formes différentielles réelles en géométrie ultramétrique . . . 421
§ 15.1. Formes et fonctions lisses . . . 421
§ 15.2. Séparation holomorphe . . . 423
§ 15.3. Extension des scalaires . . . 425
§ 15.4. Intégrales et morphismes finis . . . 425
§ 15.5. Existence de tropicalisations (presque) globales . . . 426
§ 15.6. Harmonie intérieure . . . 429
§ 15.7. L'espace tropical associé à un espace analytique . . . 432

16. Courants sur les espaces analytiques . . . 435
§ 16.1. Quelques formules . . . 435
§ 16.2. Continuité des intégrales fibre : cas des squelettes . . . 438
§ 16.3. Continuité des intégrales fibre : cas général . . . 444
§ 16.4. Les espaces de Berkovich stricts sont très riches . . . 451
§ 16.5. Formule de projection . . . 454
§ 16.6. Courants et cycles . . . 459
§ 16.7. La formule de Poincaré–Lelong . . . 460
§ 16.8. Support des courants positifs fermés . . . 463
§ 16.9. Négligeabilité des ensembles polaires . . . 466

Partie III. Fibrés métrisés et courbures . . . 469

17. Fibrés vectoriels métrisés . . . 471
§ 17.1. Métriques . . . 471
§ 17.2. Métriques paralinéaires . . . 474

§ 17.3. Fibré résiduel d'un fibré paralinéaire entier . . . 476
§ 17.4. Propriétés du foncteur de réduction des fibrés métrisés . . . 480
§ 17.5. Fibrés résiduels : le cas strict . . . 486
§ 17.6. Dimension de définition d'un fibré métrisé paralinéaire entier . . . 489
§ 17.7. Métriques formelles . . . 492
§ 17.8. Métriques psh . . . 496

18. Produits de courants de courbure . . . 501
§ 18.1. Courbure d'un fibré en droites métrisé . . . 501
§ 18.2. Le courant canonique d'une courbe . . . 504
§ 18.3. Produits de courants de courbure . . . 514
§ 18.4. Opérateur de Monge-Ampère (métriques paralinéaires) . . . 520
§ 18.5. Calculs formels . . . 527
§ 18.6. Opérateur de Monge-Ampère relatif . . . 532
§ 18.7. Formules de Bochner–Martinelli et Levine . . . 534
§ 18.8. Produits de courants de courbure (métriques formelles) . . . 538
§ 18.9. Détecter la positivité par une sous-variété . . . 543

19. Variétés abéliennes . . . 547
§ 19.1. Métriques sur les fibrés en droites sur les variétés abéliennes . . . 547
§ 19.2. Métriques cubistes et uniformisation . . . 551
§ 19.3. Positivité des métriques canoniques . . . 557

Appendices . . . 561

A. Compléments d'analyse et de topologie . . . 563
§ A.1. Paracompacité . . . 563
§ A.2. Séparation, densité et partitions de l'unité . . . 564
§ A.3. Rappels de quelques faits de théorie de la mesure . . . 568
§ A.4. Rappels d'analyse convexe . . . 572

B. Structure des variétés abéloïdes . . . 577
§ B.1. Géométrie analytique et géométrie formelle . . . 577
§ B.2. Adhérence de Zariski des diviseurs de Cartier . . . 580
§ B.3. Corps de définition des domaines analytiques . . . 581
§ B.4. Espaces formellement analytiques . . . 582
§ B.5. Le théorème d'uniformisation . . . 587
§ B.6. Fibrés en droites sur une variété abéloïde . . . 592

Bibliographie . . . 597

Index . . . 607

INTRODUCTION

Cet article propose une théorie des formes différentielles et des courants à valeurs réelles sur un espace analytique au sens de Berkovich. Avant d'en décrire la teneur, expliquons un peu la philosophie qui nous a guidés.

§ 0.1. CONTEXTE ET PHILOSOPHIE

0.1.1. — Pour des problèmes de géométrie arithmétique sur un corps de fonctions $k(C)$, où C est une variété algébrique projective sur un corps k, il est courant et fructueux de considérer un objet défini sur $k(C)$ (variété, faisceau, morphisme...) comme un germe d'objet sur C puis de le prolonger sur C tout entier. La conjecture de Mordell sur les corps de fonctions devient alors un énoncé sur les sections d'une surface projective fibrée en courbes de genre au moins 2 au-dessus d'une courbe projective. On peut alors utiliser tout l'attirail de la géométrie algébrique sur cette surface, notamment la théorie de l'intersection.

Sur les corps de nombres, la théorie des schémas de Grothendieck donne un corps à ce principe. Cependant, le spectre Spec($\mathbf{Z}$) de $\mathbf{Z}$ est un schéma affine de dimension 1, donc l'analogue d'une courbe algébrique affine, et n'a pas de compactification naturelle. Une telle compactification ne serait vraisemblablement pas définissable uniquement par l'algèbre. La nullité du degré du diviseur d'une fonction sur une courbe projective a pour analogue la formule du produit. Dans cette analogie, c'est ainsi aux points fermés d'une courbe affine que correspondent les idéaux maximaux de $\mathbf{Z}$, et le rôle des points à l'infini sera joué par la valeur absolue usuelle, archimédienne, de $\mathbf{Z}$, un objet de nature plus analytique, ou en tout cas topologique.

La théorie d'Arakelov ([**3, 63, 70**]) vise à pallier cette asymétrie en proposant une théorie de l'intersection arithmétique sur les schémas réguliers, de type fini sur $\mathbf{Z}$. Dans cette théorie, les objets algébriques (cycles, fibrés vectoriels,...) sont munis de structures supplémentaires définies par la géométrie analytique complexe (courants de Green, métriques hermitiennes,...). Cette théorie a donné lieu à de très beaux développements

(par exemple, un théorème de Riemann-Roch arithmétique) et à des applications importante en géométrie diophantienne classique (hauteur de cycles **[64, 28]**, théorèmes d'équidistribution de points de petite hauteur **[124]**, preuve de la conjecture de Bogomolov **[135, 143]**).

0.1.2. — Dans ce travail, nous avons souhaité remettre toutes les places sur le même plan, non pas en inventant une structure algébrique aux places archimédiennes, mais en tâchant de définir une structure analytique aux places ultramétriques. Ce n'est certes pas une idée originale.

La théorie d'Arakelov non archimédienne **[13]** est une première élaboration. Étant donnée une variété algébrique X sur le corps des fractions K d'un anneau de valuation discrète R, ces auteurs travaillent non pas avec un modèle fixé $\mathscr{X}/R$, mais avec le système projectif de tous les modèles. Pour des raisons techniques, ils doivent se restreindre aux modèles réguliers dont la fibre spéciale est un diviseur à croisements normaux stricts. Lorsque la caractéristique résiduelle de R est strictement positive, cela les oblige à admettre l'existence d'une résolution des singularités plongée. Indépendamment de cette restriction (le cas où $R = \mathbf{C}[\![t]\!]$ est déjà très intéressant), leur théorie reste de nature très algébrique : formes, courants sont définis comme des systèmes compatibles de cycles sur les différents modèles (pour des applications convenables fournies par la théorie de l'intersection).

Dans le cas des courbes, la thèse **[133]** d'A. Thuillier fournit une théorie d'Arakelov analytique à toutes les places fondée sur les espaces de Berkovich aux places ultramétriques et sur l'analyse complexe aux places archimédiennes. Dans le cas d'une courbe sur un corps ultramétrique, il y développe aussi une théorie du potentiel formellement analogue à celle qui vaut sur les surfaces de Riemann. Le cas de la droite projective a été développé indépendamment par **[5, 4]**. Ces considérations recoupent aussi les travaux de **[116, 65, 66]** en dynamique non archimédienne.

En dimension arbitraire, la théorie des mesures sur les espaces de Berkovich (due au premier auteur **[38]** et raffinée par **[76]**) fournit une troisième incarnation de cette idée. Si X est propre, de dimension n, et si $\overline{L}$ est un fibré en droites sur X muni d'une métrique admissible au sens de **[142]**, on construit une mesure sur l'espace analytique X^{an} associé à X/K par Berkovich que nous notons $c_1(\overline{L})^n$. En effet, cette mesure est un analogue de la mesure de même nom lorsque $\overline{L}$ est un fibré en droites hermitien sur une variété analytique compacte de dimension n. Sa masse totale est égale au degré $\deg(c_1(L)^n|X)$ de X pour L. Elle donne aussi lieu à des théorèmes d'équidistribution des points de petite hauteur tout à fait analogues à ceux évoqués plus haut dans le cas archimédien (**[38, 5, 65, 77, 139]**). Voir aussi **[39]** pour un survol de la théorie qui met en parallèle les cas archimédien et ultramétrique. Dans **[77]**, Gubler montre comment les idées de **[135, 143]** se transposent et permettent de prouver la conjecture de Bogomolov sur les corps de fonctions lorsque la variété abélienne sous-jacente est « totalement dégénérée ».

Divers mathématiciens se sont aussi intéressé à l'analogue du théorème de Yau (conjecture de Calabi) dans ce contexte. Citons un travail non publié de Kontsevich et Tschinkel (2000). Plus récemment, l'unicité d'une métrique conduisant à une mesure prescrite (théorème de Calabi) est prouvée dans **[138]** en adaptant la preuve de **[14]**. L'article **[94]** construit quelques solutions dans le cas de variétés abéliennes totalement dégénérées. Les articles **[31, 32]** prouvent l'existence de solutions dans de nombreux cas algébriques.

§ 0.2. CET ARTICLE

0.2.1. — Dans le cas d'un fibré en droites hermitien $\overline{L}$ sur une variété complexe X $c_1(\overline{L})$ est une forme différentielle de type $(1,1)$ et sa puissance $c_1(\overline{L})^n$ est une forme de type (n,n), laquelle donne lieu à une mesure si X est de dimension n. La théorie des mesures de **[38]** avait ceci d'insatisfaisant qu'elle définissait une mesure $c_1(\overline{L})^n$ tout en s'avérant incapable de donner un sens à l'objet $c_1(\overline{L})$, lorsque $\overline{L}$ est un fibré métrisé sur une variété algébrique propre de dimension n sur un corps valué complet.

Combler cette frustration est la raison d'être du présent travail.

Au passage, nous étendons la théorie en traitant des variétés analytiques ni nécessairement algébriques, ni nécessairement compactes. Le caractère local des mesures $c_1(\overline{L})^n$ (établi dans **[39]**) apparaîtra ainsi bien plus naturellement.

Soit donc k un corps valué complet, non archimédien. Soit X un espace k-analytique au sens de Berkovich **[8, 9]**.

0.2.2. Fonctions et formes lisses. — Nous appelons *fonction lisse* sur X une fonction sur X à valeurs réelles qui s'écrit localement $\varphi(\log|f_1|,\dots,\log|f_r|)$, où $f_1,\dots,f_r \in \mathscr{O}_X^\times$ sont des fonctions holomorphes inversibles sur X et φ est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^r$ à valeurs réelles. Les fonctions lisses forment un sous-faisceau $\mathscr{A}_X$ du faisceau des fonctions continues sur X à valeurs réelles. Si X est bon et paracompact, par exemple si X est l'analytifié d'une variété algébrique, ce faisceau est fin.

Plus généralement, si p et q sont deux entiers naturels, nous définissons une notion de forme différentielle lisse de type (p,q) sur X, qui redonne la notion de fonction lisse pour $(p,q)=(0,0)$. Ce sont naturellement les sections de faisceaux $\mathscr{A}_X^{p,q}$ qui sont nuls si $p>\dim(X)$ ou $q>\dim(X)$. La somme directe de ces faisceaux est une algèbre bigraduée commutative ; elle est munie d'opérateurs différentiels d' et d'' de degrés $(1,0)$ et $(0,1)$ et de carrés nuls.

Si $\dim(X)=n$, on peut intégrer les formes de type (n,n), pourvu bien entendu qu'elles soient intégrables, ce qui est par exemple le cas si leur support est compact. Si X est l'analytifié d'une variété propre, l'intégrale d'une forme sur X de la forme $\mathrm{d}'\omega$ est nulle.

Plus généralement, Berkovich a introduit la notion de *bord* $\partial(X)$ de l'espace analytique X et nous définissons aussi l'intégrale d'une forme de type $(n-1,n)$ sur ce bord. Ces définitions donnent lieu à l'analogue de la *formule de Stokes* :

$$\int_X \mathrm{d}'\,\omega = \int_{\partial(X)} \omega,$$

si ω est une forme à support compact de type $(n-1,n)$ sur X.

0.2.3. Courants. — Nous introduisons alors la notion de courant. Comme chez Schwartz et De Rham, ceux-ci sont définis comme les formes linéaires sur l'espace des formes différentielles lisses à support compact (et, techniquement, qui évitent le bord) qui vérifient une condition de continuité convenable. Par l'intégration des formes différentielles de type (n,n) et le produit extérieur, les formes s'identifient à des courants. L'intégration sur X, sur un sous-espace de X, une mesure sur $\mathrm{Int}(X)$, donnent aussi lieu à des courants.

Si f est une fonction méromorphe régulière sur X (c'est-à-dire définie sur un ouvert de Zariski dense), la fonction $\log|f|$ définit un courant. Notons $\mathrm{div}(f)$ le diviseur de f (un cycle de codimension 1 sur X) et $\delta_{\mathrm{div}(f)}$ le courant sur X qui se déduit par linéarité

des divers courants d'intégration sur les composantes de $\mathrm{div}(f)$. Nous prouvons alors l'analogue de la *formule de Poincaré-Lelong* :

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''\log|f| = \delta_{\mathrm{div}(f)}.$$

0.2.4. — Étant donné un fibré en droites L sur X, on définit alors naturellement la notion de métrique lisse sur L. Grâce à la formule de Poincaré-Lelong, un tel fibré métrisé $\overline{L}$ possède une forme de courbure $c_1(\overline{L})$, définie de façon analogue à la forme de courbure d'un fibré en droites hermitien sur une variété complexe.

Si X est l'analytifié d'une variété algébrique propre de dimension n, on démontre alors à l'aide de la formule de Stokes que l'intégrale sur X de la (n,n)-forme lisse $c_1(\overline{L})^n$ est égal au degré d'intersection $\deg(c_1(L)^n \cap [X])$.

D'autre part, un modèle formel $(\mathfrak{X}, \mathfrak{L})$ de (X, L) sur k° fournit naturellement une métrique continue (qualifiée de *formelle*) sur L. Pour une telle métrique, la norme d'une section locale de L est égale au maximum d'une famille finie de valeurs absolues de certaines fonctions holomorphes inversibles. Ainsi, et contrairement à l'intuition véhiculée par les articles précédents, une métrique formelle n'est *pas* lisse en général.

Cela fournit un point de contact entre la théorie du présent article et le mémoire [**100**] sur la théorie d'Arakelov des variétés toriques. Ce dernier travail étudie en détail les métriques hermitiennes naturelles sur les fibrés en droites hermitiens sur une variété torique complexe — définies précisément par des maximum de valeurs absolues de fonctions holomorphes. Un tel fibré en droite hermitien possède une courbure, laquelle n'est plus une forme différentielle mais un courant. Un outil crucial de [**100**] est fourni par la théorie de [**6, 44**] qui permet de les multiplier. (Rappelons que les courants ne sont en général pas plus multipliables que ne le sont les distributions.) Le fait essentiel est que la fonction $\max(x_1, \ldots, x_r)$ sur $\mathbf{R}^r$ est limite uniforme de fonctions convexes lisses.

0.2.5. — Nous définissons ainsi des notions de formes et courants positifs. Cela nous amène à développer les rudiments de la théorie des fonctions plurisousharmoniques — une fonction lisse u est dite plurisousharmonique si $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u$ est un courant positif. En fait, les seules fonctions plurisousharmoniques que nous considérerons dans cet article sont des limites uniformes de fonctions lisses plurisousharmoniques. En copiant les arguments de [**6, 44**], nous pouvons définir des produits de courants $T \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_r$, où T est un courant positif et $u_1, \ldots, u_r$ des fonctions plurisousharmoniques comme ci-dessus.

Grâce à cette théorie, on peut multiplier les courants de courbure des fibrés en droites munis de métriques formelles. Nous prouvons alors que la théorie développée ici redonne les mesures définies dans [**38**] qui correspondent au cas où le nombre de fibrés en droites est égal à la dimension.

La théorie construite dans ce dernier article partait du cas des métriques formelles, alors considérées comme métriques « lisses ». La théorie de l'intersection sur la fibre spéciale du modèle formel fournissait des mesures atomiques sur X ; un argument d'approximation permettait de construire des mesures pour des fibrés en droites munis de métriques plus générales. Dans le présent article, le point de vue est renversé : les métriques formelles ne sont pas lisses, mais limites uniformes de métriques lisses convenables, et les mesures associées ne sont définies que via un passage à la limite.

0.2.6. — Notre théorie de l'intégration des formes offre d'autres analogies avec la théorie complexe. Par exemple, nous démontrons un théorème de continuité (et de lissité) des intégrales fibre, analogue au théorème de Stoll [**123**].

Nous démontrons aussi des analogues des formules de Levine et de Bochner–Martinelli en théorie des courants.

Mentionnons également l'article **[58]** où des limites de familles à un paramètre d'intégrales complexes sont interprétées comme des intégrales au sens de travail sur des espaces analytiques sur le corps $\mathbf{C}(\!(T)\!)$.

0.2.7. — Dans un dernier chapitre, nous appliquons notre théorie au cas des variétés abéliennes au moyen de la théorie de l'uniformisation de Tate–Raynaud. Nous décrivons les métriques canoniques sur les fibrés en droite et les mesures de Monge–Ampère associées.

0.2.8. — La construction des faisceaux de formes différentielles repose sur un travail récent d'A. Lagerberg **[92]** dont le but est d'adapter les outils classiques de la théorie du pluripotentiel sur les variétés complexes à l'analyse convexe sur des espaces vectoriels réels.

Pour tout ouvert U de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$, Lagerberg construit une algèbre bigraduée commutative $\mathscr{A}^{*,*}(U)$ en dédoublant le complexe de De Rham de $\mathbf{R}^n$: pour tous $(p,q) \in \mathbf{N}^2$,

$$\mathscr{A}^{p,q}(U) = \mathscr{C}^\infty(U) \otimes \bigwedge^p (\mathbf{R}^n)^* \otimes \bigwedge^q (\mathbf{R}^n)^*.$$

En particulier, $\mathscr{A}^{0,0}(U)$ est l'algèbre des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur U. Pour $i \in \{1,\dots,n\}$, on note $\mathrm{d}' x_i$ et $\mathrm{d}'' x_i$ la i-ieme forme coordonnée vue respectivement dans $\mathscr{A}^{1,0}$ et $\mathscr{A}^{0,1}$. Cette algèbre possède deux dérivations, notées d' et d'', analogues des dérivations holomorphes et antiholomorphes. Elles sont caractérisées par la formule

$$\mathrm{d}' f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \mathrm{d}' x_i \quad \text{et} \quad \mathrm{d}'' f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \mathrm{d}'' x_i,$$

si f est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur U. Cette algèbre possède aussi une involution qui échange d' et d''.

L'opérateur $(\mathrm{d}'\mathrm{d}'' f)^n$ est l'analogue de l'opérateur de Monge-Ampère complexe ; il s'exprime d'ailleurs en termes de l'opérateur de Monge-Ampère réel : on a en effet

$$(\mathrm{d}'\mathrm{d}'' f)^n = n! \det\left(\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\Big)\right) \mathrm{d}' x_1 \wedge \mathrm{d}'' x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}' x_n \wedge \mathrm{d}'' x_n.$$

Les éléments de $\mathscr{A}^{p,q}(U)$ sont appelées *superformes* de type (p,q) sur U ; le préfixe super est ajouté par référence à la superanalyse de Berezin ; comme nous n'utiliserons pas cette dernière, nous nous permettrons souvent d'omettre ce préfixe.

Une (n,n)-forme ω sur un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ s'écrit

$$\omega = \omega^\sharp\, \mathrm{d}' x_1 \wedge \mathrm{d}'' x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}' x_n \wedge \mathrm{d}'' x_n,$$

où $\omega^\sharp$ est une fonction $\mathscr{C}^\infty$. Son intégrale est alors définie par la formule

$$\int_U \omega = \int_U \omega^\sharp(x_1,\dots,x_n)\, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n.$$

Cela donne automatiquement naissance à une théorie des courants. Il y a aussi une notion de forme positive, de courant positif ; les fonctions convexes sont caractérisées par la positivité de leur image par l'opérateur $\mathrm{d}'\mathrm{d}''$, etc.

0.2.9. — Le lien entre espaces de Berkovich et espaces réels est fourni par la « géométrie tropicale ».

Le point de vue tropical en géométrie analytique sur un corps valué k (ultramétrique ou non) consiste à approcher un espace analytique X par ses *tropicalisations*, ou *amibes*, images de X dans $\mathbf{R}^n$ par des applications de la forme $x \mapsto (\log|f_1(x)|, \dots, \log|f_n(x)|)$, où $f_1, \dots, f_n$ sont des fonctions analytiques inversibles sur X. Introduit initialement dans le cas où k est le corps des nombres complexes et X est une variété algébrique (voir **[7, 136, 104]**), ce point de vue a ensuite été développé dans le cas ultramétrique (citons notamment **[12, 61, 76]**).

Il est fondamental que les amibes sont alors des sous-espaces linéaires par morceaux de $\mathbf{R}^n$, connexes si X est connexe. Ce fait, initialement démontré dans **[12]**, a ensuite reprouvé par **[76]** à l'aide d'un argument de Berkovich issu de son analyse locale **[11]** des espaces analytiques (qui repose sur l'existence d'altérations **[90]**), puis dans **[50]** comme conséquence de l'élimination des quantificateurs pour les corps valués algébriquement clos. Voir aussi l'article **[107]** pour une autre incarnation du lien intime entre géométrie analytique et géométrie tropicale.

0.2.10. — Plaçons nous pour commencer en géométrie analytique complexe. Soit X une variété analytique complexe, $f_1, \dots, f_n$ des fonctions holomorphes inversibles sur X et $f = (f_1, \dots, f_n) \colon X \to (\mathbf{C}^*)^n$ l'application qui s'en déduit. Notons $f_{\mathrm{trop}} \colon X \to \mathbf{R}^n$ la composition de f et de l'application $(\mathbf{C}^*)^n \to \mathbf{R}^n$ donnée par $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (\log|u_1|, \dots, \log|u_n|)$.

Par les formules

$$f^*u = u \circ f_{\mathrm{trop}}, \quad f^* \,\mathrm{d}' x_i = \mathrm{d}\log|f_i| \quad \text{et} \quad f^* \,\mathrm{d}'' x_i = \mathrm{d}\,\mathrm{Arg}(f_i),$$

une superforme ω de type (p, q) sur $\mathbf{R}^n$ donne lieu à une forme différentielle réelle $f^*\omega$ de degré $p + q$ sur X. On prendra garde que $f^*\omega$ n'est pas forcément de type (p, q) : cela se voit déjà sur $f^* \,\mathrm{d}' x_i$ qui contient une composante holomorphe et une composante antiholomorphe. En revanche, si ω est de type (p, p) et symétrique, $f^*\omega$ est de type (p, p).

0.2.11. — Revenons maintenant au cas des espaces analytiques sur un corps ultramétrique k. Soit X un tel espace. La définition d'une forme lisse de type (p, q) est définie en considérant des tropicalisations locales $f \colon X \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^r$ et des superformes sur l'image $f_{\mathrm{trop}}(X)$ dans $\mathbf{R}^r$, une fois adaptée la définition de Lagerberg au cas des espaces linéaires par morceaux.

En revanche, si X est de dimension n, on voudrait définir l'intégrale d'une forme de type (n, n) de la forme $f^*\omega$ comme la somme des intégrales à la Lagerberg sur les sous-espaces de dimension n de $f_{\mathrm{trop}}(X)$. Cela pose deux problèmes supplémentaires :

– L'intégrale définie par Lagerberg dépend du système de coordonnées canonique sur $\mathbf{R}^n$ et ses sous-espaces linéaires n'en disposent pas a priori ;

– Si l'on pense à la formule de projection en théorie de l'intersection, ou à la formule du changement de variables dans les intégrales multiples, l'intégrale de $f^*\omega$ ne peut être égale à $\int \omega$ qu'à un facteur correctif près, espèce de degré de f.

Nous les résolvons simultanément en introduisant la notion de *calibrage* μ d'un sous-espace linéaire par morceaux de dimension n de $\mathbf{R}^r$. À des questions d'orientation près, il s'agit essentiellement d'une famille de n-vecteurs définis face par face. En contractant la superforme ω de type (n, n) par ces n-vecteurs, on la transforme en une n-forme

différentielle $\langle \omega, \mu \rangle$ sur l'espace linéaire par morceaux, forme qu'on intègre de façon usuelle. La théorie de Lagerberg correspond au choix du n-vecteur $\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \ldots \frac{\partial}{\partial x_n}$ sur $\mathbf{R}^n$.

Si X est compact, nous définissons alors un calibrage canonique μ_f de $f_{\mathrm{trop}}(X)$. Négligeant ici des problèmes de bord, le fait que, lorsque $r = n$, f soit *fini et plat* au-dessus du squelette de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$, et le degré de f en ces points, intervient crucialement dans cette construction.

Signalons qu'il aurait peut-être été possible d'éviter d'introduire cette notion de calibrage en utilisant des structures $\mathbf{Z}$-linéaires sur les espaces linéaires par morceaux considérés mais nous n'avons pas développé cette approche.

0.2.12. — Une variante de ces constructions conduit à l'intégrale sur le bord de X d'une forme de type $(n-1, n)$ et la formule de Stokes se déduit de celle en géométrie différentielle. Si la définition de l'intégrale de bord considère les bords des tropicalisations, un avatar de la condition d'équilibre en géométrie tropicale permet de prouver que la terminologie est justifiée, au sens où l'intégrale sur le bord de X d'une forme nulle au voisinage du bord est nulle.

0.2.13. — En fait, la description des paragraphes précédents correspond à la construction mise au point dans une première version de ce texte et il s'est avéré commode de calculer les intégrales sur l'espace X lui-même plutôt que sur ses tropicalisations.

Plus précisément, un espace analytique est muni d'une classe de parties linéaires par morceaux naturelles, que nous appelons parties squelettiques. Ce sont ces dernières que nous calibrons et sur lesquelles les intégrales se calculent, au moyen de cartes affines.

Un intérêt de cette approche est qu'elle permet de faire des raisonnement non seulement locaux, mais également G-locaux, sur l'espace analytique X. Au passage, cela nous a conduit à développer une théorie des fonctions G-lisses et des G-formes ; les fonctions G-lisses sont les analogues des fonctions lisses par morceaux sur une variété réelle ou complexe.

0.2.14. — Sur la base de la première version de ce texte, W. Gubler et K. Künnemann ont développé une théorie voisine des δ-formes qui, dans notre langage, donnent lieu à des courants d'un certain type, qui combinent nos formes et des cycles tropicaux sur l'espace affine d'une tropicalisation. La construction du produit des δ-lisses repose alors sur le produit des formes lisses et sur la théorie de l'intersection tropicale.

Nous avons ainsi été conduits à réinterpréter la théorie de l'intersection tropicale dans notre cadre, par des méthodes à la Bedford–Taylor. (A. Mihatsch **[102]** a également proposé une telle interprétation.)

Cela nous a amené à considérer le produit d'un espace analytique au sens de Berkovich et d'un espace affine réel, et les formes et courants sur celui-ci. Il a donc fallu munir ce produit d'une structure convenable, que nous avons appelée *espace tropical* : ce sont des espaces munis de classes convenables de parties squelettiques et de tropicalisations, les deux exemples extrêmes étant les espaces analytiques et les espaces linéaires par morceaux.

De fait, toute la théorie précédente est menée d'abord dans ce cadre abstrait qui occupe la première partie du livre. A posteriori, il nous semble que ce partage permet de distinguer clairement la part de la géométrie linéaire par morceaux et celle de la géométrie algébrique/analytique dans notre théorie des formes et courants.

0.2.15. — Nous nous sommes efforcés de rédiger le texte dans la généralité maximale compatible avec nos compétences techniques. Ainsi, on ne se limite pas aux espaces analytiques algébriques, on ne les suppose pas lisses, ni même réduits. En fait, notre théorie est très « générique » ; par exemple, les supports des formes lisses de degré maximal ne rencontrent aucun fermé de Zariski d'intérieur vide, en particulier aucun point rigide (en dimension > 0). Ainsi, des hypothèses de lissité, etc. n'interviendraient jamais de façon cruciale au cours des preuves.

La théorie est valable en toute caractéristique. Elle n'utilise à aucun moment la résolution des singularités (Hironaka, Temkin) ni même l'existence d'altérations (De Jong), notamment grâce à l'article **[50]** du second auteur qui permet de dégager, via la théorie des modèles, les propriétés des tropicalisations et des squelettes. Nous n'utilisons pas de modèles formels pour développer la théorie (mais ils fournissent une source importante d'exemples). Toutefois, nous faisons appel à des arguments de réduction, proches de ceux permis par la géométrie formelle, mais de nature plus locale et techniquement plus aisés, fournis par la théorie de Temkin **[126, 127]**.

La théorie est aussi valable en valuation triviale. C'est d'ailleurs un point crucial pour le calcul des opérateurs de Monge–Ampère associés aux métriques formelles qui repose sur la théorie appliquée au corps résiduel du corps de base, corps résiduel que l'on munit de la valeur absolue triviale.

§ 0.3. PROLONGEMENTS

Depuis la parution de la première version de ce texte, de nombreux travaux en ont utilisé les définitions et les méthodes, en ont proposé des variantes et des approfondissements.

Mentionnons ici quelques uns, qui nous paraissent les plus significatifs, en présentant par avance nos excuses pour les éventuelles omissions.

0.3.1. — Pour l'opérateur différentiel d'', les formes lisses sur un espace analytique X donnent lieu à un analogue du complexe de Dolbeault. Dans le cas algébrique, **[87]**, Jell a démontré que ce complexe fournit une résolution du faisceau constant $\mathbf{R}$, et plus généralement du faisceau des $(p, 0)$-formes. Sa preuve s'étend en général. Notons que ce complexe est de longueur $\dim(X)$, de façon compatible au fait que la dimension topologique de X est au plus égale à sa dimension.

Jell **[88]** a démontré que, même pour une courbe propre, la cohomologie de ces complexes de Dolbeault peut être de dimension infinie. Jell et Wanner **[89]** ont observé que ce n'est néanmoins pas le cas pour les courbes de Mumford, c'est-à-dire celles dont la réduction est maximalement dégénérée ; dans ce cas, il y a même un analogue de la dualité de Poincaré.

Pour remédier à ce défaut, Gubler, Jell et Rabinoff **[79]** ont construit une variante de notre théorie des formes lisses dans laquelles les tropicalisations sont, non pas seulement de la forme $\log|f|$ pour une fonction analytique inversible f, mais des « fonctions harmoniques » dans un sens permis par la théorie d'intersection sur le corps résiduel. Nous avons réinterprété une partie de ce travail sous le vocable de « G-formes harmoniquement tropicalisées » ; comme déjà dans remarqué dans **[79]**, de telles formes apparaissent

naturellement dans la théorie des variétés abéliennes lorsque leur extension de Raynaud n'est pas isotriviale.

Dans [**95**], Liu construit la classe de Chern d'un cycle de codimension p sur une variété algébrique propre X à valeurs dans le groupe $H^{p,p}(X)$ de cohomologie de Dolbeault. Pour une variété définie sur $\mathbf{Q}$, il démontre en particulier qu'un cycle (défini sur $\mathbf{Q}$) dont la classe de cohomologie de de Rham complexe usuelle est nulle a également une classe nulle pour toutes les cohomologie de Dolbeault non archimédiennes associées aux différentes places finies de $\mathbf{Q}$.

La cohomologie de ce complexe de Dolbeault est très certainement liée aux groupes d'homologie tropicaux de [**86**], mais nous n'avons pas d'énoncé formel précis à proposer.

0.3.2. — Nous avons déjà mentionné la théorie des δ-formes de Gubler et Künnemann [**80**]. Signalons l'article de Mihatsch [**103**] dans lequel il raffine leur construction et, surtout, en donne une application à la théorie de l'intersection sur les tours de Lubin–Tate.

0.3.3. — La résolution par Yau du problème de Monge–Ampère fut un progrès majeur de la géométrie complexe. L'analogue non archimédien a été proposé par Kontsevich et Tschinkel et résolu par Boucksom, Favre et Jonsson dans [**33, 34**]. Dans l'esprit, leur théorie est liée à celle de ce texte mais les définitions et les méthodes sont différentes, car elles reposent d'emblée sur la considération de modèles et de la théorie de l'intersection sur leur fibre spéciale.

0.3.4. — Dans [**30**], Boucksom et Eriksson construisent une variante de l'accouplement de Deligne dans notre théorie. Cet accouplement est également considéré dans l'article [**140**] de Yuan et Zhang.

0.3.5. — La notion de forme et de courant positifs est fondamentale dans le développement de notre théorie, où une notion convenable de fonction psh joue un rôle crucial. La définition que nous proposons impose la possibilité d'approximation d'une fonction psh par des fonctions lisses psh. Gubler et Rabinoff ont considéré une définition différente, fondée sur la restriction aux courbes et la théorie de Thuillier des fonctions psh sur les courbes. Ils établissent notamment un principe du maximum. Nous ne savons pas si un tel principe vaut pour les fonctions psh de ce texte.

Notre notion de fonction psh a un lien étroit avec celle de métrique semipositive au sens de Zhang [**142**]. Signalons l'article [**82**] qui étudie plus en détail cette dernière.

Signalons enfin l'article [**29**] dans lequel Botero, Burgos Gil et Sombra étudient la notion de fonction convexe sur un espace linéaire par morceaux.

§ 0.4. PERSPECTIVES

0.4.1. — Qu'est-ce qu'une forme de Kähler dans notre contexte et y a-t-il un analogue du théorème de plongement de Kodaira ? La difficulté vient du fait que le support d'une (n,n)-forme (qui serait la forme associée à la forme de Kähler) est un squelette et donc très petit par rapport à l'espace. L'analogue non archimédien de la métrique de Fubini est certes singulière, mais son courant de courbure est concentré en un point de la droite projective. Dans le cas d'un espace projectif de dimension plus grande, la « forme volume » associée à cette métrique est également concentrée en un point.

0.4.2. — Il serait intéressant de développer une théorie sur $\mathbf{Z}$, dans le cadre des espaces considérés par Poineau dans [**110**]. Mentionnons son étude [**112**] de la variation des mesures d'équilibre en dynamique algébrique. Comme notre théorie est d'essence ultramétrique, il faudra sans doute des arguments nouveaux pour traiter les places archimédiennes.

Il serait également intéressant d'aborder la dynamique non archimédienne au moyen des concepts fournis par le présent travail, de même que l'analyse complexe est un outil essentiel en dynamique complexe.

0.4.3. — Le développement d'une présentation *analytique* de la théorie d'Arakelov non archimédienne était l'une des motivations de ce texte. Même si des premiers résultats ont été donnés Gubler et Künnemann [**80**], puis [**103**] qui prouve qu'un cycle intersection complète possède un courant de Green, ce développement est encore inabouti. Un analogue de la « formule de Mahler », dans l'esprit de [**100, 40**] a été démontré dans [**30**], par une variante de la méthode de [**40**]. Comme le suggère le travail de Mihatsch [**103**], il est vraisemblable qu'un tel développement aura des conséquences sur la géométrie arithmétiques des variétés de Shimura.

§ 0.5. REMERCIEMENTS

C'est en janvier 2010 que nous avons débuté ce travail, au cours d'une visite d'A. D. à A. C.-L., alors que ce dernier passait l'année à l'Institute for Advanced Study de Princeton. Nous voulons remercier l'Institute pour son hospitalité et l'atmosphère qui nous a permis d'entamer un projet qui semblait alors bien hasardeux. A. C.-L. a bénéficié du soutien de la National Science Foundation, agrément No. DMS-0635607, des largesses de l'Institut universitaire de France. Il a été membre des projets *Positive*, *Defigeo* de l'Agence nationale de la recherche. A. D. a bénéficié du soutien de l'Institut universitaire de France, de l'hospitalité du MSRI et de l'institut Weizmann ; il a été membre des projets *BERKO*, *Valcomo*, *Defigeo* de l'Agence nationale de la recherche. Les deux auteurs sont membres du projet *AdAnAr* de cette agence.

Le contenu de cet article a été exposé dans diverses conférences et séminaires, *Algebraic cycles and L-functions,* Regensburg (Allemagne) ; *Number Theory Days,* Zürich (Suisse) ; *Séminaire de géométrie algébrique*, *Séminaire de géométrie tropicale*, *Séminaire de géométrie et théorie des modèles*, Paris, plusieurs sessions des *Nonarchimedean Days* à Regensburg (Allemagne), ainsi que dans une série de trois Simons symposiums ; il a fait l'objet d'un cours à l'université de Westlake, Hangzhou (Chine).

Nous remercions les organisateurs de ces séminaires ainsi que leur public et d'autres collègues pour l'intérêt qu'ils nous ont manifesté, en particulier M. Baker, V. Berkovich, J.-B. Bost, S. Boucksom, J.-P. Demailly, P. Dolbeault, C. Favre, W. Gubler, E. Hrushovski, N. Hultberg, K. Künnemann, I. Itenberg, M. Jonsson, F. Loeser, M. Maculan, A. Mihatsch, C. Peskine, J. Poineau, M. Temkin, A. Thuillier, C. Voisin, A. Werner, X. Yuan et S. Zhang.

Pour terminer, nous présentons nos excuses pour le délai entre la première version (avril 2012) et celle-ci (juillet 2025) et pour la multiplication par cinq du nombre de pages. Nous tâcherons qu'il n'en soit pas de même pour la version définitive.

PARTIE I

GÉOMÉTRIE TROPICALE

CHAPITRE 1

SUPERFORMES SUR UN ESPACE VECTORIEL RÉEL (D'APRÈS LAGERBERG)

§ 1.1. SUPERFORMES SUR UN ESPACE VECTORIEL RÉEL

La construction algébrique suivante est à la base de cet article elle a été introduite par Lagerberg dans **[92]**. Ce sont les versions ponctuelles des espaces de formes qui nous intéresseront plus loin.

Définition 1.1.1. — *Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie. On note $A^{*,*}(V)$ l'algèbre bigraduée commutative somme directe, pour tous $p, q \geqslant 0$, des espaces vectoriels $A^{p,q}(V) = \Lambda^p V^* \otimes \Lambda^q V^*$.*

On dit qu'un élément de $A^{p,q}(V)$ est une *superforme* de type (p, q) sur V. Ces espaces $A^{p,q}(V)$ sont bien sûr nuls si $p > \dim(V)$ ou $q > \dim(V)$.

D'après la formule usuelle calculant l'algèbre extérieure d'une somme directe, $A^{*,*}(V)$ est l'algèbre extérieure de l'espace vectoriel $V^* \oplus V^*$. La condition de commutativité sur cette algèbre est ainsi la suivante : si ω est de type (p, q) et ω' de type (p', q'), alors

$$\omega' \wedge \omega = (-1)^{(p+q)(p'+q')} \omega \wedge \omega'.$$

Pour distinguer les formes linéaires apparaissant dans le premier facteur $\Lambda^p \overrightarrow{V}^*$ de celles apparaissant dans le second $\Lambda^q \overrightarrow{V}^*$, on convient de noter systématiquement les premières avec le préfixe d' et les secondes avec le préfixe d''. Ainsi, si $x \in V^*$, on note $\mathrm{d}' x$ l'élément $x \otimes 1$ dans $A^{1,0}(V)$ et $\mathrm{d}'' x$ l'élément $1 \otimes x$ de $A^{0,1}(V)$.

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une base de V^*. Pour tout couple (I, J) de suites strictement croissantes de $\{1, \ldots, n\}$, où $I = (i_1, \ldots, i_p)$ et $J = (j_1, \ldots, j_q)$, notons $\mathrm{d}' x_I \wedge \mathrm{d}'' x_J$ la superforme de type (p, q) définie par

$$\mathrm{d}' x_I \wedge \mathrm{d}'' x_J = \mathrm{d}' x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}' x_{i_p} \wedge \mathrm{d}'' x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'' x_{j_q}.$$

Ces superformes $\mathrm{d}' x_I \wedge \mathrm{d}'' x_J$ fournissent une base de $A^{p,q}(V)$.

Toute application linéaire f donne lieu à un morphisme d'algèbres évident $f^* \colon A^{*,*}(V) \to A^{*,*}(W)$.

1.1.2. — Il existe un unique automorphisme d'algèbres, $\mathrm{J}\colon A^{*,*}(V) \to A^{*,*}(V)$, tel que $\mathrm{J}(\mathrm{d}' x_i) = \mathrm{d}'' x$ et $\mathrm{J}(\mathrm{d}'' x) = -\mathrm{d}' x$ pour tout $x \in V$.

On a donc $\mathrm{J}^2 \mathrm{d}' x = -\mathrm{d}' x$ et $\mathrm{J}^2 \mathrm{d}'' x = -\mathrm{d}'' x$ pour tout $x \in V$. Par suite, J^2 agit comme $(-1)^{p+q}$ sur $\mathrm{A}^{p,q}(V)$; en particulier J^2 est l'identité sur $\mathrm{A}^{p,p}(V)$. On prendra garde que notre définition diffère de celle de Lagerberg qui posait $\mathrm{J}\,\mathrm{d}'' x = \mathrm{d}' x$; elle fait disparaître des termes de signe ;

On dira qu'une forme ω de type (p, q) est *symétrique* si l'on a $p = q$ et si $\mathrm{J}\omega = \omega$. Les formes symétriques définissent une sous-algèbre commutative de $A^{*,*}(V)$.

§ 1.2. SUPERFORMES POSITIVES

1.2.1. — Comme l'a montré Lagerberg, les superformes fournissent un analogue réel de l'algèbre des formes différentielles réelles sur un espace complexe. Cette analogie se prolonge jusqu'à des notions de positivité qui jouent un rôle crucial dans la théorie. Nous commençons ainsi par décrire un certain nombre de cônes des espaces $A^{p,p}(V)$. Les résultats qui suivent sont pour l'essentiel des adaptations d'énoncés classiques dans le cas complexe ; certains sont énoncés (parfois sans preuve) dans **[92]**.

Définition 1.2.2. — *Soit V un espace vectoriel réel de dimension n, Soit $\omega \in A^{n,n}(V)$. On dit que ω est positive s'il existe une base $(x_1, \ldots, x_n)$ de V^* et un nombre réel $a \geqslant 0$ tel que $\omega = a\,\mathrm{d}' x_1 \wedge \mathrm{d}'' x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}' x_n \wedge \mathrm{d}'' x_n$.*

C'est alors possible pour toute base de V^* ; en effet, si f est un isomorphisme linéaire de V, $f^*(\omega) = \det(f)^2\omega$.

Définition 1.2.3. — *Soit V un espace vectoriel réel de dimension n, soit p un entier naturel et soit $\omega \in A^{p,p}(V)$ une forme* symétrique *de type (p, p) sur V.*

a) *On dit que ω est* faiblement positive *si pour toute famille $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-p})$ de formes de type $(1, 0)$, la (n, n)-forme*

$$\omega \wedge \alpha_1 \wedge \mathrm{J}(\alpha_1) \wedge \cdots \wedge \alpha_{n-p} \wedge \mathrm{J}(\alpha_{n-p})$$

est positive.

b) *On dit que ω est* positive *si pour toute forme α de type $(n - p, 0)$, la (n, n)-forme*

$$(-1)^{(n-p)(n-p-1)/2}\omega \wedge \alpha \wedge \mathrm{J}(\alpha)$$

est positive.

c) *On dit que ω est* fortement positive *s'il existe un entier m, des nombres réels positifs $a_1, \ldots, a_m$ et des formes $\alpha_{j,s}$ de type $(1, 0)$ (pour $1 \leqslant j \leqslant p$ et $1 \leqslant s \leqslant m$) tels que*

$$\omega = \sum_{s=1}^{m} a_s \alpha_{1,s} \wedge \mathrm{J}(\alpha_{1,s}) \wedge \cdots \wedge \alpha_{p,s} \wedge \mathrm{J}(\alpha_{p,s}).$$

Pour l'explication du signe dans la condition *b*), noter que si $\alpha = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m$ est le produit de m formes de type $(1, 0)$, alors

$$\alpha_1 \wedge \mathrm{J}(\alpha_1) \wedge \cdots \wedge \alpha_m \wedge \mathrm{J}(\alpha_m) = (-1)^{m(m-1)/2}\alpha \wedge \mathrm{J}(\alpha).$$

Ces cônes, dont la définition est due à Lagerberg [**92**], sont des analogues de cônes classiquement introduits en géométrie complexe (chapitre III de [**45**], §3.2 de [**91**]). Bien qu'inspirée par celle utilisée en géométrie analytique complexe, la terminologie adoptée en diffère légèrement : les formes faiblement positives sont analogues à celles qui sont simplement appelées positives en géométrie analytique complexe.

1.2.4. — Une $(0,0)$-forme $a \in A^{0,0}(V) = \mathbf{R}$ fortement positive est un nombre réel positif ou nul.

Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de V, une (n,n)-forme ω s'écrit de manière unique $a\, \mathrm{d}'(x_1) \wedge \mathrm{d}''(x_1) \wedge \ldots$; les trois conditions de positivité sont équivalentes à l'inégalité $a \geqslant 0$.

Nous avons restreint les définitions de positivité aux formes symétriques. Rappelons que si $\dim(V) = n$, toute (n,n)-forme antisymétrique est nulle, de sorte qu'une (p,p)-forme antisymétrique est orthogonale à toute $(n-p, n-p)$-forme symétrique.

Ces trois conditions définissent des cônes convexes fermés de l'espace $A^{p,p}_{\mathrm{sym}}(V)$ des formes symétriques de type (p,p). Par définition, une forme symétrique α de type (p,p) est faiblement positive si et seulement si $\alpha \wedge \beta$ est positive pour toute forme β fortement positive de type $(n-p, n-p)$. La bidualité des cônes convexes fermés en dimension finie (theorem 14.1 de [**118**]) entraîne que α est fortement positive si et seulement si $\alpha \wedge \beta$ est positive pour toute forme faiblement positive β.

Nous verrons plus bas (corollaire 1.2.9) que la condition de positivité est auto-duale : une forme α de type (p,p) est positive si et seulement si $\alpha \wedge \beta$ est positive pour toute forme positive β de type $(n-p, n-p)$.

Une forme fortement positive est positive, une forme positive est faiblement positive.

***Proposition 1.2.5* ([92], proposition 2.2).** — *Une forme symétrique ω de type (p,p) sur V est faiblement positive si et seulement si pour tout espace vectoriel W de dimension p et toute application linéaire $f\colon W \to V$, la forme $f^*\omega$ est positive.*

Démonstration. — Soit ω une forme de type (p,p) telle que la forme $f^*\omega$ soit positive pour tout espace vectoriel W de dimension p et toute application linéaire $f\colon W \to V$; démontrons que ω est faiblement positive. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-p}$ des formes de type $(1,0)$ sur V ; posons

$$\mu = \omega \wedge \alpha_1 \wedge \mathrm{J}(\alpha_1) \wedge \cdots \wedge \alpha_{n-p} \wedge \mathrm{J}(\alpha_{n-p}).$$

On doit prouver que μ est positive. Si les formes α_j sont linéairement dépendantes,

$$\alpha_1 \wedge \mathrm{J}(\alpha_1) \wedge \cdots \wedge \alpha_{n-p} \wedge \mathrm{J}(\alpha_{n-p}) = 0,$$

donc $\mu = 0$. On peut donc supposer qu'elles sont linéairement indépendantes. Soit $\alpha_{n-p+1}, \ldots, \alpha_n$ des formes de type $(1,0)$ de sorte que la famille $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ soit une base de V^* ; soit $(v_1, \ldots, v_n)$ la base duale. Soit $f\colon \mathbf{R}^p \to V$ l'application linéaire donnée par $f(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{i=1}^{p} x_i v_{n-p+i}$ et soit $g\colon \mathbf{R}^{n-p} \to V$ l'application linéaire donnée par $g(y_1, \ldots, y_{n-p}) = \sum_{j=1}^{n-p} y_j v_j$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, n-p\}$, on a $f^*(\alpha_j) = 0$ et $g^*(\alpha_j) = \mathrm{d}' y_j$. Soit $(f,g)\colon \mathbf{R}^n \to V$ l'application linéaire définie par $(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_{n-p}) \mapsto f(x_1, \ldots, x_p) + g(y_1, \ldots, y_{n-p})$; c'est un isomorphisme. De plus,

$$\begin{aligned}(f,g)^*\mu &= (f,g)^*(\omega \wedge \alpha_1 \wedge \mathrm{J}(\alpha_1) \wedge \cdots \wedge \alpha_{n-p} \wedge \mathrm{J}(\alpha_{n-p}) \\ &= (f,g)^*(\omega) \wedge \mathrm{d}' y_1 \wedge \mathrm{d}'' y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}' y_{n-p} \wedge \mathrm{d}'' y_{n-p}.\end{aligned}$$

En outre, $(f,g)^*(\omega) = f^*(\omega) + g^*(\omega)$ et

$$g^*(\omega) \wedge \mathrm{d}' y_1 \wedge \mathrm{d}'' y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}' y_{n-p} \wedge \mathrm{d}'' y_{n-p} = 0.$$

Ainsi,

$$(f,g)^*\mu = f^*(\omega) \wedge \mathrm{d}'\, y_1 \wedge \mathrm{d}''\, y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\, y_{n-p} \wedge \mathrm{d}''\, y_{n-p}.$$

La positivité de la (p,p)-forme $f^*(\omega)$ entraîne donc celle de $(f,g)^*(\mu)$. Comme (f,g) est un isomorphisme linéaire, μ est positive.

Inversement, soit W un espace vectoriel de dimension p et soit $f\colon W \to V$ une application linéaire. Si f est n'est pas injective, la (p,p)-forme $f^*\omega$ est nulle. Supposons donc que f est injective. Soit $(v_1,\dots,v_n)$ une base de V tel que $(v_1,\dots,v_p)$ soit une base de $f(W)$; soit $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ la base duale. Définissons μ et g comme précédemment. Par hypothèse, $(f,g)^*\mu$ est positive ; le calcul ci-dessus entraîne alors que $f^*(\omega)$ est positive. □

1.2.6. — Expliquons comment la notion de positivité d'une (p,p)-forme symétrique ω peut s'interpréter en termes de positivité d'une forme bilinéaire q_ω sur $\Lambda^p V$ canoniquement associée à ω.

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, posons $\sigma_k = (-1)^{k(k-1)/2}$. Fixons un élément non nul λ de $\Lambda^n V^*$. Par définition les (n,n)-formes positives sont les multiples positifs de $\sigma_n \lambda \wedge \mathrm{J}(\lambda)$.

On associe à ω une application bilinéaire sur $\Lambda^{n-p}(V^*)$ à valeurs dans $A^{n,n}(V)$ par la formule $(\alpha,\beta) \mapsto \omega \wedge \alpha \wedge \mathrm{J}\beta$.

Rappelons aussi que le choix de λ fournit un isomorphisme $v \mapsto \varphi_v$ entre $\Lambda^p V$ et $\Lambda^{n-p}V^*$. Pour $v \in \Lambda^p V$, φ_v est la $(n-p)$-forme sur V donnée par $\varphi_v(w) = \langle \lambda, v \wedge w\rangle$ pour tout $w \in \Lambda^{n-p}V$. Il en résulte une application bilinéaire b_ω sur $\Lambda^p(V)$ à valeurs dans $A^{n,n}(V)$: pour $v, w \in \Lambda^p V$, on a

$$b_\omega(v,w) = \omega \wedge \varphi_v \wedge \mathrm{J}\varphi_w.$$

Par ailleurs, puisqu'elle appartient à $\Lambda^p V^* \otimes \Lambda^p V^*$, ω « est » une forme bilinéaire q_ω sur $\Lambda^p V$, symétrique puisque l'on a supposé que ω est symétrique. Explicitement, si $\omega = \alpha \otimes \beta$, pour $\alpha, \beta \in \Lambda^p V^*$, on a

$$q_\omega(v,w) = \langle \alpha, v\rangle \langle \beta, w\rangle.$$

Pour tous $v, w \in \Lambda^p V$, on a

$$b_\omega(v,w) = (-1)^{p(n-p)} q_\omega(v,w) \lambda \wedge \mathrm{J}\lambda. \tag{1.2.6.1}$$

Pour démontrer cette formule, on peut se donner une base $(e_1,\dots,e_n)$ de V et la base duale $(x_1,\dots,x_n)$ de V^*. On note $e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$ si $I = \{i_1,\dots,i_p\}$ et $i_1 < \cdots < i_p$; on définit $\mathrm{d}'\, x_I$ de manière analogue. On peut aussi supposer que $\lambda = \mathrm{d}'\, x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\, x_n$ et $\omega = \mathrm{d}'\, x_I \otimes \mathrm{d}''\, x_J$, où I, J sont des parties à p éléments de $\{1,\dots,n\}$. Si I est une partie à p éléments de $\{1,\dots,n\}$, notons ε_I la signature de la permutation de $\{1,\dots,n\}$ qui est croissante et d'image I sur $\{1,\dots,p\}$ et est croissante sur $\{p+1,\dots,n\}$. Si K et L sont des parties à $n-p$ éléments de $\{1,\dots,n\}$, on a

$$\omega \wedge \mathrm{d}'\, x_K \wedge \mathrm{J}\,\mathrm{d}'\, x_L = \begin{cases} (-1)^{p(n-p)} \varepsilon_I \varepsilon_J \lambda \wedge \mathrm{J}\lambda & \text{si } K = \complement I \text{ et } L = \complement J, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En outre, $\varphi_{e_K} = \varepsilon_K\, \mathrm{d}'\, x_{\complement K}$, si bien que

$$b_\omega(e_K, e_L) = \begin{cases} (-1)^{p(n-p)} \lambda \wedge \mathrm{J}\lambda & \text{si } I = K \text{ et } J = L, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enfin,

$$q_\omega(e_K, e_L) = \langle \mathrm{d}' x_I, e_K\rangle\langle \mathrm{d}' x_J, e_L\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } I = K \text{ et } J = L, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

d'où la formule annoncée.

En outre, les formules précédentes entraînent que les signes de ces diverses formes sont reliées par les équivalences suivantes :
La forme ω est positive au sens de la définition 1.2.3 ;
$\Leftrightarrow$ L'application bilinéaire $(\alpha, \beta) \mapsto \omega \wedge \alpha \wedge \mathrm{J}\beta$ est de signe σ_{n-p} ;
$\Leftrightarrow$ L'application bilinéaire b_ω est de signe σ_{n-p} ;
$\Leftrightarrow$ La forme bilinéaire q_ω est de signe $\sigma_{n-p}(-1)^{p(n-p)}\sigma_n = \sigma_p$.

Enfin, si $f\colon W \to V$ est une application linéaire, on a $q_{f^*\omega} = q_\omega \circ (f, f)$.

Nous dirons qu'une (p,p)-forme symétrique est *définie positive* si la forme bilinéaire symétrique $\sigma_p q_\omega$ est définie positive.

Lemme 1.2.7. — *Soit $\omega \in A^{p,p}(V)$ une forme* symétrique *de type (p,p), soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une base de V et soit*

$$\omega = (-1)^{p(p-1)/2} \sum_{I,J} \omega_{I,J}\, \mathrm{d}' x_I \wedge \mathrm{d}'' x_J$$

la décomposition de ω dans la base correspondante de $A^{p,p}(V)$. Alors, les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

a) *La forme ω est positive (*resp. *définie positive) ;*

b) *La matrice symétrique $(\omega_{I,J})$ (indexée par les parties à p éléments de $\{1, \ldots, n\}$) est positive (*resp. *définie positive) ;*

c) *Il existe une base (α_I) de $\Lambda^p V^*$ et une famille (c_I) de nombres réels positifs ou nuls (*resp. *strictement positifs), indexées par les parties à p éléments de $\{1, \ldots, n\}$, telles que*

$$\omega = (-1)^{p(p-1)/2} \sum_I c_I \alpha_I \wedge \mathrm{J}(\alpha_I).$$

Démonstration. — L'équivalence des assertions (1) et (2) résulte de la discussion qui précède le lemme et de ce qu'avec les notations introduites, la matrice (ω_{IJ}) est celle de la forme bilinéaire $(-1)^{p(p-1)/2} q_\omega$ dans la base duale de la base $(\mathrm{d}' x_I)_I$ de $\Lambda^p V^*$. Celle des propriétés (2) et propriétés (3) découle de la diagonalisation des formes quadratiques. □

Corollaire 1.2.8. — *L'ensemble des formes positives dans $A^{p,p}(V)$ est le cône convexe fermé engendré par les formes du type $(-1)^{p(p-1)/2}\alpha \wedge \mathrm{J}\alpha$, où α parcourt l'ensemble des formes de type $(p,0)$.*

Démonstration. — Le lemme précédent montre que les formes positives sont contenues dans ce cône. Inversement, si $\alpha \in A^{p,0}(V)$ est une forme de type $(p,0)$ et β est une $(n-p,0)$-forme, la formule

$$(-1)^{p(p-1)/2}\alpha \wedge \mathrm{J}\alpha \wedge (-1)^{(n-p)(n-p-1)/2}\beta \wedge \mathrm{J}\beta = (-1)^{n(n-1)/2}(\alpha \wedge \beta) \wedge \mathrm{J}(\alpha \wedge \beta)$$

montre que $(-1)^{p(p-1)/2}\alpha \wedge \mathrm{J}\alpha$ est une forme positive, d'où l'autre inclusion. □

Corollaire 1.2.9. — *La condition de positivité est auto-duale : une forme α, symétrique de type (p,p), est positive si et seulement si $\alpha \wedge \beta$ est positive pour toute forme positive β de type $(n-p, n-p)$.*

Démonstration. — Cela résulte immédiatement du corollaire précédent. □

Corollaire 1.2.10. — *Les trois notions de positivité coïncident pour les formes de bidegrés* $(0,0)$, $(1,1)$, $(n-1,n-1)$ *et* (n,n).

Elles ne coïncident pas en général, pas plus que leurs analogues en géométrie complexe.
Démonstration. — Le cas des formes de type $(0,0)$ et (n,n) a déjà été expliqué. Par définition même, les formes faiblement positives de type $(n-1,n-1)$ sont positives. Le lemme précédent, ou un argument de dualité, prouve que les formes positives de type $(1,1)$ sont fortement positives.

Soit ω une forme de type $(1,1)$ qui est faiblement positive. Dans une base $(x_1,\dots,x_n)$ de V, écrivons $\omega = \sum_{i,j=1}^{n} \omega_{i,j}\, \mathrm{d}' x_i \wedge \mathrm{d}'' x_j$. D'après la proposition 1.2.5 appliquée à l'application linéaire $f\colon \mathbf{R} \to V$ donnée par $t \mapsto tv$, on a

$$\sum_{i,j=1}^{n} \omega_{i,j} x_i(v) x_j(v) \geqslant 0$$

pour tout vecteur v de V, de composantes $v_i = x_i(v)$. La matrice $(\omega_{i,j})$ est donc positive ; d'après le lemme 1.2.7, la forme ω est positive, et aussi fortement positive.

Par dualité, les formes de type $(n-1,n-1)$ faiblement positives sont aussi fortement positives. □

Lemme 1.2.11. — *Soit* ω *une forme symétrique de type* (p,p) *sur* V. *Soit* W *un espace vectoriel réel et* $f\colon W \to V$ *une application linéaire.*

a) *Si* ω *est positive (*resp. *faiblement positive,* resp. *fortement positive), il en est de même de la forme* $f^*\omega$ *sur* W.

b) *Si* f *est surjective et si* $f^*\omega$ *est positive (*resp. *faiblement positive,* resp. *fortement positive), il en est de même de* ω.

Démonstration. — Commençons par l'assertion 1). Le cas des formes fortement positives est évident, celui des formes faiblement positives résulte de la proposition 1.2.5, tandis que celui des formes positives découle de l'interprétation de la positivité en termes de formes bilinéaires (§1.2.6).

Venons-en à l'assertion 2) ; on suppose donc f surjective. Le cas des formes faiblement positives résulte de la proposition 1.2.5 et du fait que toute application affine $g\colon U \to V$ se relève à W.

En ce qui concerne les formes positives et fortement positives, on choisit un isomorphisme $W \simeq V \oplus V'$ modulo lequel f est la première projection. Si $f^*\omega$ est positive, la forme bilinéaire η qu'elle induit sur $\Lambda^p W$ est positive (§1.2.6) ; comme η est le prolongement par 0 de la forme bilinéaire η' induite par ω sur le sommande $\Lambda^p V$ de $\Lambda^p W$, la forme η' est positive, et ω est positive en vertu là encore de §1.2.6.

Si $f^*\omega$ est fortement positive, elle s'écrit sous la forme

$$\sum a_i \alpha_{i,1} \wedge \mathrm{J}(\alpha_{i,1}) \wedge \alpha_{i,2} \wedge \mathrm{J}(\alpha_{j,2}) \wedge \dots \wedge \alpha_{i,n_i} \wedge \mathrm{J}(\alpha_{i,r_i}),$$

où les $\alpha_{i,j}$ sont de type $(1,0)$ et les a_i strictement positifs. Comme $f^*\omega$ est égale au prolongement par 0 de la forme ω vue comme vivant dans le sommande $A^{p,p}(V)$ de $A^{p,p}(W)$, il vient

$$\omega = \sum a_i \alpha_{i,1,V} \wedge \mathrm{J}(\alpha_{i,1,V}) \wedge \alpha_{i,2,V} \wedge \mathrm{J}(\alpha_{j,2,V}) \wedge \dots \wedge \alpha_{i,n_i,V} \wedge \mathrm{J}(\alpha_{i,r_i,V}),$$

où le V en indice indique la projection sur le sommande $A^{1,0}(V)$. Ainsi, ω est fortement positive. □

***Proposition 1.2.12* (cf. [92], Lemma 2.1).** — *Soit $\omega_1, \ldots, \omega_s$ des formes sur V et posons $\omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_s$.*

a) *Si les ω_j sont toutes fortement positives, alors ω est fortement positive.*

b) *Si les ω_j sont toutes positives, alors ω est positive.*

c) *Si les ω_j sont toutes faiblement positives et si au plus une d'entre elle n'est pas fortement positive, alors ω est faiblement positive.*

Démonstration. — Par récurrence, l'assertion b) découle de la caractérisation du cône des formes positives et de la formule

$$(-1)^{p(p-1)/2}\alpha \wedge \mathrm{J}\alpha \wedge (-1)^{q(q-1)/2}\beta \wedge \mathrm{J}\beta = (-1)^{r(r-1)/2}(\alpha \wedge \beta) \wedge \mathrm{J}(\alpha \wedge \beta),$$

où α, β sont des formes de type $(p,0)$ et $(q,0)$ respectivement, et $r = p + q$.

Pour démontrer les assertions a) et c), il suffit par récurrence de prouver que si une forme β est fortement positive, alors $\alpha \wedge \beta$ est de même nature que α. On peut supposer que β est de la forme $\beta_1 \wedge \mathrm{J}\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_m \wedge \mathrm{J}\beta_m$, où les β_j sont des formes de type $(1,0)$. La preuve est alors directe. □

***Proposition 1.2.13* ([84], corollaire 1.17).** — *Soit ω une $(1,1)$-forme symétrique définie positive sur V. Soit p un entier $\geqslant 1$. Dans l'espace des (p,p)-formes symétriques, la forme ω^p appartient à l'intérieur relatif du cône des (p,p)-formes fortement positives, à l'intérieur du cône des (p,p)-formes symétriques positives, et à l'intérieur du cône des (p,p)-formes faiblement positives.*

En particulier, les formes positives, et a fortiori les formes faiblement positives, engendrent l'espace des formes symétriques. En revanche, Lagerberg donne dans [**92**] (remark 4.1) un exemple de $(2,2)$-forme faiblement positive sur $\mathbf{R}^4$, non nulle, qui est orthogonale à toute forme fortement positive ; ainsi les formes fortement positives engendrent un sous-espace strict des $(2,2)$-formes symétriques sur $\mathbf{R}^4$.

Démonstration. — D'après la proposition 1.2.12, ω^p est fortement positif.

Nous allons démontrer que si $\alpha \in A^{n-p,n-p}(V)$ est une forme faiblement positive et symétrique telle que $\omega^p \wedge \alpha = 0$, alors $\beta \wedge \alpha = 0$ pour toute forme β fortement positive. Cela entraîne la première partie de la proposition, par dualité. Cela entraîne aussi la troisième partie. Soit en effet une forme α, fortement positive, orthogonale à ω^p ; démontrons qu'elle est nulle. Comme elle est également faiblement positive, elle est alors orthogonale à toute forme fortement positive. Puisque α est fortement positive, elle est somme de formes du type $c\alpha_1 \wedge \mathrm{J}\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{n-p} \wedge \mathrm{J}\alpha_{n-p}$, où $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-p})$ est une famille d'éléments de V^*, qu'on peut supposer libre, et $c \in \mathbf{R}_+$. Par positivité, chacun de ces termes est également orthogonal à toute fortement positive. Mais cela entraîne qu'ils sont nuls : complétons en effet la famille $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-p})$ en une base $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$; en prenant $\beta = \alpha_{n-p+1} \wedge \mathrm{J}\alpha_{n-p+1} \wedge \ldots$, on trouve $c\alpha_1 \wedge \mathrm{J}\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \wedge \mathrm{J}\alpha_n \geqslant 0$, d'où $c = 0$.

Démontrons maintenant l'énoncé admis. Soit α une forme symétrique faiblement positive de type $(n-p, n-p)$ telle que $\omega^p \wedge \alpha = 0$, soit $\beta_1, \ldots, \beta_p$ dans V^* et soit $\beta = \beta_1 \wedge \mathrm{J}\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_p \wedge \mathrm{J}\beta_p$; prouvons que $\beta \wedge \alpha = 0$.

C'est évident si $\beta_1, \dots, \beta_p$ ne sont pas linéairement indépendantes, puisqu'alors $\beta = 0$. Supposons donc que $\beta_1, \dots, \beta_p$ soient linéairement indépendantes et prolongeons cette famille en une base $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ de V^* ; posons $\eta = \sum_{j=1}^n \beta_j \wedge \mathrm{J}\beta_j$.

Comme ω est symétrique définie positive, il existe un nombre réel strictement positif c tel que $\omega \geqslant c\eta$ au sens où la différence $\omega - c\eta$ est une $(1,1)$-forme symétrique fortement positive. D'après la proposition 1.2.12, appliquée à la forme faiblement positive α et aux formes fortement positives ω, $\omega - c\eta$ et η, la différence $\omega^p \wedge \alpha - c^p\eta^p \wedge \alpha$ est une (n,n)-forme faiblement positive, de même que la forme $\eta^p \wedge \alpha$. Comme $\omega^p \wedge \alpha = 0$ par hypothèse, on en déduit que $\eta^p \wedge \alpha = 0$.

Pour toute partie $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ de $\{1, \dots, n\}$, où $i_1 < \cdots < i_p$, notons $\beta_I = \beta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \beta_{i_p}$; notons aussi $\lambda = \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_n$. Si $p \in \mathbf{N}$, posons enfin $\sigma_p = (-1)^{p(p-1)/2}$. Alors, $\eta^p = p!\sigma_p \sum_{|I|=p} \beta_I \wedge \mathrm{J}\beta_I$. La famille $(\beta_J \wedge \mathrm{J}\beta_K)$ indexée par les couples (J,K) de parties à $n-p$ éléments de $\{1, \dots, n\}$ est une base de $A^{n-p,n-p}(V)$. Écrivons donc α dans cette base :

$$\alpha = \sigma_{n-p} \sum_{|J|=|K|=n-p} \alpha_{J,K}\beta_J \wedge \mathrm{J}\beta_K.$$

Pour toute partie I à p éléments de $\{1, \dots, n\}$, on a donc

$$\sigma_{n-p}\beta_I \wedge \mathrm{J}\beta_I \wedge \alpha = \sigma_p\sigma_{n-p} \sum_{J,K} \alpha_{J,K}\beta_I \wedge \mathrm{J}\beta_I \wedge \beta_J \wedge \mathrm{J}\beta_K = \sigma_n \alpha_{\complement I, \complement I} \lambda \wedge \mathrm{J}\lambda,$$

d'où

$$\eta^p \wedge \alpha = p!\sigma_n \sum_{|J|=n-p} \alpha_{J,J} \lambda \wedge \mathrm{J}\lambda.$$

Comme α est faiblement positif et $\sigma_{n-p}\beta_I \wedge \mathrm{J}\beta_I$ est fortement positive pour toute partie I, la proposition 1.2.12 entraîne aussi que $\alpha_{J,J} \geqslant 0$ pour toute partie J. Puisque $\eta^p \wedge \alpha = 0$, il s'ensuit que $\alpha_{J,J} = 0$ pour tout J. C'est en particulier le cas pour $J = \{p+1, \dots, n\}$; comme $\beta = \pm\beta_I \wedge \mathrm{J}\beta_I$ pour $I = \{1, \dots, p\}$, on a donc $\beta \wedge \alpha = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Pour établir la seconde partie de la proposition, on démontre que si une forme positive α vérifie $\omega^p \wedge \alpha = 0$, alors $\beta \wedge \alpha = 0$ pour toute forme positive β de type (p,p).

Considérée comme forme bilinéaire sur $A^{p,0}$, la forme ω^p est symétrique définie positive, il existe un nombre réel $\eta > 0$ tel que $\omega^p - \eta\beta$ est positive. Alors, $0 = \omega^p \wedge \alpha$ est la somme des formes $(\omega^p - \eta\beta) \wedge \alpha$ et $\eta\beta \wedge \alpha$, et ces formes sont positives d'après la proposition 1.2.12. Par suite, elles sont toutes deux nulles. En particulier, $\beta \wedge \alpha = 0$. □

On dira qu'une forme symétrique ω de type (p,p) est strictement positive (*resp.* strictement faiblement positive, *resp.* strictement fortement positive) s'il existe une $(1,1)$-forme définie positive λ telle que $\omega - \lambda^p$ soit une forme positive (*resp.* faiblement, *resp.* fortement positive).

§ 1.3. SUPERFORMES DIFFÉRENTIELLES, D'APRÈS A. LAGERBERG

1.3.1. — Soit V un espace affine de dimension finie sur $\mathbf{R}$; on note $\overrightarrow{V}$ son espace directeur et $\overrightarrow{V}^*$ le dual de $\overrightarrow{V}$.

Dans **[92]**, Lagerberg définit comme suit la notion de superforme différentielle de type (p,q) sur un ouvert U de V, que nous appellerons simplement dans ce qui suit *forme de type* (p,q) : c'est un élément de

$$\mathscr{A}_V^{p,q}(U) = \mathscr{C}^\infty(U) \otimes_{\mathbf{R}} A^{p,q}(\overrightarrow{V}) = \mathscr{C}^\infty(U) \otimes_{\mathbf{R}} \Lambda^p \overrightarrow{V}^* \otimes_{\mathbf{R}} \Lambda^q \overrightarrow{V}^*.$$

Elles sont bien sûr nulles si $p > \dim(V)$ ou $q > \dim(V)$. En particulier, $\mathscr{A}_V^{0,0}(U)$ est l'anneau des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur U ; nous le noterons plus simplement $\mathscr{A}_V(U)$.

On considérera parfois une superforme de type (p,q) sur un ouvert U de V comme une application $\mathscr{C}^\infty$ de U vers l'espace vectoriel $A^{p,q}(\overrightarrow{V})$.

1.3.2. — Une fois choisie une base de $\overrightarrow{V}$ et une origine de V, on dispose de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ qui permettent d'identifier V à $\mathbf{R}^n$ (où $n = \dim(V)$). Pour distinguer les formes linéaires apparaissant dans le premier facteur $\Lambda^p \overrightarrow{V}^*$ de celles apparaissant dans le second $\Lambda^q \overrightarrow{V}^*$, on convient de noter systématiquement les premières avec le préfixe d' et les secondes avec le préfixe d''. Une forme de type (p,q) sur U s'écrit ainsi

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{|I|=p,\,|J|=q} \omega_{I,J}\, \mathrm{d}' x_I \otimes \mathrm{d}'' x_J \\ &= \sum_{|I|=p,\,|J|=q} \omega_{I,J}\ \mathrm{d}' x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}' x_{i_p} \otimes \mathrm{d}'' x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'' x_{j_q},\end{aligned}$$

où les $\omega_{I,J}$ sont des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur U, et où $I = (i_1, \dots, i_p)$ et $J = (j_1, \dots, j_q)$ parcourent respectivement les suites strictement croissantes d'entiers compris entre 1 et n.

1.3.3. — La somme directe $\mathscr{A}_V^{*,*}(U) = \bigoplus \mathscr{A}_V^{p,q}(U)$ est naturellement munie d'une structure d'algèbre graduée sur l'anneau $\mathscr{A}_V(U)$ obéissant à la règle de commutativité suivante : si ω est de type (p,q) et ω' de type (p',q'), alors

$$\omega' \wedge \omega = (-1)^{(p+q)(p'+q')} \omega \wedge \omega'. \tag{1.3.3.1}$$

Ainsi, la forme $\mathrm{d}' x_I \otimes \mathrm{d}'' x_J$ sera plutôt notée $\mathrm{d}' x_I \wedge \mathrm{d}'' x_J$.

Cette algèbre est munie d'une involution J, définie, en coordonnées, par la formule

$$\mathrm{J}\omega = (-1)^q \sum_{I,J} \omega_{I,J}\ \mathrm{d}'' x_I \wedge \mathrm{d}' x_J = (-1)^{(p+1)q} \sum_{I,J} \omega_{I,J}\ \mathrm{d}' x_J \wedge \mathrm{d}'' x_I. \tag{1.3.3.2}$$

Par suite, J^2 agit comme $(-1)^{p+q}$ sur $\mathscr{A}_V^{p,q}$.

Lorsque $p = q$, on dit qu'une forme ω de type (p,p) est *symétrique* si elle vérifie $\mathrm{J}\omega = \omega$; cela revient donc à exiger que $\omega_{I,J} = \omega_{J,I}$ pour tout couple (I,J).

1.3.4. — Soit $f\colon V' \to V$ une application affine entre deux espaces affines de dimension finie. On définit de façon évidente l'image réciproque $f^*\omega$ d'une forme ω de type (p,q) sur un ouvert U de V ; c'est une forme de type (p,q) sur $f^{-1}(U)$.

Ces applications f^* sont compatibles aux structures d'algèbres, ainsi qu'aux involutions J.

1.3.5. Calcul différentiel. — Les faisceaux $\mathscr{A}_V^{p,q}$ sont munis de deux opérateurs différentiels, d' et d'', définis ainsi en coordonnées. Pour ω comme ci-dessus,

$$\mathrm{d}'\,\omega = \sum_{|I|=p,\,|J|=q} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_{I,J}(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}'\,x_i \wedge \mathrm{d}'\,x_I \wedge \mathrm{d}''\,x_J \tag{1.3.5.1}$$

$$\mathrm{d}''\,\omega = (-1)^p \sum_{|I|=p,\,|J|=q} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega_{I,J}(x)}{\partial x_j}\,\mathrm{d}'\,x_I \wedge \mathrm{d}''\,x_j \wedge \mathrm{d}''\,x_J. \tag{1.3.5.2}$$

Ainsi, $\mathrm{d}'\,\omega$ est de type $(p+1,q)$, tandis que $\mathrm{d}''\,\omega$ est de type $(p,q+1)$. Notons que pour $i \in \{1,\dots,n\}$, les symboles $\mathrm{d}'\,x_i$ et $\mathrm{d}''\,x_i$ sont bien les images par d' et d'' de la fonction affine x_i sur V. Remarquons aussi que la différentielle d' n'est autre que l'opérateur induit par la connexion naturelle dans le fibré vectoriel trivial de fibre $\Lambda^q \overrightarrow{V}^*$.

Le lemme de Schwarz entraîne comme de coutume les relations $\mathrm{d}'\,\mathrm{d}'\,\omega = \mathrm{d}''\,\mathrm{d}''\,\omega = 0$ et $\mathrm{d}'\,\mathrm{d}''\,\omega = -\,\mathrm{d}''\,\mathrm{d}'\,\omega$.

Lemme 1.3.6. — *On a les relations*

$$\mathrm{J}\,\mathrm{d}' = \mathrm{d}''\,\mathrm{J} \quad \textit{et} \quad \mathrm{J}\,\mathrm{d}'' = -\,\mathrm{d}'\,\mathrm{J}. \tag{1.3.6.1}$$

Par suite, sur $\mathscr{A}_V^{p,q}$, on a les relations

$$\mathrm{d}'' = \mathrm{J}\,\mathrm{d}'\,\mathrm{J}^{-1} = -\mathrm{J}^{-1}\,\mathrm{d}'\,\mathrm{J} = (-1)^{p+q}\mathrm{J}\,\mathrm{d}'\,\mathrm{J} \tag{1.3.6.2}$$

et

$$\mathrm{d}' = \mathrm{J}^{-1}\,\mathrm{d}''\,\mathrm{J} = -\mathrm{J}\,\mathrm{d}''\,\mathrm{J}^{-1} = (-1)^{p+q}\mathrm{J}\,\mathrm{d}''\,\mathrm{J}. \tag{1.3.6.3}$$

On a aussi

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\mathrm{J} = \mathrm{J}\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,. \tag{1.3.6.4}$$

Démonstration. — Par linéarité, il suffit de traiter le cas d'une forme du type $\omega = \alpha\,\mathrm{d}'\,x_I \wedge \mathrm{d}''\,x_J$, où I et J sont des multi-indices de longueur p et q. D'après la formule (1.3.3.2), on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}\,\mathrm{d}'\,\mathrm{J}\omega &= \mathrm{J}\,\mathrm{d}'\,\mathrm{J}\,(\alpha\,\mathrm{d}'\,x_I \wedge \mathrm{d}''\,x_J)\\
&= (-1)^{(p+1)q}\mathrm{J}\,\mathrm{d}'\,(\alpha\,\mathrm{d}'\,x_J \wedge \mathrm{d}''\,x_I)\\
&= (-1)^{(p+1)q}\mathrm{J}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\alpha}{\partial x_j}\,\mathrm{d}'\,x_j \wedge \mathrm{d}'\,x_J \wedge \mathrm{d}''\,x_I\\
&= (-1)^{(p+1)q}(-1)^{(q+2)p}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\alpha}{\partial x_j}\,\mathrm{d}'\,x_I \wedge \mathrm{d}''\,x_j \wedge \mathrm{d}''\,x_J\\
&= (-1)^{q}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\alpha}{\partial x_j}\,\mathrm{d}'\,x_I \wedge \mathrm{d}''\,x_i \wedge \mathrm{d}''\,x_J\\
&= (-1)^{p+q}\,\mathrm{d}''\,\omega,
\end{aligned}$$

d'après la formule (1.3.5.2).

Puisque $\mathrm{d}''\,\omega$ est de type $(p,q+1)$, cela démontre l'égalité $\mathrm{J}\,\mathrm{d}'\,\mathrm{J} = -\mathrm{J}^2\,\mathrm{d}''$, autrement dit $\mathrm{d}'\,\mathrm{J} = -\mathrm{J}\,\mathrm{d}''$. Les autres relations s'en déduisent, compte tenu du fait que J^2 vaut $(-1)^{p+q}$ sur $\mathscr{A}_V^{p,q}$. □

1.3.7. — Les opérateurs d' et d'' sont des dérivations de l'algèbre graduée $\mathscr{A}^{*,*}(U)$. Si ω et ω' sont respectivement de type (p,q) et (p',q'), on a

$$\mathrm{d}'(\omega\wedge\omega') = \mathrm{d}'\,\omega\wedge\omega' + (-1)^{p+q}\omega\wedge\mathrm{d}'\,\omega',$$
$$\mathrm{d}''(\omega\wedge\omega') = \mathrm{d}''\,\omega\wedge\omega' + (-1)^{p+q}\omega\wedge\mathrm{d}''\,\omega'.$$

Lemme 1.3.8. — *Soit p,q,r des entiers naturels tels que $p+q+r=\dim(V)-1$. Soit α,β,γ des superformes* symétriques *de types (p,p), (q,q) et (r,r), respectivement. On suppose que α et β sont de classe $\mathscr{C}^1$. On a l'égalité* $\mathrm{d}'\,\alpha\wedge\mathrm{d}''\,\beta\wedge\gamma = -\,\mathrm{d}''\,\alpha\wedge\mathrm{d}'\,\beta\wedge\gamma$.

Démonstration. — Puisque α est de type (p,p) et symétrique, on a

$$\mathrm{J}\,\mathrm{d}'\,\alpha = \mathrm{d}''\,\mathrm{J}\alpha = \mathrm{d}''\,\alpha.$$

De même, $\mathrm{J}\,\mathrm{d}''\,\beta = -\,\mathrm{d}'\,\mathrm{J}\beta$. Alors,

$$\mathrm{J}(\mathrm{d}'\,\alpha\wedge\mathrm{d}''\,\beta) = \mathrm{J}\,\mathrm{d}'\,\alpha\wedge\mathrm{J}\,\mathrm{d}''\,\beta = -\,\mathrm{d}''\,\alpha\wedge\mathrm{d}'\,\beta.$$

Puisque γ est symétrique, on a donc

$$\mathrm{J}\omega = \mathrm{J}(\mathrm{d}'\,\alpha\wedge\mathrm{d}''\,\beta\wedge\gamma) = -\,\mathrm{d}''\,\alpha\wedge\mathrm{d}'\,\beta\wedge\gamma = -\eta.$$

La forme $\mathrm{d}'\,\alpha\wedge\mathrm{d}''\,\beta\wedge\gamma$ est de type $(p+1,p)+(q,q+1)+(r,r) = (p+q+r+1,p+q+r+1)$; comme $p+q+r+1=\dim(V)$, elle est symétrique. On a donc la relation annoncée. □

Remarque 1.3.9. — Comme on le voit, le dédoublement des variables différentielles introduit par Lagerberg dans [**92**] permet un calcul différentiel avec des formes de type (p,q) (pour $0\leqslant p,q\leqslant n$) sur un espace réel de dimension n qui est formellement analogue au calcul différentiel holomorphe. Expliquons comment on peut l'interpréter en termes de géométrie tropicale complexe. Soit T le tore complexe $(\mathbf{C}^*)^n$, soit $V=\mathbf{R}^n$ et soit $\pi\colon T\to V$ l'application de tropicalisation donnée par $(z_1,\dots,z_n)\mapsto(\log|z_1|,\dots,\log|z_n|)$. Elle identifie V au quotient de T par son sous-groupe compact maximal $\mathbf{U}$. Interprétant $\mathrm{d}'\,x_j$ comme $\mathrm{d}\log|z_j|$ et $\mathrm{d}''\,x_j$ comme $\mathrm{d}\,\mathrm{Arg}(z_j)$, toute superforme de type (p,q) sur un ouvert U de V définit une forme différentielle de degré $p+q$ sur $\pi^{-1}(U)$ qui est invariante par l'action de $\mathbf{U}$. Inversement, toute forme ω de degré $p+q$ sur $\pi^{-1}(U)$ peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{I,J} f_{I,J}(r,\theta)\mathrm{d}r_I\wedge\mathrm{d}\theta_J,$$

où $(r_1,\theta_1),\dots,(r_n,\theta_n)$ sont respectivement module et argument de $z_1,\dots,z_n$ (de sorte que $(\log r_1,\dots,\log r_n)\in U$ et $(e^{i\theta_1},\dots,e^{i\theta_n})\in\mathbf{U}$). Si, de plus, ω est invariante sous l'action de $\mathbf{U}$, on obtient que $f_{I,J}$ ne dépend pas de θ, si bien que ω provient d'une superforme de type (p,q) sur $\mathbf{R}^n$. Autrement dit, on a un isomorphisme $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{Lag}}\simeq(\pi_*)\big((\mathscr{A}^{p+q}_T)^{\mathbf{U}}\big)$ de faisceaux sur V.

Par contre, cette identification ne préserve pas le type des formes en général ; ce n'est déjà pas le cas pour $\mathrm{d}\log|z_j|$ qui n'est pas de type $(1,0)$. Toutefois, les formes ainsi obtenues sur T sont réelles, et les superformes *symétriques* de type (p,p) donnent lieu à des formes de type (p,p).

§ 1.4. SUPERFORMES À COEFFICIENTS

1.4.1. — Soit V un espace affine et soit $\mathscr{F}$ un sous-faisceau en $\mathbf{R}$-espaces vectoriels du faisceau des fonctions numériques sur V.

Pour tout ouvert U de V, une *forme de type (p,q) à coefficients dans $\mathscr{F}$ sur l'ouvert U* est un élément de

$$\mathscr{F}_V^{p,q}(U) := \mathscr{F}(U) \otimes_{\mathbf{R}} A^{p,q}(\overrightarrow{V}).$$

Cela définit un faisceau en $\mathbf{R}$-espaces vectoriels.

La structure de $\mathbf{R}$-espace vectoriel gradué sur $A^{*,*}(\overrightarrow{V})$ et son opérateur J induisent sur la somme directe $\bigoplus_{p,q} \mathscr{F}_V^{p,q}$ une structure de faisceau en $\mathbf{R}$-espaces vectoriels gradués et le munissent d'un opérateur J.

Si $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{A}_V$-module, alors on peut écrire

$$\mathscr{F}_V^{p,q}(U) = \mathscr{F}_V(U) \otimes_{\mathscr{A}_V(U)} \mathscr{A}_V^{p,q}(U),$$

de sorte que $\mathscr{F}_V^{*,*}$ est un module gradué sur l'algèbre graduée $\mathscr{A}_V^{*,*}$; l'opérateur J est un morphisme d'algèbres.

Si $\mathscr{F}$ est une $\mathbf{R}$-algèbre, la structure d'algèbre graduée sur $\mathscr{A}^{*,*}(\overrightarrow{V})$ induit sur $\mathscr{F}_V^{*,*}$ une structure de $\mathbf{R}$-algèbre graduée.

1.4.2. — Soit V un espace affine de dimension finie et soit ω une forme de type (p,q) définie sur un ouvert U de V. Pour tout $x \in U$, on peut évaluer ω en x, et obtenir ainsi un élément $\omega(x)$ de $A^{p,q}(\overrightarrow{V})$. En coordonnées, si $\omega = \sum \omega_{I,J}\, \mathrm{d}' x_I \wedge \mathrm{d}'' x_J$ alors $\omega(x) = \sum \omega_{I,J}(x)\, \mathrm{d}' x_I \wedge \mathrm{d}'' x_J$. On dira que ω est ponctuellement nulle en x si $\omega(x) = 0$.

Observons que l'on a $\omega = 0$ si et seulement si $\omega(x) = 0$ pour tout $x \in U$.

L'évaluation est compatible à la structure de $\mathscr{A}_V$-algèbre.

1.4.3. Calcul différentiel. — Les opérateurs différentiels d' et d'' s'étendent de façon évidente aux formes à coefficients dans $\mathscr{F}$ pourvu que les éléments de $\mathscr{F}$ aient une régularité suffisante. Par exemple, si ω est une forme de type (p,q) à coefficients de classe $\mathscr{C}^r$ pour $r \geqslant 1$, alors $\mathrm{d}'\omega$ et $\mathrm{d}''\omega$ sont des formes de types $(p+1,q)$ et $(p,q+1)$ à coefficients de classe $\mathscr{C}^{r-1}$. De même, si ω est à coefficients de classe $\mathscr{C}^2$, le lemme de Schwarz entraîne encore $\mathrm{d}'\,\mathrm{d}'\omega = \mathrm{d}''\,\mathrm{d}''\omega = 0$.

1.4.4. — Soit $f\colon V' \to V$ une application affine entre deux espaces affines de dimension finie. Soit $\mathscr{F}'$ un faisceau en $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de fonctions numériques sur V' ; supposons que $u \circ f$ appartienne à $\mathscr{F}'$ pour toute fonction u de $\mathscr{F}$. On définit alors de façon évidente l'image réciproque $f^*\omega$ d'une forme ω de type (p,q) à coefficients dans $\mathscr{F}$ sur un ouvert U de V ; c'est une forme de type (p,q) à coefficients dans $\mathscr{F}'$ sur $f^{-1}(U)$.

Ces applications f^* sont compatibles aux opérateurs J, et aux structures de modules ou d'algèbres quand elles sont définies.

1.4.5. — Si $\mathscr{G}$ est un sous-faisceau en $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de $\mathscr{F}$, alors $\mathscr{G}_V^{*,*}$ est un sous-faisceau en $\mathbf{R}$-espaces vectoriels gradués de $\mathscr{G}_V^{*,*}$.

Cela permet par exemple de voir les formes de classe $\mathscr{C}^k$ comme des formes à coefficients boréliens.

§ 1.5. INTÉGRALE D'UNE (p,n)-FORME SUR UN SOUS-ESPACE DE DIMENSION p

1.5.1. — Soit ω une (n,n)-forme à coefficients boréliens sur un ouvert U de $\mathbf{R}^n$, donnée en coordonnées par la formule

$$\omega = \omega^\sharp(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}'x_1 \wedge \mathrm{d}''x_1 \wedge \dots \mathrm{d}'x_n \wedge \mathrm{d}''x_n, \tag{1.5.1.1}$$

où $\omega^\sharp$ est donc une fonction borélienne sur U. Si $\omega^\sharp$ est intégrable sur U, Lagerberg a défini l'intégrale de ω par la formule

$$\int_U \omega = \int_U \omega^\sharp(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n, \tag{1.5.1.2}$$

où $\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n$ désigne la mesure de Lebesgue.[(1)]

1.5.2. Non-canonicité des intégrales de Lagerberg. — Si $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est une application affine bijective, d'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$, on a

$$\int_{f^{-1}(U)} f^*\omega = |\det(\overrightarrow{f})| \int_U \omega. \tag{1.5.2.1}$$

Soit n un entier naturel et soit V un espace affine de dimension n sur $\mathbf{R}$. Pour définir l'intégrale d'une (n,n) forme intégrable ω sur un ouvert U de V, il suffit de fixer un isomorphisme affine de V sur $\mathbf{R}^n$ et d'appliquer la définition ci-dessus. Le problème est que *le résultat obtenu dépend de l'isomorphisme choisi* : en effet, par ce qui précède, deux isomorphismes u et u' fournissent la même notion d'intégrale si et seulement le jacobien de l'automorphisme affine $u' \circ u^{-1}$ de $\mathbf{R}^n$ est égal à ± 1.

Pour définir l'intégrale d'une (n,n)-forme sur un ouvert d'un espace affine de dimension n, des données supplémentaires sont donc nécessaires. Comme on vient de le voir, ce peut être un système de coordonnées affines ; mais comme la dépendance en un tel système ne fait intervenir que la valeur absolue du jacobien du changement de variables, il est suffisant de se donner un n-vecteur et une orientation.

Le but des paragraphes qui suivent est d'expliciter cette assertion un peu vague et de définir du même coup l'intégrale d'une $(n-1,n)$-forme sur le bord d'un demi-espace de V.

1.5.3. — Soit V un $\mathbf{R}$-espace affine de dimension finie, soit $\mathscr{B}$ le faisceau des fonctions boréliennes sur V. Soit W un sous-espace affine de V, soit p sa dimension ; soit o une orientation de W.

Soit n un entier naturel et soit $\lambda \in \Lambda^n V$. Soit ω une (p,n)-forme à coefficients boréliens sur V. Par définition, ω est un élément de $\mathscr{B}(U)\otimes\Lambda^p\overrightarrow{V}^*\otimes\Lambda^n\overrightarrow{V}^*$. On peut donc contracter la partie $\Lambda^n\overrightarrow{V}^*$ de la forme ω par λ de façon à obtenir une $(p,0)$-forme sur V, c'est-à-dire une p-forme sur V, au sens usuel de la géométrie différentielle.

Lorsque $p=n$, $V=\mathbf{R}^n$, que ω est donnée par la formule (1.5.1.1) et que λ est le n-vecteur $e_1\wedge\dots\wedge e_n$, on obtient $(-1)^{n(n-1)/2}$ fois la forme $\omega^\sharp\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n$ qui est intégrée dans la relation (1.5.1.2) (attention à l'ordre des termes $\mathrm{d}'x_i$ et $\mathrm{d}''x_i$).

(1) En fait, la définition 2.2 de [**92**] propose une autre convention, erronée, mais qu'il n'utilise apparemment pas dans son article. La convention que nous adoptons a pour vertu que l'intégrale d'une (n,n)-forme positive (définition 1.2.3) est positive.

On définit ainsi une $(p,0)$-forme $\langle\omega,\lambda\rangle$ sur V comme $(-1)^{n(n-1)/2}$ fois la contraction décrite ci-dessus. Notons alors

$$\int_W \langle|\omega|,|\lambda|\rangle$$

la masse totale de la mesure sur W définie par la restriction à W de la p-forme $\langle\omega,\lambda\rangle$, si ladite restriction est localement intégrable ; dans le cas contraire, on pose

$$\int_W \langle|\omega|,|\lambda|\rangle = +\infty.$$

On dit que ω est intégrable sur W si

$$\int_W \langle|\omega|,|\lambda|\rangle < +\infty.$$

Dans ce cas, l'orientation o fixée sur W permet de définir l'intégrale de $\langle\omega,\lambda\rangle$ sur W ; sous-entendant le choix de l'orientation o, on note naturellement

$$\int_W \langle\omega,\lambda\rangle$$

cette intégrale.

Les formes ω de type (p,n) à coefficients boréliens sur V qui sont intégrables sur W forment un sous-espace vectoriel de $\mathscr{B}_V^{p,n}(V)$ sur lequel l'application $\omega \mapsto \int_W\langle\omega,\lambda\rangle$ est linéaire.

1.5.4. — Lorsqu'on change l'orientation o en l'orientation opposée, l'intégrale d'une forme (par rapport à (o,λ)) est transformée en son opposée. De même, lorsqu'on change le n-vecteur λ en le multiple $a\lambda$, l'intégrale d'une forme est multipliée par a.

En particulier, la notion d'intégrabilité et l'intégrale ne sont pas modifiées si l'on change simultanément l'orientation o en l'orientation opposée et le n-vecteur λ en son opposé $-\lambda$. Ces notions ne dépendent donc que de la classe μ du couple (o,λ) dans le produit contracté $\Lambda^n\overrightarrow{V} \times^{\{-1,1\}} \mathrm{Or}(\overrightarrow{W})$ de l'espace des n-vecteurs sur $\overrightarrow{V}$ et de l'ensemble des orientations sur $\overrightarrow{W}$, munis des actions naturelles de $\{-1,1\}$.

On notera ainsi $\int_W\langle\omega,\mu\rangle$ et $\int_W\langle|\omega|,|\mu|\rangle$ ce qui était noté $\int_W\langle\omega,\lambda\rangle$ et $\int_W\langle|\omega|,|\lambda|\rangle$.

On peut penser aux symboles $|\omega|$ et $|\mu|$ comme représentant « ω et μ au signe près ».

1.5.5. Vecteurs-volume. — Supposons que n soit égal à la dimension de V. Nous appellerons *vecteur-volume* sur V un élément du produit contracté $|\Lambda^n\overrightarrow{V}| = \Lambda^n\overrightarrow{V} \times^{\{-1,1\}} \mathrm{Or}(\overrightarrow{V})$. Concrètement, on obtient bien sûr un tel vecteur-volume $|e_1\wedge\cdots\wedge e_n|$ à partir d'une base $(e_1,\dots,e_n)$ de $\overrightarrow{V}$, décrétée directe, et du n-vecteur $e_1\wedge\cdots\wedge e_n$ de $\overrightarrow{V}$.

L'espace des vecteurs-volume sur V est naturellement un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 1.

On dira qu'un vecteur-volume μ est (strictement) positif s'il existe une base $(e_1,\dots,e_n)$ de $\overrightarrow{V}$ et un nombre réel (strictement) positif a tel que $\mu = a|e_1\wedge\cdots\wedge e_n|$. C'est alors le cas pour toute base de V.

1.5.6. Intégrale des formes de type (n,n). — Supposons toujours que n soit égal à la dimension de V et soit μ un vecteur-volume sur V.

D'après les paragraphes précédents, on peut donc définir :

– L'intégrale $\int_V\langle|\omega|,|\mu|\rangle$ pour toute forme borélienne ω de type (n,n) sur V ;
– La notion de μ-intégrabilité d'une telle forme ;

– Pour une (n,n)-forme ω sur V qui est borélienne et μ-intégrable, l'intégrale $\int_V \langle \omega, \mu \rangle$.

Explicitons ces définitions en coordonnées.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\overrightarrow{V}$; écrivons $\mu = a|e_1 \wedge \cdots \wedge e_n|$. Si $\omega = \omega^\sharp(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}' x_1 \wedge \mathrm{d}'' x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}' x_n \wedge \mathrm{d}'' x_n$, alors ω est μ-intégrable si et seulement si la fonction $a\omega^\sharp$ sur V est intégrable. Cela ne dépend d'ailleurs pas de a, sauf si $a = 0$ auquel cas toute forme borélienne est μ-intégrable.

On a

$$\int_V \langle |\omega|, |\mu| \rangle = |a| \int_V |\omega^\sharp|(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n,$$

et

$$\int_V \langle \omega, \mu \rangle = a \int_V \omega^\sharp(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n$$

lorsque ω est μ-intégrable.

Lorsque $a = 1$, on retrouve la formule de Lagerberg.

Supposons que le vecteur-volume μ soit positif. Avec les notations précédentes, on a donc $a \geqslant 0$. Ainsi, l'intégrale $\int_V \langle \omega, \mu \rangle$ de toute (n,n)-forme positive ω est positive et coïncide avec l'intégrale $\int_V \langle |\omega|, |\mu| \rangle$ de sa « valeur absolue ».

1.5.7. — Soit $f : V \to V'$ un isomorphisme d'espaces affines de dimension finie et soit μ un vecteur-volume sur V. Soit $f_*(\mu)$ le vecteur volume sur V' déduit de μ par transport de structure. Si μ est positif, $f_*(\mu)$ l'est aussi.

Soit ω' une (n,n)-forme à coefficients boréliens sur V' et soit $\omega = f^*\omega'$. Pour que ω soit μ-intégrable, il faut et il suffit que ω' soit $f_*(\mu)$-intégrable ; alors,

$$\int_V \langle f^*\omega, \mu \rangle = \int_{V'} \langle \omega, f_*(\mu) \rangle.$$

1.5.8. Le cas des $(n-1,n)$-formes : les intégrales de bord. — On suppose toujours que n est la dimension de V. Soit V_+ un demi-espace fermé de V ; son bord $\partial(V_+)$ est un hyperplan affine de V et V_+ est l'une des deux composantes connexes de $V - \partial(V_+)$. Si ℓ est une forme affine telle que $V_+ = \{\ell \geqslant 0\}$, on dit qu'un vecteur $v \in \overrightarrow{V}$ est sortant de V_+ si $\ell(v) \leqslant 0$, l'adverbe strictement signifiant que l'inégalité précédente est stricte.

Tout vecteur-volume μ sur V induit canoniquement un élément $\partial\mu_+$ de $\mathrm{Or}(\overrightarrow{\partial(V_+)}) \times^{\{-1,1\}} \Lambda^n \overrightarrow{V}$ défini comme suit. On choisit une orientation o de $\overrightarrow{\partial(V_+)}$, une base directe $(e_2, \dots, e_n)$ de $\overrightarrow{\partial(V_+)}$, un vecteur e_1 strictement sortant de V_+, et l'on note o' l'orientation de V pour laquelle la base $(e_1, \dots, e_n)$ est directe. (On dira que V est orienté suivant *la règle de la normale sortante* à partir de l'orientation de $\overrightarrow{\partial(V_+)}$.) Il existe alors un unique $\lambda \in \Lambda^n \overrightarrow{V}$ tel que (λ, o') soit égal à μ dans $|\Lambda^n \overrightarrow{V}|$. Le couple (λ, o) définit un élément $\partial\mu_+$ de $\Lambda^n \overrightarrow{V} \times^{\{-1,1\}} \mathrm{Or}(\overrightarrow{\partial(V)})$ qui est indépendant des choix faits.

D'après les paragraphes 1.5.3 et 1.5.4, on peut alors définir :

– L'intégrale $\int_{\partial(V_+)} \langle |\omega|, |\partial\mu_+| \rangle$ pour toute forme borélienne ω de type $(n-1,n)$ sur V ;

– La notion de $\partial\mu_+$-intégrabilité d'une telle forme sur $\partial(V_+)$;

– Pour une forme ω sur V qui est mesurable et $\partial\mu_+$-intégrable sur $\partial(V_+)$, l'intégrale $\int_{\partial(V_+)} \langle \omega, \partial\mu_+ \rangle$.

Concrètement, fixons une origine de V appartenant à $\partial(V_+)$ et choisissons $(e_1, \dots, e_n)$ comme ci-dessus : c'est une base directe de V ; si $(x_1, \dots, x_n)$ est la base duale de $\overrightarrow{V}$, le demi-espace V_+ est défini par l'inégalité $x_1 \leqslant 0$; enfin, $(e_2, \dots, e_n)$ est une base directe

de $\partial(V_+)$. Compte tenu des orientations choisies, le vecteur-volume μ est donné par un n-vecteur $ae_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ de $\Lambda^n \overrightarrow{V}$. En coordonnées, on peut donc écrire

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, \mathrm{d}' x_1 \wedge \mathrm{d}'' x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}' x_i} \wedge \mathrm{d}'' x_i \wedge \ldots \mathrm{d}' x_n \wedge \mathrm{d}'' x_n.$$

On a alors

$$\int_{\partial(V_+)} \langle |\omega|, |\partial\mu_+| \rangle = |a| \int_{\partial(V_+)} |\omega_1|(0, x_2, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

La forme ω est $\partial\mu_+$-intégrable sur W si et seulement si $a\omega_1(0, *, \ldots, *)$ est L^1 (ce qui ne dépend pas de a, sauf si celui-ci est nul, auquel cas toute forme borélienne est $\partial\mu_+$-intégrable). Si c'est le cas,

$$\int_{\partial(V_+)} \langle \omega, \partial\mu_+ \rangle = a \int_{\partial(V_+)} \omega_1(0, x_2, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

***Lemme 1.5.9* (Formule de Stokes).** — *Soit $\mu \in |\Lambda^n \overrightarrow{V}|$. Soit V_+ un demi-espace fermé dans V. Soit ω une forme de type $(n-1, n)$ sur V, à coefficients de classe $\mathscr{C}^1$, telle que* $\mathrm{supp}(\omega) \cap V_+$ *est compact. On a*

$$\int_{V_+} \langle \mathrm{d}' \omega, \mu \rangle = \int_{\partial(V_+)} \langle \omega, \partial\mu \rangle.$$

Démonstration. — Cette formule n'est qu'une récriture de la formule de Stokes usuelle. Vérifions-le en coordonnées. Supposons donc que V est l'espace $\mathbf{R}^n$ muni de son orientation canonique et que $V_+ = \mathbf{R}_- \times \mathbf{R}^{n-1}$. Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$. Le vecteur-volume μ correspond à un n-vecteur $ae_1 \wedge \cdots \wedge e_n$. D'autre part, on peut écrire

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, \mathrm{d}' x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}' x_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}' x_n \wedge \mathrm{d}'' x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'' x_n.$$

Par définition, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{d}' \omega &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \, \mathrm{d}' x_j \wedge \mathrm{d}' x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}' x_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}' x_n \wedge \mathrm{d}'' x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'' x_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} \, \mathrm{d}' x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}' x_n \wedge \mathrm{d}'' x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'' x_n. \end{aligned}$$

Soit α la forme différentielle de degré $n-1$ sur V donnée par

$$\alpha = (-1)^{n(n-1)/2} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

Soit β la n-forme sur V donnée par

$$\beta = (-1)^{n(n-1)/2} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

On a donc

$$\int_{\partial(V_+)} \langle \omega, \partial\mu_+ \rangle = a \int_{\partial(V_+)} \alpha \quad \text{et} \quad \int_{V_+} \langle \mathrm{d}' \omega, \mu_+ \rangle = a \int_{V_+} \beta.$$

D'après la formule de Stokes usuelle, $\int_{\partial(V_+)} \alpha = \int_{V_+} \mathrm{d}\alpha$. Or,

$$\mathrm{d}\alpha = (-1)^{n(n-1)/2} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n = \beta,$$

d'où le lemme. □

***Lemme 1.5.10* (Formule de Green).** — *Soit $\mu \in |\Lambda^n \overrightarrow{V}|$. Soit V_+ un demi-espace fermé dans V. Soit α et β des formes* symétriques *de type (p,p) et (q,q) sur V, avec $p+q = n-1$, à coefficients de classe $\mathscr{C}^2$; si l'intersection de leurs supports est compacte, on a*

$$\int_{V_+} \langle \alpha \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\beta - \mathrm{d}'\mathrm{d}''\alpha \wedge \beta, \mu \rangle = \int_{\partial(V_+)} \langle \alpha \wedge \mathrm{d}''\beta - \mathrm{d}''\alpha \wedge \beta, \partial\mu^+ \rangle.$$

Démonstration. — Posons

$$\omega = \alpha \wedge \mathrm{d}''\beta - \mathrm{d}''\alpha \wedge \beta.$$

D'après la formule de Stokes (lemme 1.5.9), on a

$$\int_{V_+} \langle \mathrm{d}'\omega, \mu \rangle = \int_{\partial(V_+)} \langle \omega, \partial\mu_+ \rangle.$$

Par ailleurs, comme α est de bidegré (p,p),

$$\mathrm{d}\omega = (\alpha \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\beta - \mathrm{d}'\mathrm{d}''\alpha \wedge \beta) + (\mathrm{d}'\alpha \wedge \mathrm{d}''\beta + \mathrm{d}''\alpha \wedge \mathrm{d}'\beta).$$

D'après le lemme 1.3.8, on a $\mathrm{d}'\alpha \wedge \mathrm{d}''\beta = -\mathrm{d}''\alpha \wedge \mathrm{d}'\beta$, d'où le lemme. □

§ 1.6. SUPERCOURANTS

Soit V un espace affine réel de dimension finie, n, muni d'un vecteur-volume strictement positif μ.

1.6.1. — Dans [**92**], Lagerberg munit l'espace des superformes de type (p,q) sur V, lisses à support contact, d'une topologie localement convexe, similaire à celle des fonctions lisses à support compact. Les éléments de son dual topologique sont appelés supercourants, voire courants, de bidimension (p,q) ou de bidegré $(n-p, n-q)$.

1.6.2. — L'intégrale des (n,n)-formes sur V qui lui est associée fournit une application $\alpha \mapsto [\alpha]$ de l'espace des (p,q)-formes dans celui des courants de bidegré (p,q) par la formule

$$\langle [\alpha], \beta \rangle = \int_V \langle \alpha \wedge \beta, \mu \rangle.$$

Cette application est injective.

1.6.3. — Grâce à la formule de Stokes, le calcul différentiel des superformes se prolonge par dualité en un calcul différentiel des supercourants.

1.6.4. — Comme dans le cas des variétés, on peut écrire un courant sur $\mathbf{R}^n$ comme une « forme à coefficients distributions » : si T est de bidegré (p,q), on a une décomposition

$$T = \sum_{IJ} T_{IJ}\, \mathrm{d}' x_I \wedge \mathrm{d}'' x_J$$

indexée par les couples (I,J) de parties de $\{1,\dots,n\}$ tels que $\mathrm{Card}(I) = p$ et $\mathrm{Card}(J) = q$, où les T_{IJ} sont des courants de bidegré $(0,0)$. À un signe près qui ne dépend que du couple (I,J), on a $\langle T_{IJ}, \varphi\eta\rangle = \langle T, \varphi\, \mathrm{d}' x^I \wedge \mathrm{d}'' x^J\rangle$. Remarquons que $T_{IJ} \wedge \eta$ est une distribution sur $\mathbf{R}^n$.

1.6.5. — On dit qu'un courant de bidimension (p,p) est positif (*resp.* faiblement positif, *resp.* fortement positif) s'il est symétrique et si l'image de toute forme positive (*resp.* fortement positive, *resp.* faiblement positive) est positive.

Si f est une fonction (continue) sur V, le courant $\mathrm{d}'\mathrm{d}''[f]$ est positif si et seulement si la fonction f est convexe ; inversement, tout courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ est de cette forme (propositions 2.5 et 2.6 de [**92**]).

1.6.6. — Lageberg [**92**] explique comment, par convolution, les supercourants sur $\mathbf{R}^n$ peuvent être approchés par des formes lisses. Rappelons la construction.

Soit ρ une fonction lisse à support compact sur $\mathbf{R}^n$; pour tout $\varepsilon > 0$, posons $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\rho(x/\varepsilon)$.

Soit f une fonction lisse sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$. La fonction $\rho * f$ sur $\mathbf{R}^n$ est définie par

$$\rho * f(x) = \int_\Omega f(y)\rho(x-y)\, dy.$$

Son support est contenu dans $\mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(\rho)$. Si ρ et f sont positives, alors $\rho * f$ est positive.

Si $\Omega = \mathbf{R}^n$, on écrit

$$\rho * f(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \rho(y) f(x-y)\, dy,$$

On en déduit que si f est lisse, alors $\rho * f$ est lisse, et ses dérivées sont données par dérivation sous le signe somme. De plus, si ρ est positive d'intégrale 1, alors $\rho_\varepsilon * \omega$ converge uniformément vers ρ sur tout compact de $\mathbf{R}^n$ lorsque $\varepsilon \to 0$, et de même pour chacune de ses dérivées. De même, si f est croissante par rapport à x_i, il en est de même de $\rho * f$.

Dans le cas général, on peut écrire

$$\rho * f(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \rho(y) \tilde{f}(x-y)\, dy,$$

où $\tilde{f}$ est la fonction (mesurable) sur $\mathbf{R}^n$ égale à f sur Ω et à 0 ailleurs. De cette formule, on en déduit que des variantes des propriétés précédentes. Si ρ est positive, de support contenu dans B et si f est croissante par rapport à x_i (resp. convexe, resp. lisse) sur un ouvert Ω' de Ω tel que $\Omega' + \mathrm{supp}(\rho) \subset \Omega$, alors $\rho * f$ est croissante par rapport à x_i (resp. convexe, resp. lisse) sur cet ouvert Ω'. De même, si ρ est positive d'intégrale 1, alors $\rho_\varepsilon * \omega$ converge vers ρ lorsque $\varepsilon \to 0$, uniformément sur tout compact de Ω, avec ses dérivées.

Soit maintenant ω une forme lisse sur $\mathbf{R}^n$. Soit ρ une fonction lisse à support compact sur $\mathbf{R}^n$; on définit la forme $\rho * \omega$ en se ramenant au cas des fonctions sur $\mathbf{R}^n$ en

décomposant $\omega = \sum_{I,J} \omega_{IJ}\, \mathrm{d}' x_I \wedge \mathrm{d}'' x_J$ et en posant

$$\rho * \omega = \sum_{IJ} (\rho * \omega_{IJ})\, \mathrm{d}' x_I \wedge \mathrm{d}'' x_J.$$

Lorsque ω est à support compact, la forme $\rho * \omega$ est à support compact.

Par dérivation sous le signe somme, on a

$$\mathrm{d}'(\rho * \omega) = \rho * \mathrm{d}'\, \omega, \qquad \mathrm{d}''(\rho * \omega) = \rho * \mathrm{d}''\, \omega.$$

Supposons que ρ soit positive. Alors si ω est positive (resp. faiblement positive, resp. fortement positive), il en est de même de $\rho * \omega$.

Supposons que ρ soit positive, d'intégrale 1 ; pour tout $\varepsilon > 0$, posons $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\rho(x/\varepsilon)$. Alors $\rho_\varepsilon * \omega$ converge uniformément vers ρ sur tout compact de $\mathbf{R}^n$, avec ses dérivées.

Soit maintenant T un courant de bidimension (p, q) sur $\mathbf{R}^n$. La convolution $\rho * T$ est un courant de bidimension (p, q) défini par

$$\langle \rho * T, \omega \rangle = \langle T, \rho * \omega \rangle$$

pour toute forme ω, lisse de type (p, q) et à support compact. En fait, c'est un courant associé à la *forme* lisse

$$\sum_{I,J} (\rho * (T_{IJ} \wedge \eta))\, \mathrm{d}' x_I \wedge \mathrm{d}'' x_J,$$

puisque la convolée de ρ et de la distribution $T_{IJ} \wedge \eta$ est une fonction lisse.

On a $\mathrm{d}'(\rho * T) = \rho * \mathrm{d}'\, T$ et $\mathrm{d}''(\rho * T) = \rho * \mathrm{d}''\, T$.

Supposons ρ positive. Si T est positif (resp. faiblement positif, resp. fortement positif), il en est de même de $\rho * T$.

Supposons que ρ est positive d'intégrale 1. Alors $\rho_\varepsilon * T$ converge faiblement vers T quand ε tend vers 0.

En particulier, tout courant positif fermé est limite de formes lisses positives fermées.

1.6.7. — Inspiré par les théories de Demailly [**44**] et Bedford-Taylor [**6**], Lagerberg définit, par approximation, une notion de produit de courants positifs de la forme $\mathrm{d}'\mathrm{d}'' f$, où f est une fonction convexe sur $\mathbf{R}^n$.

Le courant $\mathrm{MA}(f) = (\mathrm{d}'\mathrm{d}'' f)^n$ est alors une mesure positive sur V, qu'on appelle la mesure de Monge-Ampère de f.

§ 1.7. UN CALCUL D'OPÉRATEUR DE MONGE-AMPÈRE

Lemme 1.7.1. — *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et soit $h\colon U \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Alors,*

$$(\mathrm{d}'\mathrm{d}'' h)^n = n! \det\Big(\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}\Big)\, \mathrm{d}' x_1 \wedge \mathrm{d}'' x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}' x_n \wedge \mathrm{d}'' x_n.$$

Démonstration. — Partons de la formule

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}'' h = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}\, \mathrm{d}' x_i \wedge \mathrm{d}'' x_j.$$

Alors, dans l'expression

$$(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, h)^n = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_n\\ j_1,\dots,j_n}} \prod_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 h}{\partial x_{i_k}\partial x_{j_k}}\, \mathrm{d}'\, x_{i_k} \wedge \mathrm{d}''\, x_{j_k}$$

(rappelons que les formes de bidegré $(1,1)$ commutent deux à deux), tous les termes pour lesquels $\{i_1,\dots,i_n\} \neq \{1,\dots,n\}$ ou $\{j_1,\dots,j_n\} \neq \{1,\dots,n\}$ sont nuls. Ainsi,

$$(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, h)^n = \sum_{\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_n} \prod_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 h}{\partial x_{\sigma(k)}\partial x_{\tau(k)}}\, \mathrm{d}'\, x_{\sigma(1)} \wedge \mathrm{d}''\, x_{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\, x_{\sigma(n)} \wedge \mathrm{d}''\, x_{\tau(n)}.$$

Remarquons aussi que

$$\mathrm{d}'\, x_{\sigma(1)} \wedge \mathrm{d}''\, x_{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\, x_{\sigma(n)} \wedge \mathrm{d}''\, x_{\tau(n)} = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)\, \mathrm{d}'\, x_1 \wedge \mathrm{d}''\, x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\, x_n \wedge \mathrm{d}''\, x_n,$$

où $\varepsilon(\cdot)$ désigne la signature d'une permutation. En outre, si $\psi = \tau \circ \sigma^{-1}$, on a

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 h}{\partial x_{\sigma(k)}\partial x_{\tau(k)}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 h}{\partial x_k \partial x_{\psi(k)}}$$

et

$$\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\psi).$$

Par suite,

$$(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, h)^n = n! \sum_{\psi\in\mathfrak{S}_n} \prod_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 h}{\partial x_k \partial x_{\psi(k)}} \varepsilon(\psi)\ \mathrm{d}'\, x_1 \wedge \mathrm{d}''\, x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\, x_n \wedge \mathrm{d}''\, x_n,$$

ainsi qu'il fallait démontrer. □

Lemme 1.7.2. — *Munissons $\mathbf{R}^n$ de la mesure de Lebesgue et de son vecteur-volume canonique μ. Soit U un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$ et soit $h\colon U \to \mathbf{R}$ une fonction lisse, strictement convexe. L'application gradient $\nabla h\colon U \to \mathbf{R}^n$ est injective et $\int_U \langle (\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, h)^n, \mu\rangle = n!\,\mathrm{vol}\,\nabla h(U)$.*

Démonstration. — Soit x et y des points distincts de U. Comme la fonction $f\colon t \mapsto h(x + t(y-x))$ sur $[0,1]$ est strictement convexe, on a $f'(1) > f'(0)$ puis $\langle \nabla h(y) - \nabla h(x), y - x\rangle > 0$. En particulier, $\nabla h(x) \neq \nabla h(y)$.

La matrice jacobienne $\mathrm{Jac}(\nabla h)$ de l'application $\nabla h\colon U \to \mathbf{R}^n$ n'est autre que la matrice hessienne $\mathscr{H}(h)$ de l'application h. Puisque h est convexe, on a $\det(\mathscr{H}(h)) \geqslant 0$. D'après le lemme précédent, le théorème de Sard et la formule de changement de variables dans les intégrales multiples, on a donc

$$\int_U \langle (\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, h)^n, \mu\rangle = n! \int_U \det \mathscr{H}(h) = n! \int_U \det \mathrm{Jac}(\nabla h) = n!\,\mathrm{vol}(\nabla h(U)).$$ □

Lemme 1.7.3. — *Soit V un espace affine réel de dimension finie et soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille non vide de formes affines sur V. Soit $j \in I$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour toute forme affine g sur V, l'application affine $(f_i - g)_i$ de V dans $\mathbf{R}^I$ est injective.*

(ii) *L'application affine $(f_i - f_j)_i$ de V dans $\mathbf{R}^I$ est injective.*

(iii) *L'application affine $(f_i)_i$ de V dans $\mathbf{R}^I$ est injective, et son image ne contient aucune droite parallèle à la droite diagonale engendrée par le vecteur constant $(1)_i$.*

(iv) *La famille $(\overrightarrow{f_i} - \overrightarrow{f_j})_i$ contient une base de l'espace dual $\overrightarrow{V}^*$.*

(v) *Le sous-espace affine de l'espace dual $\overrightarrow{V}^*$ engendré par les $\overrightarrow{f_i}$ est égal à $\overrightarrow{V}^*$.*

Démonstration. — Il est clair que (i)⇒(ii). Supposons que (ii) est vraie. Posons $f = (f_i)_i$. L'application affine $(f_i - f_j)_i$ étant injective, la famille $(\overrightarrow{f_i} - \overrightarrow{f_j})_i$ engendre $\overrightarrow{V}^*$; il s'ensuit que $(\overrightarrow{f_i})_i$ engendre $\overrightarrow{V}^*$ et donc que f est injective. Supposons qu'il existe une famille finie $(a_i)_i$ de nombres réels, deux points v et w de V, et deux nombres réels distincts s et t tels que $f(v) = (a_i + s)_i$ et $f(w) = (a_i + t)_i$ (comme $s \neq t$ on a nécessairement $v \neq w$). L'application affine $(f_i - f_j)_i$ prend alors la valeur $(a_i - a_j)_i$ en v et en w, ce qui contredit (i). Par conséquent, $f(V)$ ne contient aucune droite parallèle à la diagonale, d'où (iii).

Supposons que (iii) est vraie, et montrons (iv). Si la famille $(\overrightarrow{f_i} - \overrightarrow{f_j})$ n'était pas de rang maximal, il existerait un vecteur $\overrightarrow{v}$ non nul dans l'intersection des noyaux des formes linéaires $\overrightarrow{f_i} - \overrightarrow{f_j}$. L'image $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})$ serait alors un vecteur nul dont toutes les composantes sont égales, c'est-à-dire un vecteur directeur de la droite diagonale, si bien que $f(V)$ contiendrait une droite affine parallèle à la diagonale, contredisant (iii). Par conséquent (iv) est vraie.

L'implication (iv)⇒(v) provient du fait que le sous-espace affine de $\overrightarrow{V}^*$ engendré par les $\overrightarrow{f_i}$ est le sous-espace affine de $\overrightarrow{V}^*$ passant par $\overrightarrow{f_j}$ et dirigé par $\langle \overrightarrow{f_i} - \overrightarrow{f_i} \rangle_i$.

Supposons enfin que (v) est vraie. Soit g une forme affine sur V. La famille $(\overrightarrow{f_i} - \overrightarrow{g})_i$ contient alors une base de $\overrightarrow{V}^*$: sinon, les $\overrightarrow{f_i}$ appartiendraient toutes à un même sous-espace affine strict de $\overrightarrow{V}^*$ passant par $\overrightarrow{g}$. L'application linéaire $(\overrightarrow{f_i} - \overrightarrow{g})_i$ est donc injective, et l'application affine $(f_i - g)_i$ l'est alors aussi, ce qui montre (i) et termine la preuve du lemme. □

Définition 1.7.4. — *Soit V un espace affine réel de dimension finie et soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille non vide de formes affines sur V. Nous dirons que la famille (f_i) est* très séparante *si elle satisfait les conditions équivalentes du lemme ci-dessus.*

1.7.5. — Soit V un espace affine réel de dimension finie et soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille non vide de formes affines sur V.

a) Pour toute forme affine g sur V, la famille $(f_i - g)_i$ est très séparante si et seulement s'il en est de même de la famille $(f_i)_i$: cela résulte immédiatement du critère (i).

b) Si la famille (f_i) est très séparante, l'ensemble des points x de V tels que $f_i(x) = f_j(x)$ pour tous i, j est de cardinal au plus 1. (En effet, son image par l'application affine injective f est l'intersection de $f(V)$ et de la diagonale de $\mathbf{R}^I$.)

c) Si la famille $(f_i)_i$ contient une forme constante, elle est très séparante si et seulement si l'application affine f est injective. (Prendre j tel que f_j soit constante et appliquer le critère (ii)).

Lemme 1.7.6. — *Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie, soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille finie non vide de formes affines sur V ; soit $f = (f_i) \colon V \to \mathbf{R}^I$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $g_\varepsilon(x) = \varepsilon \log\big(\sum_{i\in I} \exp(f_i(x)/\varepsilon)\big)$; on pose aussi $g(x) = \sup_{i\in I} f_i(x)$.*

a) *La fonction $g \colon V \to \mathbf{R}$ est convexe.*

b) *Pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $g_\varepsilon \colon V \to \mathbf{R}$ est convexe ; elle est strictement convexe si et seulement si la famille (f_i) est très séparante.*

c) *Lorsque $\varepsilon \to 0^+$, les fonctions g_ε tendent vers g, uniformément et en décroissant.*

Démonstration. — a) La fonction g est convexe puisque c'est un maximum de fonctions convexes.

b) Il suffit de traiter le cas où $\varepsilon = 1$. Commençons par traiter le cas où $V = \mathbf{R}^n$ et les f_i sont les fonctions coordonnées. La fonction g_1 est lisse sur $\mathbf{R}^n$; pour démontrer qu'elle est convexe, il suffit de démontrer que sa hessienne $D_x^2 g_1$ est positive en tout point x. Or,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} g_1 = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\exp(x_j)}{\sum \exp(x_k)} = \frac{\exp(x_i)}{\sum \exp(x_k)} \delta_{ij} - \frac{\exp(x_i)\exp(x_j)}{(\sum \exp(x_k))^2}.$$

Par suite, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ et tout $y \in \mathbf{R}^n$, on a

$$D_x^2 g_1(y,y) = \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2 \exp(x_i)}{\sum \exp(x_k)} - \sum_{i,j=1}^n \frac{y_i y_j \exp(x_i)\exp(x_j)}{(\sum \exp(x_k))^2}.$$

Posons $u_i = \exp(x_i)$. Comme la fonction $y \mapsto y^2$ est strictement convexe, on a

$$(\sum u_i y_i^2)(\sum u_i) \geqslant (\sum u_i y_i)^2,$$

avec égalité si et seulement si les y_i sont tous égaux. On a donc $D_x^2 g_1(y,y) \geqslant 0$ et $D_x^2 g_1(y,y) = 0$ si et seulement si les y_i sont tous égaux.

Dans le cas général, la fonction g_1 est la composée de l'application affine f et de la fonction sur $\mathbf{R}^I$ analogue à celle que nous venons d'étudier. Elle est donc convexe. De plus, sa hessienne est positive, et son noyau est l'image inverse de la diagonale par $\overrightarrow{f}$. Si la famille (f_i) est très séparante, la hessienne de g_1 est donc définie positive en tout point, donc g_1 est strictement convexe. Inversement, on laisse au lecteur le soin de vérifier que si g_1 est strictement convexe, alors la famille (f_i) est très séparante.

c) Il suffit de traiter le cas où $V = \mathbf{R}^n$ et les f_i sont les fonctions coordonnées. Soit $x \in V$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a l'inégalité

$$g(x) \leqslant \varepsilon g_\varepsilon(x) \leqslant \varepsilon \log(n) + g(x),$$

ce qui entraîne que $g_\varepsilon(x)$ converge uniformément vers $g(x)$ lorsque ε tend vers 0 par valeurs supérieures.

Par ailleurs, si a et b sont des nombres réels tels que $a < b$, vérifions l'inégalité $g_a(x) \leqslant g_b(x)$. Fixons $x \in V$ et, pour $t > 0$, posons $h(t) = g_t(x) = \frac{1}{t}\log(\sum \exp(tx_i))$; il suffit de démontrer qu'elle décroît. La fonction h est dérivable et l'on a

$$h'(t) = -\frac{1}{t^2}\log(\sum e^{tx_i}) + \frac{1}{t}\frac{\sum x_i e^{tx_i}}{\sum e^{tx_i}}.$$

Puisque $tx_j \leqslant \log(\sum_i e^{tx_i})$ pour tout j, on a

$$\sum_i t x_i e^{tx_i} \leqslant \log(\sum_i e^{tx_i}) \sum_i e^{tx_i},$$

d'où l'inégalité $h'(t) \leqslant 0$. Cela prouve que h est décroissante. □

Proposition 1.7.7. — *Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie n, soit $(f_1, \dots, f_m)$ une famille non vide de formes linéaires sur V et soit μ un vecteur-volume strictement positif sur V. Soit D une partie convexe de V contenant 0 et soit $W(D)$ le cône tangent de D en 0. Posons $g = \max(f_1, \dots, f_m)$; pour tout $\varepsilon > 0$, posons $g_\varepsilon = \varepsilon \log(\sum \exp(f_i(x)/\varepsilon))$. Alors, $W(D)$ est de masse finie λ_D pour la mesure positive (absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue) $\langle (\mathrm{d}'\mathrm{d}'' g_1)^n, \mu\rangle$ sur V et l'on a*

$$\int_D \psi \langle (\mathrm{d}'\mathrm{d}'' g_\varepsilon)^n, \mu\rangle \to \lambda_D \psi(0)$$

pour toute fonction continue bornée ψ sur D.

De plus, si $\dim D =$ alors $\lambda_D > 0$ si et seulement si la famille $(f_1, \dots, f_m)$ est très séparante.

Démonstration. — Supposons d'abord que $D = V$; dans ce cas, $W(D) = V$. Rappelons que g_ε est une fonction convexe, lisse, qui converge uniformément vers g quand $\varepsilon \to 0^+$. On a donc $\langle (\mathrm{d}'\mathrm{d}'' g)^n, \mu\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \langle (\mathrm{d}'\mathrm{d}'' g_\varepsilon)^n, \rangle$ au sens des mesures. Soit T l'homothétie de rapport $1/\varepsilon$; son jacobien vaut $1/\varepsilon^n$ et l'on a $g_\varepsilon = \varepsilon T^* g_1$, donc

$$\begin{aligned}\int_V \psi \langle (\mathrm{d}'\mathrm{d}'' g_\varepsilon)^n, \mu\rangle &= \varepsilon^n \int_V \psi \langle T^* (\mathrm{d}'\mathrm{d}'' g_1)^n, \mu\rangle \\ &= \int_V (T^{-1})^* \psi \langle (\mathrm{d}'\mathrm{d}'' g_1)^n, \mu\rangle \\ &= \int_V \psi(\varepsilon x) \langle (\mathrm{d}'\mathrm{d}'' g_1)^n, \mu\rangle\end{aligned}$$

et

$$\int_V \psi \langle (\mathrm{d}'\mathrm{d}'' g)^n, \mu\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_V \psi(\varepsilon x) \langle (\mathrm{d}'\mathrm{d}'' g_1)^n, \mu\rangle.$$

Lorsque ε tend vers 0, la fonction continue $\psi(\varepsilon x)$ converge vers la fonction constante de valeur $\psi(0)$ et nous allons déduire du théorème de convergence dominée que

$$\int_V \psi \langle (\mathrm{d}'\mathrm{d}'' g)^n, \mu\rangle = \psi(0) \int_V \langle (\mathrm{d}'\mathrm{d}'' g_1)^n, \mu\rangle.$$

La fonction g_1 est convexe, donc la mesure $\langle (\mathrm{d}'\mathrm{d}'' g_1)^n, \mu\rangle$ sur V est positive. Pour appliquer le théorème de convergence dominée, il suffit donc d'établir la finitude de cette mesure. Si elle pourrait être établie directement (soit par un calcul, soit par des propriétés générales, *cf.* **[92]**, proposition 3.9), cette finitude résulte aussi du calcul précédent. En effet, prenons pour ψ une fonction lisse à support compact, positive ou nulle, et égale à 1 dans un voisinage B de 0. Alors,

$$\begin{aligned}\int_V \psi \langle (\mathrm{d}'\mathrm{d}'' g)^n, \mu\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_V \psi(\varepsilon x) \langle (\mathrm{d}'\mathrm{d}'' g_1)^n, \mu\rangle \\ &\geqslant \limsup_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon^{-1}B} \langle (\mathrm{d}'\mathrm{d}'' g_1)^n, \mu\rangle \\ &= \int_V \langle (\mathrm{d}'\mathrm{d}'' g_1)^n, \mu\rangle,\end{aligned}$$

d'où la finitude requise.

Le cas d'une partie convexe D quelconque s'en déduit. En effet, pour toute fonction continue bornée ψ sur D, on peut écrire

$$\int_D \psi\langle(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, g_\varepsilon)^n, \mu\rangle = \int_V \chi_D(\varepsilon x)\psi(\varepsilon x)\langle(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, g_1)^n, \mu\rangle.$$

Soit $x \in V$. Si $x \in W(D)$, alors $\varepsilon x \in D$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit, et $\psi(\varepsilon x) \to \psi(0)$; sinon, on a $\chi_D(\varepsilon x) = 0$ pour tout ε. Ainsi, $\chi_D(\varepsilon x)\psi(\varepsilon x) \to \psi(0)\chi_{W(D)}(x)$. Par convergence dominée, on a donc

$$\int_D \psi\langle(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, g_\varepsilon)^n, \mu\rangle \to \psi(0)\int_{W(D)} \langle(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, g_1)^n, \mu\rangle = \lambda_D\psi(0).$$

Supposons que la famille $(f_1, \ldots, f_m)$ n'est pas très séparante. Comme $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, g$ n'est pas modifié lorsqu'on soustrait aux f_i une même forme linéaire, on peut supposer que l'une d'entre elle est nulle. Si l'application linéaire résultante $f = (f_1, \ldots, f_m)$ n'est pas injective, g_1 provient d'une fonction sur un espace de dimension $< n$, de sorte que $(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, g_1)^n = 0$.

Inversement, si la famille $(f_1, \ldots, f_m)$ est très séparante, la fonction g_1 est strictement convexe, et sa hessienne est définie positive en tout point, donc la mesure $\langle(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, g_1)^n, \mu\rangle$ sur V est le produit de la mesure de Lebesgue par une fonction strictement positive. Cela entraîne que $\int_{W(D)}\langle(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, g_1)^n, \mu\rangle > 0$ dès que $\dim(W(D)) = n$, c'est-à-dire que $\dim(D) = n$. □

Proposition 1.7.8. — *Soit V un espace affine réel de dimension $n \geqslant 1$ muni d'un vecteur-volume μ. Soit $(f_1, \ldots, f_m)$ une suite non vide de formes affines sur V et soit $g = \max(f_1, \ldots, f_m)$. Pour $x \in V$, soit I_x l'ensemble des $i \in \{1, \ldots, m\}$ tels que $g(x) = f_i(x)$. Soit S l'ensemble des points x de V tels que la famille $(f_i)_{i\in I_x}$ soit très séparante.*

L'ensemble S est fini et il existe une famille $(\lambda_x)_{x\in S}$ de nombres réels telle que

$$(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, g)^n = \sum_{x\in S} \lambda_x \delta_x.$$

En outre, λ_x ne dépend que de la famille $(f_i)_{i\in I_x}$ et du vecteur-volume μ. De plus, si μ est strictement positif, alors $\lambda_x > 0$ pour tout $x \in S$.

Démonstration. — Soit I une partie non vide de $\{1, \ldots, m\}$ telle que la famille $(f_i)_{i\in I}$ soit très séparante. Fixons $i \in I$. Chaque équation $f_j(x) = f_i(x)$, pour $j \in I$ $(j \neq i)$, définit un sous-espace affine de V ; d'après la propriété $b)$ du §1.7.5, l'intersection de ces sous-espaces est de cardinal au plus 1. Par suite, l'ensemble S est fini.

On peut supposer que le vecteur-volume μ est strictement positif. Puisque g est convexe, le supercourant $(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, g)^n$ est une mesure positive sur V. Nous allons prouver que son support est égal à l'ensemble S.

Soit x un point de V. Soit U un voisinage de x dans V sur lequel $f_i < g(x)$ si $i \notin I_x$, de sorte que $g = \max_{i\in I_x} f_i$ sur U. Choisissons d'autre part $j \in I_x$; posons $f_i' = f_i - f_j$ et $g' = \max_{i\in I_x} f_i'$. Pour tout $y \in U$, on a

$$g(y) = \max_{i\in I_x} f_i(y) = f_j(y) + \max_{i\in I_x}(f_i - f_j)(y) = f_j(y) + g'(y).$$

Pour tout $i \in I_x$, posons $f_i' = f_i - f_j$. La famille $(f_i)_{i\in I_x}$ est très séparante si et seulement si la famille (f_i') l'est, c'est-à-dire, d'après la propriété 1.7.5, $c)$, si et seulement si l'application affine $f' \colon V \to \mathbf{R}^{I_x}$ définie par les f_i' est injective, car $f_j' = 0$.

D'autre part, $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, f_j = 0$, donc $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, g = \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, g'$. D'après le lemme 1.7.6, g' est limite uniforme sur U d'une famille (g'_ε) de fonctions convexes lisses provenant de l'espace affine V'_x image de V par l'application affine f'.

Si cet espace est de dimension $< n$, c'est-à-dire si $x \notin S$, on a donc $(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, g'_\varepsilon)^n = 0$ sur U, d'où $(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, g')^n = 0$ sur U, puis $(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, g)^n = 0$ sur U.

Nous avons ainsi démontré que le support de la mesure positive $(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, g)^n$ est contenu dans l'ensemble fini S ; elle est donc de la forme $\sum_{x\in S} \lambda_x \delta_x$, où $(\lambda_x)_{x\in S}$ est une famille de nombres réels positifs.

D'autre part, on a vu qu'au voisinage d'un point $x \in S$, la fonction g ne dépend que des formes f_i, pour $i \in I_x$; par suite, la mesure $(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, g)^n$ ne dépend que de ces formes et du vecteur-volume μ.

La proposition 1.7.7 fournit la formule explicite :

$$\lambda_x = \int_V \langle (\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, g'_1)^n, \mu \rangle,$$

où $g'_1 = \log\big(\sum_{i\in I_x} \exp(f'_i)\big)$. Comme f' est injective, g'_1 est strictement convexe (lemme 1.7.6), donc $\langle (\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, g'_1)^n, \mu \rangle$ est une mesure strictement positive sur V (lemme 1.7.1). □

Remarque 1.7.9. — Soit $(f_1, \ldots, f_m)$ une famille de formes linéaires sur $\mathbf{R}^n$ qui contient un repère affine de $\mathbf{R}^n$. Posons $f = \max(f_1, \ldots, f_m)$; c'est une fonction linéaire par morceaux (dans la terminologie introduite plus bas, *paralinéaire*) sur $\mathbf{R}^n$. Elle est convexe (comme toute borne supérieure d'une famille de fonctions convexes) ; elle est même strictement convexe au sens des fonctions linéaires par morceaux, c'est-à-dire que sa restriction à aucune droite vectorielle n'est linéaire. Si les f_j sont définies sur $\mathbf{Q}$, la fonction f est donc la fonction d'appui d'un fibré en droites ample L sur une variété torique X de tore $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ (**[68]**, p. 70, proposition). Dans ce cas, l'application $\nabla(h)$ est appelée « application moment » et l'image de V est un polytope convexe de $\mathbf{R}^n$ correspondant à la variété torique polarisée (X, L). On sait alors que $\mathrm{vol}(\nabla(h)(V)) = \deg_L(X)/n!$. Le courant $(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, f)^n$ est donc égal à $\deg_L(X)\delta_0$. Cela redonne une formule de Lagerberg (**[92]**, exemple 3.2 et proposition 5.12). Le lien entre supercourants et théorie de l'intersection apparaîtra clairement dans la suite de ce texte.

§ 1.8. CELLULES ET POLYÈDRES

1.8.1. — Soit K un sous-corps de $\mathbf{R}$ et soit G un sous-K-espace vectoriel non nul de $\mathbf{R}$. Dans ce travail, nous appelons espace affine un espace affine réel V de dimension finie muni d'un couple $(\overrightarrow{V}_K, V_G)$, où $\overrightarrow{V}_K$ est une K-structure sur l'espace vectoriel $\overrightarrow{V}$ sous-jacent à l'espace affine V et V_G est une orbite du sous-groupe $\overrightarrow{V}_K \otimes G$ de $\overrightarrow{V}$ agissant sur V.

Si V et W sont de tels espaces affines, les seules applications applications affines $f\colon V \to W$ que nous considérerons auront une partie linéaire K-rationnelle et enverront V_G dans W_G. Concrètement, une application de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$ est affine si elle est de la forme $x \mapsto A \cdot x + b$, où $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ et $b \in G^m$.

1.8.2. — Dans la suite de ce travail, qui est motivé par la géométrie analytique, nous ne considérerons que le cas où $K = \mathbf{Q}$ et $G = \mathbf{R}$ même si la plupart des résultats liés à la géométrie paralinéaire s'étendraient au cas général. En géométrie analytique sur un corps valué k, on pourrait vouloir garder une trace des paramètre réels qui interviennent dans les définitions des espaces analytiques (« espaces Γ-stricts », où Γ est un sous-groupe de $\mathbf{R}_+^*$ contenant les rayons des briques affinoïdes utilisées, non trivial si $|k^*| = 1$), ce qui justifierait l'étude du cas $K = \mathbf{Q}$ et $G = \mathbf{Q}\log(|k^\times| \cdot \Gamma)$. Nous au laissons le lecteur intéressé le soin de modifier les énoncés et leurs preuves.

Pour éviter toute ambiguïté, nous qualifierons parfois de fonctions $\mathbf{R}$-paralinéaires celles qui le sont lorsque $K = \mathbf{R}$.

1.8.3. — Soit V un espace affine et soit f une forme affine sur V, non constante. Les demi-espaces fermés de V définis par V sont les parties V_+ et V_- définies par les inégalités $f(x) \geqslant 0$ et $f(x) \leqslant 0$ respectivement. Les demi-espaces ouverts sont définis de même avec les inégalités strictes.

On appelle *cellule* de V toute partie non vide de V qui est intersection d'une famille finie de demi-espaces fermés de V. En particulier, V est une cellule.

Soit C une cellule de V. On appelle *cellule ouverte* associée à C, et on note $\mathring{C}$, l'*intérieur* de la cellule C dans le sous-espace affine qu'elle engendre. C'est aussi l'ensemble des points de C en lesquels C est une variété topologique, et C est l'adhérence de $\mathring{C}$. La *dimension* de C est celle de $\mathring{C}$. On note aussi $\partial(C) = C - \mathring{C}$ le *bord* de la cellule C.

On appelle *polyèdre* d'un espace affine V toute partie de V qui est réunion finie de cellules de V. En particulier, un polyèdre est fermé.

Il résulte immédiatement de la définition d'une cellule que l'image réciproque d'une cellule par une application affine est une cellule. Par suite, l'image réciproque d'un polyèdre est un polyèdre.

Une union finie, une intersection finie de polyèdres sont des polyèdres.

Soit P un polyèdre de V. On dit qu'une application h de P à valeurs dans un espace affine W est *polyédrale* s'il existe une famille finie (C_i) de cellules de V recouvrant P telle que, pour tout i, $h|_{C_i}$ soit une application affine.

Proposition 1.8.4. — *Soit $f\colon V \to W$ une application affine entre espaces affines et soit C une cellule de V.*

a) *L'image $f(C)$ est une cellule de W.*

b) *Pour tout point x de C il existe une section continue $g\colon f(C) \to C$ de f telle que $g(f(x)) = x$ et une famille finie (D_i) de cellules de W telles que $f(C) = \bigcup D_i$ et telles que $g|_{D_i}$ soit affine pour tout i.*

c) *L'application continue $f|_C\colon C \to f(C)$ est ouverte.*

Ce découpage de $f(C)$ en cellules est en général, inévitable, même si l'on n'impose pas le passage de la section par un point donné. Par exemple, lorsque C est un tétraèdre de $\mathbf{R}^3$, projeté sur un quadrilatère convexe du plan, de sorte que chaque sommet de C ait pour image un sommet de $f(C)$, il n'existe pas de section affine de f sur $f(C)$.

Démonstration. — Commençons par expliquer comment (c) se déduit de (b). Pour démontrer que $f|_C\colon C \to f(C)$ est ouverte, il suffit de démontrer que pour tout $x \in C$ et tout voisinage U de x dans C, l'image $f(U)$ est un voisinage de $f(x)$ dans $f(C)$. Or par (b) il existe une section continue g de $f|_C\colon C \to f(C)$ telle que $g(f(x)) = x$.

L'image réciproque $g^{-1}(U)$ est alors un voisinage de x dans $f(C)$ contenu dans $f(U)$, ce qui démontre (c).

Il reste donc à prouver (a) et (b). Remarquons d'abord que si $f_1 : V \to V_1$ et $f_2 : V_1 \to V_2$ vérifient ces assertions, il en est de même de $f = f_2 \circ f_1$. Soit en effet C une cellule de V ; posons $D = f_1(C)$ et $E = f_2(D) = f(C)$. Alors D est une cellule de V_1, donc E est une cellule de V_2. D'autre part, soit x un point de C ; posons $y = f_1(x))$ et $z = f_2(y) = f(x)$. Soit g_2 une section continue de f_2 sur E à valeurs dans D telle que $g_2(z) = y$ et soit (E_j) une famille finie de cellules de V_2 de réunion E telle que $g_2|_{E_j}$ soit affine pour tout j. Soit g_1 une section continue de f_1 sur D à valeurs dans C telle que $g_1(y) = x$ et soit (D_i) une famille finie de cellules de V_2 de réunion D telle que $g_1|_{D_i}$ soit affine pour tout i. Alors $g = g_1 \circ g_2$ est une section continue de f à valeurs dans C telle que $g(z) = x$. Pour tout (i, j), posons $F_{ij} = E_j \cap g_2^{-1}(D_i)$; comme $g_2|_{E_j}$ est affine, c'est une cellule de W. Par construction E est la réunion des F_{ij} et $g|_{F_{ij}}$ est affine pour tout (i, j).

L'application f se factorise en l'injection $x \mapsto (x, f(x))$ de V dans $V \times W$ et en la projection $(x, y) \mapsto y$ de $V \times W$ vers W. Compte-tenu de ce qui précède, cela permet de supposer que f est soit injective, soit une projection.

Si f est injective, l'énoncé est évident, car f induit un isomorphisme de V sur $f(V)$ donc $f(C)$ est une cellule, et $f|_C : C \to f(C)$ est un homéomorphisme et en particulier une application ouverte, ce qui démontre (a) et (c). En ce qui concerne (b) la section induite par la réciproque de $f : V \to f(V)$ convient (et est la seule !).

Lorsque f est une projection, il suffit, par récurrence sur la dimension des fibres, de traiter le cas de la projection $(x, t) \mapsto x$ de $V \times \mathbf{R}$ dans V. Par définition d'une cellule, il existe une famille finie (φ_i) de formes affines sur V et une familles (a_i) de nombres rationnels telles que C soit l'ensemble des $(x, t) \in V \times \mathbf{R}$ tels que $\varphi_i(x) - a_i t \geqslant 0$ pour tout i. Notons I, J, K les ensembles d'indices i tels que $a_i > 0$, $a_i < 0$, et $a_i = 0$ respectivement. On a

$$f(C) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} \{\varphi_j/a_j \leqslant \varphi_i/a_i\} \cap \bigcap_{k\in K} \{\varphi_k \geqslant 0\}.$$

C'est donc une cellule de V.

Pour x dans V posons

$$u(x) = \inf_{i\in I} \varphi_i(x)/a_i \quad \text{et} \quad v(x) = \sup_{j\in J} \varphi_j(x)/a_j$$

(si I est vide $u(x) = +\infty$ et si J est vide $v(x) = -\infty$). Les fonctions u et v sont des applications continues de V vers $[-\infty; +\infty]$. Soit (x, t) un point de C. Pour tout ξ dans V, posons $g(\xi) = \sup(v(\xi), \inf(t, u(\xi))$; la fonction g est continue et à valeurs réelles (même si u ou v prennent des valeurs infinies). Si ξ appartient à $f(C)$ alors $v(\xi) \leqslant u(\xi)$ et donc $v(\xi) \leqslant g(\xi) \leqslant u(\xi)$; de plus $\varphi_k(\xi) \geqslant 0$ pour tout $k \in K$, si bien que $(\xi, g(\xi))$ appartient à C. Et l'on par ailleurs $g(x) = t$ car $u(x) \leqslant t \leqslant v(x)$ puisque $(x, t) \in C$. L'application $h = \xi \mapsto (\xi, g(\xi))$ est une section continue de f, dont la restriction à $f(C)$ prend ses valeurs dans C. Pour $i \in I$, notons D_i l'ensemble des points ξ de V tels que $g(\xi) = \varphi_i(\xi)/a_i$; pour tout $j \in J$, notons E_j l'ensemble des points ξ de V tels que $g(\xi) = \varphi_j(\xi)/a_j$; et soit F l'ensemble des points ξ de V tels que $g(\xi) = t$. Les D_j, les E_j et F sont définis par des conjonctions finies d'inégalités larges entre fonctions affines, donc sont des cellules de V, et leur réunion est V tout entier. Par construction,

la restriction de h à chacune d'entre elles est affine. Les traces sur C de ces cellules répondent aux conditions de (b). □

Corollaire 1.8.5. — *Soit $f\colon V \to W$ une application affine entre espaces affines. Soit P un polyèdre de V. Alors $f(P)$ est un polyèdre de W. De plus, il existe une famille finie (D_i) de cellules de W et une famille finie (g_i) d'applications affines de W dans V telles que $f(C) = \bigcup D_i$, $g_i(D_i) \subset C$ et $f \circ g_i$ soit l'identité sur D_i.*

Corollaire 1.8.6. — *Soit D une cellule de $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^d$, soit $p\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ la projection sur le premier facteur et soit $C = p(D)$; posons $d = n - m$. Soit $(x,t) \in D$ un point qui est dans l'intérieur topologique de $p^{-1}(p(y)) \cap D$ dans $p^{-1}(p(y))$.*

a) *Pour tout point $\xi \in C$ assez proche de x, le point (ξ, t) appartient à D.*
b) *La cellule D est un voisinage de y dans $C \times \mathbf{R}^d$.*

Si l'assertion *b*) est plus générale, sa démonstration commence par établir l'assertion *a*).

Démonstration. — Pour tout $\xi \in C$, on pose $D_\xi = p^{-1}(\xi) \cap D$; considérée comme une cellule de $\mathbf{R}^d$.

a) Par hypothèse, il existe $d+1$ points $t_0, \dots, t_d$ de D_x affinement indépendants tels que le simplexe S de sommets $t_0, \dots, t_d$ soit voisinage de t dans $\mathbf{R}^d$. Il existe alors des voisinages ouverts $V_0, \dots, V_d$ de $t_0, \dots, t_d$ tels que pour toute famille $(v_0, \dots, v_d) \in V_0 \times \cdots \times V_d$, les points v_i soient affinement indépendants ; compte tenu de la continuité des coordonnées barycentriques d'un point fixé en fonction d'un repère affine variable, on peut restreindre les V_i de sorte que pour toute famille $(v_0, \dots, v_d)$ comme ci-desuss, le point t appartienne à l'enveloppe convexe des v_i.

Pour tout $i \in \{0, \dots, d\}$, $D \cap (C \times V_i)$ est un voisinage ouvert de (x, t_i) dans D, donc son image U_i est un voisinage de $p(x, t_i) = x$ dans C, car p induit une application ouverte de D vers C (proposition 1.8.4, *c*)). Soit $V = V_0 \cap \dots V_d$; c'est un voisinage de x dans C. Soit $\xi \in V$. Pour tout i, il existe par hypothèse un point $v_i \in V_i$ tel que $(\xi, v_i) \in D$. Par choix des V_i, le point (ξ, t) appartient à l'enveloppe convexe des (ξ, v_i) ; comme D est convexe, on a $(\xi, t) \in V$.

b) Choisissons $d+1$ points affinement indépendants $t_0, \dots, t_d$ de l'intérieur de D_x dans $\mathbf{R}^d$ tel que t appartienne à l'intérieur topologique de leur enveloppe convexe S. Appliquons l'assertion *a*) à chacun des points (x, t_i). Il existe ainsi, pour tout i, un voisinage V_i de x dans C tel que pour tout $\xi \in V_i$, le point (ξ, t_i) appartienne à D. Alors, $V = \bigcap V_i$ est un voisinage de x dans C et pour tout point de V, le point (ξ, t_i) appartient à D. Par convexité, D contient $V \times S$. C'est donc un voisinage de (x,t) dans $C \times \mathbf{R}^d$. □

1.8.7. — Soit P un polyèdre d'un espace affine V. On appelle dimension de P la borne supérieure des dimensions des cellules contenues dans P. Soit x un point de P ; on appelle dimension de P en x la borne inférieure des dimensions des polyèdres Q contenus dans P qui sont un voisinage de x dans P. On a $\dim(P) = \sup_{x \in P} \dim_x(P)$. De plus, $\dim(\varnothing) = -\infty$.

1.8.8. — Soit V un espace affine et soit P un polyèdre de V. Soit W un espace affine. On dit qu'une application $f\colon P \to W$ est *paralinéaire* (PL) s'il existe une famille localement finie (C_i) de cellules de V dont la réunion est P et telle que pour tout i, $f|_{C_i}$ est la restriction d'une application affine de V dans W.

Une application paralinéaire est continue.

Si P est compact, une fonction paralinéaire de P dans $\mathbf{R}$ est exactement une fonction continue définissable (à paramètres dans $\mathbf{R}$) dans le langage des groupes abéliens ordonnés ([**101**], chapitre 3).

1.8.9. — Soit X un espace topologique. Soit A une partie de X et soit $(P_i)_{i\in I}$ une famille de parties de A. On dit que cette famille est un *G-recouvrement* de A si, pour tout point $a \in A$, il existe une partie *finie* J de I telle que $a \in P_j$ pour tout $j \in J$ et telle que $\bigcup_{j\in J} P_j$ est un voisinage de a dans A.

1.8.10. — Soit V un espace affine et soit X une partie de V. On dit que X est un *sous-espace paralinéaire* de V s'il est G-recouvert par les cellules qu'il contient.

Un sous-espace paralinéaire est localement fermé. Les sous-espaces paralinéaires fermés sont les polyèdres ; tout sous-espace ouvert est un sous-espace paralinéaire.

1.8.11. Espace tangent. — Soit P un sous-espace paralinéaire d'un espace affine V. Soit $x \in P$. Si U est un voisinage ouvert suffisamment petit de x dans P, le sous-espace affine $\langle U\rangle$ de V ne dépend que de x, et pas de U. On l'appelle *l'espace tangent à P en x* et on le note T_xP. Pour toute cellule C contenue dans P et contenant x, on a $\langle C\rangle \subset T_xP$.

Si $\mathscr{C}$ est une décomposition cellulaire de P l'espace affine T_xP est engendré par les cellules de $\mathscr{C}$ contenant x. En particulier, s'il existe une cellule C de $\mathscr{C}$ telle que $x \in \mathring{C}$, alors $T_xP = \langle C\rangle$.

Lemme 1.8.12. — *Soit C une cellule de $\mathbf{R}^n$ et soit $u\colon C \to \mathbf{R}$ une fonction convexe, semi-continue inférieurement. Si la restriction à $\mathring{C}$ de u est affine, alors u est affine.*

Démonstration. — Soit φ une fonction affine sur $\mathbf{R}^n$ qui coïncide avec u sur $\mathring{C}$; prouvons que φ coïncide avec φ sur C. Soit $x \in \partial(C)$ et soit v un vecteur non nul de $\mathbf{R}^n$ tel que $x + \mathbf{R}_+v$ rencontre $\mathring{C}$. La fonction $t \mapsto u(x + tv)$ est définie au voisinage de 0 dans $\mathbf{R}_+$, elle est convexe et semi-continue inférieurement, donc continue, si bien que $u(x) = \lim \varphi(x + tv) = \varphi(x)$. □

Proposition 1.8.13. — *Soit m, n, d des entiers naturels tels que $n = m + d$, soit $p\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ et $q\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^d$ les projections sur les m premières et d dernières coordonnées. Les fibres de p sont identifiées à $\mathbf{R}^d$, muni de la mesure de Lebesgue.*

Soit D une cellule de $\mathbf{R}^n$, soit $C = p(D)$; pour tout $x \in C$, on pose $D_x = D \cap p^{-1}(x)$, considérée comme cellule de l'espace affine $p^{-1}(x)$. Soit α une fonction sur D à support p-compact ; pour tout $x \in C$, posons $u(x) = \int_{C_x} \alpha$. Soit r appartenant à $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$. Si α est G-localement de classe $\mathscr{C}^r$ (resp. G-localement borélienne), il en va de même de u.

Démonstration. — En considérant des cellules compacte C' qui G-recouvrent C et en remplaçant D par chacune des cellules $D \cap p^{-1}(C')$, on se ramène au cas où la cellule C est compacte. On remplace alors D par une sous-cellule compacte d'image C qui contient le support de α ; ainsi, on est ramené à traiter le cas où C et D sont compactes.

On traite le cas $d = 1$; le cas général s'ensuit par récurrence.

Pour $x \in C$, posons $f(x) = \inf\{t \ ; \ (x,t) \in C\}$ et $g(x) = \sup\{t \ ; \ (x,t) \in C\}$. Comme on l'a vu dans la démonstration de l'assertion c) de la proposition 1.8.4, les fonctions f et g sont paralinéaires (et en particulier continues), et D est l'ensemble des points $(x,t) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^d$ tels que $x \in C$ et $f(x) \leqslant t \leqslant g(x)$. On a donc

$$u(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} \alpha(x,t)\, dt$$

pour tout $x \in C$, et l'assertion en résulte par les propriétés de régularité des intégrales dépendant de paramètres. □

§ 1.9. FORMES DIFFÉRENTIELLES SUR UN SOUS-ESPACE PARALINÉAIRE

1.9.1. — Soit V un espace affine de dimension finie et soit U un ouvert de V. Soit $\omega \in \mathscr{F}_V^{p,q}(U)$ une forme de type (p,q) sur U.

Soit C une cellule de V qui est contenue dans U. Soit j l'injection canonique de $\langle C\rangle$ dans V. Par image inverse, ω définit une (p,q)-forme $j^*\omega$ sur $j^{-1}(U)$; on dit que $\omega|_C = 0$ si cette forme $j^*\omega$ est ponctuellement nulle en tout point de C (§1.4.2). Alors $\omega|_D = 0$ pour toute cellule D contenue dans C.

Soit P un sous-espace paralinéaire de U. On dit que $\omega|_P = 0$ si l'on a $\omega|_C = 0$ pour toute cellule C de V qui est contenue dans P. Dans ce cas, on a $\omega|_Q = 0$ pour tout sous-espace paralinéaire qui est contenu dans P.

Lemme 1.9.2. — *Soit (P_i) un G-recouvrement de P par des sous-espaces paralinéaires de P. Si $\omega|_{P_i} = 0$ pour tout i, alors $\omega|_P = 0$.*

Démonstration. — Soit donc C une cellule de V qui est contenue dans P ; démontrons que $\omega|_C = 0$. Alors $(P_i \cap C)$ est un G-recouvrement de C par des sous-espaces paralinéaires de C ; on a $\omega|_{P_i\cap C} = 0$ pour tout i. Il existe alors un G-recouvrement de C par des cellules Q_j telles que $\omega|_{Q_j} = 0$ pour tout j. Soit x un point de C. Par définition d'un G-recouvrement, il existe un ensemble fini J d'indices j tel que $x \in \bigcup_{j\in J} Q_j$ et $\bigcup_{j\in J} Q_j$ soit un voisinage de x dans C. Il existe alors $j \in J$ tel que $\dim(Q_j) = \dim(C)$; par suite, $\langle Q_j\rangle = \langle C\rangle$. Il résulte alors de la définition que la restriction de ω à $\langle C\rangle \cap U$ s'annule en tout point de Q_j, et en particulier de x. Ceci valant pour tout $x \in C$, on a $\omega|_C = 0$, comme il fallait démontrer. □

1.9.3. — Soit V un espace affine de dimension finie et soit P un sous-espace paralinéaire de V. Notons j l'inclusion de P dans V.

On définit $\mathscr{N}_P^{p,q}$ comme le sous-faisceau de $\mathscr{F}^{p,q}$ dont les sections sur un ouvert U sont les formes ω telles que $\omega|_{P\cap U} = 0$.

Soit $\mathscr{G}_V$ une sous-$\mathscr{A}_V$-algèbre de $\mathscr{F}_V$. On définit alors le faisceau $\mathscr{G}_P^{p,q}$ des formes de type (p,q) à coefficients dans $\mathscr{G}_V$ sur P par la formule

$$\mathscr{G}_P^{p,q} = j^{-1}\left(\mathscr{G}_V^{p,q}/(\mathscr{G}_V^{p,q} \cap \mathscr{N}_P^{p,q})\right).$$

C'est un sous-faisceau du faisceau $\mathscr{F}_P^{p,q}$.

Une section de ce faisceau est appelée *forme* de type (p,q) à coefficients dans $\mathscr{G}_V$ sur le sous-espace paralinéaire P. Lorsque la classe $\mathscr{G}_V$ est la classe $\mathscr{A}_V$ des fonctions lisses, resp. la classe $\mathscr{B}_V$ des fonctions boréliennes, resp. celle des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$,... on parlera de *forme lisse*, resp. de forme borélienne, resp. de forme de classe $\mathscr{C}^k$,...

Pour tout voisinage ouvert U de P dans V et toute forme $\alpha \in \mathscr{G}_V^{p,q}(U)$, on notera $\alpha|_P$ l'image canonique de α dans $\mathscr{G}_P^{p,q}(P)$. D'après la première partie du lemme suivant, on a $\alpha|_P = 0$ si et seulement si $\alpha \in \mathscr{N}_P^{p,q}(U)$, c'est-à-dire si $\alpha|_P = 0$ au sens introduit au début de ce chapitre.

Lemme 1.9.4. — *Soit V un espace affine de dimension finie, soit P un sous-espace paralinéaire de V.*

Pour tout ouvert U de V, l'application canonique

$$\mathscr{G}_V^{p,q}(U)/\left(\mathscr{G}_V^{p,q}(U)\cap\mathscr{N}_P^{p,q}(U)\right)\to\mathscr{G}_P^{p,q}(U\cap P)$$

est injective.

Si de plus $U\cap P$ est fermé dans U, cette application est bijective.

Démonstration. — Démontrons que l'application donnée est injective. Soit $\omega\in\mathscr{G}_V^{p,q}(U)$ d'image nulle dans $\mathscr{G}_P^{p,q}(U\cap P)$ et démontrons que $\omega\in\mathscr{N}_P^{p,q}(U)$. Il existe donc une famille (U_i) d'ouverts de U telle que $(U_i\cap P)$ soit un recouvrement de $U\cap P$ et telle que $\omega|_{U_i}\in\mathscr{N}_P^{p,q}(U_i)$ pour tout i. On a alors $\omega|_{P\cap U_i}=0$ pour tout i, d'où $\omega|_P=0$ (lemme 1.9.2).

Supposons maintenant que $U\cap P$ est fermé dans U et démontrons que cette application est surjective. Commençons par observer que $\mathscr{G}_P^{p,q}\cap\mathscr{N}_P^{p,q}$ est un $\mathscr{A}_V$-module, donc est fin. Par suite, sa cohomologie est triviale sur tout ouvert, si bien que l'application canonique

$$\mathscr{G}_V^{p,q}(U)\to(\mathscr{G}_V^{p,q}/\mathscr{G}_V^{p,q}\cap\mathscr{N}_P^{p,q})(U)$$

est surjective pour tout ouvert U de V.

Soit $\omega\in\mathscr{G}_P^{p,q}(U\cap P)$. Par définition et par ce qui précède, ω est donnée par une famille (U_i) d'ouverts de U recouvrant $U\cap P$ et, pour tout i, un élément ω_i de $\mathscr{G}_V^{p,q}(U_i)$ sujets à la condition de compatibilité suivante : pour tout couple (i,j), il existe une famille $(U_{i,j}^k)_k$ d'ouverts de $U_i\cap U_j$ recouvrant $U_i\cap U_j\cap P$ telle que $\omega_i|_{U_{i,j}^k}-\omega_j|_{U_{i,j}^k}\in\mathscr{N}_P^{p,q}(U_{i,j}^k)$ pour tout k. Posons $V_{i,j}=\bigcup_k U_{i,j}^k$; on a $\omega_i|_{V_{i,j}}-\omega_j|_{V_{i,j}}\in\mathscr{N}_P^{p,q}(V_{i,j})$. Puisque $V_{i,j}$ est un voisinage de $U_i\cap U_j\cap P$ dans $U_i\cap U_j$, on a donc $\omega_i|_{U_i\cap U_j}-\omega_j|_{U_i\cap U_j}\in\mathscr{N}_P^{p,q}(U_i\cap U_j)$. Comme P est fermé dans U, $U_0=U-P$ est un ouvert de U ; Adjoignons-le à la famille (U_i) et considérons une partition de l'unité (φ_i) sur U formée de fonctions lisses et subordonnée au recouvrement (U_i) de U ainsi obtenu. Le support de φ_0 est disjoint de P, donc φ_0 est nulle au voisinage de P. La fonction $\varphi=\sum_{i\neq0}\varphi_i=1-\varphi_0$ est donc égale à 1 au voisinage de P. Pour tout $i\neq0$, le support de la section $\varphi_i\omega_i$ est contenu dans U_i et est contenu dans le support de φ_i qui est fermé dans U, de sorte qu'il est lui-même fermé dans U ; notons $(\varphi_i\omega_i)^U$ le prolongement (par zéro) à tout l'espace de cette section. Posons $\omega'=\sum_{i\neq0}(\varphi_i\omega_i)^U$. Pour prouver que $\omega'|_P=\omega$, il suffit de vérifier que pour tout $i\neq0$, $\omega'|_{U_i}$ coïncide avec ω_i modulo $\mathscr{N}_P^{p,q}$. Fixons un indice $i\neq0$. La famille $(\varphi_j|_{U_i})_j$ est une partition de l'unité sur U_i subordonnée au recouvrement $(U_i\cap U_j)_j$, et l'on a

$$\begin{aligned}
\omega'|_{U_i}&=\sum_{j\neq0}(\varphi_j\omega_j)^U|_{U_i}\\
&=\sum_{j\neq0}(\varphi_j\omega_j|_{U_i\cap U_j})^{U_i}\\
&=\sum_{j\neq0}(\varphi_j(\omega_j-\omega_i)|_{U_i\cap U_j})^{U_i}+\sum_{j\neq0}\varphi_j\omega_i|_{U_i}\\
&=\sum_{j\neq0}(\varphi_j(\omega_j-\omega_i)|_{U_i\cap U_j})^{U_i}-\varphi_0\omega_i+\omega_i
\end{aligned}$$

Puisque $\omega_j - \omega_i \in \mathscr{N}_P^{p,q}(U_i \cap U_j)$, la forme $(\varphi_j(\omega_j - \omega_i))^{U_i}$ appartient à $\mathscr{N}_P^{p,q}(U_i)$. Comme φ_0 est nulle au voisinage de P, le terme $-\varphi_0\omega_i$ appartient à $\mathscr{N}_P^{p,q}(U_i)$. Cela prouve que $\omega'|_{U_i}$ coïncide avec ω_i au voisinage de P modulo $\mathscr{N}_P^{p,q}$ et conclut la démonstration. □

1.9.5. — Soit P un sous-espace paralinéaire de V. Notons $\mathscr{G}_P$ le faisceau $\mathscr{G}_P^{0,0}$. Par construction, $\mathscr{G}_P$ est le sous-faisceau du faisceau des fonctions numériques sur P qui sont localement restriction d'une fonction de $\mathscr{G}_V$ au voisinage de P. En vertu du lemme 1.9.4, ses sections sont même globalement restriction d'une telle fonction. Elles seront appelées *fonctions de classe* $\mathscr{G}_V$ sur P, et *fonctions lisses* lorsque $\mathscr{G}_V = \mathscr{A}_V$.

1.9.6. — Une forme nulle sur un sous-espace paralinéaire étant nulle sur tout sous-espace, on dispose pour tout couple (P, Q) de sous-espaces paralinéaires de V tel que $Q \subset P$, d'une application de restriction de $\mathscr{G}_P^{p,q}(P)$ dans $\mathscr{G}_Q^{p,q}(Q)$. On obtient ainsi un préfaisceau sur V pour la G-topologie, que l'on note encore, par abus, $\mathscr{G}_V^{p,q}$. C'est un sous-G-préfaisceau du G-préfaisceau $\mathscr{F}_V^{p,q}$.

Soit P un sous-espace paralinéaire de V. Observons que si Q est un ouvert de P, on a $\mathscr{G}_Q^{p,q}(Q) = \mathscr{G}_P^{p,q}(Q)$; plus généralement, le faisceau $\mathscr{G}_Q^{p,q}$ est la restriction à Q du faisceau $\mathscr{G}_P^{p,q}$. Autrement dit, la restriction à la catégorie des ouvert de P du G-préfaisceau $\mathscr{G}_V^{p,q}$. est le faisceau $\mathscr{G}_P^{p,q}$. Cela justifie de noter encore $\mathscr{G}_P^{p,q}$ la restriction à P du G-préfaisceau $\mathscr{G}_V^{p,q}$.

La somme directe $\mathscr{F}_V^{*,*}$ est muni d'une structure naturelle de $\mathscr{A}_V$-algèbre graduée et $\mathscr{G}_V^{*,*}$ en est une sous-algèbre graduée ; c'est en particulier le cas si $\mathscr{G}_V = \mathscr{A}_V$.

1.9.7. — L'opérateur J passe au quotient par $\mathscr{N}_P^{*,*}$, pour tout sous-espace paralinéaire P de V. Il induit donc un opérateur J sur le G-préfaisceau $\mathscr{F}_V^{*,*}$. C'est un morphisme d'algèbres. On dit encore qu'une forme ω est symétrique si elle vérifie $\mathrm{J}\omega = \omega$.

1.9.8. — Soit $\mathscr{G}_V$ et $\mathscr{H}_V$ des sous-faisceaux en $\mathbf{R}$-vectoriels de $\mathscr{F}_V$ tels que les dérivées partielles de toute fonction de $\mathscr{G}_V$ soient définies et appartiennent à $\mathscr{H}_V$. Alors, les opérateurs d' et d'' induisent deux opérateurs différentiels d' et d'' de $\mathscr{G}_V^{*,*}$ vers $\mathscr{H}_V^{*,*}$. Si $\mathscr{G}_V \subset \mathscr{C}_V^2$, ces opérateurs vérifient $\mathrm{d}'\,\mathrm{d}' = \mathrm{d}''\,\mathrm{d}'' = 0$ et $\mathrm{d}'\,\mathrm{d}'' = -\,\mathrm{d}''\,\mathrm{d}'$.

Lorsque $\mathscr{G}_V = \mathscr{H}_V = \mathscr{A}_V$ sont le faisceau des fonctions lisses sur V, les opérateurs d' et d'' sont des dérivations au sens des algèbres graduées.

Les formules du lemme 1.3.6 restent valables dans ce contexte.

Lemme 1.9.9. — *Si P est un sous-espace paralinéaire de V tel que* $\dim(P) < \max(p, q)$*, le G-préfaisceau $\mathscr{F}_P^{p,q}$ est nul.*

Démonstration. — Soit Q un sous-espace paralinéaire de P et soit α un élément de $\mathscr{F}_P^{p,q}(Q) = \mathscr{F}_Q^{p,q}(Q)$; prouvons que $\alpha = 0$. Comme on peut raisonner localement sur Q, on peut supposer que α est donné par une forme $\omega \in \mathscr{F}_V^{p,q}(W)$, où W est un voisinage ouvert de Q dans V. Pour toute cellule C de V qui est contenue dans Q, one a $\dim(C) \leqslant \dim(P) < \max(p, q)$, et donc $\omega|_C = 0$. Cela démontre que $\omega|_Q = 0$, d'où le lemme. □

1.9.10. — Soit V et V' des espaces affines et soit $\varphi\colon V \to V'$ une application affine.

Soit P et P' des sous-espaces paralinéaires de V et V' respectivement tels que $\varphi(P) \subset P'$. L'image par φ d'une cellule de V étant une cellule de V', on en déduit que si une forme α de type (p, q) au voisinage de P' est nulle en restriction à P', son image réciproque (qui est définie au voisinage de P) est nulle en restriction à P. Il en résulte

une application linéaire $\varphi^*\colon \mathscr{F}^{p,q}_{P'}(P') \to \mathscr{F}^{p,q}_P(P)$. On construit ainsi un morphisme de G-préfaisceaux $\varphi^*\colon \mathscr{F}^{p,q}_V \to \varphi_*\mathscr{F}^{p,q}_{V'}$ sur V.

L'homomorphisme φ^* respecte les structures de modules ou d'algèbres graduées, commute à l'involution J, et aux opérateurs différentiels d' et d'' lorsque ceux-ci sont définis.

On a $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$ et $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$.

Soit $\mathscr{G}_V$ une sous-$\mathscr{A}_V$-algèbre de de $\mathscr{F}_V$. Si une forme ω est à coefficients dans $\mathscr{G}_V$, $\varphi^*\omega$ est à coefficients dans la $\mathscr{A}_{V'}$-algèbre $\mathscr{G}_{V'}$ engendrée par les fonctions sur V' qui sont localement de la forme $u \circ \varphi$, où u est une section de $\mathscr{G}_V$. En particulier, si ω est lisse, resp. de classe $\mathscr{C}^k$, resp. borélienne, il en est de même de $\varphi^*\omega$.

Soit $f\colon P \to P'$ l'application paralinéaire déduite de φ par restriction. Le morphisme φ^* induit un morphisme de G-préfaisceaux sur P de $\mathscr{F}^{p,q}_P$ dans $f_*\mathscr{F}^{p,q}_{P'}$. On vérifie qu'il ne dépend que de f, et pas de φ ; on le note naturellement f^*.

Si P et Q sont deux sous-ensembles linéaires par morceaux de V tels que $Q \subset P$ et si j désigne l'inclusion de Q dans P, observons que l'on a $j^*\alpha = \alpha|_Q$.

Remarque 1.9.11. — Si l'application f possède G-localement une section, alors l'homomorphisme $f^*\colon \mathscr{F}^{p,q}_{P'}(P') \to \mathscr{F}^{p,q}_P(P)$ est injectif. C'est notamment le cas lorsque l'application f est compacte et surjective, d'après la proposition 2.1.12.

Exemple 1.9.12. — Soit P un sous-espace paralinéaire d'un espace affine V. Soit $W = \langle P \rangle$ le sous-espace affine engendré par P et soit $x_1, \dots, x_m$ des coordonnées sur W. Les formes

$$\mathrm{d}' x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}' x_{i_p} \wedge \mathrm{d}'' x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'' x_{j_q},$$

où $(i_1, \dots, i_p)$ et $(j_1, \dots, j_q)$ parcourent les suites strictement croissantes d'éléments de $\{1, \dots, m\}$ de longueurs p et q respectivement, forment une famille génératrice de $\mathscr{F}^{p,q}_P(P)$ comme module sur $\mathscr{F}_P(P)$.

Pour qu'un élément de $\mathscr{F}^{p,q}_P(P)$ appartienne à $\mathscr{G}^{p,q}_P(P)$, il suffit qu'on puisse l'écrire comme une combinaison linéaire de ces formes à coeffients dans $\mathscr{G}_P(P)$.

Supposons de plus que P soit une cellule. Alors, les formes ci-dessus constituent une base de $\mathscr{F}^{p,q}_P(P)$, c'est-à-dire que $\mathscr{F}^{p,q}_P(P)$ s'identifie à $\mathscr{F}_P(P) \otimes_{\mathbf{R}} A^{p,q}(\overrightarrow{W})$. L'évaluation en un point $x \in P$ fournit alors un morphisme d'algèbres graduées $\alpha \mapsto \alpha(x)$ de $\mathscr{F}^{*,*}_P(P)$ dans $A^{*,*}(\overrightarrow{W})$. Pour que l'on ait $\alpha = 0$, il faut et il suffit que l'on ait $\alpha(x) = 0$ pour tout $x \in P$. On dira ainsi que la nullité de α peut se vérifier *ponctuellement*.

Soit P' une cellule d'un espace affine V' et soit $f\colon V' \to V$ une application affine telle que $f(P') \subset P$. Soit W' l'espace affine engendré par P' ; l'application f induit un homomorphisme de W' dans W, et un homomorphisme linéaire f^* de $\overrightarrow{W}^*$ dans $\overrightarrow{W'}^*$, d'où un homomorphisme linéaire, toujours noté f^*, de $A^{p,q}(\overrightarrow{W})$ dans $A^{p,q}(\overrightarrow{W'})$. Pour toute forme $\alpha \in \mathscr{F}^{p,q}_P(P)$ et tout point $y \in P'$, on a $(f^*\alpha)(y) = f^*(\alpha(f(y)))$.

Exemple 1.9.13. — Soit P un sous-espace paralinéaire d'un espace affine de la forme $V \times W$. Notons p_1 et p_2 les deux projections de $V \times W$ sur V et W, choisissons des coordonnées (x_i) sur V et (y_j) sur W. D'après l'exemple précédent, les formes du type $\mathrm{d}' x_i$, $\mathrm{d}' y_j$, $\mathrm{d}'' x_i$ et $\mathrm{d}'' y_j$ engendrent $\mathscr{F}^*_P(P)$ comme algèbre sur $\mathscr{F}_P(P)$. On en déduit que les formes sur P du type $p_1^*\alpha \wedge p_2^*\beta$, où α et β sont des formes sur V et W, engendrent $\mathscr{F}^*_P(P)$ comme module sur $\mathscr{F}_P(P)$.

Remarque 1.9.14. — Observons que le G-préfaisceau $\mathscr{F}^{p,q}_V$ est séparé.

Soit en effet un sous-espace paralinéaire P de V et soit (P_i) un G-recouvrement de P par des sous-espaces paralinéaires. Soit $\omega \in \mathscr{F}_P^{p,q}(P)$ et supposons que $\omega|_{P_i} = 0$ pour tout i ; démontrons que $\omega = 0$. Comme $\mathscr{F}_P^{p,q}$ est un faisceau, il suffit de prouver que ω est nulle localement, ce qui permet de supposer que ω provient d'une forme α définie sur un voisinage U de P. Dans ce cas, l'assertion a été démontrée au §1.9.1.

Cependant, ce G-préfaisceau n'est en général pas un faisceau pour la G-topologie de P, comme on le constate déjà lorsque $\mathscr{G}_V = \mathscr{A}_V$, $\dim(V) > 0$ et $P = V$: une fonction $\mathscr{C}^\infty$ par morceaux sur V n'est pas $\mathscr{C}^\infty$ en général.

1.9.15. — On notera que la notion de fonction (et donc de forme) lisse sur un sous-ensemble paralinéaire d'un espace affine dépend de la façon dont ce sous-ensemble est plongé. Soit par exemple S le segment $[(-1,0),(0,0)]$ de $\mathbf{R}^2$, soit P la réunion de S



et du segment $[(0,0),(1,1)]$, et soit $Q = [-1,1]$ l'image de P dans $\mathbf{R}$ par la première projection $p\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. L'application p induit un isomorphisme d'espaces paralinéaires de P sur Q (c'est-à-dire un homéomorphisme modulo lequel les fonctions paralinéaires sur la source et le but sont les mêmes).

La fonction f sur Q définie par $f(x) = \max(x,0)$ est continue, mais n'est pas lisse. En revanche, la fonction $f \circ p$ sur P est lisse, comme restriction de la seconde coordonnée.

Proposition 1.9.16. — *Soit P un sous-espace paralinéaire de V et soit f une fonction sur P qui est simultanément lisse et paralinéaire. Pour tout point x de P, il existe une forme affine g sur V telle que f et $g|_P$ coïncident au voisinage de x.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{C}$ une famille finie de cellules de V contenant x dont la réunion Q est un voisinage de x et telles que pour tout $C \in \mathscr{C}$, la restriction de f à C soit affine. Nous allons démontrer qu'il existe une forme affine g sur V telle que $g|_Q = f|_Q$. Quitte à remplacer V par son sous-espace affine engendré par Q, on suppose que $\langle Q \rangle = V$; pour simplifier les notations, on suppose aussi que V est un espace vectoriel, que $x = 0$ et que $f(x) = 0$. Soit φ une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur V au voisinage de Q telle que $\varphi|_Q = f|_Q$ et soit g la différentielle de φ en l'origine. Pour toute cellule $C \in \mathscr{C}$, la fonction $f|_C$ coïncide avec $g|_C$ car $f|_C$ est linéaire. On a donc $f|_Q = g|_Q$.

L'application $g\colon V \to \mathbf{R}$ est linéaire, mais elle n'est pas a priori rationnelle pour la $\mathbf{Q}$-structure implicitement considérée sur V. Démontrons que c'est pourtant le cas. Pour $C \in \mathscr{C}$, le sous-espace vectoriel V_C engendré par C est $\mathbf{Q}$-rationnel, par définition des sous-espaces paralinéaires et des cellules que l'on considère, de même que $f|_C$, considérée comme une forme linéaire f_C sur V_C. Comme la somme des espaces V_C est égale à V, on a par dualité une injection linéaire $\iota\colon V^\vee \to \bigoplus V_C^\vee$. La démonstration prouve que g est l'antécédent de la famille (f_C) dans $V^\vee$. Comme les f_C sont $\mathbf{Q}$-rationnelles, de même l'application ι, la forme g est $\mathbf{Q}$-rationnelle. □

§ 1.10. G-FORMES POSITIVES SUR UN SOUS-ESPACE PARALINÉAIRE

Définition 1.10.1. — *Soit V un espace affine de dimension finie sur $\mathbf{R}$ et soit P un sous-espace paralinéaire de V. Soit ω une forme de type (p,p) sur P. On dit que ω est* positive *(*resp. faiblement positive, resp. fortement positive*) si pour toute cellule C contenue dans P et tout point $x \in C$, l'élément $\omega|_C(x)$ de $A^{p,p}(\overrightarrow{\langle C \rangle})$ est une (p,p)-forme positive (*resp. *faiblement positive,* resp. *fortement positive*) sur l'espace vectoriel $\overrightarrow{\langle C \rangle}$ au sens de la définition 1.2.3.*

Compte tenu du lemme 1.2.11 et de la compatibilité des morphismes d'évaluation à la restriction à une sous-cellule, il suffit de vérifier cette condition pour toute cellule maximale d'une décomposition cellulaire de P.

En particulier, ce sont des notions G-locales : soit $\alpha \in \mathscr{F}_P^{p,p}(P)$ et soit (P_i) un G-recouvrement de P, *pour que α soit positive, il faut et il suffit que $\alpha|_{P_i}$ soit positive pour tout i.* Comme P est paracompact (c'est un sous-espace de $\mathbf{R}^n$!), l'assertion se déduit de la proposition 2.2.13 qui affirme l'existence d'une décomposition cellulaire adaptée au G-recouvrement (P_i). Les cas des formes faiblement positives et fortement positives sont analogues.

Proposition 1.10.2. — *Soit P un sous-espace paralinéaire d'un espace affine V.*

a) *Pour toute forme lisse α, symétrique de type (p,p) sur P, il existe des formes lisses positives α_1 et α_2 telles que $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$.*

b) *Supposons que P soit compact et soit u une fonction lisse sur P. Il existe des fonctions lisses u_1 et u_2 sur P telles que $u = u_1 - u_2$ et telles que les formes $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_1$ et $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_2$ soient positives.*

Démonstration. — a) On peut supposer que $V = \mathbf{R}^n$. Soit λ la $(1,1)$-forme $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\|x\|^2$ sur $\mathbf{R}^n$. On a

$$\lambda = 2\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}'\, x_i \wedge \mathrm{d}''\, x_i \ ;$$

elle est donc symétrique et définie positive au sens du paragraphe 1.2. D'après la proposition 1.2.13, la forme λ^p appartient à l'intérieur du cône des formes de type (p,p) positives sur $\mathbf{R}^n$. Par suite, il existe pour tout point x de P un voisinage ouvert U_x de x dans P et un nombre réel strictement positif c_x tel que $\alpha + c_x\lambda^p$ soit une forme positive sur U_x.

Soit U une partie ouverte de $\mathbf{R}^n$ telle que P soit un sous-espace fermé de U. Il est classique qu'il existe une fonction $\psi\colon U \to \mathbf{R}_+$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ et propre. (Cela se voit en considérant un recouvrement localement fini de U par des boules ouvertes relativement compactes dans U, en prenant l'inverse de la somme de fonctions-plateaux supportées par ces boules, en ajoutant $\|x\|^2$.) Par compacité, il existe alors pour tout entier k un nombre réel $c_k > 0$ tel que pour tout $x \in P \cap \psi^{-1}([0,k])$, il existe $y \in P$ tel que $x \in U_y$ et $c_k \geqslant c_y$. Soit alors $\varphi\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $\varphi(t) \geqslant c_k$ si $t \leqslant k$. Pour tout $x \in P$, la forme $\alpha(x) + \varphi(\psi(x))\lambda(x)^p$ sur $\mathbf{R}^n$ est positive. Il suffit donc de poser $\alpha_1 = \alpha + (\varphi\circ\varphi)\lambda^p$ et $\alpha_2 = (\varphi\circ\varphi)\lambda^p$.

b) Posons $p = 1$ et $\alpha = \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u$. Comme on a supposé P compact, les arguments de la première partie prouvent qu'il existe un nombre réel $c > 0$ tel que la forme $\alpha + c\lambda$

soit fortement positive sur P. Il suffit alors de $u_1 = u + c\|x\|^2$ et $u_2 = c\|x\|^2$, d'où la proposition. □

Proposition 1.10.3. — *Soit P un sous-espace paralinéaire d'un espace affine V et soit $\omega_1, \ldots, \omega_s$ des formes sur P ; posons $\omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r$.*

a) *Si les ω_j sont toutes fortement positives, alors ω est fortement positive.*

b) *Si les ω_j sont toutes positives, alors ω est positive.*

c) *Si les ω_j sont toutes faiblement positives et si au plus une d'entre elle n'est pas fortement positive, alors ω est faiblement positive.*

Démonstration. — Par hypothèse, les formes ω_j sont restrictions de formes au voisinage,de P. L'assertion se déduit donc cellule par cellule de la proposition 1.2.12. □

1.10.4. — Soit P un sous-espace paralinéaire d'un espace affine V et soit $n = \dim(P)$. Les notions de formes faiblement positives, positives et fortement positives coïncident en bidegrés $(0,0)$ et (n,n) ; pour les formes symétriques, elles coïncident en bidegrés $(1,1)$ et $(n-1, n-1)$.

Cela se démontre par inspection cellule par cellule.

Définition 1.10.5. — *Soit V un espace affine de dimension finie et soit P une partie paralinéaire de V. On définit le faisceau CConv_P comme le plus petit sous-faisceau du faisceau $\mathscr{C}_P$ des fonctions continues sur P qui vérifie les deux propriétés suivantes :*

a) *Il contient toute fonction lisse u sur un ouvert de P telle que la forme $\mathrm{d}'\mathrm{d}'' u$ soit positive ;*

b) *Il est stable par limite uniforme.*

Ses sections sont appelées fonctions convexes continues sur P.

Lemme 1.10.6. — *Soit V un espace affine de dimension finie et soit P une partie paralinéaire de V. Pour tout ouvert U de P, l'ensemble $\mathrm{CConv}_P(U)$ des fonctions convexes continues sur U est un sous-cône convexe de $\mathscr{C}(U)$.*

Démonstration. — Les fonctions continues u telles que λu soit convexe, pour tout nombre réel positif λ, forment un sous-faisceau de CConv_P qui vérifie les conditions (i) et (ii), donc est égal à CConv_P. Cela prouve que $\mathrm{CConv}_P(U)$ est un cône pour tout ouvert U de X.

Démontrons que si u et v sont des fonctions convexes sur un ouvert U de P, il en est de même de $u + v$.

Supposons d'abord que v soit lisse. Les fonctions continues f telles que $f + v$ soit convexe forment un sous-faisceau de CConv_U qui contient les fonctions lisses et est stable par limite uniforme ; il contient donc toutes les fonctions convexes sur U.

Par commutativité de l'addition, $u + v$ est convexe dès que u ou v est lisse.

Dans le cas général, les fonctions continues f telles que $f + v$ soit convexe forme un sous-faisceau de CConv_U qui contient les fonctions lisses convexes d'après le premier cas traité et est stable par limite uniforme ; il contient donc toutes les fonctions convexes sur U ; par suite, $u + v$ est convexe. □

Lemme 1.10.7. — a) *Si P est une cellule, une fonction continue sur P est convexe si et seulement si elle est convexe au sens usuel.*

b) *Soit $f\colon W \to V$ une application affine et soit Q un sous-espace paralinéaire de W tel que $f(Q) \subset P$. Pour toute fonction convexe u sur P, la fonction $u \circ f$ est convexe sur Q.*

Démonstration. — a) Pour éviter les confusions, nous appellerons ici PL-convexes les fonctions convexes au sens de la définition 1.10.5, et simplement convexes celles qui le sont au sens usuel.

Les fonctions de CConv_P formé des fonctions qui sont convexes forment un sous-faisceau de CConv_P. En effet la convexité est une propriété locale, comme on le voit par par réduction à la dimension 1 via le critère de croissance des dérivées à droite et à gauche. Ce sous-faisceau contient les fonctions lisses u telles que $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u \geqslant 0$; on retrouve ici le critère hessien de convexité des fonctions $\mathscr{C}^2$. Il est stable par limite uniforme, par la définition directe. Par suite, ce sous-faisceau coïncide avec CConv_P : cela prouve que toute fonction PL-convexe sur P est convexe.

Inversement, soit u une fonction convexe continue sur P ; nous allons démontrer qu'elle est localement limite uniforme de fonctions convexes lisses sur P ; cela permet de supposer que P est compact et nous allons alors montrer qu'elle est limite uniforme de fonctions convexes lisses sur P. On peut également supposer que P est d'intérieur non vide ; fixons une origine o dans l'intérieur de P. Lorsque $\lambda < 1$ tend vers 1, les fonctions $u_\lambda\colon x \mapsto u(\lambda x)$ sont définies au voisinage de P et convergent uniformément vers u sur P, car u est uniformément continue. Cela permet de supposer que u se prolonge au voisinage de P en une fonction qui est encore continue et convexe ; nous noterons u un tel prolongement. Pour tout noyau positif régularisant (ρ_ε) sur $\mathbf{R}^n$, les convolutions $u * \rho_\varepsilon$ sont définies sur P pour ε assez petit, lisses, et convergent uniformément vers u lorsque $\varepsilon \to 0$. Cela conclut la démonstration de *a*).

b) Soit $\mathscr{P}$ le sous-faisceau de $\mathscr{C}_P$ dont les sections sur un ouvert U sont les fonctions continues u sur U telles que $u \circ f|_{Q\cap f^{-1}(U)}$ soit convexe sur $Q \cap f^{-1}(U)$. Il contient les fonctions lisses u telles que $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u \geqslant 0$, et est stable par limite uniforme. Il contient donc toutes les fonctions convexes sur P. □

Lemme 1.10.8. — a) *Soit C une $\mathbf{R}$-cellule d'un espace affine V et soit u une fonction $G_{\mathbf{R}}$-lisse sur $\partial(C)$. Il existe une fonction $G_{\mathbf{R}}$-lisse sur C qui prolonge u.*

b) *Soit K un sous-corps de $\mathbf{R}$, soit C une K-cellule* compacte *d'un espace affine V et soit u une fonction K-paralinéaire sur $\partial(C)$. Il existe une fonction K-paralinéaire sur V qui prolonge u.*

Démonstration. — a) Choisissons une décomposition $\mathbf{R}$-cellulaire $\mathscr{D}$ de $\partial(C)$ telle que la fonction u soit lisse en restriction à chaque cellule. Soit o un point de $\mathring{C}$. Pour chaque cellule D de dimension $n-1$ de $\mathscr{D}$, notons Q_D l'enveloppe convexe de $D \cup \{o\}$. Tout point $x \in Q_D$ s'écrit de manière unique $x = (1-\lambda)o + \lambda y$, avec $\lambda \in [0;1]$ et $y \in D$; posons $v_D(x) = \lambda u(y)$. La fonction v_D est lisse sur Q_D. Les fonctions v_D se recollent en une fonction $\mathrm{G}_{\mathbf{R}}$-lisse v sur C qui convient.

b) Lorsque $K = \mathbf{Q}$, l'énoncé est une conséquence immédiate du théorème 3.13 de **[59]** qui affirme que u s'exprime comme une combinaison min-max de l'ensemble des fonctions K-affines qui apparaissent dans une décomposition cellulaire de C adaptée à u. On vérifie que la démonstration qui y est donnée vaut verbatim lorsqu'on y remplace *groupes abéliens ordonnés divisibles* par *K-espaces vectoriels ordonnés* ; la référence aux

décompositions cellulaires linéaires de **[62]** ne pose pas de problème puisque ce dernier article en démontre l'existence dans cette généralité. □

Remarque 1.10.9. — Lorsque la $\mathbf{R}$-cellule C est rationnelle, nous ne savons pas si l'on peut construire une fonction G-lisse sur C qui la prolonge. Par notre approche, nous nous heurtons à l'existence de cellules rationnelles sans décomposition *simpliciale* rationnelle.

Proposition 1.10.10. — *Soit P un sous-espace paralinéaire d'un espace affine V.*

a) *Soit u une fonction $G_{\mathbf{R}}$-lisse sur P. Il existe une fonction $G_{\mathbf{R}}$-lisse sur V qui prolonge u.*

b) *Soit K un sous-corps de $\mathbf{R}$; supposons que P soit K-paralinéaire et soit u une fonction K-paralinéaire sur P. Il existe une fonction K-paralinéaire sur V qui prolonge u.*

Démonstration. — Dans le cas *a*), posons $K = \mathbf{R}$. Les démonstrations sont alors analogues compte tenu du lemme 1.10.8. Choisissons en effet une décomposition cellulaire $\mathscr{C}$ de Q en K-cellules compactes qui est adaptée à P. Pour tout entier d, soit Q_d la réunion de P et des cellules de $\mathscr{C}$ de dimension $\leqslant d$. On construit par récurrence sur d un prolongement $\mathrm{G}_{\mathbf{R}}$-lisse v (resp. K-paralinéaire) de u à Q_d. Pour $d = 0$, on pose $v(x) = 0$ pour tout sommet $x \in \mathscr{C}$ tel que $x \notin P$ et $v(x) = u(x)$ pour tout $x \in P$. Supposons $d \geqslant 1$. Soit v un prolongement $\mathrm{G}_{\mathbf{R}}$-lisse (resp. K-paralinéaire) de u à Q_{d-1}. Soit $C \in \mathscr{C}$ une cellule de dimension d qui n'est pas contenue dans P ; par hypothèse, la cellule C est compacte et la fonction v est définie sur $\partial(C)$. D'après le lemme 1.10.8, il existe une fonction v_C sur C qui est $\mathrm{G}_{\mathbf{R}}$-lisse (resp. K-paralinéaire) et prolonge $v|_{\partial(C)}$. Les fonctions v_C se recollent en une fonction w sur Q_d qui est $\mathrm{G}_{\mathbf{R}}$-lisse (resp. K-paralinéaire). □

Proposition 1.10.11. — *Soit P un sous-espace paralinéaire compact et convexe d'un espace affine V.*

a) *Soit u une fonction $G_{\mathbf{R}}$-lisse sur P. Il existe des fonctions $G_{\mathbf{R}}$-lisses u_1 et u_2 sur P, convexes, telles que $u = u_1 - u_2$.*

b) *Soit K un sous-corps de $\mathbf{R}$ et soit u une fonction K-paralinéaire sur P. Il existe des fonctions K-paralinéaires u_1 et u_2 sur P, convexes, telles que $u = u_1 - u_2$.*

Démonstration. — Les démonstrations sont analogues. Dans le cas *a*), on pose $K = \mathbf{R}$. Quitte à remplacer V par le sous-espace affine engendré par P, on suppose que P est d'intérieur non vide, de sorte que le mot « convexe » coïncide avec son sens classique. Posons $n = \dim(P) = \dim(V)$. Munissons aussi V d'une norme euclidienne.

Choisissons une décomposition cellulaire $\mathscr{C}$ de P telle que u soit lisse (resp. K-paralinéaire) en restriction à chaque cellule de P.

Dans le cas *a*), pour tout $c \in \mathbf{R}_+$, la fonction $u + c\|x^2\|$ sur P est $\mathrm{G}_{\mathbf{R}}$-lisse ; elle est lisse sur chaque cellule C de $\mathscr{C}$, et convexe sur C si c est assez grand. Cela permet de supposer que la restriction de u à chaque cellule C de $\mathscr{C}$ est convexe.

Dans le cas *b*), la fonction $u|_C$ est affine, donc convexe, pour toute cellule $C \in \mathscr{C}$.

Soit alors $\mathscr{E}$ l'ensemble des hyperplans affines engendrés par les $(n-1)$-cellules de $\mathscr{C}$; pour tout $E \in \mathscr{E}$, choisissons une forme K-affine f_E de lieu des zéros E. Pour toute famille $\lambda = (\lambda_E)_{E\in\mathscr{E}}$ de nombres réels positifs, posons $v_\lambda = u + \sum_E \lambda_E |f_E|$; nous allons montrer que v_λ est convexe si les λ_E sont assez grands.

Il s'agit de vérifier que la fonction $t \mapsto v_\lambda((1-t)a+tb)$ de $[0;1]$ dans $\mathbf{R}$ est convexe pour tout choix (a,b) de points de P. Nous allons commencer par le prouver lorsque le segment $[a;b]$ évite toute cellule de codimension $\geqslant 2$.

Fixons deux tels points a, b et une famille $\lambda = (\lambda_E)$ et notons f cette fonction. Pour toute cellule C de $\mathscr{C}$, notons I_C l'intervalle de $[0;1]$ formé des t tels que $(1-t)a+tb \in C$. Ces intervalles recouvrent $[0;1]$ et la fonction f est lisse et convexe sur chacun d'entre eux.

Soit t un point de $]0;1[$; posons $c = (1-t)a+tb$. Les dérivées à droite et à gauche de f sont croissantes dans des voisinages à droite et à gauche de t. Il reste à vérifier que la dérivée à gauche de f en t est plus petite que sa dérivée à droite.

Soit C, C' des cellules de dimension n de $\mathscr{C}$ contenant c telles que C rencontre le segment $]c;b]$ et C' rencontre le segment $[a;c[$. Si $C = C'$, alors f a même dérivée à droite et à gauche en t.

Sinon, le point t appartient à une unique $(n-1)$-cellule D commune à C et C', car le segment $[a;b]$ évite les cellules de codimension $\geqslant 2$; il reste à s'assurer que $f'_g(t) \leqslant f'_d(t)$. On a

$$f'_g(t) = \langle \nabla u_{C'}(c), b-a\rangle + \sum_E \lambda_E \langle \nabla f_E, b-a\rangle \operatorname{signe}(f_E((1-t^-)a+t^-b))$$

et

$$f'_d(t) = \langle \nabla u_C(c), b-a\rangle + \sum_E \lambda_E \langle \nabla f_E, b-a\rangle \operatorname{signe}(f_E((1-t^+)a+t^+b)))$$

où l'on désigne par t^+ et t^- des points suffisamment proches de t tels que $t^- < t < t^+$, et la fonction signe vaut 1 sur $\mathbf{R}^*_+$, 0 en 0 et -1 sur $\mathbf{R}^*_-$. Alors,

$$\begin{aligned} f'_d(t) - f'_g(t) &= \langle \nabla u_C(c) - \nabla u_{C'})(c), b-a\rangle \\ &\quad + \sum_E \lambda_E \langle \nabla f_E, b-a\rangle \left(\operatorname{signe}(f_E((1-t^+)a+t^+b)) - \operatorname{signe}(f_E((1-t^-)a+t^-b))\right. \end{aligned}$$

Dans cette formule, la différence de signes vaut 0 si le segment $s \mapsto (1-s)a+sb$ ne traverse pas l'hyperplan affine $\langle E\rangle$ en t ; dans le cas contraire elle vaut 2 si on $\langle \nabla f_E, b-a\rangle > 0$ et -2 dans le cas contraire ; notons-la $2\varepsilon_E$. Ainsi, seul l'hyperplan $E = \langle D\rangle$ subsiste dans la somme et l'on a

$$\begin{aligned} f'_d(t) - f'_g(t) &= \langle \nabla u_C(c) - \nabla u_{C'}(c), b-a\rangle + 2\varepsilon_E \lambda_E \langle \nabla f_E, b-a\rangle \\ &= \langle \nabla u_C(c) - \nabla u_{C'}(c) + 2\varepsilon_E \lambda_E \nabla f_E, b-a\rangle. \end{aligned}$$

Sur tout point x de D, la forme linéaire $\nabla u_C(x) - \nabla u_{C'}(x)$ est nulle sur l'espace directeur E de $\langle D\rangle$, car u_C et $u_{C'}$ coïncident sur D, donc cette forme linéaire est proportionnelle à la partie linéaire de f_E, qui est ∇f_E. Pour tout point $x \in D$, on peut ainsi écrire

$$\nabla u_C(x) - \nabla u_{C'}(x) = \mu_D(x) \nabla f_E$$

où $\mu_D \colon D \to \mathbf{R}$ est continue. La condition $f'_g(t) \leqslant f'_d(t)$ est donc vérifiée si l'on a $\varepsilon_E \mu_D(c) + 2\lambda_E \geqslant 0$. Comme la décomposition cellulaire $\mathscr{C}$ est finie et constituée de cellules compactes, ce sera même le cas dès que chaque terme de λ est assez grand, indépendamment du choix du couple de points (a,b) tel que le segment $[a;b]$ évite les cellules de codimension $\geqslant 2$.

Choisissons un tel λ et vérifions que v est convexe. Soit (a,b) un couple de points de P. On peut trouver a' et b' dans P, arbitrairement proches de a et b respectivement

tels que le segment $[a'; b']$ évite toute cellule de codimension au moins 2. Par passage à la limite, la convexité sur ces segments $[a'; b']$ entraîne la convexité sur le segment $[a; b]$. $\square$

CHAPITRE 2

ESPACES PARALINÉAIRES (PL)

---

§ 2.1. NOTION D'ESPACE PARALINÉAIRE

2.1.1. — Soit X un espace topologique séparé. Une *carte paralinéaire* sur X est une partie localement fermée P de X munie d'une application continue φ vers un espace affine réel V qui induit un homéomorphisme de P sur un sous-espace paralinéaire de V ; la partie P est appelée domaine de la carte. Une telle carte est dite *cellulaire* si l'image de P par φ est une cellule (fermée) de V.

Deux cartes paralinéaires (P, φ) et (Q, ψ) sont dites compatibles si $(P \cap Q, \varphi|_{P\cap Q})$ et $(P \cap Q, \psi|_{P\cap Q})$ sont des cartes paralinéaires.

Un *atlas paralinéaire* sur X est une famille $((P_i, \varphi_i))_i$ de cartes paralinéaires sur X, deux à deux compatibles, telle que la famille (P_i) soit un G-recouvrement de X.

On dit que deux atlas sur X sont équivalents si leur réunion est un atlas, ce qui revient à dire que chaque carte de l'un est équivalent à toute carte de l'autre.

Si X est un espace topologique muni d'un atlas, la réunion de tous les atlas qui lui sont équivalents est un atlas sur X, maximal.

Définition 2.1.2. — *Un* espace paralinéaire *est un espace topologique séparé muni d'une classe d'équivalence d'atlas paralinéaires.*

Lorsque nous parlerons de *carte paralinéaire*, voire de *carte*, en particulier de carte cellulaire, d'un espace paralinéaire X, il sera sous-entendu que cette carte appartient à l'un des atlas équivalents définissant la structure de X.

Un espace affine V possède une structure d'espace paralinéaire évidente, donnée par l'atlas (V, id_V).

2.1.3. — Le produit de deux espaces paralinéaires X et Y possède une structure naturelle d'espace paralinéaire. Choisissons des atlas sur X et Y qui définissent leur structure d'espace paralinéaire ; on définit comme suit un atlas paralinéaire sur $X \times Y$. Ses cartes sont les applications de la forme $(\varphi, \psi)\colon P \times Q \to E \times F$, où $\varphi\colon P \to E$ et $\psi\colon Q \to F$ sont des cartes paralinéaires sur X et Y respectivement. La structure d'espace paralinéaire définie par cet atlas ainsi obtenu ne dépend que des classes d'équivalence des atlas choisis sur X et Y.

2.1.4. — Soit X un espace paralinéaire et soit Y une partie de X. On dit que Y est un *sous-espace paralinéaire* de X s'il est G-recouvert par des domaines de cartes de X qu'il contient. Lorsque X est un espace affine muni de son atlas canonique, on retrouve les notions définies en 1.8.10.

2.1.5. — Soit X un espace paralinéaire et soit $\mathscr{A} = ((P_i, f_i))$ un atlas paralinéaire sur X. Soit Y une partie de Y. On dit que Y est $\mathscr{A}$-polyédrale (ou est un $\mathscr{A}$-polyèdre) si, pour tout i, la partie $f_i(P_i \cap Y)$ est un polyèdre de l'espace affine but de la carte f_i. L'intersection de deux $\mathscr{A}$-polyèdres, la réunion d'une famille finie de $\mathscr{A}$-polyèdres fermés sont des $\mathscr{A}$-polyèdres.

Une partie $\mathscr{A}$-polyédrale est un sous-espace paralinéaire fermé.

Soit Y une partie $\mathscr{A}$-polyédrale de X et soit h une application de Y à valeurs dans un espace affine W. On dit que h est $\mathscr{A}$-polyédrale si, pour tout i, l'application de $f_i(P_i \cap Y)$ dans W déduit de $h|_{P_i}$ est polyédrale.

2.1.6. — Soit Y un sous-espace paralinéaire de X. Alors, Y est localement fermé dans X. De plus, la famille des cartes paralinéaires sur X dont le domaine est contenu dans Y est un atlas paralinéaire de Y par lequel on le munit d'une structure d'espace paralinéaire.

Dans une cellule d'un espace affine, tout point possède une base de voisinages formée de cellules. On en déduit qu'un ouvert d'une cellule est G-recouvert par les cellules qu'il contient, puis qu'un ouvert d'un espace paralinéaire en est un sous-espace paralinéaire.

L'intersection de deux sous-espaces paralinéaires est un sous-espace paralinéaire ; la réunion d'une famille localement finie de sous-espaces paralinéaires fermés est un sous-espace paralinéaire fermé.

Tout point d'un espace paralinéaire possède une base de voisinages qui sont des sous-espaces paralinéaires compacts.

Un espace paralinéaire est paracompact si et seulement si chacune de ses composantes connexes est réunion dénombrable de domaines de cartes cellulaires compacts.

Lemme 2.1.7. — *Tout sous-espace paralinéaire d'un espace paralinéaire dénombrable à l'infini (resp. paracompact) est dénombrable à l'infini (resp. paracompact).*

Démonstration. — Soit X un espace paralinéaire et soit Y un sous-espace paralinéaire de X. Supposons que X est dénombrable à l'infini et démontrons que Y l'est. Par hypothèse, X est réunion d'une famille dénombrable (P_n) de domaines de cartes compacts. Pour tout n, $Y \cap P_n$ est alors homéomorphe à une partie localement fermée d'un espace numérique, donc est dénombrable à l'infini. Par suite, Y est dénombrable à l'infini.

Supposons maintenant que X est paracompact et démontrons que Y l'est. D'après ce qui précède, la trace de Y sur toute composante connexe de X est dénombrable à l'infini. Il en résulte que Y est paracompact. □

Corollaire 2.1.8. — *Soit X un espace paralinéaire et soit Y un sous-espace paralinéaire de X. Si Y est dénombrable à l'infini, il possède un voisinage ouvert dans X qui est dénombrable à l'infini, et en particulier paracompact.*

Démonstration. — Supposons que Y soit dénombrable à l'infini et soit (Q_n) une famille dénombrable de parties compactes recouvrant Y. Pour tout n, Q_n possède un

voisinage Q'_n dans X qui est un sous-espace paralinéaire compact. Son intérieur est dénombrable à l'infini d'après le lemme 2.1.7. La réunion Y' des Q'_n est un voisinage de Y dans X qui est dénombrable à l'infini. □

2.1.9. — Soit X un espace paralinéaire. C'est un espace topologique. Nous lui associons aussi un site X_{G} ; sa catégorie sous-jacente est formée des sous-espaces paralinéaires et des inclusions entre iceux ; elle est munie de la G-topologie pour laquelle les recouvrements sont les G-recouvrements.

2.1.10. — Soit X et Y des espaces paralinéaires. On dit qu'une application continue $f\colon X \to Y$ est paralinéaire si X est G-recouvert par des domaines de cartes (P, φ) tels que $f(P)$ soit contenu dans le domaine Q d'une carte (Q, ψ) de Y et tel que l'application $\psi \circ f\varphi^{-1}|_{\varphi(P)}$ de $\varphi(P)$ dans $\psi(Q)$ induite par f soit la restriction d'une application affine.

L'inclusion d'un sous-espace paralinéaire est une application paralinéaire, de même que la composée de deux applications paralinéaires. Les espaces paralinéaires forment donc une catégorie.

La bijection réciproque d'une application paralinéaire bijective est paralinéaire (cela est dû au fait que dans ce texte, nous n'imposons à la partie linéaire d'une application affine que d'être à coefficients dans un *sous-corps* de $\mathbf{R}$). Une application paralinéaire est donc un isomorphisme si et seulement si elle est bijective.

2.1.11. — On dit qu'une application paralinéaire $f\colon X \to Y$ est une *immersion par morceaux* s'il existe un G-recouvrement (P_i) par des sous-espaces paralinéaires de X telle que pour tout i, l'application f induise un isomorphisme de P_i sur un sous-espace paralinéaire de Y.

Proposition 2.1.12. — *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme d'espaces paralinéaires. Si f est compact, alors $f(X)$ est un sous-espace paralinéaire fermé de Y sur lequel f possède G-localement des sections paralinéaires.*

Démonstration. — La question étant G-locale sur Y, on peut supposer que Y est compact ; l'espace X est alors compact. Considérons des G-recouvrements finis (P_i) de X par des domaines compacts de cartes (P_i, φ_i) et (Q_j) de Y par des domaines compacts de cartes (Q_j, ψ_j), et, pour tout i, un indice j_i tel que $f(P_i) \subset Q_{j_i}$ et que l'application induite de $\varphi_i(P_i)$ dans $\psi_{j_i}(Q_{j_i})$ soit la restriction d'une application affine.

D'après le corollaire 1.8.5, $f(P_i)$ est un sous-espace paralinéaire de Q_{j_i} sur lequel f possède G-localement des sections. La proposition s'ensuit. □

2.1.13. — Soit X un espace paralinéaire.

On appelle dimension de X la borne supérieure $\dim(X)$ des dimensions des domaines de cartes de X. On a $\dim(\varnothing) = -\infty$.

Soit x un point de X ; on appelle dimension de X en x la borne supérieure $\dim_x(X)$ des dimensions en x des domaines de cartes de X contenant x. On a $\dim(X) = \sup_{x \in X} \dim_x(X)$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. On note $X^{(n)}$ l'ensemble des points $x \in X$ tels que $\dim_x(X) \geqslant n$. C'est un sous-espace paralinéaire fermé de X. Il est G-recouvert par les domaines de cartes cellulaires de X de dimension $\geqslant n$.

Définition 2.1.14. — *Soit d un entier. Un sous-ensemble d'un espace paralinéaire X sera dit* d-négligeable *si sa trace sur tout domaine de carte de X est contenue dans un sous-espace paralinéaire de dimension $< d$.*

Il suffit de vérifier cette propriété pour toute cellule d'un G-recouvrement donné de $X^{(d)}$. Si X est paracompact et si A est une partie d-négligeable de X, il existe un sous-espace paralinéaire $Y \subset X$, de dimension $< d$, tel que $A \subset Y$.

§ 2.2. DÉCOMPOSITIONS CELLULAIRES

2.2.1. — Soit X un espace paralinéaire.

Soit C une partie de X. On dit que des cartes cellulaires (C, f) et (C, g) de domaine C sont équivalentes si l'application $g \circ f^{-1}$ de $f(C)$ dans $g(C)$ est la restriction d'une application affine. On appellera *cellule* de X une classe d'équivalence de telles cartes cellulaires. Une carte cellulaire d'une cellule sera appelée *carte affine*.

En pratique, on se permettra d'écrire « Soit (C, f) une cellule... », en choisissant une carte affine privilégiée, voire, en sous-entendant le choix d'une telle carte, « soit C une cellule ». On dira aussi que C est une f-cellule.

Sur une cellule de X, on dispose alors de la notion d'application affine à valeurs dans un espace affine, voire dans une cellule. On dispose aussi de la notion de barycentre, de convexité,...

Cette terminologie est incompatible avec celle introduite dans le cas d'un espace affine V où les cellules introduites initialement sont celles de la forme (C, j), où j est l'inclusion. Pour éviter toute confusion, ces cellules seront appelées *cellules fortes* de V.

2.2.2. — Soit C une cellule de X et soit f une carte affine de C. On appelle *intérieur* de C l'image réciproque par f de l'intérieur de $f(C)$; c'est une partie connexe, ouverte et dense de C. C'est aussi l'ensemble $\mathring{C}$ des points en lesquels C est une variété topologique.

On appelle *bord* de C le complémentaire $\partial(C)$ de son intérieur ; c'est un sous-espace paralinéaire de C ; il est vide si C est réduit à un point, et purement de dimension $\dim(C)-1$ sinon.

Soit D une cellule de X. On dit que c'est une *sous-cellule* de C si le domaine de D est contenu dans celui de C et si l'inclusion de D dans C est une application affine.

Lemme 2.2.3. — *Soit $f\colon C \to D$ un morphisme affine de cellules. Alors $f(C) = D$ si et seulement si $f(\mathring{C}) = \mathring{D}$.*

Démonstration. — On peut supposer que C est une cellule forte d'un espace affine V, que D est une cellule forte d'un espace affine W, et que f est induite par une application affine de V sur W. Comme C et D sont fermées dans V et W respectivement, l'assertion découle du corollaire A.4.6. □

Définition 2.2.4. — *On appelle* décomposition cellulaire *de X une famille localement finie $\mathscr{C}$ de cellules fermées de X telle que :*

a) *Si C et C' sont des cellules de $\mathscr{C}$ telles que C' soit contenue (ensemblistement) dans C, alors soit $C' = C$, soit C' est une sous-cellule de C contenue dans $\partial(C)$;*

b) *Le bord de toute cellule de $\mathscr{C}$ est réunion finie de cellules de $\mathscr{C}$;*

c) *L'intersection de deux cellules quelconques de $\mathscr{C}$ est une réunion de cellules de $\mathscr{C}$.*

Si X est un sous-espace paralinéaire d'un espace affine, une décomposition cellulaire de X est dite *forte* si elle est constituée de cellules fortes.

On dit qu'une décomposition cellulaire $\mathscr{C}$ de X est adaptée à un sous-espace paralinéaire fermé Y de X si Y est réunion de cellules appartenant à $\mathscr{C}$. Plus généralement, si Y est un sous-espace paralinéaire fermé de X et h une application paralinéaire de Y vers un espace affine, voire une cellule, on dit que $\mathscr{C}$ est adaptée au couple (Y, h) si Y est réunion de cellules appartenant à $\mathscr{C}$ et si, pour toute cellule C de $\mathscr{C}$, $h|_Y$ est une application affine.

Remarque 2.2.5. — Soit C et D deux cellules d'une décomposition cellulaire $\mathscr{C}$.

a) Si $C \cap \mathring{D} \neq \varnothing$, alors $C \supset D$.

b) Si $C \neq D$, alors $\mathring{C} \cap \mathring{D} = \varnothing$.

Démontrons d'abord (1). Par définition d'une décomposition cellulaire, $C \cap D$ est réunion de cellules de $\mathscr{C}$. Elles sont contenues dans D et l'une d'elles au moins n'est pas contenue dans le bord de D ; elle est donc égale à D.

L'assertion (2) en découle : si $\mathring{C} \cap \mathring{D}$ n'est pas vide, on a $C \subset D$ et $D \subset C$, donc $C = D$.

Remarque 2.2.6. — Soit $\mathscr{C}$ une décomposition cellulaire d'un espace paralinéaire X. Soit x un point de X et soit C une cellule de $\mathscr{C}$ de dimension minimale contenant x. Alors, $x \in \mathring{C}$. (Dans le cas contraire, x appartiendrait au bord de C qui est réunion de cellules de dimension strictement plus petites.) Cela prouve que la famille $(\mathring{C})_{C \in \mathscr{C}}$ recouvre X. D'après la remarque précédente, c'est une partition de X.

Remarque 2.2.7. — Ces axiomes entraînent que chaque cellule de $\mathscr{C}$ ne rencontre qu'un nombre fini d'autres cellules.

Considérons en effet une cellule C ; posons $d = \dim(C)$ et supposons par récurrence que chaque cellule de dimension $< d$ ne rencontre qu'un nombre fini de cellules de $\mathscr{C}$. Si $d = 0$, C est réduit à un point, qui n'appartient qu'à un nombre fini de cellules puisque $\mathscr{C}$ est localement finie. Supposons $d > 0$. Soit C' une cellule de $\mathscr{C}$ qui rencontre C ; soit D une cellule de $\mathscr{C}$ qui est contenue dans $C \cap C'$. Soit $C = D$, soit $D \subset \partial(C)$; dans les deux cas, D rencontre $\partial(C)$, donc C' aussi.

Par définition d'une décomposition cellulaire, $\partial(C)$ est réunion d'une famille finie de cellules de dimension $< d$; par récurrence chacune d'elles ne rencontre qu'un nombre fini de cellules de $\mathscr{C}$, d'où l'assertion.

Lemme 2.2.8. — *Soit X un espace paralinéaire, soit $\mathscr{C}$ une décomposition cellulaire de X et soit C une cellule appartenant à $\mathscr{C}$. Notons W_C la réunion des cellules ouvertes $\mathring{D}$, où D parcourt l'ensemble des cellules de $\mathscr{C}$ contenant C. Alors W_C est un voisinage ouvert de $\mathring{C}$ dans X et son complémentaire est un sous-espace paralinéaire fermé.*

Démonstration. — Notons W'_C le complémentaire de W_C dans X. Pour qu'une cellule D ne contienne pas C, il faut et il suffit qu'elle soit disjointe de $\mathring{C}$, si bien que W'_C est la réunion des cellules D de $\mathscr{C}$ telles que $D \cap \mathring{C} = \varnothing$. Cela prouve que W'_C est un sous-espace paralinéaire fermé de X. Il est disjoint de $\mathring{C}$ par construction. □

2.2.9. — Soit $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ des décompositions cellulaires de X. On dit que $\mathscr{D}$ raffine $\mathscr{C}$ si toute cellule de $\mathscr{D}$ est une sous-cellule d'une cellule de $\mathscr{C}$, et si toute cellule de $\mathscr{C}$ est réunion de cellules de $\mathscr{D}$. Dans ce cas, toute cellule de $\mathscr{D}$ est sous-cellule de toute cellule de $\mathscr{C}$ qui la contient.

Soit D une cellule de $\mathscr{D}$.

Soit C une cellule de $\mathscr{C}$; on a $D \subset C$ ou $C \cap D \subset \partial(D)$. En effet, C est une union de cellules de $\mathscr{D}$, donc $C \cap D$ est une union de cellules de $\mathscr{D}$, contenue dans D.

On en déduit que si D est contenue dans une union de cellules de $\mathscr{C}$, elle est contenu dans l'une d'elles.

Soit $C \in \mathscr{C}$ une cellule de dimension minimale contenant D. Démontrons que $\partial(C) \cap D \subset \partial(D)$. Par hypothèse, $\partial(C)$ est réunion de cellules C_i de $\mathscr{C}$, elles sont de dimension $<$ $\dim(C)$, donc $D \not\subset C_i$. D'après ce qui précède, $C_i \cap D \subset \partial(D)$, puis $\partial(C) \cap D \subset \partial(D)$. En passant aux complémentaires, on a aussi $\mathring{D} \subset \mathring{C}$; notons même que C est l'unique cellule de $\mathscr{C}$ telle que $\mathring{D} \subset \mathring{C}$.

Lemme 2.2.10. — *Soit V un espace affine et soit $\mathscr{B}$ une famille finie de couples (B, h), où B est un polyèdre de V et h une application polyédrale sur B. Il existe une décomposition cellulaire finie forte de V qui est adaptée à tout élément de $\mathscr{B}$.*

En particulier, il existe, pour tout polyèdre P de V, il existe une décomposition cellulaire finie forte de P.

Démonstration. — Quitte à raffiner la famille $\mathscr{B}$, on suppose que pour tout couple $(B, h) \in \mathscr{B}$, B est une cellule forte de V sur laquelle h est affine. Il existe alors une famille finie Φ de formes affines sur $\mathbf{R}^n$ telle pour tout (B, h) appartenant à $\mathscr{B}$, la cellule B soit combinaison booléenne de demi-espaces définis par ces formes. Pour chaque famille $c = (\square_\varphi)_{\varphi\in\Phi}$, où $\square_\varphi \in \{\leqslant, =, \geqslant\}$, considérons le polyèdre B_c formé des points $x \in V$ tels que $\varphi(x) \,\square_\varphi\, 0$ pour tout $\varphi \in \Phi$; s'il n'est pas vide, c'est une cellule forte de V. La famille des B_c, tels que $B_c \neq \varnothing$, convient. Dans ce cas, l'intersection de deux cellules est ou vide ou une cellule forte.

La dernière assertion s'en déduit en prenant pour $\mathscr{B}$ la famille réduite au couple $(P, 0)$. □

Définition 2.2.11. — *Soit X un espace paralinéaire et soit $\mathscr{A} = (X_i, f_i)$ un atlas sur X et soit $\mathscr{C}$ une décomposition cellulaire de X. On dit que $\mathscr{C}$ est adaptée à l'atlas $\mathscr{A}$ si les conditions suivantes sont vérifiées :*

a) *Tout X_i est réunion de cellules de $\mathscr{C}$;*
b) *Pour tout i, toute cellule $C \in \mathscr{C}$ qui est contenue dans X_i est une f_i-cellule.*

Remarque 2.2.12. — Soit X un espace paralinéaire paracompact et soit $f\colon X \to \mathbf{R}^m$ une immersion par morceaux. Il existe un G-recouvrement localement fini (X_i) de X tel que $f|_{X_i}$ soit injective, pour tout i. On peut même choisir les parties X_i compactes. Alors, la famille $(X_i, f|_{X_i})$ est un atlas paralinéaire sur X. Si une décomposition cellulaire est adaptée à cet atlas, ses cellules sont des f-cellules.

Proposition 2.2.13. — *Soit X un espace paralinéaire et soit $\mathscr{A} = (X_i, f_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ un atlas de type fini sur X ; soit $\mathscr{B}$ une famille finie de couples (P, h), où P est une partie $\mathscr{A}$-polyédrale de X et h une application $\mathscr{A}$-polyédrale sur P. Il existe une décomposition cellulaire finie $\mathscr{C}$ de X, qui est adaptée à l'atlas $\mathscr{A}$ et adaptée à tout élément de $\mathscr{B}$.*

Démonstration. — Si $m = 0$, l'espace X est vide et la décomposition cellulaire vide convient. Si $m = 1$, $X = X_1$ est identifié au polyèdre $f_1(X_1)$ d'un espace affine et la décomposition cellulaire fournie par le lemme 2.2.10 convient. On raisonne par récurrence sur le cardinal m de l'atlas $\mathscr{A}$ en supposant le résultat prouvé pour un espace paralinéaire muni d'un atlas de type fini de cardinal $< m$.

Supposons $m \geqslant 2$ et posons $Y = X_1 \cup \cdots \cup X_{m-1}$ et $Z = X_m$. Par récurrence, il existe une décomposition cellulaire $\mathscr{C}_Y$ de Y satisfaisant les conditions requises par la proposition pour l'atlas $(X_i, f_i)_{i<m}$ et la famille des $(B \cap Y, h|_{B\cap Y}$, pour (B, h) parcourant $\mathscr{B}$, à laquelle on adjoint le couple $(Y \cap Z, f_m|_{Y\cap Z})$. En particulier, toute cellule $C \in \mathscr{C}_Y$ contenue dans $Y \cap Z$ est une f_m-cellule.

D'après le cas $m = 1$, il existe aussi une décomposition cellulaire $\mathscr{C}_Z$ de Z formée de f_m-cellules qui est adaptée à la famille $(B \cap Z, h|_{B\cap Z})$ (pour (B, h) dans $\mathscr{B}$), à laquelle on adjoint les cellules de $\mathscr{C}_Y$ qui sont contenues dans Z. Observons que pour toute cellule $C \in \mathscr{C}_Z$ qui est contenue dans Y et tout $i < m$ tel que $C \subset X_i$, l'application $f_i \circ f_m^{-1}$ de $f_m(C)$ dans $f_i(C)$ est affine, car C est contenue dans une cellule $C' \in \mathscr{C}_Y$ contenue dans $Y \cap Z$ et l'application réciproque $f_m \circ f_i^{-1}$ de $f_i(C')$ dans $f_m(C')$ est affine.

Soit $\mathscr{C}$ la réunion de $\mathscr{C}_Z$ et de l'ensemble des cellules $C \in \mathscr{C}_Y$ qui ne sont pas contenues dans Z. Par construction, toute cellule de $\mathscr{C}$ est contenue dans l'un des X_i et tout X_i est réunion de cellules, de même que tout élément de $\mathscr{B}$. De plus, pour tout couple d'indices (i, j) et toute cellule $C \subset X_i \cap X_j$, l'application f_i établit un isomorphisme paralinéaire de C sur une cellule forte, et l'application $f_j \circ f_i^{-1}$ de $f_i(C)$ dans $f_j(C)$ est affine. Il reste à vérifier que $\mathscr{C}$ est une décomposition cellulaire de X.

Les deux propriétés suivantes découlent de la construction : 1) les cellules de $\mathscr{C}$ contenues dans Z forment la décomposition cellulaire $\mathscr{C}_Z$ de Z ; 2) toute cellule de $\mathscr{C}_Y$ qui est contenue dans Z est réunion de cellules de $\mathscr{C}_Z$; 3) toute cellule de $\mathscr{C}_Y$ est réunion de cellules de $\mathscr{C}$.

Soit C une cellule de $\mathscr{C}$; démontrons que $\partial(C)$ est réunion de cellules de $\mathscr{C}$. C'est évident si $C \subset Z$, d'après ce qui précède. Sinon, $C \not\subset Z$, donc C est une cellule de $\mathscr{C}_Y$; son bord est donc réunion de cellules de $\mathscr{C}_Y$, donc est réunion de cellules de $\mathscr{C}$.

Soit C et D des cellules de $\mathscr{C}$. Démontrons que $C \cap D$ est intersection de cellules de $\mathscr{C}$. C'est encore évident si C et D sont toutes deux contenues dans Z. Si aucune des deux n'est contenue dans Z, alors C et D appartiennent à $\mathscr{C}_Y$, donc $C \cap D$ est réunion de cellules de $\mathscr{C}_Y$, donc est réunion de cellules de $\mathscr{C}$. Supposons enfin que $C \not\subset Z$ et $D \subset Z$. Comme $Z \cap Y$ est réunion de cellules de $\mathscr{C}_Y$, $C \cap Z$ est réunion de cellules de $\mathscr{C}_Y$ qui sont contenues dans Z, donc de cellules de $\mathscr{C}_Z$. Leur intersection avec D est réunion de cellules de $\mathscr{C}_Z$, comme il fallait démontrer.

Soit C et D des cellules de $\mathscr{C}$ telles que $C \subset D$ et $C \neq D$. Si $D \subset Z$, alors $C \in \mathscr{C}_Z$ donc $C, D \in \mathscr{C}_Z$, d'où $C \subset \partial(D)$, car $\mathscr{C}_Z$ est une décomposition cellulaire de Z. Supposons alors que $D \not\subset Z$; on a donc $D \in \mathscr{C}_Y$. De plus, $D \cap Z$ est réunion de cellules de $\mathscr{C}_Y$ dont aucune n'est égale à D, elles sont donc contenues dans $\partial(D)$, si bien que $D \cap Z \subset \partial(D)$. Si $C \subset Z$, il en résulte que $C \cap D \subset \partial(D)$. Sinon, on a $C \in \mathscr{C}_Y$, donc $C \subset \partial(D)$, car $\mathscr{C}_Y$ est une décomposition cellulaire de Y. □

Corollaire 2.2.14. — *Soit X un espace paralinéaire compact et soit $\mathscr{B}$ une famille finie couples (P, h), où P est un sous-espace paralinéaire compact de X et h une application paralinéaire sur P à valeurs dans une cellule. Il existe une décomposition cellulaire finie sur X qui est adaptée à $\mathscr{B}$.*

Démonstration. — Comme X est compact, il possède un atlas de type fini $\mathscr{A}$; les $\mathscr{A}$-polyèdres sont exactement les sous-espaces paralinéaires compacts de X et les applications $\mathscr{A}$-polyédrales sur un tel sous-espace sont exactement les applications paralinéaires. L'assertion résulte alors de la proposition 2.2.13. □

Proposition 2.2.15. — *Soit X un espace paralinéaire paracompact et soit $\mathscr{B}$ une famille localement finie de couples (Y, h), où Y est un sous-espace paralinéaire fermé de X et h une application paralinéaire de Y dans une cellule. Il existe une décomposition cellulaire $\mathscr{C}$ de X, formée de cellules compactes, qui est adaptée à la famille $\mathscr{B}$.*

Démonstration. — On peut supposer que X est connexe et donc réunion d'une famille dénombrable (P_n) de parties paralinéaires compactes. Puisque tout point de X possède un voisinage qui est un sous-espace paralinéaire compact, on en déduit qu'il existe une telle suite où, pour tout n, P_n contenu dans l'intérieur de P_{n+1}.

Posons $Q_0 = P_0$. Pour tout $n \geqslant 1$, notons Q_n l'adhérence de $P_n - P_{n-1}$; c'est un sous-espace paralinéaire de X, comme on le vérifie G-localement, ce qui permet de se ramener au cas plongé ; il est de plus compact. Si n et m sont des entiers tels que $|n - m| \geqslant 2$, on a $Q_n \cap Q_m = \varnothing$.

Il n'est pas restrictif de supposer que pour tout n, les couples $(Q_n, 0)$ et $(Q_n \cap Q_{n+1}, 0)$ appartiennent à $\mathscr{B}$.

Pour tout n, choisissons une décomposition cellulaire $\mathscr{C}_n$ de Q_n qui est adaptée à la trace sur Q_n de la famille $\mathscr{B}$. Pour tout n, choisissons une décomposition cellulaire $\mathscr{D}_{n,n+1}$ de l'intersection $Q_n \cap Q_{n+1}$ qui est adaptée à la trace des décompositions $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$, ainsi qu'à la trace de la famille $\mathscr{B}$.

Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des cellules C satisfaisant l'une des deux conditions suivantes, exclusives l'une de l'autre :

a) Il existe n tel que C appartienne à $\mathscr{C}_n$, et ne soit contenue ni dans Q_{n-1}, ni dans Q_{n+1} ;
b) Il existe n tel que $C \in \mathscr{D}_{n,n+1}$.

Par construction, toute cellule appartenant à $\mathscr{C}_n$ est réunion de cellules appartenant à $\mathscr{C}$. On démontre alors comme dans la preuve de la proposition précédente que $\mathscr{C}$ est une décomposition cellulaire de X. Elle vérifie les conditions requises. □

Corollaire 2.2.16. — *Soit X un espace linéaire paracompact. Toute décomposition cellulaire de X possède un raffinement en cellules compactes.*

Démonstration. — Il suffit d'appliquer la proposition précédente à l'espace X et sa décomposition cellulaire donnée. □

Remarque 2.2.17. — Soit X et Y des espaces paralinéaires.

Soit $\mathscr{C}$ une décomposition cellulaire de X, soit $\mathscr{D}$ une décomposition cellulaire de Y. Pour toute cellule $C \in \mathscr{C}$ et toute cellule $D \in \mathscr{D}$, la partie $C \times D$ est une cellule de $X \times Y$; son intérieur est $\mathring{C} \times \mathring{D}$ et son bord est $(\partial(C) \times D) \cup (C \times \partial(D))$. La famille des $C \times D$ est alors une décomposition cellulaire de $X \times Y$.

§ 2.3. DÉCOMPOSITIONS CELLULAIRES RELATIVES

Définition 2.3.1. — *Soit X et Y deux espaces paralinéaires et soit $f\colon X \to Y$ une application paralinéaire. Soit $\mathscr{C}$ une décomposition cellulaire de X et soit $\mathscr{D}$ une décomposition cellulaire de Y. On dit que le couple $(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ est adapté à f si les conditions suivantes sont satisfaites :*

a) *Pour toute cellule $C \in \mathscr{C}$, f induit une application affine surjective de C sur une cellule de $\mathscr{D}$.*

b) *Pour toute cellule D de $\mathscr{D}$, $f^{-1}(D)$ est réunion de cellules de $\mathscr{C}$.*

Remarque 2.3.2. — Soit $f\colon X \to Y$ une application paralinéaire entre espaces paralinéaires, soit $\mathscr{C}$ une décomposition cellulaire de X et soit $\mathscr{D}$ une décomposition cellulaire de Y. On suppose que le couple $(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ est adapté à f. Soit Y' un sous-espace paralinéaire de Y qui est réunion d'une sous-famille $\mathscr{D}'$ de cellules de $\mathscr{D}$; soit $X' = f^{-1}(Y)$ et soit $\mathscr{C}'$ l'ensemble des cellules de $\mathscr{C}$ dont l'image est contenue dans Y'. Alors $\mathscr{C}'$ est une décomposition cellulaire de l'espace paralinéaire X', $\mathscr{D}'$ est une décomposition cellulaire de l'espace paralinéaire Y' et le couple $(\mathscr{C}', \mathscr{D}')$ est adapté à l'application paralinéaire déduite de f par passage aux sous-espaces.

Lemme 2.3.3. — *Soit X et Y des espaces paralinéaires paracompacts et soit $f\colon X \to Y$ une immersion par morceaux. Soit $(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ un couple de décomposition cellulaires qui est adapté à f. Alors, pour toute cellule D de $\mathscr{D}$, l'application f fait de $f^{-1}(\mathring{D})$ un revêtement de $\mathring{D}$ dont les feuillets sont les cellules ouvertes $\mathring{C}$, où C parcourt l'ensemble des cellules de $\mathscr{C}$ contenues dans $f^{-1}(D)$ et de dimension* $\dim(D)$.

Démonstration. — Soit D une cellule de $\mathscr{D}$ et soit C une cellule de $\mathscr{C}$ contenue dans $f^{-1}(D)$. Par hypothèse, $f(C)$ est une cellule de $\mathscr{D}$. Si $\dim(C) < \dim(D)$, on a donc $f(C) \subset \partial(D)$. Sinon, f induit un isomorphisme de C sur D et donc un isomorphisme de $\mathring{C}$ sur $\mathring{D}$; en outre $\mathring{C}$ est ouverte dans $f^{-1}(\mathring{D})$. Le lemme en résulte. □

Proposition 2.3.4. — *Soit $f\colon X \to Y$ une application paralinéaire entre espaces paralinéaires, soit $\mathscr{C}$ une décomposition cellulaire de X et soit $\mathscr{D}$ une décomposition cellulaire de Y. On fait les hypothèses suivantes :*

i) *Pour toute cellule C de $\mathscr{C}$, il existe une cellule D de $\mathscr{D}$ telle que $f(C) \subset D$;*

ii) *Pour toute cellule C de $\mathscr{C}$ et toute cellule D de $\mathscr{D}$ telle que $f(C) \subset D$, l'application $f|_C\colon C \to D$ est affine.*

Soit $\mathscr{D}'$ une décomposition cellulaire de Y qui raffine $\mathscr{D}$ et telle que pour toute cellule $C \in \mathscr{C}$, $f(C)$ est réunion de cellules. Soit $\mathscr{C}'$ la famille des $f^{-1}(D) \cap C$, où C est une cellule de $\mathscr{D}$ et D est une cellule de $\mathscr{D}'$ telles que $\mathring{D} \subset f(\mathring{C})$. Pour tout tel couple (C, D), $f^{-1}(D) \cap C$ est une sous-cellule de C et son intérieur est $f^{-1}(\mathring{D}) \cap \mathring{C}$. De plus, $\mathscr{C}'$ est une décomposition cellulaire de X qui raffine $\mathscr{C}$ et le couple $(\mathscr{C}', \mathscr{D}')$ est adapté à f.

Démonstration. — Commençons par observer, sous les hypothèses de la proposition, que pour toute cellule $C \in \mathscr{C}$ possède une structure naturelle de cellule, induite par n'importe quelle cellule $D \in \mathscr{D}$ contenant $f(C)$.

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des couples (C, D), où C est une cellule de $\mathscr{E}$ et D est une cellule de $\mathscr{D}'$ telles que $\mathring{D} \subset f(\mathring{C})$. Notons que pour tout tel couple, $D \subset f(C)$.

Soit (C, D) un élément de $\mathscr{E}$. Soit Δ une cellule de $\mathscr{D}$ telle que $f(C) \subset \Delta$; par hypothèse, $f|_C \colon C \to \Delta$ est une application affine. Alors, $f(\mathring{C}) = f(C)^\circ$ (prop. A.4.8). Comme $f^{-1}(\mathring{D}) \cap \mathring{C} \neq \varnothing$, on a $f^{-1}(D) \cap C \neq \varnothing$. Puisque $\mathring{D} \subset f(C) \subset \Delta$, on a $D \subset \Delta$, et $f^{-1}(D) \cap C$ est une sous-cellule de C. D'après la prop. A.4.8, son intérieur est $f^{-1}(\mathring{D}) \cap \mathring{C}$, car cette intersection n'est pas vide.

Soit x un point de X. Soit Γ l'unique cellule de $\mathscr{C}$ telle que $x \in \mathring{\Gamma}$, soit Δ l'unique cellule de $\mathscr{D}'$ telle que $f(x) \in \mathring{\Delta}$. Comme $f(\Gamma)$ est réunion de cellules de $\mathscr{D}'$, il en résulte que $\Delta \subset f(\Gamma)$. Puisque $\mathring{\Delta} \cap f(\mathring{\Gamma})$ n'est pas vide, c'est l'intérieur de $\Delta \cap f(\Gamma) = \Delta$ (prop. A.4.7) ; autrement dit, $\mathring{\Delta} \subset f(\mathring{\Gamma})$ et le couple (Γ, Δ) appartient à $\mathscr{E}$ et le point x est situé sur la cellule ouverte correspondante.

Soit (C_1, D_1), (C_2, D_2) des éléments de $\mathscr{E}$ tels que $f^{-1}(D_1) \cap C_1$ est contenu dans $f^{-1}(D_2) \cap C_2$ et rencontre $f^{-1}(\mathring{D}_2) \cap \mathring{C}_2$. Par hypothèse, $f^{-1}(D_1 \cap \mathring{D}_2) \cap (C_1 \cap \mathring{C}_2)$ n'est pas vide ; soit x un point de cette intersection. Alors $\mathring{C}_2$ rencontre C_1, donc $C_2 \subset C_1$; de même, $D_2 \subset D_1$. Alors, $f^{-1}(D_1 \cap \mathring{D}_2) \cap (C_1 \cap \mathring{C}_2) = f^{-1}(\mathring{D}_2) \cap \mathring{C}_2$, de sorte que $f^{-1}(D_1) \cap C_1$ contient l'intérieur de $f^{-1}(D_2) \cap C_2$, donc cette cellule toute entière ; elles sont ainsi égales.

Soit (C_1, D_1), (C_2, D_2) des éléments de $\mathscr{E}$ et soit $x \in (f^{-1}(D_1) \cap C_1) \cap (f^{-1}(D_2) \cap C_2)$. Soit (Γ, Δ) l'élément de $\mathscr{E}$ associé à x comme ci-dessus. Alors $\mathring{\Gamma}$ rencontre $C_1 \cap C_2$, donc $\Gamma \subset C_1 \cap C_2$; de même, $\Delta \subset D_1 \cap D_2$. Ainsi, $f^{-1}(\Delta) \cap \Gamma$ est une cellule de $\mathscr{C}'$ qui contient x et qui est contenue dans l'intersection $(f^{-1}(D_1) \cap C_1) \cap (f^{-1}(D_2) \cap C_2)$. Cela prouve que l'intersection de deux cellules de $\mathscr{C}'$ est réunion de cellules de $\mathscr{C}'$.

Soit (C, D) un élément de $\mathscr{E}$ et soit x un point du bord de la cellule $f^{-1}(D) \cap C$. Soit (Γ, Δ) l'élément de $\mathscr{E}$ associé à x comme ci-dessus. Comme $\mathring{\Gamma}$ rencontre C, on a $\Gamma \subset C$; de même, $\Delta \subset D$. Comme x n'appartient pas à l'intérieur de $f^{-1}(D) \cap C$, on a $D \neq \Delta$ ou $C \neq \Gamma$. Si $\Gamma \neq C$, alors Γ est contenu dans le bord de C, et $f^{-1}(\Delta) \cap \Gamma \subset f^{-1}(D) \cap \partial(C) \subset \partial(f^{-1}(D) \cap C)$. Sinon, on a $\Delta \neq D$, donc Δ est contenu dans le bord de D et $f^{-1}(\Delta) \cap \Gamma \subset f^{-1}(\partial(D)) \cap C \subset \partial(f^{-1}(D) \cap C)$. Ainsi, $f^{-1}(\Delta) \cap \Gamma$ est une cellule de $\mathscr{C}'$ qui contient x et qui est contenue dans le bord de $f^{-1}(D) \cap C$. Cela prouve que le bord de toute cellule de $\mathscr{C}'$ est réunion de cellules de $\mathscr{C}'$.

Cela prouve que $\mathscr{C}'$ est une décomposition cellulaire de X.

Démontrons qu'elle raffine $\mathscr{C}$. Par construction, toute cellule de $\mathscr{C}'$ est une sous-cellule d'une cellule de $\mathscr{C}$. Soit C une cellule de $\mathscr{C}$ et soit x un point de C ; soit (Γ, Δ) l'élément de $\mathscr{E}$ associé à x. Alors $\mathring{\Gamma}$ rencontre C, donc $\Gamma \subset C$ et $f^{-1}(\Delta) \cap \Gamma$ est une cellule de $\mathscr{C}'$ qui contient x et qui est une sous-cellule de C. Ainsi, C est réunion de cellules de $\mathscr{C}'$.

Il reste à prouver que le couple $(\mathscr{C}', \mathscr{D}')$ est adapté à f. Soit (C, D) un élément de $\mathscr{E}$; on a $f(f^{-1}(D) \cap C) = D$ car $D \subset f(C)$. Inversement, soit D une cellule de $\mathscr{D}'$. Soit x un point de $f^{-1}(D)$ et soit (Γ, Δ) l'élément de $\mathscr{E}$ associé à x. On a $\Delta \subset D$ et $x \in f^{-1}(\Delta) \cap \Gamma$. Cela prouve que tout point de $f^{-1}(D)$ appartient à une cellule de $\mathscr{C}'$ qui est contenue dans $f^{-1}(D)$, c'est-à-dire que $f^{-1}(D)$ est réunion de cellules de $\mathscr{C}'$.

La proposition est ainsi démontrée. □

Remarque 2.3.5. — Reprenons les notations de la proposition, supposons en outre que le couple $(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ est adapté à f. Pour toute décomposition cellulaire $\mathscr{D}'$ de Y qui raffine $\mathscr{D}$, la proposition fournit une décomposition cellulaire $\mathscr{C}'$ de X qui raffine $\mathscr{C}$ et telle que le couple $(\mathscr{C}', \mathscr{D}')$ est adapté à f.

Remarquons en outre que, dans ce cas, la condition $\mathring{D} \subset f(\mathring{C})$ de l'énoncé équivaut à ce que $f(C)$ soit l'unique cellule de $\mathscr{D}$ dont l'intérieur contient $\mathring{D}$.

Corollaire 2.3.6. — *Soit X et Y des espaces paralinéaires paracompacts et soit $f\colon X \to Y$ une application paralinéaire compacte. Soit $\mathscr{C}$ une décomposition cellulaire de X, soit $\mathscr{D}$ une décomposition cellulaire de Y. Il existe une décomposition cellulaire $\mathscr{C}'$ de X qui raffine $\mathscr{C}$ et une décomposition cellulaire $\mathscr{D}'$ de Y qui raffine $\mathscr{D}$ telles que le couple $(\mathscr{C}', \mathscr{D}')$ est adapté à l'application paralinéaire f.*

Démonstration. — La famille des $f^{-1}(D)$, pour $D \in \mathscr{D}$, est localement finie. Commençons ainsi par choisir une décomposition cellulaire $\mathscr{C}_1$ de X, plus fine que $\mathscr{C}$, et compatible aux applications paralinéaires $f_D\colon f^{-1}(D) \to D$, pour $D \in \mathscr{D}$. Par définition, $f^{-1}(D)$ est réunion de cellules de $\mathscr{C}_1$ qui sont des sous-cellules de cellules de $\mathscr{C}$, et pour chaque telle cellule C_1, l'application $f|_{C_1}\colon C_1 \to D$ est affine.

Soit C_1 une cellule de $\mathscr{C}_1$. Si D est une cellule de $\mathscr{D}$ telle que $f(C_1) \subset D$, alors, $f|_{C_1}\colon C_1 \to D$ est affine, par construction de $\mathscr{C}_1$. Soit x un point de $\mathring{C}_1$ et soit D l'unique cellule de $\mathscr{D}$ telle que $f(x) \in \mathring{D}$. Comme $f^{-1}(D)$ est réunion de cellules de $\mathscr{C}_1$ et comme il rencontre $\mathring{C}_1$, on a $C_1 \subset f^{-1}(D)$, donc $f(C_1) \subset D$.

Comme f est compacte, la famille $(f(C_1))_{C_1 \in \mathscr{C}_1}$ est une famille localement finie de parties paralinéaires fermées de Y. Il existe alors une décomposition cellulaire $\mathscr{D}_1$ de Y, raffinant $\mathscr{D}$, telle que toute partie de la forme $f(C_1)$, pour $C_1 \in \mathscr{C}_1$, soit réunion de cellules.

Le corollaire résulte alors de la proposition, appliquée aux décompositions cellulaires $\mathscr{C}_1$ de X et $\mathscr{D}, \mathscr{D}_1$ de Y. □

Corollaire 2.3.7. — *Soit $f\colon X \to Y$ une application paralinéaire entre espaces paralinéaires, soit $\mathscr{C}$ une décomposition cellulaire de X, soit $\mathscr{D}$ une décomposition cellulaire de Y ; on suppose les conditions de la proposition 2.3.4 satisfaites. Soit $y \in Y$; posons $X_y = f^{-1}(y)$ et notons $\mathscr{C}_y$ l'ensemble des parties $C \in \mathscr{C}$ telles que $\mathring{C} \cap X_y \neq \varnothing$.*

a) *Pour tout $C \in \mathscr{C}_y$, $C \cap X_y$ est une sous-cellule de C dont l'intérieur est $\mathring{C} \cap X_y$, et la famille $\mathscr{D}_y := (C \cap X_y)_{C \in \mathscr{C}_y}$ est une décomposition cellulaire de l'espace paralinéaire X_y.*

b) *Pour toute cellule C de $\mathscr{C}$, $C \cap X_y$ est une réunion de cellules de la décomposition cellulaire $\mathscr{D}_y$.*

c) *Supposons, de plus, que le couple de décompositions cellulaires $(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ soit adapté à f. Soit D l'unique cellule de $\mathscr{D}$ telle que $y \in \mathring{D}$. Alors, $\mathscr{C}_y$ est l'ensemble des cellules C de $\mathscr{C}$ telles que $f(C) = D$.*

Démonstration. — a) Soit $\mathscr{D}'$ une décomposition cellulaire de Y qui raffine $\mathscr{D}$ et dont $\{y\}$ est une cellule. Notons $\mathscr{C}'$ la famille des $f^{-1}(D) \cap C$, où C est une cellule de $\mathscr{C}$ et D est une cellule de $\mathscr{D}'$ telle que $\mathring{D} \subset f(\mathring{C})$. D'après la proposition 2.3.4, c'est une décomposition cellulaire de X qui raffine $\mathscr{C}$ et le couple $(\mathscr{C}', \mathscr{D}')$ est adapté à f. Le corollaire résulte alors de la remarque 2.3.2 appliquée au sous-espace paralinéaire $Y' = \{y\}$ de Y.

b) Procédons par récurrence sur la dimension de C. Si $C \in \mathscr{C}_y$, alors le résultat est vrai. Sinon, $C \cap X_y$ est contenu dans $\partial(C) \cap X_y$; par définition d'une décomposition cellulaire, $\partial(C)$ est réunion finie de cellules de dimension strictement inférieure à celle de C et on conclut par récurrence.

c) Si le couple $(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ est adapté à f, la condition $y \in f(\mathring{C})$ équivaut à $y \in f(C)^\circ$, donc à $f(C) = D$, puisque $f(C)$ est une cellule de $\mathscr{D}$. □

CHAPITRE 3

ESPACES G-TROPICAUX

Dans ce chapitre, on fixe un sous-corps K de $\mathbf{R}$ et un sous-K-espace vectoriel non nul G de $\mathbf{R}$. Les espaces paralinéaires que nous considérons sont implicitement munis d'une (K, G)-structure (cf. §1.8.1). Par exemple, lorsque nous parlons de fonction affine sur $\mathbf{R}^n$, sa partie linéaire est définie sur K et son terme constant appartient à G.

§ 3.1. ESPACES G-TROPICAUX

Le but de ce qui suit est de définir une notion de structure d'*espace G-tropical* sur un espace topologique X ; cela va consister en une liste substantielle de données sujettes à un certain nombre d'axiomes, que nous allons maintenant présenter.

3.1.1. La topologie. — On suppose que X est topologiquement séparé et localement compact. On suppose de plus que X possède une base d'ouverts qui sont dénombrables à l'infini.

3.1.2. La G-topologie. — On se donne un ensemble $\mathrm{Dom}(X)$ de parties localement fermées de X que nous appellerons *domaines de* X.

On dit qu'une partie W de X est G-recouverte par une partie $\mathscr{V}$ de $\mathrm{Dom}(X)$ si chaque élément de $\mathscr{V}$ est contenu dans W et si, pour tout point $x \in W$, il existe une partie finie $\mathscr{V}_x$ de $\mathscr{V}$ telle que $x \in V$ pour tout $V \in \mathscr{V}_x$ et la réunion des V, pour $V \in \mathscr{V}_x$ est un voisinage de x dans W.

Axiomes sur les domaines :

– Toute partie ouverte de X est un domaine ;

– L'intersection de deux domaines est un domaine ;

– Toute partie localement fermée de X qui est G-recouverte par des domaines de X est encore un domaine de X ;

– Tout domaine de X est G-recouvert par les domaines compacts qu'il contient.

Il en résulte les faits suivants :

– Tout recouvrement ouvert d'une partie ouverte est un G-recouvrement ;

– Toute réunion finie de domaines compacts est un domaine compact.

La catégorie des domaines de X (les morphismes étant les inclusions), munie de la notion de G-recouvrement, sera appelée la G-topologie de X. Plus généralement, tout domaine de X hérite d'une G-topologie.

3.1.3. Les fonctions paralinéaires. — On se donne un G-faisceau PL_X de fonctions numériques continues sur X, qu'on appelle *fonctions paralinéaires* ; on demande que pour tout domaine W de X, l'ensemble $\mathrm{PL}_X(W)$ soit un sous-espace affine de l'espace des fonctions continues sur W.

Plus généralement, si W est un domaine de X et si $f\colon W \to \mathbf{R}^m$ est une application, on dit que f est paralinéaire si ses composantes le sont.

Axiomes sur les fonctions paralinéaires. Soit W un domaine de X et soit $f\colon W \to \mathbf{R}^m$ une fonction paralinéaire.

– Si W est compact, alors $f(W)$ est un polyèdre compact de $\mathbf{R}^m$;
– Si P est un sous-espace paralinéaire de $\mathbf{R}^m$ contenant $f(W)$ et si $\varphi\colon P \to \mathbf{R}$ est paralinéaire, alors $\varphi \circ f$ est paralinéaire ;
– Si P est un sous-espace paralinéaire de $\mathbf{R}^m$, alors $f^{-1}(P)$ est un domaine de W.

En particulier, f induit un morphisme de sites annelés de W vers l'espace $\mathbf{R}^m$ muni de sa G-topologie linéaire par morceaux.

Une *carte G-tropicale* sur X est un triplet (V, f, P) où V est un domaine de X, où f est une fonction paralinéaire de V dans un espace affine E et où P est une partie paralinéaire de E contenant $f(V)$. En pratique, on pourra supposer que E est l'espace $\mathbf{R}^m$, pour un certain m, et la partie P sera souvent omise de la notation.

Soit (V, f) une carte G-tropicale et soit $x \in V$. On appelle *dimension tropicale* de f en x la borne inférieure des $\dim(f(W))$, où W est un domaine compact contenu dans V qui est voisinage de x. On la note $\dim_{\mathrm{trop},x}(f)$. Il existe un domaine contenu dans V qui la réalise.

Soit x un point de X. On appelle $d_{\mathrm{trop}}(x)$ la borne supérieure des dimensions tropicales $\dim_{\mathrm{trop},f}(f)$, où (V, f) parcourt l'ensemble des cartes G-tropicales des domaines V de X contenant x.

On note $d_{\mathrm{trop}}(X)$ la borne supérieure des dimensions $\dim(f(V))$, où (V, f) parcourt l'ensemble des cartes G-tropicales sur des domaines de X. C'est aussi la borne supérieure des $d_{\mathrm{trop}}(x)$, pour $x \in X$.

Définition 3.1.4. — *Un espace G-tropical est un espace topologique séparé, localement compact X, possédant une base d'ouverts dénombrables à l'infini, muni des structures suivantes : un ensemble de domaines, une G-topologie et un G-faisceau de fonctions paralinéaires, le tout étant sujet aux axiomes énoncés ci-dessus.*

3.1.5. — Un domaine d'un espace G-tropical a une structure naturelle d'espace G-tropical.

3.1.6. — Un espace paralinéaire a une structure naturelle d'espace G-tropical : ses domaines sont ses sous-espaces paralinéaires et ses fonctions paralinéaires sont celles que l'on croit.

3.1.7. — Un espace k-analytique X a une structure naturelle d'espace G-tropical : ses domaines sont ses domaines analytiques et ses fonctions paralinéaires sont les éléments

du plus petit G-faisceau en $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels sur X contenant les fonctions $\log(|f|)$, où f est une fonction analytique *inversible* sur un domaine analytique de X.

3.1.8. Morphismes. — Soit X et Y des espaces G-tropicaux. On dit qu'une application $f\colon X \to Y$ est un morphisme d'espaces G-tropicaux si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

a) L'application f est continue ;

b) Pour tout domaine V de Y, $f^{-1}(V)$ est un domaine de X ;

c) Pour tout domaine V de Y et toute fonction paralinéaire φ sur V, la fonction $\varphi \circ f$ sur $f^{-1}(V)$ est paralinéaire.

L'application identique de X est un morphisme d'espaces G-tropicaux. Si $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to Z$ sont des morphismes d'espaces G-tropicaux, leur composée $g \circ f\colon X \to Z$ est un morphisme d'espaces G-tropicaux.

Soit V un domaine de X. L'injection canonique de V dans X est un morphisme d'espaces G-tropicaux.

Soit V un domaine de X et $f\colon V \to E$ une application paralinéaire. Alors f est un morphisme d'espaces G-tropicaux.

§ 3.2. PARTIES PARALINÉAIRES D'UN ESPACE G-TROPICAL

Soit X un espace G-tropical.

Définition 3.2.1. — *Soit P une partie localement fermée de X et soit $f\colon P \to \mathbf{R}^m$ une application. On dit que f est une* carte paralinéaire *sur P si les propriétés suivantes soient satisfaites :*

a) *il existe un domaine V de X contenant P tel que f s'étende en une application paralinéaire de V vers $\mathbf{R}^m$;*

b) *f induit un homéomorphisme de P sur une partie paralinéaire de $\mathbf{R}^m$, dont on note f_P^{-1} la réciproque ;*

c) *pour toute carte tropicale (W, g) de X, l'image $f(P \cap W)$ est une partie paralinéaire de $\mathbf{R}^m$, et l'application $g \circ f_P^{-1}|_{f(P\cap W)}$ est paralinéaire.*

On dit que P est une partie fidèlement paralinéaire *si elle possède une carte paralinéaire.*

3.2.2. — Lorsque P est une partie fidèlement paralinéaire, nous noterons $\Lambda(P)$ l'ensemble des cartes paralinéaires sur P. Un *domaine de définition* d'une carte paralinéaire f sera un domaine V contenant P et muni d'un prolongement paralinéaire de f qui, sauf mention expresse du contraire, sera encore noté f. Remarquons que si P est contenu dans un domaine W de X, alors P est fidèlement paralinéaire dans W si et seulement si elle l'est dans X.

3.2.3. — Soit P une partie fidèlement paralinéaire de X. Toute application $f \in \Lambda(P)$ définit alors par transport de structure une structure d'espace paralinéaire sur P, qui en vertu de la condition c) ne dépend pas de f, et que nous appellerons sa structure canonique. Cette même condition assure que pour toute carte G-tropicale (W, g), l'intersection $W \cap P$ est une partie paralinéaire de P, et que $g|_{W\cap P}$ est paralinéaire. Nous considèrerons toujours P comme munie de sa structure canonique.

3.2.4. — Soit P une partie fidèlement paralinéaire de X et soit Q une partie paralinéaire de P. Alors, Q est une partie fidèlement paralinéaire de X (si $f \in \Lambda(P)$ alors $f|_Q \in \Lambda(Q)$ de façon évidente). Réciproquement, si Q est une partie fidèlement paralinéaire de X contenue dans P et si $f \in \Lambda(P)$ alors $f|_Q$ est paralinéaire (parce que Q est fidèlement paralinéaire) et induit un homéomorphisme de Q sur son image (parce que c'est déjà le cas au niveau de P) si bien que $f(Q)$ est paralinéaire ; par conséquent, Q est une partie paralinéaire de P.

Définition 3.2.5. — *Soit Σ une partie localement fermée de X. Nous dirons que Σ est paralinéaire si elle est G-recouverte par des parties fidèlement paralinéaires de X de la forme $\Sigma \cap W$, où W est un domaine de X.*

Une partie fidèlement paralinéaire est paralinéaire.

3.2.6. — Soit Σ une partie paralinéaire de X. Soit (P_i) un G-recouvrement de Σ par des parties fidèlement paralinéaires, chacune d'elles étant de la forme $W_i \cap \Sigma$ où W_i est un domaine de X ; choisissons pour tout i une application $f_i \in \Lambda(P_i)$, de but $\mathbf{R}^{n_i}$. D'après la condition c) de la définition d'une partie fidèlement paralinéaire de X la famille (P_i, f_i) est un atlas paralinéaire sur Σ, et la classe d'équivalence de cet atlas est indépendante du choix des P_i et des f_i. La partie paralinéaire Σ hérite ainsi d'une structure paralinéaire, dite canonique, dont nous la munirons toujours implicitement (qui coïncide avec celle déjà définie lorsque Σ est fidèlement paralinéaire).

Remarque 3.2.7. — Soit Σ une partie paralinéaire de X. Alors Σ est G-recouverte par des parties fidèlement paralinéaires compactes de la forme $\Sigma \cap W$, où W est un domaine compact de X.

En effet, choisissons pour commencer un G-recouvrement (P_i) de Σ par des parties fidèlement paralinéaires, chacune des P_i étant de la forme $\Sigma \cap W_i$ où W_i est un domaine de X. Et choisissons pour tout i une application $f_i \colon P_i \to \mathbf{R}^{n_i}$ appartenant à $\Lambda(P_i)$. Quitte à remplacer W_i par son intersection avec un domaine de définition de f_i, on peut supposer que f_i est définie sur W_i. Pour tout i, on fixe un G-recouvrement (Q_{ij}) de $f_i(P_i)$ par des parties paralinéaires compactes, et l'on note W_{ij} le domaine $f_i^{-1}(Q_{ij})$ de W_i. L'intersection R_ij de W_{ij} et Σ est alors égale à $(f_i|_{P_i})^{-1}(Q_{ij})$; c'est une partie paralinéaire compacte de P_i, et en particulier une partie fidèlement paralinéaire de X. Chacun des R_{ij} possède un voisinage W'_{ij} dans W_{ij} qui est un domaine compact, et $R_{ij} = \Sigma \cap W'_{ij}$. La famille des (R_{ij}) constitue alors un G-recouvrement de Σ de la forme cherchée.

Lemme 3.2.8. — *Soit Σ une partie paralinéaire de X, munie de sa structure paralinéaire canonique.*

a) *Soit P une partie fidèlement paralinéaire de X contenue dans Σ. C'est aors une partie paralinéaire de Σ, et sa structure paralinéaire héritée de celle de Σ coïncide avec sa structure canonique.*

b) *Soit P et S deux parties fidèlement paralinéaires de X contenues dans Σ. Leur intersection est paralinéaire dans chacune d'entre elles.*

c) *Soit W un domaine de X et soit g une fonction paralinéaire sur W. L'intersection $\Sigma \cap W$ est un sous-espace paralinéaire de Σ, et $g|_{\Sigma \cap W}$ est paralinéaire.*

d) *Soit T une partie localement fermée de X telle que $\mathrm{T} \subset \Sigma$. Alors T est une partie paralinéaire de Σ si et seulement si c'est une partie paralinéaire de X.*

e) *Soit* T *une partie paralinéaire compacte de* Σ. *Il existe un domaine compact* W *de* X *tel que* $W \cap \Sigma = \mathrm{T}$.

f) *Soit* x *un point de* Σ *et soit* T *un voisinage paralinéaire compact de* x *dans* Σ. *Il existe un voisinage domanial compact* W *de* x *dans* X *tel que* $W \cap \Sigma = \mathrm{T}$.

Démonstration. — a) Soit (P_i) un G-recouvrement de Σ par des parties fidèlement paralinéaires telles que chacune des P_i soit égale à $\Sigma \cap W_i$ pour un certain domaine W_i de X ; pour tout i, choisissons un élément $f_i \colon P_i \to \mathbf{R}^i$ de $\Lambda(P_i)$.

On a alors $P \cap P_i = P \cap W_i$, et $P \cap P_i$ est dès lors une partie paralinéaire de P en restriction à laquelle f_i est paralinéaire. Par conséquent $f_i(P \cap (P_i))$ est une partie paralinéaire de $\mathbf{R}^{n_i}$, et $P \cap P_i$ est donc également une partie paralinéaire de P_i, et *a fortiori* de Σ ; notons que les structures paralinéaires sur $P \cap P_i$ héritées de celle de P_i et de celles de P coïncident, étant toutes deux induites par l'homéomorphisme $f_i|_{P \cap P_i} \colon P \cap P_i \simeq f_i(P \cap P_i)$. Puisque les $P_i \cap P$ constitue un G-recouvement de P, il s'ensuit que P est une partie paralinéaire de Σ, et que sa structure paralinéaire héritée de celle de Σ coïncide avec sa structure paralinéaire canonique.

b) C'est une conséquence immédiate de a).

c) Cela se vérifie G-localement, ce qui permet de supposer que Σ est fidèlement paralinéaire, auquel cas cela découle de la condition c) de la définition d'une partie fidèlement paralinéaire.

d) Supposons que T soit une partie paralinéaire de Σ. Choisissons un G-recouvrement $(\Sigma \cap V_i)$ de Σ par des parties fidèlement paralinéaires de X, où les V_i sont des domaines de X. Chacun des $T \cap V_i$ est une partie paralinéaire de $\Sigma \cap V_i$, donc une partie fidèlement paralinéaire de X, et les $\mathrm{T} \cap V_i$ constituent un G-recouvrement de T, qui est dès lors une partie paralinéaire de X.

Réciproquement, supposons que T soit une partie paralinéaire de X. Elle est alors par définition G-recouverte par des parties fidèlement paralinéaires de X, qui sont des parties paralinéaires de Σ d'après a). C'est donc une partie paralinéaire de T.

e) Soit T une partie paralinéaire compacte de Σ. Choisissons (P_i, W_i, f_i) comme dans la preuve de a), en supposant de plus que les P_i et les W_i sont compacts, ce qui est toujours possible comme expliqué à la fin de 3.2.5. Puisque T est compact, il existe un ensemble fini I d'indices tel que $\mathrm{T} \subset \bigcup_{i \in I} P_i$. Si $i \in I$, l'intersection $\mathrm{T} \cap P_i$ est paralinéaire, si bien que $f_i(\mathrm{T} \cap P_i)$ est une partie compacte de $\mathbf{R}^{n_i}$. L'image réciproque $f_i^{-1}(f_i(\mathrm{T} \cap P_i))$ est un domaine compact W_i' de W_i, dont la trace sur Σ est égale à $\mathrm{T} \cap P_i$. La réunion $\bigcup_{i \in I} W_i'$ est alors un domaine compact de X dont l'intersection avec Σ est égale à T.

f) Soit T un voisinage paraliné aire compact de x. Par l'assertion (e) que l'on vient d'établir il existe un domaine compact W de X tel que $W \cap \Sigma = \mathrm{T}$. Par ailleurs puisque T est un voisinage de x dans Σ il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que $U \cap \Sigma \subset \mathrm{T}$. Soit U'un voisinage domanial compact de x dans$U$. La réunion $W \cap U'$ est alors un voisinage domanial compact de x dans$X$ dont la trace sur Σ est égale à T. □

Lemme 3.2.9 **(Parties paralinéaires et G-topologie).** — *Soit* Σ *une partie localement fermée de* X. *Supposons qu'il existe une famille* (W_i) *de domaines de* X *qui G-recouvrent* Σ *et tels que pour tout* i, *l'intersection* $\Sigma \cap W_i$ *soit paralinéaire. La partie* Σ *est alors paralinéaire.*

Démonstration. — Par définition, chacun des $\Sigma \cap W_i$ est G-recouvert par des parties fidèlement paralinéaires de X de la forme $\Sigma \cap W_{i,j}$, où les $W_{i,j}$ sont des domaines de W_i. Par suite, Σ elle-même est G-recouverte par les parties fidèlement paralinéaires $\Sigma \cap W_{i,j}$ de X, et est dès lors paralinéaire. □

Lemme 3.2.10. — *Soit (Σ_i) une famille localement finie de parties paralinéaires fermées de X. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La réunion Σ des Σ_i est une partie paralinéaire de X.*
(ii) *Il existe une famille (W_j) de domaines compacts de X qui G-recouvrent Σ et, pour tout j, une partie paralinéaire T_j de W_j contenant $\Sigma \cap W_j$.*

Lorsqu'elles sont satisfaites, $\Sigma_i \cap \Sigma_j$ est pour tout (i,j) une partie paralinéaire de Σ, et donc de Σ_i et Σ_j.

Démonstration. — Supposons que (i) soit vraie. Alors (ii) est vraie en prenant pour (W_j) un G-recouvrement (arbitraire) de X par des domaines compacts, et en posant $T_j = \Sigma \cap W_j$ pour tout j.

Supposons que (ii) soit vraie. Pour tout j, l'intersection $\Sigma_\cap W_j$ s'écrit $\bigcup_{i\in I} \Sigma_i \cap W_j$ où I est un ensemble fini d'indices (par compacité de W_j et locale finitude de la famille des Σ_i). Chacun des $\Sigma_i \cap W_j$ est paralinéaire, et est donc une partie paralinéaire fermée de T_j. Il en résulte que $\Sigma \cap W_j$ est une partie paralinéaire de T_j, et donc de X. On déduit alors du lemme 3.2.9 que Σ est paralinéaire. □

Lemme 3.2.11. — *Soit X un espace G-tropical paracompact (resp. dénombrable à l'infini) et soit Σ une partie paralinéaire fermée de X. Pour tout ouvert U de X, $\Sigma \cap U$ possède un voisinage ouvert dans U qui est paracompact (resp. dénombrable à l'infini).*

Démonstration. — En raisonnant composante connexe par composante connexe, on peut supposer que X est connexe et donc dénombrable à l'infini. Il en est donc de même de sa partie fermée Σ, ainsi que de $\Sigma \cap U$ d'après le lemme 2.1.7. L'assertion découle donc du lemme A.1.4. □

3.2.12. — Soit Σ une partie paralinéaire de X. L'injection de Σ dans X est un morphisme d'espaces G-tropicaux.

Proposition 3.2.13. — *Soit $p\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces G-tropicaux. Soit Σ une partie paralinéaire de X et soit T une partie paralinéaire de Y telle que $p(\mathrm{T}) \subset \Sigma$. Alors l'application $p|_{\mathrm{T}}\colon \mathrm{T} \to \Sigma$ est paralinéaire.*

Démonstration. — L'assertion est G-locale sur X et Y. Par définition d'une partie paralinéaire, on peut donc supposer que Σ est fidèlement paralinéaires. Soit $f \in \Lambda(\Sigma)$. Comme p est un morphisme d'espaces G-tropicaux, $f \circ p$ est une application paralinéaire sur Y. Par suite, $f \circ p|_{\mathrm{T}}$ est paralinéaire (lemme 3.2.8). Comme f identifie Σ à une partie paralinéaire d'un espace numérique, cela démontre que p induit une application paralinéaire de T vers Σ. □

§ 3.3. FORMES DE TYPE (p, q) SUR UN ESPACE G-TROPICAL

Dans ce paragraphe, on fixe une classe de coefficients $\mathscr{G}$.

3.3.1. — Soit X un espace G-tropical.

Les cartes G-tropicales sur les domaines de X forment une catégorie essentiellement petite, un morphisme d'une carte G-tropicale $(f\colon X \to E, P)$ dans une autre $(f'\colon X \to E', P')$ étant une application affine $q\colon E \to E'$ tel que $f' = q \circ f$ et $q(P) \subset P'$.

Cette catégorie a un objet final pour lequel $E = \{0\}$ et P est un point. Elle est filtrante : si $(f\colon X \to E, P)$ et $(f'\colon X \to E', P')$ sont deux cartes G-tropicales sur X, alors $(f \times f'\colon X \to E \times E', P \times P')$ est une carte G-tropicale sur X qui domine les deux cartes G-tropicales données.

Remarque 3.3.2. — Soit X un espace G-tropical compact et soit $(f\colon X \to E, P)$ une G-carte tropicale sur X.

a) L'ensemble $f(X)$ est un sous-espace paralinéaire compact de E contenu dans P (théorème. 12.2.4) et la carte donnée se factorise par $(f\colon X \to E, f(X))$. On dira parfois, par abus, que f est une carte G-tropicale sur X.

b) Pour toute décomposition cellulaire (P_i) de $f(X)$, la famille $(f^{-1}(P_i))$ est un G-recouvrement fini de X par des domaines compacts dont l'image par f est une cellule.

3.3.3. — Pour tout domaine V de X et tout couple (p, q) d'entiers naturels, notons $\mathscr{G}^{p,q}_{\mathrm{pf}}(V)$ la limite inductive des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels $\mathscr{G}^{p,q}_P(P)$, lorsque $(f\colon V \to E, P)$ parcourt l'ensemble des cartes G-tropicales sur V.

Lorsque V parcourt l'ensemble des domaines de X, les espaces vectoriels $\mathscr{G}^{p,q}_{\mathrm{pf}}(V)$ définissent un *préfaisceau* sur le site X_{G}.

Soit V un domaine de X et soit $(f\colon V \to E, P)$ une carte G-tropicale sur V. Toute forme α appartenant à $\mathscr{G}^{p,q}_P(P)$ définit un élément de $\mathscr{G}^{p,q}_{\mathrm{pf}}(V)$ qui est noté $f^*\alpha$.

Par définition, toute section de $\mathscr{G}^{p,q}_{\mathrm{pf}}(V)$ est de cette forme ; on peut même supposer que P est ouvert. Plus précisément, soit $(f\colon V \to E, P)$ une carte G-tropicale sur V, soit $\alpha \in \mathscr{G}^{p,q}_P(P)$; il existe un ouvert U de E dont P est une partie fermée ; d'après le lemme 1.9.4, il existe $\beta \in \mathscr{G}^{p,q}_E(U)$ telle que $\alpha = \beta|_P$; on a alors $f^*\alpha = f^*\beta$.

Définition 3.3.4. — *On note $\mathscr{G}^{p,q}_{X_{\mathrm{G}}}$ le faisceau sur X_{G} associé au préfaisceau $\mathscr{G}^{p,q}_{\mathrm{pf}}$. Ses sections sont appelées* G-formes de type (p, q) à coefficients dans $\mathscr{G}$.

Lorsque la classe $\mathscr{G}$ est la classe $\mathscr{A}$ des fonctions lisses, on parle de G-forme lisse de type (p, q).

Si X est l'espace G-tropical associé à un espace paralinéaire, on retrouve ainsi le faisceau des G-formes de type (p, q) à coefficients dans $\mathscr{G}$.

3.3.5. — On définit le *support* d'une G-forme de type (p, q) sur X comme le complémentaire du plus grand ouvert de X en restriction auquel cette forme est nulle.

Si (X_i) est un G-recouvrement de X, le support d'une G-forme ω coïncide avec la réunion des supports des G-formes $\omega|_{X_i}$. Il est tout d'abord évident que $\mathrm{supp}(\omega|_{X_i}) \subset \mathrm{supp}(\omega) \cap X_i$ pour tout i. Inversement, soit x un point de X qui n'appartient au support d'aucune des formes $\omega|_{X_i}$; démontrons que x n'appartient pas au support de ω. Soit I un ensemble fini d'indices tel que $x \in \bigcap_{i\in I} X_i$ et $\bigcup_{i\in I} X_i$ soit un voisinage de x. Pour tout $i \in I$, soit V_i un voisinage de x dans X_i qui est un domaine compact et sur lequel

$\omega|_{V_i} = 0$; soit $V = \bigcup_{i\in I} V_i$; c'est un domaine compact de X et un voisinage de x. Par construction, la G-forme $\omega|_V$ est G-localement nulle, donc nulle.

Proposition 3.3.6. — *Soit X un espace G-tropical et soit ω une G-forme de type (p,q) sur X. Le support de ω est contenu dans l'ensemble des points $x \in X$ tels que $d_{\mathrm{trop}}(x) \geqslant \max(p,q)$.*

Démonstration. — Soit $x \in X$ un point tel que $d_k(x) < \max(p,q)$; démontrons que ω est nulle au voisinage de x. Par hypothèse, il existe des domaines compacts $V_1, \dots, V_n$ de X dont la réunion est un voisinage V de x dans X, des cartes G-tropicales $f_i \colon V_i \to E_i$ et des formes α_i sur $f_{i,\mathrm{trop}}(V_i)$ tels que $\omega|_{V_i} = f_i^*\alpha_i$ pour tout i. La dimension tropicale de f_i en x est majorée par $d_{\mathrm{trop}}(x)$; quitte à diminuer les V_i, on peut supposer que $\dim(f_i(V_i)) \leqslant d_{\mathrm{trop}}(x)$; alors, $\alpha_i = 0$. On a donc $\omega|_V = 0$. □

Corollaire 3.3.7. — *Si $d_{\mathrm{trop}}(X) < \max(p,q)$, alors les faisceaux $\mathscr{F}_X^{p,q}$ et $\mathscr{F}_{X_{\mathrm{G}}}^{p,q}$ sont nuls.*

3.3.8. — Soit ω une G-forme (resp. une forme) de type (p,q) à coefficients dans $\mathscr{G}$ sur X. Si V est un domaine de X, une *G-tropicalisation* de ω sur V est la donnée d'une carte G-tropicale $(f \colon V \to E, P)$ et d'une forme $\alpha \in \mathscr{G}_P^{p,q}(P)$ telle que $\omega = f^*\alpha$.

On dira que ω est G-tropicale si elle admet une G-tropicalisation sur X.

Si V est un domaine de X tel que ω possède une G-tropicalisation sur V, nous dirons aussi que V G-tropicalise ω.

Soit V un domaine compact de X qui G-tropicalise ω, et soit $(fV \to E, P, \alpha)$ une G-tropicalisation de $\omega|_V$. Comme $f(V)$ est un sous-espace paralinéaire de E, $(f \colon V \to E, f(V), \alpha|_{f(V)})$ est encore une G-tropicalisation de $\omega|_V$; une telle G-tropicalisation sera simplement notée $(f \colon V \to E, \alpha)$: *lorsque V est compact, l'omission du sous-espace paralinéaire P signifie qu'il est égal à $f(V)$.*

Remarque 3.3.9. — Soit $\mathscr{H}$ une classe de coefficients contenant $\mathscr{G}$. Observons que les G-formes à coefficients dans $\mathscr{G}$ s'identifient à des G-formes à coefficients dans $\mathscr{H}$.

En effet, le G-préfaisceau $\mathscr{G}_{\mathrm{pf}}^{p,q}$ sur X_{G} s'identifie à un sous-G-préfaisceau de $\mathscr{H}_{\mathrm{pf}}^{p,q}$, de sorte que le G-faisceau $\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}^{p,q}$ sur X s'identifie alors à un sous-G-faisceau de $\mathscr{H}_{X_{\mathrm{G}}}^{p,q}$. Ces identifications sont compatibles avec les constructions faites dans ce paragraphe.

3.3.10. — Le faisceau $\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}} := \mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}^{0,0}$ est un faisceau en $\mathbf{R}$-algèbres et les faisceaux $\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}^{p,q}$ sont des $\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}$-modules. Leur somme directe $\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}^{*,*} = \bigoplus_{p,q} \mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}^{p,q}$ est un faisceau en algèbres bigraduées commutatives : si ω est de type (p,q) et ω' de type (p',q'), alors

$$\omega' \wedge \omega = (-1)^{(p+p')(q+q')}\omega \wedge \omega'.$$

3.3.11. — Le G-préfaisceau $\mathscr{G}_{\mathrm{pf}}^{*,*}$ est naturellement muni d'un opérateur J qui s'étend au faisceau $\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}^{*,*}$. Ce sont des morphismes d'algèbres. On dit qu'une section ω de $\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}^{p,q}$ est symétrique si $p = q$ et si $\mathrm{J}\omega = \omega$.

Soit $\mathscr{H}$ une classe de coefficients telles que les dérivées partielles des fonctions de $\mathscr{G}$ existent et appartiennent à $\mathscr{H}$. On dispose alors d'opérateurs différentiels d' et d'' de $\mathscr{G}_{\mathrm{pf}}^{*,*}$ dans $\mathscr{H}_{\mathrm{pf}}^{*,*}$; ils induisent des opérateurs différentiels de $\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}^{*,*}$ dans $\mathscr{H}_{X_{\mathrm{G}}}^{*,*}$, caractérisés par les relations

$$\mathrm{d}'\, f^*\alpha = f^*\,\mathrm{d}'\,\alpha, \quad \mathrm{d}''\, f^*\alpha = f^*\,\mathrm{d}''\,\alpha,$$

pour toute carte G-tropicale $(f\colon U \to E, P)$ et toute forme α de type (p,q) à coefficients dans $\mathscr{G}$ sur P. Les différentielles vérifient la règle de Leibniz : si ω et ω' sont respectivement de type (p,q) et (p',q'), on a

$$\mathrm{d}'(\omega\wedge\omega') = \mathrm{d}'\,\omega\wedge\omega' + (-1)^{p+q}\omega\wedge\mathrm{d}'\,\omega', \tag{3.3.11.1}$$

et de même pour $\mathrm{d}''(\omega\wedge\omega')$.

Si $\mathscr{G}\subset\mathscr{C}^2$, ces opérateurs vérifient $\mathrm{d}'\,\mathrm{d}' = \mathrm{d}''\,\mathrm{d}'' = 0$.

3.3.12. — Cette construction est fonctorielle. Plus précisément, si $f\colon Y\to X$ est un morphisme d'espaces G-tropicaux, on dispose de morphismes de faisceaux

$$f^*\colon \mathscr{G}^{*,*}_{X_{\mathrm{G}}} \to f_*(\mathscr{G}^{*,*}_{Y_{\mathrm{G}}})$$

sur X_{G} qui sont des morphismes d'anneaux gradués, commutent aux dérivations d' et d'' (lorsqu'elles existent) et à l'opérateur J.

Lorsque le contexte rend évident le morphisme f, on se permettra parfois de noter $\omega|_Y$ l'image dans $\mathscr{G}^{p,q}_{Y_{\mathrm{G}}}(Y)$ d'une G-forme $\omega\in\mathscr{G}^{p,q}_{X_{\mathrm{G}}}$.

3.3.13. — Soit (p,q) un couple d'entiers naturels. Soit Σ une partie paralinéaire de X et soit j l'inclusion de Σ dans X. C'est un morphisme d'espaces G-tropicaux. On dispose donc d'un morphisme de faisceaux de $\mathscr{F}^{p,q}_{X_{\mathrm{G}}}$ dans $j_*\mathscr{F}^{p,q}_{\Sigma_G}$. On notera $\omega\mapsto\omega|_\Sigma$ l'image d'une forme ω et on dira que c'en est la *restriction* à Σ.

Concrètement, cette restriction se calcule de la façon suivante.

Soit V un domaine de X, soit $(f\colon V\to E, P)$ une carte G-tropicale sur V, et soit $\alpha\in\mathscr{F}^{p,q}_P(P)$. Alors $\Sigma\cap V$ est une partie paralinéaire de V, l'application $f\colon\Sigma\cap V\to E$ est paralinéaire et son image est contenue dans P, l'image réciproque $f^*\alpha$ de α est une forme de type (p,q) sur l'espace paralinéaire $\Sigma\cap V$. Par définition de l'ensemble $\mathscr{F}^{p,q}_{\mathrm{pf}}(V)$ comme limite inductive, la forme $f^*\alpha$ ne dépend que de la classe de $f^*\alpha$ dans cet ensemble. Cette construction définit un morphisme de préfaisceaux de $\mathscr{F}^{p,q}_{X,\mathrm{pf}}$ dans $j_*\mathscr{F}^{p,q}_{\Sigma}$.

Par passage aux faisceaux associés, on en déduit le morphisme de restriction de $\mathscr{F}^{p,q}_{X_{\mathrm{G}}}$ dans $j_*\mathscr{F}^{p,q}_{\Sigma_G}$.

3.3.14. — Soit $f\colon Y\to X$ un morphisme d'espaces G-tropicaux, soit T une partie paralinéaires de Y et soit Σ une partie paralinéaire de X telle que $f(\Sigma)\subset\mathrm{T}$. Pour toute forme $\omega\in\mathscr{F}^{p,q}_{X_{\mathrm{G}}}(X)$, on a $(f^*\omega)|_{\mathrm{T}} = (f|_{\mathrm{T}})^*(\omega|_\Sigma)$.

Nous appliquerons notamment cette remarque lorsque Y est un domaine de X et $\mathrm{T}=\Sigma\cap Y$, ou bien lorsque $Y=X$ et T est une partie polyédrale de Σ.

§ 3.4. NULLITÉ DES G-FORMES

Proposition 3.4.1. — *Soit X un espace G-tropical compact, soit $f\colon X\to E$ une carte G-tropicale, soit P un sous-ensemble paralinéaire de E contenant $f(X)$ et soit $\alpha\in\mathscr{G}^{p,q}_P(P)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) *La restriction de α au sous-espace paralinéaire $f(X)$ est nulle ;*
b) *La section globale $f^*\alpha$ de $\mathscr{G}^{p,q}_{\mathrm{pf}}$ est nulle.*

Démonstration. — L'hypothèse (1) entraîne que l'image de α dans la carte tropicale $(f, f(X))$ est nulle, de sorte que (2) vaut. Supposons que (2) est vérifiée et prouvons (1).

On peut remplacer P par $f(X)$. Par définition, il existe une carte G-tropicale $g\colon X \to F$, une morphisme affine $p\colon F \to E$ tel que $p \circ g = f$, et un sous-espace paralinéaire Q de F contenant $g(X)$ tels que $p(Q) \subset P$ et $p^*\alpha = 0$ dans $\mathscr{G}^{p,q}_Q(Q)$. On peut aussi remplacer Q par $g(X)$; on a alors $p(Q) = P$.

Le morphisme de Q sur P induit par p possède G-localement des sections. D'après le corollaire 1.8.5, il existe une décomposition cellulaire (C_i) de P et, pour tout i, une section de p_{trop} sur C_i à valeurs dans Q. Puisque $p^*\alpha = 0$, on a donc $\alpha|_{C_i} = 0$ pour tout i. Par suite, $\alpha = 0$. □

Corollaire 3.4.2. — *Soit X un espace G-tropical compact, soit $\omega \in \mathscr{G}^{p,q}_{\mathrm{pf}}(X)$ et soit (X_i) un G-recouvrement de X. Supposons que pour tout i, la restriction de ω à X_i soit nulle ; alors $\omega = 0$.*

Démonstration. — Tout G-recouvrement admet un G-recouvrement plus fin formé de domaines compacts. Comme X est compact, cela permet de supposer que le recouvrement (X_i) est formé d'un nombre fini de domaines compacts. Par définition du préfaisceau $\mathscr{G}^{p,q}_{\mathrm{pf}}$, il existe une carte G-tropicale $f\colon X \to E$, un sous-espace paralinéaire P de E contenant $f(X)$, et une forme $\alpha \in \mathscr{G}^{p,q}_P(P)$ tels que $\omega = f^*\alpha$.

Il résulte que de la proposition 3.4.1 que $\alpha|_{f(X_i)} = 0$ pour tout i. Comme $f(X)$ est la réunion des $f(X_i)$, la forme α est nulle sur $f(X)$ (lemme 1.9.2). On a donc $\omega = f^*\alpha = 0$. □

Remarque 3.4.3. — L'hypothèse que X est compact est cruciale pour le corollaire 3.4.2.

Prenons pour espace G-tropical l'ensemble $X = \mathbf{R}$, muni de la topologie discrète, et pour carte l'application identique $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Soit α la forme d$'x$ sur $\mathbf{R}$. Soit $g\colon X \to \mathbf{R}^n$ une carte qui domine la carte f, et soit $p\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une application affine telle que $f = p \circ g$. Alors, p est surjective, donc $p^*\alpha \neq 0$. Cela prouve que la section $f^*\alpha$ de $\mathscr{G}^{1,0}_{\mathrm{pf}}$ n'est pas nulle. En revanche, pour tout $t \in \mathbf{R}$, le singleton $V_t = \{t\}$ est un domaine de X de tropicalisation $P_t = \{t\}$ et $\alpha|_{P_t} = 0$, si bien que $\alpha|_{V_t} = 0$. Comme ces domaines V_t forment un G-recouvrement de X, cela montre que le préfaisceau $\mathscr{G}^{1,0}_{\mathrm{pf}}$ n'est pas séparé.

Proposition 3.4.4. — *Soit X un espace G-tropical, soit $f\colon X \to E$ une carte G-tropicale, soit P un sous-espace paralinéaire de E contenant $f(X)$ et soit $\alpha \in \mathscr{F}^{p,q}_P(P)$.*

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) *Pour tout domaine compact V de X, la restriction de α au polytope $f(V)$ est nulle ;*
b) *Pour tout domaine compact V de X, la restriction de $f^*\alpha$ à V est nulle ;*
c) *L'image de $f^*\alpha$ dans $\mathscr{F}^{p,q}_{X_{\mathrm{G}}}(X)$ est nulle.*

Démonstration. — D'après la proposition 3.4.1, les assertions (1) et (2) sont équivalentes.

Supposons (1). Comme X admet un G-recouvrement par des domaines compacts, l'assertion (3) s'en déduit.

Supposons (3). Il existe donc un G-recouvrement (X_i) tel que $f^*\alpha|_{X_i} = 0$ en tant que section du préfaisceau $\mathscr{F}^{p,q}_{\mathrm{pf}}$. Soit V un domaine compact de X. La restriction de $f^*\alpha$ à $X_i \cap V$ est nulle pour tout i ; comme la famille $(X_i \cap V)$ est un G-recouvrement de V, le corollaire 3.4.2 entraîne que $f^*\alpha|_V = 0$, d'où l'assertion (2). Cela termine la preuve de la proposition. □

Corollaire 3.4.5. — *Soit X un espace G-tropical compact, soit $f\colon X \to E$ une carte G-tropical et soit P le sous-espace paralinéaire $f(X)$. Soit $\alpha \in \mathscr{G}_P^{p,q}(P)$, et soit ω la G-forme $f^*\alpha$. Notons K le support de ω dans X et H celui de α dans $f(X)$. On a $H = f(K)$.*

Démonstration. — Soit x un point de X. Soit Q un voisinage de $f(x)$ dans P qui est un polytope compact. Le domaine $W = f_{\mathrm{trop}}^{-1}(Q)$ de X est un voisinage de x et $\omega|_W = (f|_W)^*(\alpha|_Q)$.

Supposons que x appartienne à K. Le compact K rencontre alors l'intérieur de W, ce qui entraîne que $\omega|_W \neq 0$, et donc que $\alpha|_Q \neq 0$. Il s'ensuit que H rencontre Q. Comme Q peut être choisi arbitrairement petit, $f(x)$ appartient à H, d'où l'inclusion $f(K) \subset H$.

Réciproquement, supposons que $f(x) \in H$. Par définition de H, la restriction à Q de la forme α est non nulle. D'après la proposition 3.4.4, la restriction de ω à $f^{-1}(Q)$ est non nulle. Par conséquent, $f^{-1}(Q)$ rencontre K, donc $Q = f(f^{-1}(Q))$ rencontre $f(K)$. Comme Q est un voisinage arbitrairement petit de $f(x)$, celui-ci est adhérent à $f(K)$. Puisque $f(K)$ est compact, $f(x)$ appartient à $f(K)$. □

3.4.6. — À toute carte G-tropicale $(f\colon V \to E, P)$ sur un domaine V de X et à toute fonction u sur P, associons la fonction $u \circ f$ sur V. On définit ainsi un morphisme de préfaisceaux de $\mathscr{F}_{\mathrm{pf}}^{0,0}$ vers le G-faisceau des fonctions sur X. Il découle de la proposition 3.4.4 que le morphisme de $\mathscr{F}_{X_{\mathrm{G}}}^{0,0}$ dans le G-faisceau des fonctions sur X est injectif, morphisme par lequel nous identifierons systématiquement une $(0,0)$-G-forme à une fonction.

Une section globale du faisceau $\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}^{0,0}$ est une fonction sur X qui est G-localement de la forme $\varphi(f_1, \ldots, f_n)$ où les f_i sont des fonctions paralinéaires sur X, et où φ appartient à la classe $\mathscr{G}$. De telles fonctions seront appelées G-localement tropicales de classe $\mathscr{G}$.

Définition 3.4.7. — *Soit $\mathscr{A}$ la classe des fonctions lisses. Les sections de $\mathscr{A}_{X_{\mathrm{G}}}^{0,0}$ sont appelées* fonctions G-lisses *sur X.*

Les fonctions G-lisses sont donc les fonctions sur X sont G-localement de la forme $\varphi(f_1, \ldots, f_n)$ où les f_i sont des fonctions paralinéaires et où φ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$.

3.4.8. — Soit $\mathscr{C}$ la classe des fonctions continues. Toute fonction G-tropicale de classe $\mathscr{C}$ est une fonction continue sur l'espace topologique X.

Il n'est pas vrai, en général, que toute fonction continue sur X soit de cette forme. (L'application $x \mapsto |T(x)|$ sur $\mathbf{A}^1$ montre qu'il existe des fonctions continues sur l'espace topologique $\mathbf{A}^1$ qui ne sont pas constantes au voisinage d'un point rigide et donc ne sont pas G-localement de classe $\mathscr{C}$.)

Pour éviter toute ambiguïté, les fonctions de $\mathscr{C}_{X_{\mathrm{G}}}^{0,0}$ seront appelées *G-localement tropicalement continues.*

On parlera aussi de G-formes à coefficients tropicalement continus pour qualifier les G-formes à coefficients dans $\mathscr{C}$.

3.4.9. — Soit $\mathscr{B}$ la classe des fonctions boréliennes. Les sections de $\mathscr{B}_{X_{\mathrm{G}}}^{0,0}$ seront appelées des fonctions *G-localement tropicalement boréliennes.* On parlera de G-formes à coefficients tropicalement boréliens pour qualifier les G-formes à coefficients dans $\mathscr{B}$.

Exemple 3.4.10. — Soit X un espace G-tropical qui est associé, soit à un espace paralinéaire, soit à un espace analytique. *La fonction indicatrice d'un domaine* fermé Y *de* X *est G-localement tropicalement borélienne.*

Pour la démonstration, séparons les deux cas.

Traitons d'abord celui où X est associé à un espace paralinéaire. L'assertion étant G-locale, on peut supposer que X est un polyèdre compact de $\mathbf{R}^n$. Dans ce cas, Y est un polyèdre compact contenu dans X, défini par des inégalités entre fonctions affines. Sa fonction caractéristique est donc borélienne.

Traitons maintenant le cas où X est associé à un espace analytique. Puisque l'assertion est G-locale, on peut supposer que X est affinoïde. D'après le théorème de Gerritzen–Grauert, Y est alors réunion finie de domaines rationnels Y_i de X ; comme l'ensemble des domaines rationnels est stable par intersection finie, on peut même supposer que Y est un domaine rationnel de X. Il existe donc des fonctions $f_1, \dots, f_m, g \in \mathscr{O}(X)$ telles que $(f_1, \dots, f_m, g) = (1)$ et des nombres réels $\lambda_1, \dots, \lambda_m > 0$ tels que Y soit défini par les inégalités $|f_i| \leqslant \lambda_i |g|$.

Soit $y \in X$. Si $y \notin Y$, la fonction indicatrice de Y est nulle au voisinage de y, car Y est fermé. Si $y \in Y$, on a nécessairement $g(y) \neq 0$. Quitte à remplacer X par un voisinage affinoïde de y sur lequel g est inversible, et à remplacer f_i par f_i/g, on suppose alors que $g = 1$. Si $|f_i(y)| = 0$, on peut encore restreindre X de sorte que l'inégalité $|f_i(y)| \leqslant \lambda_i$ sur tout X et retrancher cette inégalité de la définition de Y. Nous sommes alors ramenés au cas où tous les $f_i(y)$ sont non nuls et donc, quitte à restreindre encore X, que les fonctions f_i sont toutes inversibles sur X.

Les fonctions $f_1, \dots, f_m$ définissent alors un moment $f \colon X \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$ qui tropicalise la fonction indicatrice $\mathbf{1}_Y$.

Proposition 3.4.11. — *L'homomorphisme canonique*

$$\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}} \otimes_{\mathscr{A}_{X_{\mathrm{G}}}} \mathscr{A}^{p,q}_{X_{\mathrm{G}}} \to \mathscr{G}^{p,q}_{X_{\mathrm{G}}}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Commençons par une remarque. Soit P un sous-espace paralinéaire d'un espace affine V, et soit $x_1, \dots, x_m$ des coordonnées sur $\langle P \rangle$. Les formes

$$\mathrm{d}' x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}' x_{i_p} \wedge \mathrm{d}'' x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'' x_{j_q}$$

forment une famille génératrice de $\mathscr{A}^{p,q}_P(P)$ comme module sur $\mathscr{A}_P(P)$, et une famille génératrice de $\mathscr{G}^{p,q}_P(P)$ comme module sur $\mathscr{G}_P(P)$; si, de plus, P est une cellule, ces formes constituent des bases de ces modules. Par suite, l'homomorphisme

$$\mathscr{G}_P(P) \otimes_{\mathscr{A}_P(P)} \mathscr{A}^{p,q}_P(P) \to \mathscr{G}^{p,q}_P(P)$$

est surjectif, et c'est un isomorphisme si P est une cellule.

Démontrons ensuite que l'homomorphisme mentionné dans le lemme est surjectif. Soit V un domaine de X, soit ω une section de $\mathscr{G}^{p,q}_{X_{\mathrm{G}}}(V)$; il s'agit de prouver qu'elle appartient G-localement à l'image de cet homomorphisme. On peut donc supposer que V est compact et G-tropicalise ω ; la remarque précédente montre alors que ω appartient à l'image de $\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}(V) \otimes_{\mathscr{A}_{X_{\mathrm{G}}}(V)} \mathscr{A}^{p,q}_{X_{\mathrm{G}}}(V)$.

Démontrons enfin l'injectivité de cet homomorphisme. Soit V un domaine de X, soit η une section sur V du produit tensoriel dont l'image est nulle dans $\mathscr{G}^{p,q}_{X_{\mathrm{G}}}(V)$; démontrons que η est nulle. On peut raisonner G-localement et donc supposer que V est compact et qu'il existe une carte G-tropicale $f \colon V \to \mathbf{R}^n$ tel que $P = f(V)$ soit une cellule,

un entier $m \geqslant 0$ et pour $i \in \{1, \dots, m\}$, des éléments $\varphi_i \in \mathscr{G}_P(P)$ et $\alpha_i \in \mathscr{A}_P^{p,q}(P)$ tels que l'on ait $\eta = \sum_{i=1}^m f^*\varphi_i \otimes f^*\alpha_i$. Par hypothèse, $f^*(\sum_{i=1}^m \varphi_i\alpha_i) = 0$. On a donc $\sum_{i=1}^m \varphi_i\alpha_i = 0$ (proposition 3.4.4), d'où $\sum_{i=1}^m \varphi_i \otimes \alpha_i = 0$ en vertu de la remarque faite au début de la preuve du lemme, d'où $\eta = 0$. □

§ 3.5. FORMES POSITIVES SUR UN ESPACE G-TROPICAL

Définition 3.5.1. — *Soit X un espace G-tropical et soit ω une G-forme symétrique sur X de type (p,p). On dit que ω est* positive *(*resp. faiblement positive, resp. fortement positive*) s'il existe un G-recouvrement (X_i) de X par des domaines et, pour chaque indice i, une carte G-tropicale $(f_i\colon X_i \to E_i, P_i)$ sur X_i et une forme α_i de type (p,p) sur P_i qui est positive (*resp. *faiblement positive,* resp. *fortement positive) et telle que $\omega|_{X_i} = f_i^*\alpha_i$.*

Dans la définition, il ne serait pas restrictif de supposer que les X_i sont des domaines compacts et les P_i égaux à $f_i(X_i)$.

3.5.2. — Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces G-tropicaux et soit ω une forme de type (p,p) sur X. Si ω est positive (*resp.* faiblement positive, *resp.* fortement positive), il en est de même de la forme $f^*\omega$ sur Y.

Cela résulte immédiatement de la définition.

Lemme 3.5.3. — *Soit X un espace G-tropical, soit $(f\colon X \to E, P)$ une carte G-tropicale sur X et soit α une G-forme symétrique de type (p,p) sur P.*

*La G-forme $f^*\alpha$ est positive (*resp. *faiblement positive,* resp. *fortement positive) si et seulement si c'est le cas de $\alpha|_{f(V)}$ pour tout domaine compact V de X.*

Démonstration. — Supposons que pour tout domaine compact V de X, la restriction de α à $f(V)$ soit positive. Soit alors (X_i) un G-recouvrement de X par des domaines compacts ; pour tout i, posons $P_i = f_i(X_i)$, $f_i = f|_{X_i}$ et $\alpha_i = \alpha|_{P_i}$. Par hypothèse, α_i est une (p,p)-forme positive et l'on a $f^*\alpha|_{X_i} = f_i^*\alpha_i$. La famille (X_i), les cartes G-tropicales $(f_i\colon X_i \to T, P_i)$ et les formes α_i attestent donc que $f^*\alpha$ est positive.

Réciproquement, supposons $f^*\alpha$ positive et soit V un domaine compact de X ; démontrons que la restriction de α à $f(V)$ est positive. Par hypothèse, il existe un G-recouvrement (V_i) de V par des domaines compacts, et pour tout i une carte G-tropicale $f_i\colon V_i \to E_i$ et une G-forme α_i positive sur $f_i(V_i)$ telle que $f_i^*\alpha_i = (f^*\alpha)|_{V_i}$. Comme V est compact, on peut supposer que ce G-recouvrement est fini.

Pour tout i, posons $h_i = (f_i, f|_{V_i})\colon V_i \to E_i \times E$, notons p_i et q_i les projections de $E_i \times E$ sur E_i et E respectivement ; posons enfin $\beta_i = p_i^*\alpha_i$ et $\gamma_i = q_i^*\alpha$. On a $h_i^*\beta_i = f^*\alpha|_{V_i} = h_i^*\gamma_i$. Par suite, les restrictions à $h_i(V_i)$ des formes β_i et γ_i sont égales (proposition 3.4.4). Comme V est égal à la réunion des V_i, on a

$$f(V) = \bigcup f(V_i) = \bigcup q_i(h_i(V_i)).$$

Soit Q l'espace paralinéaire somme disjointe des $h_i(V_i)$, soit β la forme sur Q donnée par $\beta_i = \gamma_i$ sur $h_i(V_i)$. Par construction, cette forme β est positive. Soit $q\colon Q \to f(V)$ l'application paralinéaire donnée par q_i sur $h_i(V_i)$; on a $\beta = q^*\alpha$. Comme q est surjective

et compacte, elle possède G-localement des sections (prop. 2.1.12). Par suite, α est positive.

Les cas des G-formes faiblement positives et des G-formes fortement positives se traitent de même. □

Exemple 3.5.4. — Soit X un espace G-tropical, soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille finie de fonctions G-localement tropicalement de classe $\mathscr{C}^1$ sur X et soit $M\colon X \to \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ une fonction G-localement tropicale telle que $M(x)$ soit symétrique positive pour tout $x \in X$. Alors, la G-forme

$$\sum_{i,j} M_{i,j}\, \mathrm{d}' u_i \wedge \mathrm{d}'' u_j$$

sur X est positive.

L'assertion à prouver est G-locale sur X. On peut donc supposer que X est compact et que $u_1, \dots, u_n, M$ sont G-tropicalisées par une carte G-tropicale commune $f\colon X \to \mathbf{R}^p$ tel que $f(X)$ soit une cellule C de dimension p sur $\mathbf{R}^p$. Il existe alors des fonctions $v_1, \dots, v_n, N$ sur C, les v_i étant de classe $\mathscr{C}^1$, telles que $u_i = f^* v_i$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ et $M = f^* N$. En particulier, $N(y)$ est symétrique positive pour tout $y \in C$.

D'après le lemme 1.2.11 appliqué à la forme positive $\sum N_{i,j}(y)\, \mathrm{d}' y_i \wedge \mathrm{d}'' y_j$ et à l'application linéaire de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^n$ de matrice $(\partial v_i / \partial y_j)$, la forme de type $(1,1)$ sur $\mathbf{R}^p$ donnée par $\sum N_{i,j}(y)\, \mathrm{d}' v_i(y) \wedge \mathrm{d}'' v_j(y)$ est positive. Par suite, la forme de type $(1,1)$ $\sum N_{i,j}\, \mathrm{d}' v_i \wedge \mathrm{d}'' v_j$ sur C est positive. L'assertion voulue résulte alors de la formule

$$\sum_{i,j} M_{i,j}\, \mathrm{d}' u_i \wedge \mathrm{d}'' u_j = f^*\Big(\sum_{i,j} N_{i,j}\, \mathrm{d}' v_i \wedge \mathrm{d}'' v_j\Big)$$

et de la définition d'une forme positive.

Proposition 3.5.5. — *Soit X un espace G-tropical, soit $\omega_1, \dots, \omega_r$ des G-formes sur X, et soit $\omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r$.*

a) *Si les ω_j sont fortement positives, alors ω est fortement positive.*

b) *Si les ω_j sont positives, alors ω est positive.*

c) *Si les ω_j sont faiblement positives et si au plus une d'entre elles n'est pas fortement positive, alors ω est faiblement positive.*

Démonstration. — Cela découle de la proposition 1.10.3. □

§ 3.6. TOPOLOGIES SUR L'ESPACE DES G-FORMES

Dans ce paragraphe, on définit des topologies $\mathscr{C}^m$ sur les espaces de G-formes G-lisses. Mutatis mutandis, ces constructions fournissent des topologies $\mathscr{C}^m$ sur les espaces de G-formes à coefficients formés de fonctions $\mathscr{C}^m$; les modifications correspondantes sont laissées au lecteur.

3.6.1. — Soit C une cellule compacte de $\mathbf{R}^c$, de dimension c.

Pour tout entier $m \geqslant 0$, on dispose sur l'ensemble $\mathscr{C}^\infty(C)$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur C de la semi-norme $\|\cdot\|_{C,m}$ donnée par la borne supérieure des valeurs des dérivées partielles d'ordre $\leqslant m$; c'est une norme.

Soit (p, q) un couple d'entiers naturels. L'ensemble des formes lisses de type (p, q) sur C est un module libre sur $\mathscr{C}^\infty(C)$, de base la famille $(\mathrm{d}' x_I \wedge \mathrm{d}'' x_J)$, où (I, J) parcourt l'ensemble des couples de multi-indices de longueurs p et q respectivement. On définit alors la semi-norme $\|\cdot\|_{C,m}$ sur l'espace $\mathscr{A}^{p,q}(C)$ des formes lisses sur C, de type (p, q), par la borne supérieure des semi-normes des coefficients d'une forme dans cette base ; c'est encore une norme.

La topologie correspondante est appelée topologie $\mathscr{C}^m$ sur $\mathscr{A}^{p,q}(C)$. Elle est normable et en particulier séparée.

Si $m \leqslant n$, la topologie $\mathscr{C}^m$ est moins fine que la topologie $\mathscr{C}^n$. La topologie qu'elles engendrent, définie par toutes les normes $\|\cdot\|_{C,m}$ pour $m \in \mathbf{N}$, est appelée topologie $\mathscr{C}^\infty$; elle est métrisable et en particulier séparée.

3.6.2. — Soit D une cellule compacte de $\mathbf{R}^d$, de dimension d et soit $f\colon C \to D$ une application affine. Pour tout entier m, il existe un nombre réel M_m tel que $\|f^*\omega\|_{C,m} \leqslant M_m\|\omega\|_{D,m}$ pour toute forme $\omega \in \mathscr{A}^{p,q}(D)$.

Si f est surjective, elle possède une section affine g ; on en déduit l'existence, pour tout entier m, d'un nombre réel M'_m tel que $\|\omega\|_{D,m} \leqslant M'_m\|f^*\omega\|_{C,m}$. Autrement dit, l'application f^* est injective est stricte.

En particulier, les automorphismes affines d'une cellule C induisent des homéomorphismes pour les topologies $\mathscr{C}^m$.

3.6.3. — Soit X un espace paralinéaire. Pour tout élément m de $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$, on définit la topologie $\mathscr{T}_m$ sur $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G}}(X)$ comme la topologie la moins fine rendant continues les applications f^* où $f\colon C \to X$ est une application paralinéaire d'une cellule compacte C de dimension d de $\mathbf{R}^d$ dans X.

À toute application $f\colon C \to X$ et tout entier r, on peut associer une (classe de) semi-norme $\mathscr{C}^r$, $\|\cdot\|_{f,m}$ sur $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G}}(X)$, image directe de la norme $\mathscr{C}^r$ sur $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G}}(C)$. La topologie $\mathscr{T}_m$ est ainsi définie par ces seminormes $\|\cdot\|_{f,r}$, où r parcourt les entiers $\leqslant m$.

Pour définir cette topologie, on peut en fait se limiter à une famille d'applications f qui sont des immersions et dont les images constituent un G-recouvrement de X.

Si X est compact et m est fini, on en déduit que cette topologie est normable. Dans ce cas, on appellera norme $\mathscr{C}^m$ standard sur X toute norme sur $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G}}(X)$. Un exemple typique de norme standard consiste à prendre la borne supérieure des normes $\|\cdot\|_{f,m}$ où $f\colon C \to X$ parcourt un décomposition cellulaire de X.

Cette topologie est métrisable si X est paracompact.

Cette topologie est séparée.

3.6.4. — Soit $f\colon P \to Q$ une application paralinéaire entre espaces paralinéaires.

Pour tout m, l'application $\omega \mapsto f^*\omega$ est continue pour les topologies $\mathscr{T}_{P,m}$ et $\mathscr{T}_{Q,m}$.

Si f est surjective, elle admet G-localement des sections paralinéaires et l'application continue f^* est injective et stricte.

3.6.5. — Soit X un espace G-tropical. Soit m un élément de $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$. Soit V un domaine de X, soit $f\colon V \to E$ une application paralinéaire à valeurs dans un espace affine E.

Soit $\mathscr{A}^{p,q}_{f,\mathrm{G}}(X)$ le sous-espace de $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G}}(X)$ constitué des G-formes ω qui sont tropicalisées par f sur tout domaine compact de V, c'est-à-dire telles que pour tout domaine compact W de V, il existe $\alpha_W \in \mathscr{A}^{p,q}(f(W))$ vérifiant $\omega|_W = f^*\alpha_W$. Rappelons qu'alors α_W est déterminé par $\omega|_W$ (proposition 3.4.4).

Si P est une partie paralinéaire de E contenant $f(V)$ et $\alpha \in \mathscr{A}^{p,q}(P)$ est une G-forme, alors $f^*\alpha \in \mathscr{A}^{p,q}_{f,\mathrm{G}}(V)$ et $(f^*\alpha)_W = \alpha|_{f(W)}$ pour tout domaine compact W de V. (En général, une forme $\omega \in \mathscr{A}^{p,q}_{f,\mathrm{G}}(X)$ n'est pas de la forme $f^*\alpha$, pour α comme ci-dessus, même si $V = X$ et $f(V) = P$. On prend par exemple pour X l'espace $\mathbf{R}$ muni de la topologie discrète et de sa structure paralinéaire évidente, $f\colon X \to \mathbf{R}$ l'application identique, qui est paralinéaire ; les domaines compacts de X sont les ensembles finis ; toute fonction sur X est G-lisse et est f-tropicale sur tout domaine compact ; bien peu sont de la forme $f^*\varphi$ où φ est une fonction lisse sur $\mathbf{R}$.)

Soit W un domaine compact de V. On considère le diagramme

$$\mathscr{A}^{p,q}_{f,\mathrm{G}}(X) \to \mathscr{A}^{p,q}_{f,\mathrm{G}}(W) \leftarrow \mathscr{A}^{p,q}(f(W))$$

défini par l'application de restriction et l'application f^*. L'application $f^*\colon \mathscr{A}^{p,q}(f(W)) \to \mathscr{A}^{p,q}_{f,\mathrm{G}}(W)$ est bijective ; on munit son but de la topologie déduite par transport de structure de la topologie $\mathscr{C}^m$ sur $\mathscr{A}^{p,q}(f(W))$. On munit alors $\mathscr{A}^{p,q}_{f,\mathrm{G}}(X)$ de la topologie la moins fine rendant continue la restriction à W pour tout domaine compact W de V ; on la note $\mathscr{T}_{f,m}$.

Pour cette topologie, l'adhérence de la G-forme nulle est l'ensemble des G-formes $\omega \in \mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G}}(X)$ telles que $\omega|_V = 0$. En effet, la topologie de $\mathscr{A}^{p,q}_{f,\mathrm{G}}(W)$ est *normable*, donc séparée ; par définition de la topologie de $\mathscr{A}^{p,q}_{f,\mathrm{G}}(W)$, l'adhérence de 0 est l'ensemble des formes dont toutes les restrictions aux domaines compacts W de V sont nulles ; c'est donc l'ensemble des éléments de $\mathscr{A}^{p,q}_{f,\mathrm{G}}(X)$ dont la restriction à V est nulle. D'autre part, toute forme de $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G}}(X)$ dont la restriction à V est nulle appartient à $\mathscr{A}^{p,q}_{f,\mathrm{G}}(X)$ puisqu'elle est tropicalisée par la forme nulle sur $f(W)$, pour tout domaine compact W de V.

3.6.6. — Considérons deux applications paralinéaires $f\colon U \to E$ et $g\colon V \to F$ définies sur des domaines U et V de X. Supposons que V soit contenu dans U et qu'il existe une application affine $q\colon F \to E$ une application affine telle que $q \circ g = f|_V$. Une forme G-tropicalisée par f sur tout domaine compact de U est également G-tropicalisée par g sur tout domaine compact de V, et l'inclusion $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},f}(X) \hookrightarrow \mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},g}(X)$ est continue.

En effet, il suffit de s'assurer que pour tout domaine compact W de V, l'application composée $\mathscr{A}^{p,q}_{f,\mathrm{G}}(X) \hookrightarrow \mathscr{A}^{p,q}_{g,\mathrm{G}}(X) \xrightarrow{\mathrm{restr}} \mathscr{A}^{p,q}_{g,\mathrm{G}}(W)$ est continue. Cette application est l'application composée $\mathscr{A}^{p,q}_{f,\mathrm{G}}(X) \to \mathscr{A}^{p,q}_{f,\mathrm{G}}(W) \hookrightarrow \mathscr{A}^{p,q}_{g,\mathrm{G}}(W)$; la première flèche étant continue, il suffit alors de vérifier que l'application d'inclusion $\mathscr{A}^{p,q}_{f,\mathrm{G}}(W) \hookrightarrow \mathscr{A}^{p,q}_{g,\mathrm{G}}(W)$ est continue. Par définition de la topologie quotient sur $\mathscr{A}^{p,q}_{f,\mathrm{G}}(W)$, il suffit de vérifier que l'application composée $\mathscr{A}^{p,q}(f(W)) \xrightarrow{f^*} \mathscr{A}^{p,q}_{f,\mathrm{G}}(W) \hookrightarrow \mathscr{A}^{p,q}_{g,\mathrm{G}}(W)$ est continue. Or cette application est également l'application composée $\mathscr{A}^{p,q}(f(W)) \xrightarrow{q^*} \mathscr{A}^{p,q}(g(W)) \xrightarrow{g^*} \mathscr{A}^{p,q}_{g,\mathrm{G}}(W)$. Ces deux applications q^* et g^* étant continues, l'assertion en résulte.

3.6.7. — Par abus de langage, appelons *jeu de cartes* G-tropicales sur X toute famille d'applications paralinéaires définies sur des domaines de X à valeurs dans des espaces affines. Nous ne spécifions pas de partie paralinéaire au but, si bien que les objets d'un jeu de cartes ne sont pas des cartes... En pratique, nous ne considérerons que les restrictions

des fonctions d'un jeu de cartes à des domaines compacts ; leur image est alors une partie paralinéaire, ce qui permet de les considérer comme des cartes.

Un jeu de cartes est dit *G-couvrant* si ses domaines forment un G-recouvrement de X.

3.6.8. — Soit $\mathscr{D}$ un jeu de cartes sur X. Soit $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},\mathscr{D}}(X)$ l'intersection, dans $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G}}(X)$, des sous-espaces $\mathscr{A}^{p,q}_{f,\mathrm{G}}(X)$, lorsque f parcourt l'ensemble des cartes de $\mathscr{D}$.

On le munit de la topologie la moins fine rendant continues les applications d'inclusion $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathscr{D},\mathrm{G}}(X) \to \mathscr{A}^{p,q}_{f,\mathrm{G}}(X)$ est continue, lorsque ce dernier espace est muni de la topologie $\mathscr{T}_{f,m}$, où f est une carte de $\mathscr{D}$. Cela fournit ainsi une topologie $\mathscr{T}_{\mathscr{D},m}$ sur $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},\mathscr{D}}(X)$ qu'on appelle la topologie $\mathscr{C}^m$.

3.6.9. — L'adhérence de la forme nulle dans $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},\mathscr{D}}(X)$ est l'ensemble des G-formes ω qui appartiennent à l'adhérence de 0 pour toutes les topologies $\mathscr{T}_{f,m}$, où f est un membre du jeu de carte $\mathscr{D}$. Compte tenu des définitions et du calcul de l'adhérence de 0 dans $\mathscr{A}^{p,q}_{f,\mathrm{G}}(X)$, ce sont les G-formes ω dont la restriction à tout domaine V d'un membre de $\mathscr{D}$ est nulle.

En particulier, si le jeu de cartes $\mathscr{D}$ est G-couvrant, la topologie $\mathscr{C}^m$ sur $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathscr{D},\mathrm{G}}(X)$ est séparée.

Proposition 3.6.10. — *Soit $\mathscr{D}$ un jeu de cartes sur un espace G-tropical X et soit $n \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$. Le produit extérieur des G-formes induit des applications bilinéaires continues*

$$\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},\mathscr{D}}(X) \times \mathscr{A}^{p',q'}_{\mathrm{G},\mathscr{D}}(X) \to \mathscr{A}^{p+p',q+q'}_{\mathrm{G},\mathscr{D}}(X).$$

Démonstration. — Soit $f\colon U \to E$ une carte de $\mathscr{D}$, soit m un entier naturel tel que $m \leqslant n$, et soit K un domaine compact de U. Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on déduit d'un décomposition cellulaire convenable de l'espace paralinéaire $f(K)$ une norme sur $\mathscr{A}^{p,q}(f(K))$, et on en tire une semi-norme $\|\cdot\|_{K,m}$ sur $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},f}(X)$, et en particulier sur $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},\mathscr{D}}(X)$. Au niveau paralinéaire, le produit des formes définit une application bilinéaire

$$\mathscr{A}^{p,q}(f(K)) \times \mathscr{A}^{p',q'}(f(K)) \to \mathscr{A}^{p+p',q+q'}(f(K))$$

qui est continue pour la topologie $\mathscr{C}^m$. On en déduit que l'application bilinéaire de l'énoncé est continue, lorsque ces espaces sont munis des semi-normes $\|\cdot\|_{K,m}$ correspondantes. Le résultant s'en déduit formellement. □

3.6.11. — Soit $u\colon X \to Y$ un morphisme d'espaces G-tropicaux.

Soit $f\colon U \to E$ et $g\colon V \to F$ des applications paralinéaires définies sur des domaines U de X et V de Y respectivement ; on dit que f et g sont compatibles relativement à u si $u(U) \subset V$ et s'il existe une application affine $q\colon E \to F$ telle que $q \circ f = g \circ u|_U$.

Soit $\mathscr{D}$ un jeu de cartes G-tropicales sur X et soit $\mathscr{E}$ un jeu de cartes G-tropicales sur Y ; on dit que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{E}$ sont *compatibles* relativement à u si pour tout élément f de $\mathscr{D}$, il existe un élément g de $\mathscr{E}$ tel que f et g soient compatibles relativement à u. On notera cette condition $\mathscr{D} \preceq_u \mathscr{E}$, voire $\mathscr{D} \preceq \mathscr{E}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur u (en particulier lorsque $u = \mathrm{id}$). Cela entraîne que pour toute G-forme $\omega \in \mathscr{A}^{p,q}_{\mathscr{E},\mathrm{G}}(Y)$, la G-forme $u^*\omega$ sur X appartient à $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathscr{D},\mathrm{G}}(X)$.

On dit que $\mathscr{D}$ *couvre tropicalement* $\mathscr{E}$ relativement à u si pour toute application paralinéaire $g\colon V \to F$ appartenant à $\mathscr{E}$ et tout domaine compact K de V, l'ensemble $g(K)$ est G-recouvert par des parties paralinéaires compactes de la forme $g \circ u(W)$, où W est un domaine compact du domaine d'un élément $f\colon U \to E$ de $\mathscr{D}$ qui est compatible à g

relativement à u tel que $u(W) \subset K$. Par compacité, cela revient à dire que $g(K)$ est la réunion d'une famille finie de tels domaines.

Cette propriété est en particulier vérifiée si $\mathscr{D}$ *couvre* $\mathscr{E}$ relativement à u, c'est-à-dire si pour toute application paralinéaire $g\colon V \to F$ appartenant à $\mathscr{E}$, tout domaine compact K de V est G-recouvert par des parties compactes de la forme $u(W)$, où W est un domaine compact du domaine d'un élément $f\colon U \to E$ de $\mathscr{D}$ qui est compatible à g relativement à u tel que $u(W) \subset K$.

Proposition 3.6.12. — *Soit $u\colon X \to Y$ un morphisme d'espaces G-tropicaux, soit $\mathscr{D}$ et $\mathscr{E}$ des jeux de cartes sur X et Y tels que $\mathscr{D} \preceq_u \mathscr{E}$. Soit $m \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$.*

a) *L'application $u^*\colon \mathscr{A}^{p,q}_{\mathscr{E},\mathrm{G}}(Y) \to \mathscr{A}^{p,q}_{\mathscr{D},\mathrm{G}}(X)$ est continue pour les topologies $\mathscr{C}^m$ sur ces espaces.*

b) *Si, de plus, $\mathscr{D}$ couvre tropicalement $\mathscr{E}$ relativement à u, cette application linéaire vérifie la propriété topologique suivante : pour tout voisinage Ω de 0 dans $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},\mathscr{E}}(Y)$, il existe un voisinage Υ de 0 dans $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},\mathscr{D}}(X)$ tel que toute G-forme $\omega \in \mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},\mathscr{E}}(Y)$ pour laquelle $u^*\omega \in \Upsilon$ vérifie $\omega \in \Omega$. En particulier, l'application linéaire continue u^* est stricte et l'image réciproque de l'adhérence de 0 par u^* est l'adhérence de 0.*

Démonstration. — a) La topologie $\mathscr{C}^m$ de $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},\mathscr{D}}(X)$ est la topologie initiale des topologies $\mathscr{C}^m$ sur $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},f}(X)$, pour $f \in \mathscr{D}$. Pour démontrer que u^* est continue, il suffit de démontrer que pour tout $f \in \mathscr{D}$, l'applications $u^*\colon \mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},\mathscr{E}}(Y) \to \mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},f}(X)$ est continue.

Soit $f\colon U \to E$ une telle carte. Soit W un domaine compact de U. Il suffit de démontrer que l'application $u|^*_W\colon \mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},\mathscr{E}}(Y) \to \mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},f}(W)$ est continue ; rappelons que la topologie de ce dernier espace $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},f}(W)$ est définie par transport de structure depuis celle de $\mathscr{A}^{p,q}(f(W))$ par l'application $\alpha \mapsto f^*\alpha$.

Comme $\mathscr{D}$ et $\mathscr{E}$ sont compatibles relativement à u, il existe une carte $g\colon V \to F$ de $\mathscr{E}$ et une application affine $q\colon E \to F$ telle que $q \circ f = g \circ u|_U$.

Soit K un domaine compact de V qui contient $u(W)$. On a $q(f(W)) = g(u(W)) \subset g(K)$, donc l'application $q^*\colon \mathscr{A}^{p,q}(g(K)) \to \mathscr{A}^{p,q}(f(W))$ est continue (§3.6.3). L'application composée

$$\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},\mathscr{E}}(Y) \to \mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},g}(V) \to \mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},g}(K) \simeq \mathscr{A}^{p,q}(g(K)) \xrightarrow{q^*} \mathscr{A}^{p,q}(f(W)) \simeq \mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},f}(W)$$

est donc continue, et ce n'est autre que u^*.

b) Faisons maintenant l'hypothèse supplémentaire que $\mathscr{D}$ couvre tropicalement $\mathscr{E}$ relativement à u.

La propriété demandée étant compatible aux intersections finies, on peut supposer qu'il existe une carte $g\colon V \to F$ de $\mathscr{E}$, un domaine compact K de V, un entier naturel $n \leqslant m$ et un nombre réel $\varepsilon > 0$, tels que Ω soit l'ensemble des G-formes $\omega \in \mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},\mathscr{E}}(Y)$ telles que $\|\omega\|_{g(K),n} < \varepsilon$, où $\|\cdot\|_{g(K),n}$ est une norme sur l'espace $\mathscr{A}^{p,q}(g(K))$ associée à une décomposition cellulaire convenable de $g(K)$, transportée en une semi-norme sur $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},\mathscr{E}}(Y)$ par le diagramme

$$\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},\mathscr{E}}(Y) \to \mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},g}(V) \to \mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},g}(K) \simeq \mathscr{A}^{p,q}(g(K)).$$

Posons $Q = g(K)$. Par hypothèse, $\mathscr{D}$ couvre tropicalement $\mathscr{E}$ relativement à u, de sorte que Q est G-recouvert par des parties paralinéaires compactes de la forme $g(u(W))$, où W est un domaine compact du domaine d'un élément $f\colon U \to E$ de $\mathscr{D}$ qui est compatible à g relativement à u et tel que $u(W) \subset K$. Comme $g(K)$ est une partie paralinéaire compacte, il existe ainsi une famille finie $(f_i\colon U_i \to E_i)$ de telles cartes, et, pour tout i,

un domaine compact W_i de U_i tel que $u(W_i) \subset K$, tels que $g(K)$ soit la réunion des $g(u(W_i))$. Pour tout i, soit $q_i \colon E_i \to F$ une application affine telle que $q_i \circ f_i = g \circ u|_{U_i}$; posons aussi $P_i = f(W_i)$.

Par hypothèse, la réunion des $q_i(P_i)$ est égale à Q. On choisit pour chaque P_i une norme $\|\cdot\|_{P_i,n}$ qui induit la topologie $\mathscr{C}^n$ sur $\mathscr{A}^{p,q}(P_i)$.

Soit P l'espace paralinéaire compact somme disjointe des P_i et soit $q \colon P \to Q$ l'application paralinéaire déduite des q_i. L'espace $\mathscr{A}^{p,q}(P)$ est la somme directe des $\mathscr{A}^{p,q}(P_i)$; on le munit de la norme $\|\cdot\|_{P,n}$, sup des normes $\|\cdot\|_{P_i,n}$. Comme l'application q admet G-localement des sections, il existe un nombre réel $c > 0$ tel que $\|q^*\alpha\|_{P,n} \geqslant c\|\alpha\|_{Q,n}$ pour toute G-forme $\alpha \in \mathscr{A}^{p,q}(Q)$.

Les normes $\|\cdot\|_{P_i,n}$ sur $\mathscr{A}^{p,q}(P_i)$ induisent des semi-normes sur $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},\mathscr{D}}(X)$ que l'on note de la même façon. Soit Υ l'ensemble des G-formes η dans $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},\mathscr{D}}(X)$ telles que $\|\eta\|_{P_i,n} < \varepsilon/c$ pour tout i. Soit $\omega \in \mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},\mathscr{E}}(Y)$ telle que $u^*\omega \in \Upsilon$; démontrons que $\omega \in \Omega$.

Il existe une unique G-forme $\alpha \in \mathscr{A}^{p,q}(Q)$ telle que $\omega|_V = g^*\alpha$, et $\|\omega\|_{Q,n}(\omega) = \|\omega\|_{Q,n}$ par construction. Pour tout i, on a $u(W_i) \subset K$, donc

$$u^*\omega|_{W_i} = u^*(g^*\alpha)|_{W_i} = (g \circ u)^*\alpha|_{W_i} = (q_i \circ f_i)^*\alpha|_{W_i} = f_i^*(q_i^*\alpha|_{P_i}).$$

Par définition de Υ, on a $\|u^*\omega\|_{P_i,n} < \varepsilon/c$, donc $\|q_i^*\alpha\|_{P_i,n} < \varepsilon/c$. Ainsi, $\|q^*\alpha\|_{P,n} < \varepsilon/c$, si bien que $\|\alpha\|_{Q,n} < \varepsilon$. Ainsi, $\|\omega\|_{Q,n} < \varepsilon$ et $\omega \in \Omega$.

Ceci établit la propriété topologique de l'énoncé. Les conséquences données en résultent directement. □

Corollaire 3.6.13. — a) *Soit $\mathscr{D}$ et $\mathscr{E}$ des jeux de cartes sur X, et soit $n \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$. Si $\mathscr{D} \preceq \mathscr{E}$ et si $\mathscr{D}$ est G-couvrant, alors l'inclusion $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},\mathscr{E}} \subset \mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},\mathscr{D}}$ est continue et stricte.*

b) *Soit $(\mathscr{D}_i)$ une famille de jeux de cartes G-couvrants sur X et soit $n \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$. Les topologies $\mathscr{T}_{\mathscr{D}_i,n}$ coïncident sur l'intersection $\bigcap_i \mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},\mathscr{D}_i}$.*

Démonstration. — a) Comme le jeu $\mathscr{D}$ est G-couvrant, il couvre le jeu $\mathscr{E}$. L'assertion découle ainsi de la proposition 3.6.12.

b) Soit $\mathscr{E}$ la réunion des familles $\mathscr{D}_i$. Pour tout i, le jeu $\mathscr{E}$ raffine le jeu $\mathscr{D}_i$, et l'on a $\bigcap_i \mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},\mathscr{D}_i} = \mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},\mathscr{E}}$. L'assertion résulte ainsi de la précédente. □

Proposition 3.6.14. — *Soit X un espace G-tropical, soit $m \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$. Soit $\mathscr{D}$ un jeu de cartes sur X.*

a) *Pour toute G-forme $\omega \in \mathscr{A}^{p,q}_{\mathscr{D},\mathrm{G}}(X)$, la forme $\mathrm{J}\omega$ appartient à $\mathscr{A}^{q,p}_{\mathscr{D},\mathrm{G}}(X)$. L'application J ainsi définie est linéaire et continue.*

b) *Supposons $m \geqslant 1$. Pour toute G-forme $\omega \in \mathscr{A}^{p,q}_{\mathscr{D},\mathrm{G}}(X)$, on a $\mathrm{d}'\omega \in \mathscr{A}^{p+1,q}_{\mathscr{D},\mathrm{G}}(X)$ et $\mathrm{d}''\omega \in \mathscr{A}^{p,q+1}_{\mathscr{D},\mathrm{G}}(X)$. Les applications d' et d'' ainsi définies sont continues lorsqu'on munit $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathscr{D},\mathrm{G}}(X)$ de la topologie $\mathscr{C}^m$ et les espaces $\mathscr{A}^{p+1,q}_{\mathscr{D},\mathrm{G}}(X)$ et $\mathscr{A}^{p,q+1}_{\mathscr{D},\mathrm{G}}(X)$ de la topologie $\mathscr{C}^{m-1}$.*

Démonstration. — La démonstration découle de la définition des semi-normes. □

§ 3.7. PASSAGES À LA LIMITE

3.7.1. — Soit $m \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$. L'espace $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G}}(X)$ est la réunion de ses sous-espaces $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},\mathscr{D}}(X)$, où $\mathscr{D}$ parcourt l'ensemble des jeux de cartes G-tropicales qui sont G-couvrants et on munit $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G}}(X)$ de la topologie localement convexe la plus fine pour laquelle toutes les inclusions correspondantes $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},\mathscr{D}} \subset \mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G}}(X)$ sont continues, lorsque $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},\mathscr{D}}$ est muni de la topologie $\mathscr{T}_{\mathscr{D},m}$. On dira que c'est la topologie $\mathscr{C}^m$ sur $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G}}(X)$.

Si $m \leqslant n$, la topologie $\mathscr{C}^n$ sur $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G}}(X)$ est plus fine que sa topologie $\mathscr{C}^m$.

Pour qu'une application linéaire $T\colon \mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G}}(X) \to E$ soit continue pour la topologie $\mathscr{T}_{\mathscr{D},m}$, E étant un espace vectoriel localement convexe, il faut et il suffit que sa restriction à $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},\mathscr{D}}$ soient continues, pour tout jeu de cartes G-tropicales $\mathscr{D}$ sur X qui est G-couvrant.

3.7.2. — Pour notre théorie des courants, nous aurons besoin de généraliser cette construction dans deux directions différentes :

– Nous restreindre à des G-formes tropicalisées par des jeux de cartes particuliers ;
– Ne considérer que des G-formes à support compact.

Pour traiter cela de façon générale et uniforme, nous introduisons les familles de jeux de cartes et les familles de supports le long desquels nous formons les colimites convenables.

3.7.3. — Rappelons qu'on appelle *famille de supports* dans X un ensemble Φ de parties fermées de X vérifiant les deux propriétés suivantes :

i) Toute réunion finie d'éléments de Φ appartient à Φ ;
ii) Toute partie fermée d'un élément de Φ appartient à Φ.

Les familles suivantes sont les principales familles de supports que nous considérerons :

a) L'ensemble de toutes les parties fermées de X ;

b) Si T est une partie de X, l'ensemble des parties fermées de X qui sont contenues dans T ;

c) L'ensemble des parties compactes de X (rappelons que X est supposé topologiquement séparé).

La première et la dernière de ces familles admettent la généralisation commune suivante :

d) Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme d'espaces G-tropicaux. L'ensemble des parties fermées de X qui sont topologiquement propres sur Y est une famille de supports dans X.

D'autres familles seraient possibles, par exemple, l'ensemble des parties fermées de X qui sont dénombrables à l'infini.

3.7.4. — Soit Γ une famille de jeux de cartes G-couvrants sur X qui est filtrante pour la relation d'ordre $\preceq$: si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ appartiennent à Γ, il existe un jeu de cartes $\mathscr{E}$ dans Γ tel que $\mathscr{D} \preceq \mathscr{E}$ et $\mathscr{D}' \preceq \mathscr{E}$.

Les familles suivantes sont les principales familles de jeux de cartes que nous considérerons :

a) L'ensemble de tous les jeux cartes G-couvrants sur X. Vérifions qu'il est filtrant. Soit $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ des jeux de cartes G-couvrants sur X. Soit $\mathscr{E}$ la famille des cartes $(U \cap U', (f|_{U\cap U'}, f'|_{U\cap U'}))$, où (U, f) et (U', f') parcourent les cartes de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ respectivement. C'est un jeu G-couvrant, et il raffine $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ par construction.

b) Supposons que X soit un sous-espace paralinéaire fermée de $\mathbf{R}^n$. On peut prendre pour famille Γ l'ensemble réduit à la carte identique de X.

c) Lorsque X est un espace analytique, nous prendrons pour famille Γ les jeux de cartes $\mathscr{D}$ tels que les intérieurs des domaines des cartes de $\mathscr{D}$ recouvrent X (un tel jeu est G-couvrant) et dont les applications de cartes sont de la forme $x \mapsto (\log(|f_1|(x)), \dots, \log(|f_n|)(x))$ où les f_i sont des fonctions analytiques inversibles sur le domaine de la carte.

d) Lorsque X est un espace analytique strict, on pourrait considérer les jeux G-couvrants dont les domaines de définition sont des domaines stricts.

Soit $u\colon X \to Y$ un morphisme d'espaces G-tropicaux. Soit Γ une famille filtrante de jeux de cartes G-couvrants sur X, soit Δ une famille filtrante de jeux de cartes G-couvrants sur Y. On dit que $\Gamma \preceq_u \Delta$ si pour tout jeu de cartes $\mathscr{D} \in \Gamma$, il existe un jeu de cartes $\mathscr{E} \in \Delta$ tel que $\mathscr{D} \preceq_u \mathscr{E}$.

3.7.5. — Soit Γ une famille filtrante de jeux de cartes G-couvrants sur X et soit Φ une famille de supports sur X. On appelle Γ-Φ-forme sur X une G-forme dont le support est un élément de Φ et qui est G-tropicalisée par un jeu de cartes appartenant à Γ.

On note $\mathscr{A}^{p,q}_{\Gamma,\Phi}$ l'ensemble des Γ-Φ-formes de type (p,q) sur X. C'est la réunion des sous-espaces $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},\mathscr{D},F}(X)$ des G-formes sur X dont le support est contenu dans une partie fermée $F \in \Phi$ et qui sont G-tropicalisées par le jeu $\mathscr{D} \in \Gamma$. Pour tout élément $m \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$, on munit chacun des ces espaces $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},\mathscr{D},F}(X)$ de la topologie induite par la topologie $\mathscr{C}^m$ de $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},\mathscr{D}}(X)$, et leur réunion $\mathscr{A}^{p,q}_{\Gamma,\Phi}$ de la topologie localement convexe colimite. On dit que c'est la topologie $\mathscr{C}^m$ sur $\mathscr{A}^{p,q}_{\Gamma,\Phi}$.

Par définition, une application linéaire T sur $\mathscr{A}^{p,q}_{\Gamma,\Phi}$, à valeurs dans un espace vectoriel topologique localement convexe E, est continue pour la topologie $\mathscr{C}^m$ si et seulement si chacune de ses restrictions à un sous-espace $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},\mathscr{D},F}(X)$ est continue pour sa topologie $\mathscr{C}^m$.

Si $m \leqslant n$, la topologie $\mathscr{C}^m$ sur $\mathscr{A}^{p,q}_{\Gamma,\Phi}$ est moins fine que la topologie $\mathscr{C}^n$.

3.7.6. — Soit Γ et Δ deux familles filtrantes de jeux de cartes G-couvrants sur X tels que $\Gamma \preceq \Delta$. (Cela équivaut à ce que Δ soit cofinal dans l'ensemble $\Gamma \cup \Delta$, et entraîne que ce dernier ensemble est filtrant.) Soit Φ et Ψ des familles de supports telles que $\Phi \subset \Psi$. Alors, toute Γ-forme sur X à support dans un fermé de Φ est également une Δ-forme sur X à support dans un fermé de Ψ, et il résulte de la définition des topologies en jeu l'inclusion $\mathscr{A}^{p,q}_{\Gamma,\Phi} \subset \mathscr{A}^{p,q}_{\Delta,\Psi}$ est continue pour les topologies $\mathscr{C}^m$.

Lorsque les familles Γ et Δ sont simultanément cofinales dans leur réunion, il en résulte que les deux espaces de formes $\mathscr{A}^{p,q}_{\Gamma,\Phi}$ et $\mathscr{A}^{p,q}_{\Delta,\Phi}$ coïncident, avec leurs topologies $\mathscr{C}^m$.

Remarques 3.7.7. — a) Grâce à la théorie de l'intégration des formes qui fournira des formes linéaires non triviales, on verra plus loin des conditions raisonnables qui assurent que la topologie de $\mathscr{A}^{p,q}_{\Gamma,\Phi}(X)$ est séparée.

b) Si Φ est l'ensemble des parties fermées de X contenues dans une partie fermée F, alors $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},\Phi}(X) = \mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G},F}(X)$ et les topologies coïncident.

De même, si X est compact, l'espace $\mathscr{A}^{p,q}_{\Gamma,\mathrm{c}}(X) = \mathscr{A}^{p,q}_{\Gamma}(X)$ et leurs topologies coïncident.

c) Conformément à l'usage en théorie des distributions, nous imposons à la topologie des espaces $\mathscr{A}^{p,q}_{\Gamma,\Phi}(X)$ d'être localement convexe. Cependant, les considérations de ce travail ne font essentiellement intervenir que des applications linéaires à valeurs dans des espaces localement convexes (notamment $\mathbf{R}$!) ou dans des niveaux finis des systèmes inductifs en jeu, de sorte que cette subtilité reste invisible.

Proposition 3.7.8. — *Soit Γ une famille filtrante de jeux de cartes G-couvrants sur X et soit $\alpha \in \mathscr{A}_{\Gamma}^{p',q'}$. Soit Φ et Ψ des familles de supports sur X ; on suppose que pour toute partie fermée F de $\mathrm{supp}(\alpha)$ appartenant à Φ appartient également à Ψ.*

Pour toute forme $\omega \in \mathscr{A}_{\Gamma,\Phi}^{p,q}(X)$, la forme $\alpha \wedge \omega$ appartient à $\mathscr{A}_{\Gamma,\Psi}^{p,q}(X)$ et l'application

$$A_{\Gamma,\Phi}^{p,q}(X) \to \mathscr{A}_{\Gamma,\Psi}^{p+p',q+q'}(X), \qquad \omega \mapsto \alpha \wedge \omega$$

est linéaire continue.

Démonstration. — Soit $\mathscr{E} \in \Gamma$ un jeu de cartes qui G-tropicalise α, et soit $\mathscr{D}$ un jeu de cartes qui G-tropicalise ω ; il existe un jeu de cartes $\mathscr{D}' \in \Gamma$ tel que $\mathscr{D}' \preceq \mathscr{D}$ et $\mathscr{D}' \preceq E$. Alors, α et ω sont G-tropicalisées par $\mathscr{D}'$, de sorte que leur produit l'est aussi. Son support est contenu dans $\mathrm{supp}(\alpha) \cap \mathrm{supp}(\omega)$, donc appartient à Ψ.

La linéarité de l'application donnée est évidente.

Par définition de la topologie $\mathscr{C}^m$ sur $\mathscr{A}_{\Gamma,\Phi}^{p,q}(X)$ (le membre de droite étant localement convexe), il suffit de prouver que pour tout jeu de cartes $\mathscr{D} \in \Gamma$, l'application restreinte

$$A_{\mathscr{D},\Phi}^{p,q}(X) \to \mathscr{A}_{\Gamma,\Psi}^{p+p',q+q'}(X)$$

est continue. Soit $\mathscr{D}' \in \Gamma$ un jeu de cartes tel que $\mathscr{D}' \preceq \mathscr{D}$ et $\mathscr{D}' \preceq E$; cette application linéaire se factorise alors par $\mathscr{A}_{\mathscr{D}',\Psi}^{p+p',q+q'}(X)$. D'après la proposition 3.6.10, l'application linéaire

$$A_{\mathscr{D}}^{p,q}(X) \to \mathscr{A}_{\mathscr{D}'}^{p+p',q+q'}(X)$$

est continue. L'assertion en découle. □

Proposition 3.7.9. — *Soit $u\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces G-tropicaux. Soit Φ une famille de supports sur X et soit Ψ une famille de supports sur Y ; on suppose que pour tout fermé F de X appartenant à Φ, la partie fermée $u^{-1}(F)$ de Y appartient à Ψ. Soit Γ une famille filtrante de jeux de cartes G-couvrants sur X et soit Δ une famille filtrante de jeux de cartes G-couvrants sur Y telles que $\Delta \preceq_u \Gamma$.*

Soit (p,q) un couple d'entiers naturels et soit $m \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$.

Pour toute G-forme $\alpha \in \mathscr{A}_{\Gamma,\Phi}^{p,q}(X)$, la G-forme $u^*\alpha$ appartient à $\mathscr{A}_{\Delta,\Psi}^{p,q}(Y)$. L'application

$$u^*\colon \mathscr{A}_{\Gamma,\Phi}^{p,q}(X) \to \mathscr{A}_{\Delta,\Psi}^{p,q}(Y), \qquad \alpha \mapsto u^*\alpha$$

est linéaire et continue.

Démonstration. — Soit $\mathscr{D}$ un jeu de cartes appartenant à Γ tel que α soit G-tropicalisée par $\mathscr{D}$. Par hypothèse, il existe un jeu de cartes $\mathscr{E}$ appartenant à Δ tel que $\mathscr{E} \preceq_f \mathscr{D}$. Alors, $u^*\alpha$ est G-tropicalisée par $\mathscr{E}$. Son support est contenu dans $u^{-1}(\mathrm{supp}(\alpha))$, donc il appartient à Ψ. Par suite, $u^*\alpha \in \mathscr{A}_{\Delta,\Psi}^{p,q}(Y)$.

L'application u^* est évidemment linéaire.

Pour vérifier sa continuité, la définition des topologies $\mathscr{C}^m$ en jeu montre qu'il suffit d'observer que pour tout couple de jeux de cartes $(\mathscr{D},\mathscr{E})$ comme ci-dessus, l'application $u^*\colon \mathscr{A}_{\mathscr{D}}^{p,q}(X) \to \mathscr{A}_{\mathscr{E}}^{p,q}(Y)$ est continue. Ce fait a été démontré dans la proposition 3.6.12. □

Corollaire 3.7.10. — *Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces G-tropicaux. Soit $m \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$.*

a) *L'application $f^*\colon \mathscr{A}_{\mathrm{G}}^{p,q}(X) \to \mathscr{A}_{\mathrm{G}}^{p,q}(Y)$ est continue pour les topologies $\mathscr{C}^m$ sur ces espaces ;*

b) *Si le morphisme f est* compact*, l'application $f^*\colon \mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G,c}}(X) \to \mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G,c}}(Y)$ est continue pour les topologies $\mathscr{C}^m$ sur ces espaces.*

3.7.11. — Soit X un espace G-tropical et soit U un ouvert de X.

Soit Φ une famille de supports sur U, soit Ψ une famille de supports sur X ; on suppose que pour toute partie $F \in \Phi$, la partie F est fermée dans X et appartient à Ψ. (En particulier, on peut prendre pour Φ et Ψ les ensembles de parties compactes de U et X respectivement.)

Soit Γ une famille filtrante de jeux de cartes de cartes G-couvrants sur U et soit Δ une famille filtrante de jeux de cartes G-couvrants sur X. On suppose que pour tout $\mathscr{D} \in \Gamma$ et toute partie $F \in \Phi$, il existe $\mathscr{E} \in \Delta$ tel que $\mathscr{E} \preceq \mathscr{D} \cup \{\mathbf{0}\colon X - F \to \mathbf{R}^0\}$.

Si Γ et Φ sont donnés, on peut par exemple prendre pour famille Δ la famille Γ^Φ des jeux de cartes de la forme $\mathscr{D} \cup \{\mathbf{0}\colon X - F \to \mathbf{R}^0\}$, où $\mathscr{D} \in \Gamma$ et $F \in \Phi$. Notons que l'on a alors $\Gamma \preceq_j \Gamma^\Phi$.

Dans ces conditions, toute G-forme $\omega \in \mathscr{A}^{p,q}_{\Gamma,\Phi}(U)$ admet un prolongement par 0, noté $j_!\omega$, caractérisée par les relations $j_!\omega|_U = \omega$ et $j_!\omega|_{X-\mathrm{supp}(\omega)} = 0$. (Noter que U et $X - \mathrm{supp}(\omega)$ forment un recouvrement ouverts de X.)

Observons que l'opération $j_!$ commute aux opérateurs J, d' et d''.

Proposition 3.7.12. — *Conservons les notations ci-dessus.*

a) *Pour toute G-forme $\omega \in \mathscr{A}^{p,q}_{\Gamma,\Phi}(U)$, la G-forme $j_!\omega$ sur X appartient à $\mathscr{A}^{p,q}_{\Delta,\Psi}(X)$. et l'application*

$$j_!\colon \mathscr{A}^{p,q}_{\Gamma,\Phi}(U) \to \mathscr{A}^{p,q}_{\Delta,\Psi}(X)$$

ainsi définie est linéaire et continue pour les topologies $\mathscr{C}^m$.

b) *Cette application est injective.*

c) *Supposons que $\Gamma \preceq_j \Delta$ et que toute partie fermée F de X appartenant à Ψ qui contenue dans U appartient à Φ. Supposons que plus que $d_{\mathrm{trop}}(x) < \max(p,q)$ pour tout $x \in X - U$. Alors cette application $j_!$ est un homéomorphisme, d'inverse donné par j^*.*

Démonstration. — a) Soit $\omega \in \mathscr{A}^{p,q}_{\Gamma,\Phi}(U)$; soit F son support et soit $\mathscr{D} \in \Gamma$ un jeu de cartes qui la G-tropicalise. Il est clair que la G-forme $j_!\omega$ est G-tropicalisée par le jeu de cartes $\mathscr{D}^F$ obtenu en adjoignant à $\mathscr{D}$ la carte constante sur $X - F$. Son support est égal à F, donc appartient à Ψ. Ainsi, $j_!\omega \in \mathscr{A}^{p,q}_{\Delta,\Psi}(X)$. Il est évident que l'application $j_!$ ainsi définie est linéaire.

Démontrons qu'elle est continue. Par définition des topologies $\mathscr{C}^m$ en jeu, il suffit de démontrer que pour tout jeu de cartes $\mathscr{D} \in \Gamma$ et toute partie fermée $F \in \Phi$, l'application

$$\mathscr{A}^{p,q}_{\mathscr{D},F}(U) \to \mathscr{A}^{p,q}_{\Delta,\Psi}(X)$$

induite par restriction est continue. Cette application se factorise par $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathscr{D}^F,F}(X)$ si bien qu'il suffit de démontrer que l'application

$$\mathscr{A}^{p,q}_{\mathscr{D},F}(U) \to \mathscr{A}^{p,q}_{\mathscr{D}^F,F}(X)$$

déduite de $j_!$ est elle-même continue pour les topologies $\mathscr{C}^m$.

Soit g une carte appartenant à $\mathscr{D}^F$ et soit W une domaine compact de son domaine de définition V. Il y a deux cas à considérer, suivant que g est une carte de $\mathscr{D}$ ou bien g est la carte constante de domaine $X - F$. Dans ce dernier cas, les semi-normes associées à g et au domaine compact W sont nulles. Dans le premier cas, les semi-normes associées à g et au domaine compact W sont les mêmes que l'on considère cette carte comme carte sur U ou sur X. La propriété de continuité s'en déduit.

b) Comme $j^*(j_!\omega) = \omega$, l'application $j_!$ est injective.

c) Soit $\alpha \in \mathscr{A}^{p,q}_{\Delta,\Psi}(X)$, soit S son support. Comme S est contenu dans l'ensemble des points x de X tels que $d_{\mathrm{trop}}(x) \geqslant \max(p,q)$ (proposition 3.3.6), on a $S \subset U$. Par suite, $\alpha|_U$ est à support dans Φ et l'on a $\alpha = j_!(\alpha|_U)$. Cela démontre que l'application $j_!$ est bijective. Sa réciproque est l'application j^*, donc est continue d'après la proposition 6.4.3. □

Proposition 3.7.13. — *Soit X un espace G-tropical. Soit Γ une famille filtrante de jeux de cartes G-couvrants sur X, soit Φ une famille de supports sur X, et soit $m \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$.*

a) *Pour toute G-forme $\omega \in \mathscr{A}^{p,q}_{\Gamma,\Phi}(X)$, la forme $\mathrm{J}\omega$ appartient à $\mathscr{A}^{q,p}_{\Gamma,\Phi}(X)$. L'application J ainsi définie est linéaire et continue.*

b) *Supposons $m \geqslant 1$. Pour toute G-forme $\omega \in \mathscr{A}^{p,q}_{\Gamma,\Phi}(X)$, on a $\mathrm{d}'\omega \in \mathscr{A}^{p+1,q}_{\Gamma,\Phi}(X)$ et $\mathrm{d}''\omega \in \mathscr{A}^{p,q+1}_{\Gamma,\Phi}(X)$. Les applications d' et d'' ainsi définies sont continues lorsqu'on munit $\mathscr{A}^{p,q}_{\Gamma,\Phi}(X)$ de la topologie $\mathscr{C}^m$ et les espaces $\mathscr{A}^{p+1,q}_{\Gamma,\Phi}(X)$ et $\mathscr{A}^{p,q+1}_{\Gamma,\Phi}(X)$ de la topologie $\mathscr{C}^{m-1}$.*

Démonstration. — Compte tenu de la définition des topologies en jeu, l'assertion se ramène à l'assertion analogue à jeu de cartes fixé, qui est la proposition 3.6.14. □

CHAPITRE 4

CALIBRAGES ET INTÉGRATION SUR LES ESPACES PARALINÉAIRES

---

§ 4.1. NÉGLIGEABILITÉ PARALINÉAIRE

Soit X un espace paralinéaire.

4.1.1. — Soit d un entier $\geqslant 0$; notons $\mathscr{I}_d$ le sous-préfaisceau de $\mathscr{A}_{X_{\mathrm{G}}}$ donné par

$$\mathscr{I}_d(Y) = \ker(\mathscr{A}_{X_{\mathrm{G}}}(Y) \to \mathscr{A}_{X_{\mathrm{G}}}(Y^{(d)})),$$

pour tout sous-espace paralinéaire Y de X, où $Y^{(d)}$ désigne l'ensemble des points $y \in Y$ tels que $\dim_y(Y) \geqslant d$.

C'est un faisceau. Soit en effet Y un sous-espace paralinéaire de X, soit $(Y_i)_{i\in I}$ un G-recouvrement de Y et soit $f \in \mathscr{A}_{X_{\mathrm{G}}}(Y)$ une fonction G-lisse dont la restriction à $Y_i^{(d)}$ est nulle pour tout i. Soit $x \in Y^{(d)}$; par définition d'un G-recouvrement, il existe une partie finie J de I telle que $x \in Y_i$ pour tout $i \in J$, et telle que $\bigcup_{i\in J} Y_i$ soit un voisinage de x. Pour tout $i \in J$, soit V_i un voisinage paralinéaire compact de x dans Y_i tel que $\dim(V_i) = \dim_x(Y_i)$. La réunion des V_i est un sous-espace paralinéaire compact de X, de dimension $\max_{i\in J}(\dim_x(Y_i))$. Comme c'est un voisinage de x, il existe $i \in J$ tel que $\dim_x(Y_i) \geqslant d$. Alors, $f(x) = f|_{Y_i}(x) = 0$.

Lemme 4.1.2. — *Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{A}_{X_{\mathrm{G}}}$-module. Soit Y un sous-espace paralinéaire de X. On a $\mathscr{I}_d\mathscr{M}(Y) = \ker(\mathscr{M}(Y) \to \mathscr{M}(Y^{(d)}))$.*

Démonstration. — L'inclusion $\mathscr{I}_d\mathscr{M}(Y) \subset \ker(\mathscr{M}(Y) \to \mathscr{M}(Y^{(d)}))$ est évidente. Il suffit de vérifier l'autre inclusion G-localement ; on peut donc supposer que Y est une cellule. Soit $\omega \in \ker(\mathscr{M}(Y) \to \mathscr{M}(Y^{(d)}))$. Si $\dim(Y) \geqslant d$, alors $Y = Y^{(d)}$ et $\omega = 0$, donc $\omega \in \mathscr{I}_d\mathscr{M}(Y)$. Si $\dim(Y) < d$, alors $Y^{(d)} = \varnothing$, donc $\mathscr{I}_d(Y)$ contient 1, d'où $\omega = 1 \cdot \omega \in \mathscr{I}_d\mathscr{M}(Y)$. □

Corollaire 4.1.3. — *Soit $\mathscr{M}$ et $\mathscr{M}'$ des $\mathscr{A}_{X_{\mathrm{G}}}$-modules tels que $\mathscr{M} \subset \mathscr{M}'$. L'injection de $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{M}'$ induit une injection de $\mathscr{M}/\mathscr{I}_d\mathscr{M}$ dans $\mathscr{M}'/\mathscr{I}_d\mathscr{M}'$.*

Corollaire 4.1.4. — *Soit $\mathscr{G}$ une classe de coefficients. Si $d = \max(p, q)$, le faisceau d'idéaux $\mathscr{I}_d\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}$ est l'annulateur du faisceau $\mathscr{G}^{p,q}_{X_{\mathrm{G}}}$.*

Démonstration. — Soit Y un sous-espace paralinéaire de X.

Soit $f \in \mathscr{I}_d\mathscr{G}(Y)$ et soit $\omega \in \mathscr{G}^{p,q}_{X_{\mathrm{G}}}(Y)$. Soit (Y_i) un G-recouvrement de Y par des cellules. Si $\dim(Y_i) < d$, alors $\omega|_{Y_i} = 0$; sinon, $f|_{Y_i} = 0$. Dans les deux cas, $f\omega|_{Y_i} = 0$. On a donc $f\omega = 0$.

Inversement, soit $f \in \mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}(Y)$ et supposons que f annule la restriction à Y du faisceau $\mathscr{G}^{p,q}_{X_{\mathrm{G}}}$; démontrons que $f \in \mathscr{I}_d\mathscr{G}(Y)$. D'après le lemme 4.1.2, il suffit de prouver que la restriction de f à toute cellule de dimension d de Y est nulle ; soit C une telle cellule et soit $j\colon C \to \mathbf{R}^d$ une immersion paralinéaire qui induit un isomorphisme de C sur un sous-espace paralinéaire de $\mathbf{R}^d$. Soit u l'unique fonction sur $j(C)$ telle que $f|_C = j^*u$. Quitte à considérer un G-recouvrement de la cellule C, on peut supposer que u est la restriction d'une fonction de classe $\mathscr{G}$ sur un voisinage de $j(C)$. Fixons alors un couple (I, J) de multi-indices de longueurs (p, q) dans $\{1, \dots, d\}$. On a

$$f|_C j^*(\mathrm{d}' x_I \wedge \mathrm{d}'' x_J) = j^*(u\,\mathrm{d}' x_I \wedge \mathrm{d}'' x_J) = 0,$$

donc $u\,\mathrm{d}' x_I \wedge \mathrm{d}'' x_J = 0$. Il découle alors de l'exemple 1.9.12 que $u = 0$, d'où $f|_C = 0$. □

Remarque 4.1.5. — Soit X un espace paralinéaire de dimension $\leqslant n$ et soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{A}_{X_{\mathrm{G}}}$-module. Posons $\mathscr{N} = \mathscr{M}/\mathscr{I}_n\mathscr{M}$; décrivons ses sections lorsque X est paracompact.

Soit $\mathscr{C}$ une décomposition cellulaire de X et soit (f_C) une famille de sections de $\mathscr{M}$, où $f_C \in \mathscr{M}(C)$ pour tout $C \in \mathscr{C}$. Si C et D sont deux cellules distinctes appartenant à $\mathscr{C}$, leur intersection est de dimension $< n$, de sorte que les restrictions de f_C et f_D à $C \cap D$ coïncident modulo $\mathscr{I}_n$. La famille (f_C) définit donc une section f de $\mathscr{N}(X)$.

Comme X est paracompact, toute section de $\mathscr{N}$ peut se décrire ainsi.

Soit enfin deux sections g et g' de $\mathscr{N}$. Choisissons une décomposition cellulaire $\mathscr{C}$ et deux familles (g_C) et (g'_C) de sections de $\mathscr{M}$ définissant respectivement g et g' ; il en existe, car X est paracompact. Alors, $g = g'$ si et seulement si $g_C = g'_C$ modulo $\mathscr{I}_n$ pour toute cellule $C \in \mathscr{C}$, c'est-à-dire $g_C = g'_C$ pour tout $C \in \mathscr{C}_n$.

4.1.6. — Soit X un espace paralinéaire de dimension $\leqslant n$. On dit qu'une section f de $\mathscr{F}_{X_{\mathrm{G}}}/\mathscr{I}_n\mathscr{F}_{X_{\mathrm{G}}}$ est positive (resp. strictement positif, resp. G-localement constante) si, G-localement, elle admet un représentant dans $\mathscr{F}_{X_{\mathrm{G}}}$ qui est positif (resp. strictement positif, resp. constant).

Proposition 4.1.7. — *Soit $\mathscr{G}$ une classe de coefficients. Soit X un espace paralinéaire paracompact de dimension $\leqslant n$ et soit (p, q) un couple d'entiers naturels tels que $0 \leqslant p, q \leqslant n$. Le G-faisceau $\mathscr{G}^{p,q}_{X_{\mathrm{G}}}/\mathscr{I}_n\mathscr{G}^{p,q}_{X_{\mathrm{G}}}$ est libre de rang $\binom{n}{p}\binom{n}{q}$ sur l'anneau $\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}/\mathscr{I}_n\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}$.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{C}$ une décomposition cellulaire de X. Pour chaque cellule $C \in \mathscr{C}$ telle que $\dim(C) = n$, choisissons une immersion paralinéaire j_C de C dans $\mathbf{R}^n$ dont l'image est une cellule. Pour tout multi-indice I de longueur p dans $\{1, \dots, n\}$ et tout multi-indice J de longueur q dans $\{1, \dots, n\}$, posons $\omega_{I,J,C} = j_C^*(\mathrm{d}' x_I \wedge \mathrm{d}'' x_J)$. Si C est une cellule de dimension $< n$, posons $\omega_{I,J,C} = 0$. Il existe une unique section $\omega_J \in \mathscr{A}^{p,q}_{X_{\mathrm{G}}}/\mathscr{I}_n\mathscr{A}^{p,q}_{X_{\mathrm{G}}}(X)$ dont la restriction à toute cellule $C \in \mathscr{C}$ est égale à $\omega_{I,J,C}$. En effet, les conditions de recollement dans le faisceau quotient sont triviales, puisque l'intersection de deux cellules distinctes est de dimension $\leqslant n-1$. Démontrons que la famille (ω_J) est une base du G-faisceau $\mathscr{G}^{p,q}_{X_{\mathrm{G}}}/\mathscr{I}_n\mathscr{G}^{p,q}_{X_{\mathrm{G}}}$ sur l'anneau $\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}/\mathscr{I}_n\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}$.

Elle est libre. En effet, si $(f_{I,J})$ est une famille d'éléments de $\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}(X)$ telle que $\sum f_{I,J}\omega_{I,J} = 0$, on a $\sum f_{I,J}|_C\omega_{I,J,C} = 0$ pour toute cellule $C \in \mathscr{C}$. Si C est de dimension n, l'argument utilisé pour déterminer la torsion de $\mathscr{G}^{n,q}_{X_{\mathrm{G}}}$ entraîne que $f_J|_C = 0$.

Sinon, $\dim(C) < n$, donc $f_J|_C \in \mathscr{I}_n(C)$. On a ainsi $f_J \in \mathscr{I}_n\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}(X)$ pour tout J, d'où l'assertion.

Démontrons maintenant que cette famille est génératrice. Soit $\omega \in \mathscr{G}^{p,q}_{X_{\mathrm{G}}}/\mathscr{I}_n\mathscr{G}^{p,q}_{X_{\mathrm{G}}}(X)$. Soit C une cellule de $\mathscr{C}$. Si $\dim(C) < n$, on pose $f_{I,J,C} = 0$ pour tous I, J. Supposons maintenant $\dim(C) = n$. Il existe une décomposition cellulaire $\mathscr{D}_C$ de $j_C(C)$ et, pour toute cellule D de $\mathscr{D}_C$, un élément ω_D de $\mathscr{A}^{p,q}_D(D)$ tel que $\omega|_{j_C^{-1}(D)} = j_C^*\omega_D$. D'après l'exemple 1.9.12, il existe une unique famille $(g_{I,J,D})$ de fonctions de classe $\mathscr{G}$ au voisinage de D telles que $\omega_D = \sum g_{I,J,D}\,\mathrm{d}'x_I \wedge \mathrm{d}''x_J$. La famille $(g_{I,J,D})$, où D parcourt $\mathscr{D}_C$, se recolle en un élément $f_{I,J,C}$ de $\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}/\mathscr{I}_n\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}(C)$; les intersections deux à deux étant de dimension $\leqslant n-1$. Pour la même raison, la famille $(f_{I,J,C})$ se recolle en une section $f_{I,J}$ de $\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}/\mathscr{I}_n\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}(X)$ et l'on a $\omega = \sum f_{I,J}\omega_{I,J}$. □

Remarque 4.1.8. — Soit $\mathscr{G}$ une classe de coefficients.

Soit f une immersion par morceaux de X dans $\mathbf{R}^n$. Pour tout sous-ensemble I de cardinal p de $\{1,\dots,n\}$ et tout sous-ensemble J de cardinal q de $\{1,\dots,n\}$, notons $\alpha_{I,J}$ la forme de type (p,q) sur $\mathbf{R}^n$ donnée par

$$\alpha_J = \mathrm{d}'x_I \wedge \mathrm{d}''x_J.$$

Il résulte de la preuve de la proposition 4.1.7 que la famille $(f^*\alpha_{I,J})_J$ est une base du faisceau $\mathscr{G}^{p,q}_{X_{\mathrm{G}}}$ comme $(\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}/\mathscr{I}_n\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}})$-module. On dira que c'est la base canonique de ce faisceau associée à l'immersion par morceaux f.

Soit $g\colon X \to \mathbf{R}^n$ une seconde immersion par morceaux. La famille $(g^*\alpha_{I,J})_{I,J}$ est aussi une base du faisceau $\mathscr{G}^{p,q}_{X_{\mathrm{G}}}$. Soit C une cellule de dimension n de X telle $(f,g)(C)$ soit contenu dans un sous-espace affine de dimension n de $\mathbf{R}^{2n}$. Soit u l'unique application affine de $\mathbf{R}^n$ dans lui-même tel que $g|_C = u \circ f|_C$. Pour tout couple (I,J) de sous-ensembles de $\{1,\dots,n\}$ tels que $\mathrm{Card}(I) = p$ et $\mathrm{Card}(J) = q$, on a donc

$$g^*\alpha_{I,J} = \sum_K u_{IK} \sum_L u_{JL} f^*\alpha_{KL},$$

où u_{IK} (resp. u_{JL}) est le déterminant de la matrice déduite de u par extraction des lignes d'indices dans I et des colonnes d'indices dans K (resp. des lignes d'indices dans J et des colonnes d'indices dans L).

Prenons $\mathscr{G} = \mathscr{A}$. On voit en particulier que la matrice de changement de base de la famille $(f^*\alpha_{I,J})$ à la famille $(g^*\alpha_{K,L})$ est une section G-localement constante du G-faisceau $\mathrm{M}_{\binom{n}{p}\binom{n}{q}}(\mathscr{A}_{X_{\mathrm{G}}}/\mathscr{I}_n)$.

Lorsque $p = n$ et $q = 0$, $\binom{n}{p}\binom{n}{q} = 1$, et cette matrice est réduite à une « fonction » $J_{g/f}$ qu'on appellera *jacobien relatif* des deux immersions par morceaux f et g. C'est une section de $\mathscr{A}_{X_{\mathrm{G}}}/\mathscr{I}_n$ qui est G-localement constante et inversible. Sur une cellule C de dimension n comme ci-dessus, elle est effectivement donnée par le jacobien de l'automorphisme affine u de $\mathbf{R}^n$ tel que $g|_C = u \circ f|_C$.

Définition 4.1.9. — *Soit $\mathscr{G}$ une classe de coefficients. On dira qu'une section ω de $\mathscr{G}^{p,q}_{X_{\mathrm{G}}}$ est* G-localement constante *si pour tout sous-espace paralinéaire Y de X et toute immersion par morceaux $f\colon Y \to \mathbf{R}^n$, les coefficients de $\omega|_Y$ dans la base canonique $(f^*\omega_{I,J})$ associée à f sont des sections G-localement constantes de $(\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}/\mathscr{I}_n\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}})(Y)$.*

D'après ce qui précède, une section ω est G-localement constante si et seulement s'il existe un G-recouvrement (X_i) de X et, pour tout i, une immersion par morceaux

$f_i\colon X_i \to \mathbf{R}^n$, tels que pour tout i, les coefficients de $\omega|_{X_i}$ dans la base $(f_i^*\omega_{I,J})_{I,J}$ soient G-localement constants.

On définit de manière analogue, en considérant les bases duales des précédentes, la notion d'une section G-localement constante du faisceau

$$\mathscr{H}om_{X_{\mathrm{G}}}(\mathscr{G}^{p,q}_{X_{\mathrm{G}}}, (\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}/\mathscr{I}_n\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}})).$$

Ses sections sont celles qui appliquent une (p,q)-forme G-localement constante sur une section G-localement constante de $\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}/\mathscr{I}_n\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}$.

4.1.10. — Soit $f\colon X \to Y$ une immersion par morceaux compacte d'espaces paralinéaires de dimensions $\leqslant n$. Soit $\mathscr{G}$ une classe de coefficients et soit (p,q) un couple d'entiers naturels tel que $\max(p,q) = n$. Nous allons construire un morphisme de faisceaux

$$f_*\colon f_*\mathscr{G}^{p,q}_{X_{\mathrm{G}}} \to \mathscr{G}^{p,q}_{Y_{\mathrm{G}}}.$$

Soit U un sous-espace paralinéaire paracompact de Y. Alors, $f_U\colon f^{-1}(U) \to U$ est une immersion par morceaux compacte et $f^{-1}(U)$ est paracompact. D'après la proposition 2.3.6, il existe un couple $(\mathscr{C},\mathscr{D})$ de décompositions cellulaires qui est adapté à f. Soit ω une (p,q)-forme sur $f^{-1}(U)$. Soit D une cellule de $\mathscr{D}$ telle que $\dim(D) = n$. L'ensemble des cellules $C \in \mathscr{C}_n$ telles que $f(C) = D$ est fini ; pour toute telle cellule C, $f|_C$ induit un isomorphisme de C sur D, de sorte que $\omega|_C$ induit une (p,q)-forme sur D. Notons $f_*\omega_D$ la somme de ces (p,q)-formes.

Comme $\max(p,q) = n$, il existe une unique (p,q)-forme $f_*\omega$ sur U dont la restriction à toute n-cellule $D \in \mathscr{D}$ est égale à $f_*\omega_D$: sa restriction à une cellule de $\mathscr{D}$ qui n'est pas de dimension n est nulle, et les conditions de recollement sont automatiques.

Cette construction est compatible au raffinement des décompositions cellulaires et, par suite, aux restrictions ; elle fournit le morphisme de faisceaux annoncé.

Si la (p,q)-forme ω est positive, il en est de même de $f_*\omega$.

Si f est injective, alors $f^*(f_*\omega) = \omega$; nous dirons que $f_*\omega$ est le *prolongement par zéro* de la (p,q)-forme ω. Dans ce cas, ω est positive (resp. nulle) si et seulement si $f_*\omega$ l'est.

§ 4.2. ORIENTATIONS D'UN ESPACE PARALINÉAIRE

4.2.1. — Soit U une variété topologique connexe non vide de dimension n. On note $\mathrm{Or}(U)$ l'ensemble de ses orientations. Il est vide lorsque U n'est pas orientable, et c'est un $\{\pm 1\}$-torseur sinon.

Soit V un ouvert connexe non vide de U. Si U est orientable, l'application naturelle de $\mathrm{Or}(U)$ dans $\mathrm{Or}(V)$ est un isomorphisme de $\{\pm 1\}$-torseurs.

4.2.2. — Soit X un espace paralinéaire et soit n un entier tel que $\dim(X) \leqslant n$.

Soit $\mathscr{C}$ un G-recouvrement de X par des cellules. On dit qu'une cellule C de X est $\mathscr{C}$-fine s'il existe $C' \in \mathscr{C}$ telle que $C \subset C'$.

Considérons alors le diagramme de $\{\pm 1\}$-ensembles dont les objets sont les $\mathrm{Or}(\mathring{C})$, pour C parcourant l'ensemble des cellules $\mathscr{C}$-fines de dimension n, et les flèches sont les isomorphismes naturels $\mathrm{Or}(\mathring{D}) \to \mathrm{Or}(\mathring{C})$ lorsque C et D sont des cellules $\mathscr{C}$-fines telles que $C \subset D$. Notons $\mathrm{Or}_{\mathscr{C}}(X)$ la limite de ce diagramme dans la catégorie des

$\{\pm 1\}$-ensembles. Un élément de $\mathrm{Or}_{\mathscr{C}}(X)$ est appelé *orientation de* X subordonnée au G-recouvrement $\mathscr{C}$.

Lorsque $\dim(X) < n$, le diagramme ci-dessus est vide et sa limite est le singleton $\{1\}$.

Soit $\mathscr{D}$ un G-recouvrement de X par des cellules qui est plus fin que le G-recouvrement $\mathscr{C}$. Toute cellule $\mathscr{D}$-fine est $\mathscr{C}$-fine ; toute orientation de X subordonnée à $\mathscr{C}$ induit donc une orientation subordonnée à $\mathscr{D}$.

L'application $\mathrm{Or}_{\mathscr{C}}(X) \to \mathrm{Or}_{\mathscr{D}}(X)$ ainsi définie est $\{\pm 1\}$-équivariante et injective. En effet, si C est une cellule de dimension n de X, la famille $(C \cap D)_{D\in\mathscr{D}}$ est un G-recouvrement de C ; il existe donc une cellule $D \in \mathscr{D}$ telle que $C \cap D$ soit un espace paralinéaire de dimension n ; il contient une cellule de dimension n.

On note $\mathrm{Or}_{\mathrm{G}}(X)$ la limite inductive de cette famille de $\{\pm 1\}$-ensembles $\mathrm{Or}_{\mathscr{C}}(X)$ lorsque $\mathscr{C}$ parcourt l'ensemble des G-recouvrements de X par des cellules. Les applications canoniques de $\mathrm{Or}_{\mathscr{C}}(X)$ dans $\mathrm{Or}_{\mathrm{G}}(X)$ sont injectives.

Lorsque $\dim(X) < n$, on a $\mathrm{Or}_{\mathrm{G}}(X) = \{1\}$.

4.2.3. — Soit $f\colon Y \to X$ une immersion par morceaux d'espaces paralinéaires de dimensions $\leqslant n$.

Soit $\omega \in \mathrm{Or}_{\mathrm{G}}(X)$ une orientation de X. On construit comme suit une orientation $f^*\omega \in \mathrm{Or}_{\mathrm{G}}(Y)$ de Y. Soit $\mathscr{C}$ un G-recouvrement de X par des cellules. Soit $\mathscr{D}$ un G-recouvrement de Y par des cellules, plus fin que le G-recouvrement $(f^{-1}(C))_{C\in\mathscr{C}}$, et tel que f induise un isomorphisme de D sur son image, pour toute cellule $D \in \mathscr{D}$.

Soit D une cellule de dimension n de Y qui est $\mathscr{D}$-fine ; alors f induit un homéomorphisme de $\mathring{D}$ sur son image $f(\mathring{D})$ qui est l'intérieur d'une cellule $\mathscr{C}$-fine C de dimension n. Notons $(f^*\omega)_D$ l'unique orientation de $\mathring{D}$ qui se déduit de l'orientation ω_C de $\mathring{C}$ par f.

La famille $f^*\omega$ ainsi définie est une orientation de Y (subordonnée au G-recouvrement $\mathscr{D}$) ; elle ne dépend pas des choix faits dans sa construction.

En particulier, l'application $Y \mapsto \mathrm{Or}_{\mathrm{G}}(Y)$ est un G-préfaisceau en $\{\pm 1\}$-ensembles sur X.

Proposition 4.2.4. — *Le G-préfaisceau $Y \mapsto \mathrm{Or}_{\mathrm{G}}(Y)$ est un faisceau en $\{\pm 1\}$-ensembles.*

On l'appelle le G-faisceau des orientations sur X et on le note $\mathrm{Or}_{X_{\mathrm{G}}}$.

Démonstration. — Soit (X_i) un G-recouvrement de X et, pour tout i, soit ω_i une orientation de X_i ; on suppose que $\omega_i|_{X_i\cap X_j} = \omega_j|_{X_i\cap X_j}$ pour tout couple (i, j). Choisissons pour tout i un G-recouvrement $\mathscr{C}_i$ par des cellules auquel ω_i soit subordonné. La réunion $\mathscr{C}$ de ces familles est un G-recouvrement de X. Soit C une cellule de dimension n de X qui est $\mathscr{C}$-fine ; lorsque i parcourt des indices tels que C soit $\mathscr{C}_i$-fine, les orientations $(\omega_i)_C$ sont égales à une même orientation de $\mathring{C}$, que l'on note ω_C. La famille ω de ω_C est une orientation de X subordonnée au G-recouvrement $\mathscr{C}$; elle vérifie $\omega|_{X_i} = \omega_i$ pour tout i, et c'est la seule orientation de X qui possède cette propriété. □

Lemme 4.2.5. — *Soit X un espace paralinéaire de dimension $\leqslant n$ et soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{A}_{X_{\mathrm{G}}}$-module annulé par $\mathscr{I}_n$. Soit Y un sous-espace paralinéaire de X.*

a) *Pour toute orientation $\varepsilon \in \mathrm{Or}_G(Y)$, l'application canonique*

$$\theta_\varepsilon\colon \mathscr{M}(Y) \to (\mathscr{M} \times^{\{\pm 1\}} \mathrm{Or}_{X_{\mathrm{G}}})(Y), \qquad m \mapsto [m, \varepsilon],$$

est bijective.

b) *Pour tout couple $(\varepsilon, \varepsilon')$ d'orientations de Y, il existe une unique section inversible $\alpha \in (\mathscr{A}_{X_G}/\mathscr{I}_n)(Y)$ telle que $\theta_\varepsilon(\alpha m) = \theta_{\varepsilon'}(m)$ pour tout $m \in \mathscr{M}(Y)$. Cette section α est G-localement constante et vérifie $\alpha^2 = 1$.*

Démonstration. — a) Soit $m_1, m_2 \in \mathscr{M}(Y)$ tels que $\theta_\varepsilon(m_1) = \theta_\varepsilon(m_2)$. Soit $\mathscr{C}$ un G-recouvrement de Y par des cellules telle que que (m_1, ε) et (m_2, ε) induisent le même élément de $\mathscr{M}(C) \times^{\{\pm 1\}} \mathrm{Or}_G(C)$ pour toute cellule $C \in \mathscr{C}$. On donc $m_1|_C = m_2|_C$ pour toute n-cellule C appartenant à $\mathscr{C}$, car l'action de $\{\pm 1\}$ sur $\mathrm{Or}_G(C)$ est alors libre. Par suite, la restriction à $Y^{(n)}$ de $m_1 - m_2$ est nulle. On a donc $m_1 - m_2 \in \mathscr{I}_n\mathscr{M}$ (lemme 4.1.2), d'où $m_1 = m_2$ puisque $\mathscr{M}$ est annulé par $\mathscr{I}_n$.

Soit maintenant μ une section sur Y du G-faisceau $\mathscr{M} \times^{\{\pm 1\}} \mathrm{Or}_{X_G}$. Il existe un G-recouvrement $\mathscr{C}$ de Y par des cellules et, pour toute cellule C de $\mathscr{C}$, un couple $(m_C, \varepsilon_C) \in \mathscr{M}(C) \times^{\{\pm 1\}} \mathrm{Or}_G(C)$ qui définit $\mu|_C$. Quitte à raffiner ce G-recouvrement, on suppose que l'orientation ε de Y est $\mathscr{C}$-fine et que $\varepsilon_C \in \mathrm{Or}(\mathring{C})$ pour toute cellule C telle que $\dim(C) = n$. Quitte à changer ε_C en $-\varepsilon_C$ et m_C en $-m_C$, on suppose que $\varepsilon_C = \varepsilon|_C$ pour toute cellule C.

Alors les restrictions à $C \cap C'$ de $[m_C, \varepsilon|_C]$ et $[m_{C'}, \varepsilon|_{C'}]$ coïncident avec $\mu|_{C\cap C'}$. D'après l'injectivité, déjà établie, appliquée sur $C \cap C'$, on a $m_C|_{C\cap C'} = m_{C'}|_{C\cap C'}$. Les sections m_C se recollent donc en une section $m \in \mathscr{M}(Y)$; par construction, on a $\theta_\varepsilon(m) = \mu$.

b) Il existe un G-recouvrement $\mathscr{C}$ de Y par des cellules tel que les orientations ε et ε' soient $\mathscr{C}$-fines. Soit C une cellule appartenant à $\mathscr{C}$. Si $\dim(C) = n$, alors $\varepsilon|_C$ est l'une des deux orientations de $\mathring{C}$, ainsi que $\varepsilon'|_C$; soit α_C l'unique élément de $\{\pm 1\}$ tel que $\varepsilon'|_C = \alpha_C \cdot \varepsilon_C$. Sinon, on a $\dim(C) < n$ et on pose $\alpha_C = 1$.

Soit C et C' des cellules appartenant à $\mathscr{C}$. Supposons que $\dim(C \cap C') = n$. Alors, $C \cap C'$ contient une cellule D de dimension n ; les applications $\mathrm{Or}(\mathring{C}) \to \mathrm{Or}(\mathring{D})$ et $\mathrm{Or}(\mathring{C}') \to \mathrm{Or}(\mathring{D})$ sont des isomorphismes de $\{\pm 1\}$-torseurs, donc $\alpha_C = \alpha_{C'}$. Il existe alors une unique section $\alpha \in (\mathscr{A}_{X_G}/\mathscr{I}_n)(Y)$ telle que $\alpha|_C = \alpha_C$ pour toute cellule C appartenant à $\mathscr{C}$. On a $\alpha^2 = 1$, donc α est inversible, et $\theta_{\varepsilon'}^{-1} = \alpha\theta_\varepsilon^{-1}$.

□

Corollaire 4.2.6. — *Il existe une unique structure de $\mathscr{A}_{X_G}/\mathscr{I}_n$-module sur le produit contracté $\mathscr{M} \times^{\{\pm 1\}} \mathrm{Or}_{X_G}$ telle que pour tout sous-espace paralinéaire Y et toute orientation ε de Y, l'application θ_ε soit linéaire.*

Démonstration. — Le lemme précédent entraîne immédiatement l'existence et l'unicité d'une telle structure de module au-dessus de tout sous-espace paralinéaire Y de X qui possède une orientation. L'assertion en découle, car X est G-recouvert par de tels sous-espaces. □

§ 4.3. FORMES-VOLUME SUR UN ESPACE PARALINÉAIRE

4.3.1. — On appelle *espace paralinéaire de niveau n* un espace paralinéaire de dimension $\leqslant n$. Dans cette terminologie, l'entier n est une *donnée* attachée à l'espace paralinéaire considéré et non une simple propriété de cet espace. En particulier, les sous-espaces

paralinéaires d'un espace paralinéaire de niveau n seront considérés comme espaces paralinéaires de niveau n, même si leur dimension peut être strictement plus petite.

La théorie que nous introduisons ci-dessous est essentiellement vide lorsque les espaces sont de dimension $< n$, mais nos constructions ultérieures requerront la souplesse de ce langage, notamment lorsqu'interviennent des restrictions à des parties paralinéaires.

Définition 4.3.2. — *Soit $\mathscr{G}$ une classe de coefficients. Soit X un espace paralinéaire de niveau n. On appelle G-faisceau des formes-volume à coefficients dans $\mathscr{G}$ sur X le produit contracté*

$$|\mathscr{G}^{n,0}_{X_{\mathrm{G}}}| = \mathscr{G}^{n,0}_{X_{\mathrm{G}}} \times^{\{\pm 1\}} \mathrm{Or}_{X_{\mathrm{G}}}\,.$$

L'espace $\mathbf{R}^n$ est muni de la forme-volume canonique $\omega^n_{\mathbf{R}}$ associée à la forme $\mathrm{d}'x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'x_n$ et à l'orientation canonique.

4.3.3. — Le G-faisceau sur X des formes-volume à coefficients dans $\mathscr{G}$ est un $\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}/\mathscr{I}_n\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}$-module G-localement libre de rang 1 (proposition 4.1.7 et lemme 4.2.5).

Lorsque X est paracompact, ces résultats prouvent en fait que ce G-faisceau est libre de rang 1 et en fournissent une classe explicite de bases. Rappelons leur description.

Soit $\mathscr{C}$ une décomposition cellulaire de X et, pour toute cellule $C \in \mathscr{C}$, soit $f_C\colon C \to \mathbf{R}^n$ un isomorphisme de C sur une cellule de $\mathbf{R}^n$. Pour tout $C \in \mathscr{C}_n$, on dispose de la $(n,0)$-forme $f_C^*(\mathrm{d}'x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'x_n)$ sur C et de l'orientation ε_C de C déduite de celle de $\mathbf{R}^n$ via f_C ; notons ω_C la n-forme volume associée sur C. Lorsque $C \in \mathscr{C}$ est de dimension $< n$, on pose $\omega_C = 0$. La famille $(\omega_C)_{C\in\mathscr{C}}$ définit une n-forme volume sur X qui est une base du G-faisceau des n-formes-volume. On dira qu'une telle n-forme-volume est standard.

Soit α une autre base standard, associée à une décomposition cellulaire $\mathscr{D}$ et à une famille (g_C) d'isomorphismes. Soit $C \in \mathscr{C}$ et $D \in \mathscr{D}$ des cellules telles que $\dim(C \cap D) = n$; on a $\alpha_D|_{C\cap D} = |J_{g_D/f_C}|\omega_C$, où J_{g_D/f_C} désigne le jacobien relatif de l'immersion de $C \cap D$ donnée par g_D par rapport à celle donnée par f_C.

Cela prouve que deux formes-volume standard diffèrent par multiplication par un élement G-localement constant strictement positif de $\mathscr{F}_{X_{\mathrm{G}}}/\mathscr{I}_n\mathscr{F}_{X_{\mathrm{G}}}$.

Définition 4.3.4. — *Soit $\mathscr{G}$ une classe de coefficients. Soit X un espace paralinéaire de niveau n et soit ω une forme-volume sur X. On dit que ω est* positive *si pour tout sous-espace paracompact Y de X et toute forme-volume standard α sur Y, l'unique élément u de $\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}/\mathscr{I}_n\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}(Y)$ tel que $\omega = u\alpha$ est positif.*

C'est une propriété G-locale.

4.3.5. — Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme d'espaces paralinéaires de niveau n. En revenant à la définition d'un morphisme paralinéaire (1.8.8), on voit qu'il existe un G-recouvrement (X_i) de X et un G-recouvrement (Y_j) de Y par des cellules vérifiant la propriété suivante : pour tout i, il existe j tel que $f(X_i) \subset Y_j$ et tel que, soit $\dim(f(X_i)) < n$, soit f est un isomorphisme de X_i sur un sous-espace paralinéaire de Y_j.

Soit ω une forme-volume sur Y à coefficients dans une classe de coefficients $\mathscr{G}$. Pour tout j, soit ε_j une orientation de Y_j et soit ω_j la n-forme sur Y_j telle que $\omega|_{Y_j} = [\omega_j, \varepsilon_j]$. Il existe une unique forme-volume à coefficients dans $\mathscr{G}$ sur X que l'on note $f^*\omega$ dont la restriction à X_i est nulle si $\dim(X_i) < n$, et vaut $[f^*\omega_j, f^*\varepsilon_j]$ sinon. Elle ne dépend pas des choix faits.

Si la forme-volume ω est positive, il en est de même de $f^*\omega$.

L'application $\omega \mapsto f^*\omega$ est un morphisme de faisceaux

$$f^* \colon |\mathscr{G}^{n,0}_{Y_{\mathrm{G}}}| \to f_*|\mathscr{G}^{n,0}_{X_{\mathrm{G}}}|.$$

4.3.6. — Soit $f \colon X \to Y$ une immersion par morceaux compacte d'espaces paralinéaires de niveau n. Soit $\mathscr{G}$ une classe de coefficients. Nous allons construire un morphisme de faisceaux

$$f_* \colon f_*|\mathscr{G}^{n,0}_{X_{\mathrm{G}}}| \to |\mathscr{G}^{n,0}_{Y_{\mathrm{G}}}|.$$

Soit U un sous-espace paralinéaire paracompact de Y. Alors, $f_U \colon f^{-1}(U) \to U$ est une immersion par morceaux compacte et $f^{-1}(U)$ est paracompact. D'après la proposition 2.3.6, il existe un couple $(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ de décompositions cellulaires qui est adapté à f. Soit ω une forme-volume sur $f^{-1}(U)$. Soit D une cellule de $\mathscr{D}$ telle que $\dim(D) = n$. L'ensemble des cellules $C \in \mathscr{C}_n$ telles que $f(C) = D$ est fini ; pour toute telle cellule C, $f|_C$ induit un isomorphisme de C sur D, de sorte que $\omega|_C$ induit une forme-volume sur D. Notons $f_*\omega_D$ la somme de ces formes-volume. Il existe une unique forme-volume $f_*\omega$ sur U dont la restriction à toute n-cellule $D \in \mathscr{D}$ est égale à $f_*\omega_D$.

Cette construction est compatible au raffinement des décompositions cellulaires et, par suite, aux restrictions ; elle fournit le morphisme de faisceaux annoncé.

Si la forme-volume ω est positive, il en est de même de $f_*\omega$.

Si f est injective, alors $f^*(f_*\omega) = \omega$; nous dirons que $f_*\omega$ est le *prolongement par zéro* de la forme-volume ω. Notons que ω est positive (resp. nulle) si et seulement si $f_*\omega$ l'est.

4.3.7. — Soit X un espace paralinéaire et soit n un entier. L'ensemble des sous-espaces paralinéaires Σ de X, fermés et de dimension $\leqslant n$, est un ensemble ordonné filtrant ; si $j \colon \Sigma \to \mathrm{T}$ est une inclusion, on dispose d'une application $j_* \colon |\mathscr{G}^{n,0}|(\Sigma) \to |\mathscr{G}^{n,0}|(\mathrm{T})$. Ces applications font de la famille $(|\mathscr{G}^{n,0}|(\Sigma))$ un système inductif dont la limite est notée $\mathscr{V}^{\mathscr{G},n}_{\mathrm{pf}}(X)$, ou $\mathscr{V}^n_{\mathrm{pf}}(X)$ s'il n'y pas d'ambiguïté possible quant à la classe $\mathscr{G}$. Plus généralement, cette construction définit un préfaisceau $\mathscr{V}^{\mathscr{G},n}_{X_{\mathrm{G}},\mathrm{pf}}$ sur X_{G}.

Pour tout Σ, l'application canonique de $|\mathscr{G}^{n,0}|(\Sigma)$ dans $\mathscr{V}^n_{\mathrm{pf}}(X)$ est injective.

On notera $\mathscr{V}^{\mathscr{G},n}_{X_{\mathrm{G}}}$ (ou $\mathscr{V}^n_{X_{\mathrm{G}}}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la classe $\mathscr{G}$) le G-faisceau associé sur X_{G} et on dira que c'est le *faisceau des formes-volume n-dimensionnelles* à coefficients dans $\mathscr{G}$ sur X_{G}.

Notons que si $\dim(X) \leqslant n$, alors $\mathscr{V}^n_{\mathrm{pf}} = |\mathscr{G}^{n,0}_{X_{\mathrm{G}}}|$, donc $\mathscr{V}^n = |\mathscr{G}^{n,0}_{X_{\mathrm{G}}}|$.

Lemme 4.3.8. — *Soit X un espace paralinéaire, soit n un entier.*

a) *Soit Σ et Σ' des sous-espaces paralinéaires de X, fermés et de dimension $\leqslant n$, soit ω et ω' des formes-volume n-dimensionnelles sur Σ et Σ' respectivement, notons j et j' les injections de $\Sigma \cap \Sigma'$ dans Σ et Σ' respectivement. Pour que les classes de ω et ω' soient égales dans $\mathscr{V}^n_{\mathrm{pf}}(X)$, il faut et il suffit que les relations*

$$\omega|_{\Sigma\cap\Sigma'} = \omega'|_{\Sigma\cap\Sigma'}, \qquad \omega = j_*\omega|_{\Sigma\cap\Sigma'}, \quad \text{et} \quad \omega' = j'_*\omega|_{\Sigma\cap\Sigma'}$$

soient satisfaites.

b) *Le préfaisceau $\mathscr{V}^n_{\mathrm{pf}}$ sur X_{G} est séparé.*

c) *Si X est paracompact, $\mathscr{V}^n_{\mathrm{pf}}$ est un faisceau.*

Démonstration. — a) Ces relations entraînent que les classes de ω et ω' sont toutes deux égales à celle de $\omega|_{\Sigma\cap\Sigma'}$. Supposons inversement que les classes de ω et ω' soient égales. Soit T un sous-espace paralinéaire contenant Σ et Σ' tel que $i_*\omega = i'_*\omega'$, où i et i' désignent les inclusions de Σ et Σ' dans T. Pour prouver les relations demandées, on peut

raisonner G-localement et donc supposer que T possède une décomposition cellulaire compatibles aux sous-espaces Σ, Σ' et $\Sigma \cap \Sigma'$. L'égalité se vérifie alors directement cellule par cellule et découle directement de la définition des images directes des formes.

b) Cela résulte immédiatement de ce que la véracité des trois relations de (1) est une propriété G-locale.

c) Soit $(X_i)_{i\in I}$ un G-recouvrement de X, pour tout i, soit Σ_i un sous-espace paralinéaire de X_i, fermé dans X_i et de dimension $\leqslant n$, et soit ω_i une forme-volume n-dimensionnelle sur Σ_i. Supposons que pour tout couple (i,j), les images de ω_i et ω_j dans $\mathscr{V}^n_{\mathrm{pf}}(X_i \cap X_j)$ coïncident et démontrons qu'il existe un sous-espace paralinéaire Σ de X, fermé et de dimension $\leqslant n$, et une forme-volume ω sur Σ dont la classe dans $\mathscr{V}^n(X_i)$ est celle de ω_i.

Comme le préfaisceau $\mathscr{V}^n_{\mathrm{pf}}$ est séparé, on peut raffiner le G-recouvrement (X_i) et, en particulier, le supposer localement fini.

Soit $(V_j)_{j\in J}$ un recouvrement localement fini de X par des parties compactes dont les intérieurs recouvrent X ; il en existe car X est paracompact. C'est a fortiori un G-recouvrement. Pour tout j, il existe une partie *finie* I_j de I telle que $\bigcup_{i\in I_j} X_i$ contient V_j. La famille $(X_i \cap V_j)$ indexée par l'ensemble des couples (i,j) tels que $j \in J$ et $i \in I_j$ est un G-recouvrement localement fini de X, plus fin que le recouvrement (X_i) initial.

Soit Σ la réunion des parties Σ_i ; c'est une partie paralinéaire de X, fermée et de dimension $\leqslant n$; de plus, la famille (Σ_i) est un G-recouvrement de Σ. D'après les relations de (1), on a $\omega_i|_{\Sigma_i\cap\Sigma_j} = \omega_j|_{\Sigma_i\cap\Sigma_j}$, pour tout couple (i,j). Il existe donc une n-forme-volume ω sur Σ dont la restriction à Σ_i est égale à ω_i, pour tout i. Fixons i et démontrons que les classes de $\omega|_{\Sigma_i}$ et de ω_i coïncident dans $\mathscr{V}^n_{\mathrm{pf}}(X_i)$. Notons f l'injection de Σ_i dans $\Sigma \cap X_i$; il suffit de démontrer l'égalité $\omega|_{\Sigma\cap X_i} = f_*\omega_i$ de n-formes-volume sur $\Sigma \cap X_i$. Comme le préfaisceau $\mathscr{V}^n_{\mathrm{pf}}$ est séparé, il suffit de vérifier cette égalité après restriction à $\Sigma_j \cap X_i$, pour tout j.

Notons α la n-forme-volume $\omega|_{\Sigma_i\cap\Sigma_j}$. Comme les classes de ω_i et ω_j dans $\mathscr{V}^n(X_i \cap X_j)$ coïncide, la forme-volume $\omega_i|_{\Sigma_i\cap X_j}$ est le prolongement par zéro de $\omega_i|_{\Sigma_i\cap\Sigma_j} = \alpha$, et $\omega_j|_{\Sigma_j\cap X_i}$ est le prolongement par zéro de α. Ainsi, $\omega|_{\Sigma_j\cap X_i} = \omega_j|_{\Sigma_j\cap X_i}$ est le prolongement par zéro de $\omega_j|_{\Sigma_i\cap\Sigma_j} = \alpha$. D'autre part, $(f_*\omega_i)|_{\Sigma_j\cap X_i}$ est le prolongement par zéro de $\omega_i|_{\Sigma_i\cap\Sigma_j} = \alpha$. Cela démontre l'égalité requise et termine la démonstration du lemme. □

4.3.9. — Soit $f\colon X \to Y$ une immersion par morceaux d'espaces linéaires par morceaux. On a alors un morphisme d'image réciproque $f^*\colon \mathscr{V}^n_{Y_{\mathrm{G}}} \to f_*\mathscr{V}^n_{X_{\mathrm{G}}}$, déduit du morphisme défini dans le paragraphe 4.3.5 lorsque $\dim(X) \leqslant n$. Si, de plus, f est compacte, on a un morphisme d'image directe $f_*\colon f_*\mathscr{V}^n_{X_{\mathrm{G}}} \to \mathscr{V}^n_{Y_{\mathrm{G}}}$, déduit du morphisme défini dans le paragraphe 4.3.6 lorsque $\dim(X) \leqslant n$. Dans les deux cas le point clé est que ces opérations commutent au prolongement par zéro.

§ 4.4. MESURE ASSOCIÉE À UNE FORME-VOLUME

4.4.1. — Soit X un espace paralinéaire de niveau n. Soit ω une forme-volume dimensionnelle à coefficients boréliens sur X. Le but de ce paragraphe est de lui associer une mesure (positive) de Borel régulière ω_{Bor} sur X et, si cette mesure est localement finie,

une mesure de Radon ω_{Rad} sur X dont ω_{Bor} est la valeur absolue. Ces constructions définiront de plus des morphismes de faisceaux.

4.4.2. — Soit X un espace paralinéaire de niveau n et soit $f\colon X \to \mathbf{R}^n$ une immersion d'espaces paralinéaires. On note $\lambda_{X,f}$ l'unique mesure de Radon positive sur X telle que $f_*(\lambda_{X,f})$ soit la restriction à $f(X)$ de la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$. En particulier, on a $\lambda_{X,f} = 0$ si $\dim(X) < n$.

4.4.3. — Soit X un espace paralinéaire de niveau n. Soit ω une forme-volume n-dimensionnelle sur X à coefficients boréliens.

a) Supposons d'abord qu'il existe une immersion linéaire par morceaux $f\colon X \to \mathbf{R}^n$ qui induit un isomorphisme de X sur un sous-espace paralinéaire de $\mathbf{R}^n$, une fonction borélienne $\alpha^\sharp$ sur un voisinage de $f(X)$ telle que $\omega = f^*(\alpha^\sharp \omega_{\mathbf{R}^n})$. Dans ce cas, on associe alors à ω la mesure de Borel $\omega_{\mathrm{Bor}} = f^*(|\alpha^\sharp|)\lambda_{X,f}$ sur X ; elle est positive et régulière.

Vérifions que cette mesure ne dépend pas des choix de f et $\alpha^\sharp$.

Soit donc $g\colon X \to \mathbf{R}^n$ un isomorphisme de X sur un sous-espace paralinéaire de $\mathbf{R}^n$ et soit $\beta^\sharp$ une fonction lisse sur un voisinage de $g(X)$ telle que $\omega = g^*(\beta^\sharp \omega_{\mathbf{R}^n})$. Démontrons que l'on a

$$f^*(\alpha^\sharp)\lambda_{X,f} = g^*(\beta^\sharp)\lambda_{X,g}.$$

On peut raisonner G-localement sur X, et donc que l'application $(f,g)\colon X \to \mathbf{R}^{2n}$ induit un isomorphisme de X sur une cellule.

Si $\dim(X) < n$, $\lambda_{X,f} = \lambda_{X,g} = 0$ et les deux membres de l'égalité à démontrer sont nuls.

Supposons donc que $\dim(X) = n$. Il existe alors un unique automorphisme affine de $\mathbf{R}^n$, u, tel que $g = u \circ f$. Notons J_u le jacobien de u. L'image directe par u de la mesure sur de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$ est égale à la mesure de Lebesgue divisée par $|J_u|$. On a $g_*(\lambda_{X,f}) = u_*(f_*(\lambda_{X,f}))$, donc $g_*(\lambda_{X,f})$ est la restriction à $g(X)$ la mesure de Lebesgue divisée par $|J_u|$. Par suite, $g_*(\lambda_{X,f}) = |J_u|^{-1} g_*(\lambda_{X,g})$, d'où

$$\lambda_{X,g} = |J_u|\lambda_{X,f}.$$

D'autre part, on a $u^*(\mathrm{d}'x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'x_n) = J_u(\mathrm{d}'x_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)$, d'où

$$g^*(\mathrm{d}'x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'x_n) = J_u f^*(\mathrm{d}'x_1 \wedge \cdots \wedge dx_n).$$

De plus, si ε est l'orientation canonique de $\mathbf{R}^n$, l'orientation $f^*\varepsilon$ de X est égale à l'orientation $g^*\varepsilon$ multipliée par le signe de J_u. On a donc

$$g^*\omega_{\mathbf{R}^n} = |J_u| f^*\omega_{\mathbf{R}^n}.$$

Il en résulte l'égalité

$$g^*(\beta^\sharp) = |J_u|^{-1} f^*(\alpha^\sharp).$$

L'égalité cherchée en découle.

b) Considérons, de plus, un sous-espace paralinéaire Y de X. Alors $f|_Y$ est une immersion de Y dans $\mathbf{R}^n$, $\alpha|_Y$ est une forme-volume sur Y et la mesure qui lui est associée est égale à la restriction à Y de la mesure α_{Bor}.

c) Les mesures de Borel régulières sur X formant un faisceau pour la G-topologie (proposition A.3.12, on en déduit que lorsque Y parcourt l'ensemble des sous-espaces paralinéaires de X tels qu'il existe un couple $(f, \alpha^\sharp)$ comme ci-dessus, les mesures $(\omega|_Y)_{\mathrm{Bor}}$ construites se recollent en une mesure de Borel, positive et régulière, ω_{Bor} sur X.

d) On vérifie enfin immédiatement que l'application $\omega \mapsto \omega_{\mathrm{Bor}}$ est un morphisme de faisceaux de $|\mathscr{B}^{n,0}_{X_{\mathrm{G}}}|$ dans $\mathscr{M}_{\mathrm{Bor},X}$.

4.4.4. — On dit que la forme-volume ω est *localement intégrable* si la mesure ω_{Bor} est localement finie. Notons $|\mathscr{B}^{n,0}_{X_{\mathrm{G}},\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}}|$ le sous-faisceau de $|\mathscr{B}^{n,0}_{X_{\mathrm{G}}}|$ dont les sections sont les formes-volume localement intégrables. C'est un sous $\mathscr{A}_{X_{\mathrm{G}}}$-module de $|\mathscr{B}^{n,0}_{X_{\mathrm{G}}}|$.

Supposons que ω soit localement intégrable et construisons une mesure de Radon ω_{Rad} dont ω_{Bor} est la valeur absolue. Reprenons pour cela chaque étape de la construction précédente.

Supposons d'abord qu'il existe une immersion linéaire par morceaux $f\colon X \to \mathbf{R}^n$ qui induit un isomorphisme de X sur un sous-espace paralinéaire de $\mathbf{R}^n$, une fonction borélienne $\alpha^\sharp$ sur un voisinage de $f(X)$ telle que $\omega = f^*(\alpha^\sharp \omega_{\mathbf{R}^n})$. Dans ce cas, la formule $\omega_{\mathrm{Rad}} = f^*(\alpha^\sharp)\lambda_{X,f}$ définit une mesure de Radon sur X telle que $|\omega_{\mathrm{Rad}}| = \omega_{\mathrm{Bor}}$.

Les arguments qui montraient que la mesure ω_{Bor} ne dépend pas des choix de f et $\alpha^\sharp$ prouvent qu'il en est de même pour la mesure de Radon ω_{Rad}.

Les arguments des étapes *b*) et *c*) prouvent alors que lorsque Y parcourt l'ensemble des sous-espaces paralinéaires de X tels qu'il existe un couple $(f, \alpha^\sharp)$ comme ci-dessus, les mesures $(\omega|_Y)_{\mathrm{Rad}}$ construites se recollent en une mesure de Radon ω_{Rad} sur X. On a $|\omega_{\mathrm{Rad}}| = \omega_{\mathrm{Bor}}$.

Le morphisme $\omega \mapsto \omega_{\mathrm{Rad}}$ du faisceau $|\mathscr{B}^{n,0}_{X_{\mathrm{G}},\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}}|$ dans le faisceau $\mathscr{M}_{\mathrm{Rad},X}$ des mesures de Radon sur X est $\mathscr{A}_{X_{\mathrm{G}}}$-linéaire.

Bien sûr, toute forme-volume à coefficients mesurables et localement bornés, en particulier toute forme-volume lisse est localement intégrable.

Si ω est une n-forme-volume positive localement intégrable, la mesure de Radon associée est positive.

Lemme 4.4.5. — *Soit $f\colon Y \to X$ une immersion par morceaux d'espaces paralinéaires de niveau n. Soit α une forme-volume à coefficients boréliens sur X. On a l'égalité $(f^*\alpha)_{\mathrm{Bor}} = f^*(\alpha_{\mathrm{Bor}})$ de mesures de Borel régulières positives sur Y. Si α est localement intégrable, alors $f^*\alpha$ est localement intégrable et l'on a l'égalité $(f^*\alpha)_{\mathrm{Rad}} = f^*(\alpha_{\mathrm{Rad}})$ de mesures de Radon sur Y.*

Comme f est une immersion par morceaux, l'image inverse de la mesure de Borel régulière α_{Bor} par f est définie G-localement (*cf.* A.3.13) ; de même pour les mesures de Radon.

Démonstration. — L'espace Y est G-recouvert par des cellules C telles que f induise un isomorphisme de C sur son image, laquelle possède une immersion paralinéaire dans $\mathbf{R}^n$. L'assertion découle alors de la construction de ces mesures. □

Lemme 4.4.6. — *Soit $f\colon Y \to X$ une immersion par morceaux compacte d'espaces paralinéaires de niveau n. Soit α une forme-volume à coefficients boréliens sur Y. On a une inégalité $(f_*\alpha)_{\mathrm{Bor}} \leqslant f_*(\alpha_{\mathrm{Bor}})$ de mesures de Borel régulières positives sur X, qui est une égalité si f est injective. Si α est localement intégrable, alors $f_*\alpha$ est localement intégrable et l'on a l'égalité $(f_*\alpha)_{\mathrm{Rad}} = f_*(\alpha_{\mathrm{Rad}})$ de mesures de Radon sur X.*

Démonstration. — En raisonnant localement, on se ramène au cas où X est paracompact. Soit $(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ un couple de décompositions cellulaires qui est adapté à f. Après restriction à toute cellule D de $\mathscr{D}$, les assertions découlent directement des définitions des mesures et des images directes. □

4.4.7. — Soit X un espace paralinéaire et soit n un entier. En vertu du lemme 4.4.6, les constructions précédentes induisent un morphisme de faisceaux $\lambda_{\mathrm{Bor}} \colon \mathscr{V}^n_{X_{\mathrm{G}}} \to \mathscr{M}_{\mathrm{Bor},X}$ et un morphisme $\mathscr{A}_{X_{\mathrm{G}}}$-linéaire λ_{Rad} du sous-faisceau de $\mathscr{V}^n_{X_{\mathrm{G}}}$ des formes-volume n-dimensionnelles à coefficients boréliens dont l'image est une mesure localement finie dans le faisceau $\mathscr{M}_{\mathrm{Rad},X}$ des mesures de Radon sur X.

La formation de λ_{Bor} commute aux immersions par morceaux injectives ; celle de λ_{Rad} commute aux immersions par morceaux compactes. En particulier, les deux commutent au prolongement par zéro.

§ 4.5. CALIBRAGES ET INTÉGRALES DES (n, n)-FORMES

Définition 4.5.1. — *Soit $\mathscr{G}$ une classe de coefficients. Soit X un espace paralinéaire de niveau n. Le G-faisceau dual*

$$\mathscr{H}om_{X_{\mathrm{G}}}(|\mathscr{G}^{n,0}_{X_{\mathrm{G}}}|, \mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}/\mathscr{I}_n\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}})$$

du faisceau des formes-volume sur X est appelé faisceau des calibrages *sur X (à coefficients dans $\mathscr{G}$).*

Lorsque l'espace X est paracompact, le faisceau des formes-volume et son dual sont libres de rang 1. Si ω est une forme-volume standard, il existe un unique calibrage μ tel que $\mu(\omega) = 1$; ces calibrages sont appelés standard. Par définition, un calibrage est standard s'il applique toute forme-volume standard définie sur un sous-espace paralinéaire sur une section G-localement constante de $\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}/\mathscr{I}_n\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}$ et strictement positive. il suffit de le vérifier G-localement pour *une* forme standard.

En général, le G-faisceau des calibrages sur X est G-localement libre de rang 1 sur $\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}/\mathscr{I}_n\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}$. On dira qu'un calibrage est G-localement constant (resp. positif, resp. ...) s'il est G-localement multiple d'un calibrage standard par une section G-localement constante (resp. positive, resp. ...) de $\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}/\mathscr{I}_n\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}$.

Exemple 4.5.2. — Soit X un espace paralinéaire de niveau n, paracompact.

Soit $\mathscr{C}$ une décomposition cellulaire de X ; pour toute cellule C appartenant à $\mathscr{C}$, soit f_C un isomorphisme de C sur une cellule d'un espace affine V_C. Pour toute cellule $C \in \mathscr{C}_n$, choisissons une orientation ε_C de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\langle f_C(C)\rangle}$ et une fonction μ_C de classe $\mathscr{G}$ de $f_C(C)$ dans l'espace $|\Lambda^n\overrightarrow{\langle f_C(C)\rangle}|$ des vecteurs-volumes sur cet espace vectoriel ; soit alors μ'_C l'unique fonction de $f_C(C)$ à valeurs dans $\Lambda^n\overrightarrow{\langle f_C(C)\rangle}$ tel que μ_C soit la classe de (μ'_C, ε_C).

Il existe alors un unique calibrage μ de X tel que pour toute cellule C de dimension n et tout élément $\omega \in A^{n,0}(\overrightarrow{\langle f_C(C)\rangle})$, $\mu(f_C^*[\omega, \varepsilon_C])$ soit la classe dans $\mathscr{G}/\mathscr{I}_n\mathscr{G}(C)$ de la fonction déduite de (ω, μ'_C) par l'accouplement de dualité entre $A^{n,0}(\overrightarrow{\langle f_C(C)\rangle})$ et $\Lambda^n\overrightarrow{\langle f_C(C)\rangle}$ et composition par f_C. On résume cette propriété en écrivant $\mu|_C = f_C^*\mu_C$.

Si les fonctions μ_C sont constantes (resp. positives, resp. ...), alors le calibrage μ est G-localement constant (resp. positif, resp. ...).

Pour tout calibrage μ sur X, il existe une décomposition cellulaire $\mathscr{C}$, une famille (f_C) d'isomorphismes et une famille (μ_C) qui définissent μ comme ci-dessus.

Si le calibrage μ est G-localement constant (resp. positif), on peut en outre exiger que pour toute cellule C de dimension n, la fonction μ_C soit constante (resp. positive) sur C.

Si X est muni d'une immersion par morceaux $f\colon X \to V$ vers un espace affine, on peut aussi exiger que $f_C = f|_C$ pour toute cellule C.

En particulier, si X est un sous-espace paralinéaire d'un espace affine V, il existe une décomposition cellulaire forte $\mathscr{C}$ de X telle que pour toute cellule $C \in \mathscr{C}$, le calibrage $\mu|_C$ soit donné par une fonction $\mu_C\colon C \to |\Lambda^n\overrightarrow{\langle C\rangle}|$. On dira alors que la décomposition cellulaire $\mathscr{C}$ est adaptée au calibrage μ.

4.5.3. — Soit $f\colon X \to Y$ une immersion par morceaux d'espaces paralinéaires de niveau n et soit ν un calibrage de Y. Soit P un sous-espace paralinéaire de X tel que f induit un isomorphisme de P sur son image. Le calibrage $\nu|_{f(P)}$ induit alors un calibrage $(f^*\nu)_P$ de P. Il existe un unique calibrage $f^*\nu$ de X dont la restriction à P est égal à $(f^*\nu)_P$, pour toute cellule P comme ci-dessus.

Si le calibrage ν est positif (resp. strictement positif), il en est de même du calibrage $f^*\nu$.

Si le calibrage ν est G-localement constant, il en est de même du calibrage $f^*\nu$.

4.5.4. — Supposons $f\colon X \to Y$ une immersion par morceaux propre d'espaces paralinéaires de niveau n et soit μ un calibrage de X. Nous allons construire un calibrage $f_*\mu$ sur Y.

Supposons d'abord que Y est paracompact. Il en est alors de même de X car f est propre. Soit $(\mathscr{C},\mathscr{D})$ un couple de décompositions cellulaires adapté à l'immersion f (prop. 2.3.6). Soit D une cellule de dimension n de $\mathscr{D}$. L'ensemble des cellules $C \in \mathscr{C}$ telles que $f(C) = D$ est fini. Pour toute telle cellule C, f induit un isomorphisme de C sur D. Notons ν_D la somme des calibrages de D induit par les calibrages μ_C pour toutes ces cellules C. La famille $(\nu_D)_{D\in\mathscr{D}}$ définit un calibrage ν de Y.

Soit Y' un sous-espace paralinéaire de Y, soit $X' = f^{-1}(Y')$, soit $f'\colon X' \to Y'$ l'immersion par morceaux déduite de f par restriction ; elle est propre. Soit $(\mathscr{C}',\mathscr{D}')$ un couple de décompositions cellulaires adapté à f' et soit ν' le calibrage de Y' déduit de $\mu|_{X'}$ par la construction précédente.

Démontrons que l'on a $\nu' = \nu|_{Y'}$. Il suffit de vérifier que pour toute cellule Δ de Y' on a $\nu'|_\Delta = \nu|_\Delta$. Les intersections $(\Delta \cap D \cap D')$ pour $D \in \mathscr{D}$ et $D' \in \mathscr{D}'$ forment un G-recouvrement de Δ. Il suffit donc de démontrer que l'assertion lorsqu'il existe des cellules $D \in \mathscr{D}$ et $D' \in \mathscr{D}'$ telles que $\Delta \subset D \cap D'$. Pour toute cellule $C \in \mathscr{C}$ tel que $f(C) = D$, f induit un isomorphisme de $f^{-1}(\Delta) \cap C$, et l'ensemble $f^{-1}(\Delta)$ est la réunion de ces sous-espaces $f^{-1}(\Delta) \cap C$; de plus, $f^{-1}(\mathring{\Delta})$ est la réunion disjointe des $f^{-1}(\mathring{\Delta}) \cap C$. Par suite $\nu|_\Delta$ est la somme, pour ces cellules C, des calibrages de Δ déduits de $\mu|_{f^{-1}(\Delta)\cap C}$ au moyen de f. Par ailleurs, $\nu'|_\Delta$ se décrit de façon analogue en remplaçant D par D', f par f', et les cellules C par les cellules $C' \in \mathscr{C}'$ telles que $f(C') = D'$. Soit x un point de $\mathring{\Delta}$; il appartient à $\mathring{D}$ et à $\mathring{D}'$. Tout point de $f^{-1}(x)$ appartient à une unique cellule $C \in \mathscr{C}$ telle que $f(C) = D$, et à une unique cellule $C' \in \mathscr{C}'$ telle que $f(C') = D'$, et l'on a $f^{-1}(\Delta)\cap C = f^{-1}(\Delta)\cap C'$. Les deux sommes définissant $\nu|_\Delta$ et $\nu'|_\Delta$ s'identifient alors terme à terme.

Revenons à la situation générale, où Y n'est plus supposé paracompact. Il résulte de ce qui précède qu'il existe un unique calibrage de Y, que l'on note $f_*\mu$, tel que pour tout sous-espace paralinéaire paracompact Y' et tout couple $(\mathscr{C}',\mathscr{D}')$ de décompositions

cellulaires adapté à $f|_{Y'}\colon f^{-1}(Y') \to Y'$, la restriction à Y' de $f_*\mu$ soit égale au calibrage de Y' construit comme ci-dessus.

Si le calibrage μ est positif (resp. strictement positif), il en est de même du calibrage $f_*\mu$.

Si le calibrage μ est G-localement constant, il en est de même du calibrage $f_*\mu$.

4.5.5. — Soit X un espace paralinéaire de niveau n muni d'un calibrage μ à coefficients dans une classe de coefficients $\mathscr{G}$. Ce calibrage est un morphisme de $|\mathscr{G}^{n,0}_{X_{\mathrm{G}}}|$ dans $\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}/\mathscr{I}_n\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}$. Par composition avec l'opérateur J, il induit un morphisme $\mathscr{G}^{0,n}_{X_{\mathrm{G}}}$ dans $(\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}/\mathscr{I}_n\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}) \times^{\{\pm 1\}} \mathrm{Or}_{X_{\mathrm{G}}}$. Par produit tensoriel avec $\mathscr{G}^{n,0}_{X_{\mathrm{G}}}$, et en le multipliant par $(-1)^{n(n-1)/2}$, on en déduit alors un homomorphisme

$$\mathscr{G}^{n,n}_{X_{\mathrm{G}}} \to \mathscr{V}^n_{X_{\mathrm{G}}}, \qquad \omega \mapsto \langle \omega, \mu \rangle$$

du faisceau des (n,n)-formes vers celui des n-formes-volume sur X.

Lorsque ω est une (n,n)-forme positive et le calibrage μ est positif, la forme-volume n-dimensionnelle $\langle \omega, \mu \rangle$ est positive.

4.5.6. — Soit X un espace paralinéaire de niveau n muni d'un calibrage μ à coefficients boréliens. Soit ω une (n,n)-forme sur X à coefficients boréliens. Compte tenu des constructions du §4.4, nous disposons donc d'une mesure de Borel régulière $\langle |\omega|, |\mu| \rangle = \langle \omega, \mu \rangle_{\mathrm{Bor}}$ sur X.

Si cette mesure est localement finie on dira que ω est localement μ-intégrable (c'est par exemple le cas si μ et ω sont à coefficients localement bornés). Dans ce cas, on dispose alors d'une mesure de Radon $\langle \omega, \mu \rangle_{\mathrm{Rad}}$, que l'on notera souvent $\langle \omega, \mu \rangle$ par abus, et dont la valeur absolue est la mesure $\lambda_{\langle |\omega|, |\mu| \rangle}$. Cette mesure est positive si le calibrage μ et la forme ω sont positifs.

Les (n,n)-formes localement μ-intégrables forment un sous-faisceau en $\mathscr{B}_{X_{\mathrm{G}}}$-module de $\mathscr{B}^{n,n}_{X_{\mathrm{G}}}$, et l'application $\omega \mapsto \langle \omega, \mu \rangle$ est linéaire.

On dira enfin que le calibrage μ est localement intégrable si toute forme à coefficients localement bornés est localement μ-intégrable. Sur une cellule, cela revient à dire que le calibrage est produit d'un calibrage standard par une fonction localement intégrable. Les calibrages G-localement constants sont localement intégrables.

Exemple 4.5.7. — Lorsque X est un sous-espace affine de dimension n d'un espace affine V, ω une forme lisse sur X et μ un vecteur-volume sur X, on retrouve la notion d'intégrale définie dans le paragraphe 1.5.3 à partir des idées de Lagerberg.

D'une certaine manière, les constructions de ce chapitre visaient simplement à « G-faisceautiser » cette formule élémentaire de Lagerberg sur un espace affine.

Proposition 4.5.8. — *Soit $f\colon Y \to X$ une immersion par morceaux propre d'espaces paralinéaire de niveau n.*

a) *Pour toute (n,n)-forme ω sur X et tout calibrage μ de Y, on a l'égalité $f_*\langle f^*\omega, \mu \rangle = \langle \omega, f_*\mu \rangle$ de formes-volume n-dimensionnelles sur X.*

b) *Pour toute (n,n)-forme ω sur Y et tout calibrage μ de X, on a l'égalité $\langle f_*\omega, \mu \rangle = f_*\langle \omega, f^*\mu \rangle$ de formes-volume n-dimensionnelles sur X.*

Démonstration. — En raisonnant localement, on se ramène au cas où X est paracompact. Il existe alors un couple $(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ de décompositions cellulaires qui est adapté à f.

Les assertions indiquées se vérifient alors, cellule par cellule, à partir des constructions des intégrales et de la définition du calibrage $f_*\mu$ (resp. du calibrage $f^*\mu$). □

§ 4.6. CALIBRAGES ET INTÉGRALES DES $(n-1,n)$-FORMES

4.6.1. — Soit $\mathscr{G}$ une classe de coefficients. Soit X un espace paralinéaire de niveau n, soit μ un calibrage sur X et soit ω une forme de type $(n-1,n)$ à coefficients dans $\mathscr{G}$.

Supposons que X soit paracompact et considérons un atlas cellulaire $(\mathscr{C},f)$ tel que pour toute cellule C de dimension n de X, f_C soit un isomorphisme de C sur une cellule forte de $\mathbf{R}^n$, le calibrage $\mu|_C$ soit de la forme $f_C^*\mu_C$, où μ_C est une fonction de $f_C(C)$ dans $\Lambda^n\mathbf{R}^n$, identifié à $|\Lambda^n\mathbf{R}^n|$ en munissant $\mathbf{R}^n$ de son orientation canonique (cf. §4.5.2), et $\omega|_C$ est de la forme $f_C^*(\alpha_C)$, où $\alpha_C \in \mathscr{G}^{n-1,n}_{f_C(C)}(f_C(C))$.

Soit F une cellule de dimension $n-1$ appartenant à $\mathscr{C}$. Soit $C \in \mathscr{C}$ une n-cellule adjacente à F. Par définition d'un atlas cellulaire, $f_C(F)$ est une cellule forte de $\mathbf{R}^n$; munissons-la de l'orientation ε_F déduite de celle de $\mathbf{R}^n$ par la règle de la normale sortante à $f_C(C)$. Par contraction par μ_C et multiplication par $(-1)^{n(n-1)/2}$, on déduit de α_C une $(n-1,0)$-forme sur $f_C(C)$; on la restreint à $f_C(F)$, on la transforme en forme-volume par le choix de l'orientation ε_F de $f_C(F)$, et on la rapatrie sur F au moyen de l'isomorphisme f_C. On obtient ainsi une forme-volume à coefficients dans $\mathscr{G}$ sur F, que l'on note $\langle\omega,\mu\rangle|_{(F,C)}$. Elle est inchangée lorsqu'on compose f_C par un automorphisme affine de $\mathbf{R}^n$.

Soit $\mathscr{C}_{n-1}$ la réunion des cellules de dimension $\leqslant n-1$ de $\mathscr{C}$. C'est un sous-espace paralinéaire de X, de dimension $\leqslant n-1$. Il existe une unique forme-volume sur cet espace dont la restriction à une cellule F de dimension $n-1$ est la somme

$$\sum_{C\supset F}\langle\omega,\mu\rangle_{(F,C)},$$

où C parcourt l'ensemble des n-cellules de $\mathscr{C}$ adjacentes à F. On note $\langle\omega,\mu\rangle_{(\mathscr{C},f)}$ l'élément de $\mathscr{V}^{n-1}(X)$ défini par cette forme-volume. Il est à coefficients dans $\mathscr{G}$.

Lemme 4.6.2. — *Soit U un ouvert de X, soit $(\mathscr{D},g)$ un atlas cellulaire tel que les hypothèses de la construction précédente soient satisfaites pour $\omega|_U$ et le calibrage $\mu|_U$. Alors, la restriction à U de la forme-volume $\langle\omega,\mu\rangle_{(\mathscr{C},f)}$ est égale à la forme-volume $\langle\omega|_U,\mu|_U\rangle_{(\mathscr{D},g)}$.*

Démonstration. — Pour simplifier les notations, on note α la $(n-1)$-forme-volume sur $\mathscr{C}_{n-1}$ construite ci-dessus dont la classe est égale à $\langle\omega,\mu\rangle_{(\mathscr{C},f)}$ et β la $(n-1)$-forme-volume sur $\mathscr{D}_{n-1}$ dont la classe est $\langle\omega|_U,\mu_U\rangle_{(\mathscr{D},g)}$.

Commençons par traiter le cas où la décomposition cellulaire $\mathscr{D}$ raffine $\mathscr{C}$ et où, pour toute cellule D de dimension n de $\mathscr{D}$, on a $g_D = f_C|_D$, où C est l'unique cellule de $\mathscr{C}$ qui contient D.

Sous ces hypothèses, on a $\mathscr{C}_{n-1}\cap U \subset \mathscr{D}_{n-1}$; démontrons alors que β est le prolongement par zéro de $\alpha|_U$. Soit G une cellule de $\mathscr{D}$, de dimension $n-1$, et soit F l'unique cellule de $\mathscr{C}$ telle que $\mathring{G}\subset\mathring{F}$.

Supposons d'abord que $\dim(F)=n$. Comme U est ouvert dans X, la cellule G est adjacente à exactement deux cellules de dimension n de $\mathscr{D}$, disons D' et D'', toutes

deux contenues dans F. Dans la définition de β, les deux termes $\beta_{(G,D')}$ et $\beta_{(G,D'')}$ sont opposés, car ils sont donnés par la même $(n-1,0)$-forme sur G et les deux orientations opposées de F. Par suite, $\beta|_G = 0$. D'autre part, le prolongement par zéro de $\alpha|_U$ est nul sur G car $\mathring{G}$ est disjoint de $\mathscr{C}_{n-1}$.

Traitons maintenant le cas où $\dim(F) = n-1$. Toute n-cellule $D \in \mathscr{D}$ qui est adjacente à G est contenue dans une unique n-cellule C_D de $\mathscr{C}$ qui est adjacente à F. Comme U est ouvert dans X, on obtient ainsi une bijection de l'ensemble des n-cellules de $\mathscr{D}$ adjacentes à G sur l'ensemble des n-cellules de $\mathscr{C}$ adjacentes à F. Par construction, on a donc $\alpha|_G = \beta|_G$.

Ces relations prouvent que β est le prolongement par zéro de $\alpha|_{U\cap\mathscr{C}_{n-1}}$. En particulier, les formes-volume $(n-1)$-dimensionnelles sur U, $\langle\omega,\mu\rangle_{(\mathscr{C},f)}|_U$ et $\langle\omega|_U,\mu|_U\rangle_{(\mathscr{D},g)}$, sont égales.

Traitons maintenant le cas général. Soit $(\mathscr{D}',g')$ un atlas cellulaire adapté aux atlas $(\mathscr{C},f)$ et $(\mathscr{D},g)$. Soit D' une cellule de dimension n de $\mathscr{D}'$, soit $D \in \mathscr{D}$ et $C \in \mathscr{C}$ les uniques cellules contenant D'. Par construction, $g'_{D'}$ se déduit de $g_D|_{D'}$ et de $f_C|_{D'}$ par composition par des automorphismes affines de $\mathbf{R}^n$. D'après le cas déjà traité, on a

$$\langle\omega,\mu\rangle_{(\mathscr{C},f)}|_U = \langle\omega,\mu\rangle_{(\mathscr{D}',g')} = \langle\omega,\mu\rangle_{(\mathscr{D},g)},$$

d'où le lemme. □

4.6.3. — Il découle en particulier du lemme 4.6.2 que les formes-volume ainsi construites ne dépendent pas du choix du couple $(\mathscr{C},f)$, et que leur formation commute à la restriction à un sous-espace ouvert.

Il existe alors une unique forme-volume $(n-1)$-dimensionnelle sur X dont la restriction à tout *ouvert* paracompact U est donnée par la construction précédente. On la note $\langle\omega,\mu\rangle$; elle est à coefficients dans $\mathscr{G}$.

L'application $\omega \mapsto \langle\omega,\mu\rangle$ se prolonge en un morphisme de faisceaux $\mathscr{G}_{X_{\mathrm{G}}}$-linéaire de $\mathscr{G}_X^{n-1,n}$ dans $\mathscr{V}_X^{n-1}$.

4.6.4. — En particulier, on dispose pour toute $(n-1,n)$-forme ω à coefficients boréliens d'une mesure de Borel régulière positive $\langle\omega,\mu\rangle_{\mathrm{Bor}}$. On dit que ω est *localement μ-intégrable* lorsque cette mesure est localement finie ; on dispose alors d'une mesure de Radon $\langle\omega,\mu\rangle_{\mathrm{Rad}}$. Bien entendu, lorsque le calibrage est à coefficients localement bornés, toute forme ω à coefficients localement bornés, en particulier toute G-forme lisse, est localement μ-intégrable.

Proposition 4.6.5. — *Soit $f\colon Y \to X$ une immersion par morceaux propre d'espaces paralinéaires de niveau n.*

a) *Pour toute $(n-1,n)$-forme ω sur X et tout calibrage μ de Y, on a l'égalité $f_*\langle f^*\omega,\mu\rangle = \langle\omega,f_*\mu\rangle$ de formes-volume $(n-1)$-dimensionnelles sur X.*

b) *Pour toute $(n-1,n)$-forme ω sur Y et tout calibrage μ de X, on a l'égalité $\langle f_*\omega,\mu\rangle = f_*\langle\omega,f^*\mu\rangle$ de formes-volume $(n-1)$-dimensionnelles sur X.*

Démonstration. — En raisonnant localement, on se ramène au cas où X est paracompact. Il existe alors un couple $(\mathscr{C},\mathscr{D})$ de décompositions cellulaires qui est adapté à f. Les assertions indiquées se vérifient alors, cellule par cellule, à partir des constructions des intégrales et de la définition du calibrage $f_*\mu$ (resp. du calibrage $f^*\mu$). □

***Proposition 4.6.6* (Compensation des bords).** — *Soit X un espace paralinéaire de niveau n, soit μ un calibrage sur X et soit ω une $(n-1,n)$-forme sur X. Soit $(X_i)_{i\in I}$ un G-recouvrement localement fini de X ; pour toute partie J de I, posons $X_J = \bigcap_{i\in J} X_i$ et notons u_J l'immersion de X_J dans X. On a l'égalité de formes-volume $(n-1)$-dimensionnelles*

$$\langle \omega, \mu\rangle = \sum_{J\neq\varnothing} (-1)^{\mathrm{Card}(J)-1} (u_J)_* \langle \omega|_{X_J}, \mu|_{X_J}\rangle.$$

Démonstration. — D'après le lemme 4.6.2, l'égalité à démontrer est locale. On peut donc supposer que X est paracompact, que les sous-espaces X_i sont fermés dans X et que l'ensemble I est fini.

Soit $(\mathscr{C}, f)$ un atlas cellulaire de X qui est adaptée au calibrage μ, à la forme ω et au recouvrement (X_i) ; on suppose aussi que pour pour toute n-cellule $C \in \mathscr{C}$, f_C est un isomorphisme de C sur une cellule forte de $\mathbf{R}^n$ et le calibrage $\mu|_C$ est de la forme $f_C^*\mu_C$, où μ_C est une fonction de $f_C(C)$ dans $\Lambda^n\mathbf{R}^n$, identifié à $|\Lambda^n\mathbf{R}^n|$ en munissant $\mathbf{R}^n$ de son orientation canonique ; on note aussi $\alpha_C \in \mathscr{G}^{n-1,n}_{f_C(C)}(f_C(C))$ l'unique $(n-1,n)$-forme telle que $\omega|_C = f_C^*(\alpha_C)$.

Pour chaque cellule F de $\mathscr{C}$ de dimension $n-1$ et chaque n-cellule C adjacente à F, on a défini plus haut une forme-volume $(n-1)$-dimensionnelle $\langle\omega,\mu\rangle|_{(F,C)}$ sur F que l'on considère comme une forme-volume sur X portée par F. Par construction, la forme-volume $(n-1)$-dimensionnelle $\langle\omega,\mu\rangle$ sur X est donnée par

$$\langle \omega, \mu\rangle = \sum_{F\supset C} \langle\omega,\mu\rangle_{(F,C)}.$$

Plus généralement, pour toute partie J de I, l'ensemble des cellules $C \in \mathscr{C}$ qui sont contenues dans X_J est une décomposition celullaire de X_J et l'on a de même la relation

$$\langle \omega|_{X_J}, \mu|_{X_J}\rangle = \sum_{F\subset C\subset X_J} \langle\omega,\mu\rangle_{(F,C)}.$$

Soit F une cellule de dimension $n-1$ de $\mathscr{C}$ et C une n-cellule adjacente à F. Dans le membre de gauche de la formule à démontrer, le terme $\langle\omega,\mu\rangle_{(F,C)}$ apparaît une seule fois, avec coefficient 1. Analysons le membre de droite. Notons I_C l'ensemble des $i \in I$ tels que $C \subset X_i$; on a donc $C \subset X_J$ si et seulement si $J \subset I_C$. Comme les X_i recouvrent X, l'ensemble I_C n'est pas vide. Ainsi, le terme $\langle\omega,\mu\rangle_{(F,C)}$ apparaît avec le coefficient

$$\sum_{\varnothing\neq J\subset I_C} (-1)^{\mathrm{Card}(J)-1} = 1 - (1-1)^{\mathrm{Card}(I_C)} = 1.$$

Cela conclut la preuve de la proposition. □

4.6.7. Discordance. — Soit X un espace paralinéaire de niveau n, soit μ un calibrage sur X et soit $f\colon X \to E$ une application paralinéaire.

Soit $\mathscr{C}$ une décomposition cellulaire de X qui est adaptée au calibrage μ et à l'application paralinéaire f : pour toute cellule C de $\mathscr{C}$, la restriction $\mu|_C$ à C du calibrage μ est donné par une fonction $\mu_C\colon C \to |\Lambda^n\langle\overrightarrow{C}\rangle|$ et la restriction de f à C est affine.

Soit F une cellule de dimension $n-1$ de $\mathscr{C}$ et soit $\mathscr{C}_{>F}$ l'ensemble des cellules $C \in \mathscr{C}_n$ dont F est une face. Fixons une orientation o sur le sous-espace affine $\langle F\rangle$. Pour tout $C \in \mathscr{C}_{>F}$, munissons l'espace affine $\langle C\rangle$ de l'orientation o_C donnée par o et la normale

sortante, comme au paragraphe 1.5.8. Pour tout $C \in \mathscr{C}_{>F}$, notons $\tilde{\mu}_C$ la fonction de C dans $\Lambda^n\langle\overrightarrow{C}\rangle$ telle que μ_C soit la classe du couple $(\tilde{\mu}_C, o_C)$.

L'application $f|_C$ est affine, donc induit une application linéaire $\Lambda^n f|_C$ de $\Lambda^n\overrightarrow{\langle C\rangle}$ dans $\Lambda^n\overrightarrow{E}$. Notons $\tilde{\mu}_F$ la somme des images des $\Lambda^n f|_C(\tilde{\mu}_C|_F)$ pour C parcourant $\mathscr{C}_{>F}$; c'est une fonction de F dans $\Lambda^n\overrightarrow{E}$. La classe μ_F du couple $(\tilde{\mu}_F, o)$ est une fonction de F dans le produit contracté $\Lambda^n\overrightarrow{E} \times^{\{\pm 1\}} \mathrm{Or}(F)$; elle ne dépend pas du choix de l'orientation o ; on dit que c'est la *discordance* du calibrage μ le long de la face orientée F, relativement à l'application f.

4.6.8. — Considérons une décomposition cellulaire $\mathscr{C}'$ qui raffine la décomposition cellulaire $\mathscr{C}$ et étudions la discordance du calibrage μ le long des cellules de dimension $n-1$ appartenant à $\mathscr{C}'$.

Soit F' une telle cellule.

Supposons d'abord que F' rencontre une n-cellule ouverte de $\mathscr{C}$. Alors, F' est face de deux cellules de dimension n de $\mathscr{C}'$ portant le même vecteur-volume et induisant des orientations opposées sur F'. Par suite, la discordance du calibrage μ est nulle sur F'.

Sinon, F' est contenue dans une $(n-1)$-cellule F de $\mathscr{C}$ et les deux discordances coïncident sur l'intérieur de F'.

4.6.9. — Soit X un espace paralinéaire de niveau n, calibré, et soit $f\colon X \to E$ une application paralinéaire.

Si X est paracompact, on dit que X est *harmonieux* relativement à f s'il existe une décomposition cellulaire $\mathscr{C}$ de X, adaptée à μ et f, telle que la discordance de μ (relativement à f) le long de toute $(n-1)$-cellule appartenant à $\mathscr{C}$ soit nulle. Alors, tout ouvert de X est harmonieux.

Lorsque X est harmonieux, le paragraphe précédent entraîne que la propriété définissant l'harmonie reste vraie pour toute décomposition cellulaire de X qui est adaptée à μ et f.

Dans le cas général, on dit que X est *harmonieux* si chacun de ses ouverts paracompacts est harmonieux. Il suffit de vérifier cette propriété sur les membres d'un recouvrement ouvert.

Remarque 4.6.10. — Soit X un espace paralinéaire de niveau n, calibré, soit $f\colon X \to E$ une application paralinéaire. Soit C une f-cellule de dimension n telle que $\mathring{C}$ soit ouverte dans X, et harmonieuse. Il existe un unique calibrage $\mu \in |\Lambda^n\langle f(C)\rangle|$ tel que le calibrage μ_C de C soit constant, égal à $f * \mu$.

Considérons en effet une décomposition cellulaire $\mathscr{C}$ de C adaptée à son calibrage. Soit D une $(n-1)$-cellule appartenant à $\mathscr{C}$; soit C_1 et C_2 les deux n-cellules de $\mathscr{C}$ dont le bord contient D. La discordance de μ_C le long de D relativement à f est la différence des deux calibrages de C_1 et C_2 (considérés comme calibrages de $\langle f(C)\rangle$. Comme elle est nulle, les calibrages de C_1 et C_2 coïncident. Comme le complémentaire dans C de la réunion des $(n-2)$-cellules de $\mathscr{C}$ est connexe, l'assertion en résulte.

Remarque 4.6.11. — Dans le cas général, on peut regrouper les discordances telles que définies ci-dessus en un objet global que nous allons décrire succinctement mais qui n'interviendra pas dans la suite de ce travail.

Soit Σ une partie paralinéaire de X de dimension $\leqslant n-1$. On va construire un morphisme de G-faisceaux $\{\pm 1\}$-équivariant du G-faisceau Or_Σ des $(n-1)$-orientations

de Σ dans le quotient du faisceau des fonctions boréliennes sur Σ à valeurs dans $\Lambda^n\overrightarrow{E}$ modulo $(n-2)$-négligeabilité. Cette construction est locale ; cela permet de supposer que Σ est une partie paralinéaire fermée d'un ouvert paracompact U de X. On choisit alors une décomposition cellulaire $\mathscr{C}$ de U qui est adaptée à μ, à f et à Σ. On choisit une orientation de Σ ; notons Σ' la réunion des $(n-1)$-cellules ouvertes de $\mathscr{C}$ qui sont contenues dans Σ. Pour toute $(n-1)$-cellule F de $\mathscr{C}$ qui est contenue dans Σ, on dispose alors du n-vecteur $\tilde{\mu}_F \in \Lambda^n\overrightarrow{E}$; on obtient une fonction de Σ' dans $\Lambda^n\overrightarrow{E}$, que l'on prolonge à tout Σ par 0. À $(n-2)$-négligeabilité près, cette fonction est indépendante du choix de la décomposition cellulaire. Si l'on change l'orientation de Σ en l'orientation opposée, elle fournit la fonction opposée, d'où l'équivariance annoncée.

Soit T une partie paralinéaire de X de dimension $\leqslant n-1$ qui contient Σ. La restriction à Σ de la discordance de T (relativement à f) est la discordance de Σ (relativement à f).

L'espace X est harmonieux relativement à f si et seulement toutes ces fonctions discordance sont nulles.

4.6.12. — Lorsque le calibrage μ est G-localement constant, il existe un plus petit sous-espace paralinéaire de X, purement de dimension $n-1$, en dehors duquel X est harmonieux.

L'assertion est locale, de sorte qu'on peut supposer que X est paracompact. On peut alors choisir la décomposition cellulaire $\mathscr{C}$ de sorte que pour toute cellule C, la fonction μ_C soit constante. Alors, les fonctions μ_F sont constantes et le support de la discordance (relative à $\mathscr{C}$) est la réunion des cellules F de dimension $(n-1)$ telles que $\mu_F \neq 0$. C'est bien un sous-espace linéaire par morceaux de X purement de dimension $n-1$.

4.6.13. — Soit maintenant $\omega \in \mathscr{F}_X^{n-1,n}(X)$ une G-forme de type $(n-1,n)$ sur X qui est G-tropicalisée par une application paralinéaire $f\colon X \to E$, c'est-à-dire que $\omega = f^*\alpha$, où α est une forme de type $(n-1,n)$ définie sur un voisinage paralinéaire de $f(X)$ dans E. Expliquons alors comment calculer la forme-volume associée.

Considérons comme précédemment une décomposition cellulaire de X qui est adaptée à μ et f. Soit $\partial\mathscr{C}$ la réunion des cellules de $\mathscr{C}$ dont la dimension est au plus $n-1$; c'est un sous-espace paralinéaire fermé de X.

Avec les notations du §4.6.1, Identifions E à un espace $\mathbf{R}^N$ et écrivons $\alpha = \sum \alpha_{IJ}\,\mathrm{d}'x_I \wedge \mathrm{d}''x_J$. En identifiant formes-volume $(n-1)$-dimensionnelles sur F et $(n-1)$-formes grâce à l'orientation o de F choisie, on a

$$\begin{aligned}\sum_{C\supset F}\langle\omega,\mu\rangle_{(F,C)} &= (-1)^{n(n-1)/2}\sum_{C\supset F}\sum_{I,J} f^*\alpha_{IJ}|_F f^*(\mathrm{d}'x_I)\langle f^*(\mathrm{d}''x_J),\tilde{\mu}_C\rangle\\ &= (-1)^{n(n-1)/2}\sum_{C\supset F}\sum_{I,J} f^*\alpha_{IJ}|_F f^*(\mathrm{d}'x_I)\langle \mathrm{d}''x_J,\Lambda^n(\tilde{\mu}_C)\rangle\\ &= (-1)^{n(n-1)/2}\sum_{I,J} f^*\alpha_{IJ}|_F f^*(\mathrm{d}'x_I)\langle \mathrm{d}''x_J,\mu_F\rangle.\end{aligned}$$

En particulier, si la discordance de μ le long de F est nulle (relativement à f), la contribution de la cellule F à la mesure $\langle\omega,\mu\rangle$ est nulle.

Lorsque f est l'injection de X dans un espace affine $\mathbf{R}^N$, cette formule montre aussi que la forme-volume $(n-1)$-dimensionnelle $\langle\omega,\mu\rangle$ se calcule sur F par contraction de la forme ω et de la discordance μ_F du calibrage μ le long de F.

4.6.14. — Lorsque X est un sous-espace paralinéaire d'un espace affine E et que l'application f est l'injection canonique, on parlera plus simplement de discordance et d'espace harmonieux, en omettant la mention de f.

***Proposition 4.6.15* (Formules de Stokes et Green).** — *Soit X un espace paralinéaire de niveau n, calibré.*

a) *Soit ω une $(n-1,n)$-forme de classe $\mathscr{C}^1$ à support compact sur X. On a la* formule de Stokes *:*

$$\int_X \langle \mathrm{d}'\,\omega, \mu\rangle = \int_X \langle \omega, \mu\rangle. \tag{4.6.15.1}$$

b) *Soit α et β des (p,p) et (q,q)-formes* symétriques *sur X, où $p+q=n-1$, de classe $\mathscr{C}^2$. Si l'intersection de leurs supports est compacte, on a la* formule de Green *:*

$$\int_X \langle \alpha\wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\beta - \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\alpha\wedge\beta, \mu\rangle = \int_X \langle \alpha\wedge \mathrm{d}''\,\beta - \mathrm{d}''\,\alpha\wedge\beta, \mu\rangle. \tag{4.6.15.2}$$

Démonstration. — Comme le support de ω est compact, il possède un voisinage ouvert U qui est paracompact. Si U est muni du calibrage induit, on a $\int_X\langle \mathrm{d}'\,\omega,\mu\rangle = \int_U\langle \mathrm{d}'\,\omega,\mu\rangle$ et $\int_X\langle\omega,\mu\rangle = \int_U\langle\omega,\mu\rangle$. On est ainsi ramené au cas où X est paracompact.

Soit alors $\mathscr{C}$ une décomposition cellulaire de X en cellules compactes adaptée au calibrage de X. Par définition, $\int_X\langle \mathrm{d}'\,\omega,\mu\rangle$ est la somme (finie), sur toutes les cellules C de dimension n de $\mathscr{C}$, de $\int_C\langle \mathrm{d}'\,\omega,\mu\rangle$. Démontrons que l'on a

$$\int_C \langle \mathrm{d}'\,\omega, \mu\rangle = \int_C \langle \omega, \mu\rangle.$$

On identifie C à une cellule compacte d'un espace affine de dimension n, V. Soit F une face de dimension $n-1$ de C ; c'est l'intersection de C avec un hyperplan affine H de V ; notons V_+ le demi-espace de V qui contient C. Si le support de ω ne rencontre aucune autre face de dimension $n-1$ que F, la formule à démontrer s'identifie à la formule de Stokes

$$\int_{V_+} \langle \mathrm{d}'\,\omega, \mu\rangle = \int_{V_+} \langle \omega, \mu\rangle$$

du lemme 1.5.9. Par un argument de partition de l'unité, on en déduit le résultat voulu si le support de ω ne rencontre aucune face de dimension $n-2$ de C.

On raisonne alors par récurrence sur le nombre de faces de dimension $n-2$ qui rencontre le support de ω. Soit F une telle face et soit $u\colon V\to \mathbf{R}^2$ une application affine surjective, nulle sur C. Soit θ une fonction lisse, positive, à support compact sur $\mathbf{R}^2$ qui vaut 1 au voisinage de 0. Pour tout $\varepsilon>0$, on pose $\theta_\varepsilon(x)=\theta(x/\varepsilon)$. Comme la forme $(1-\theta_\varepsilon)\omega$ est nulle au voisinage de F, elle vérifie l'hypothèse de récurrence, c'est-à-dire

$$\int_C \langle \mathrm{d}'((1-\theta_\varepsilon)\omega), \mu\rangle = \int_C \langle (1-\theta_\varepsilon)\omega, \mu\rangle.$$

Pour démontrer la proposition, il suffit de vérifier que lorsque $\varepsilon\to 0$,

$$\int_C \langle \mathrm{d}'(\theta_\varepsilon\omega), \mu\rangle - \int_C \langle \theta_\varepsilon\omega, \mu\rangle$$

tend vers 0. Or, le volume dans C du support de $\theta_\varepsilon\omega$ tend vers 0 en $\mathrm{O}(\varepsilon^2)$, tandis que les coefficients de $\mathrm{d}'(\theta_\varepsilon\omega)$ sont $\mathrm{O}(1/\varepsilon)$; le premier terme tend donc vers 0 en $\mathrm{O}(\varepsilon)$. De

même, pour toute face D de C de dimension $n-1$, le volume dans D du support de $\theta_\varepsilon\omega$ tend vers 0 en $\mathrm{O}(\varepsilon)$, ce qui entraîne que le second terme tend vers 0 en $\mathrm{O}(\varepsilon)$.

Comme dans la preuve du lemme 1.5.10, la formule de Green se déduit de la formule de Stokes appliquée à la forme $\alpha \wedge \mathrm{d}''\beta - \mathrm{d}''\alpha \wedge \beta$. □

CHAPITRE 5

ESPACES G-TROPICAUX CALIBRÉS

---

§ 5.1. ESPACES G-TROPICAUX CHORDÉS

5.1.1. — Soit X un espace G-tropical. Soit Σ et T des parties paralinéaires fermées de X. Si leur réunion $\Sigma \cup T$ est une partie paralinéaire de X, alors Σ et T en sont des sous-espaces paralinéaires, si bien que $\Sigma \cap T$ est une partie paralinéaire de X.

En général, l'intersection de deux parties paralinéaires fermées Σ et T de X peut être très sauvage. On obtient un tel exemple comme suit : X est la réunion, dans $\mathbf{R}^2$ du graphe Σ de la fonction nulle et du graphe T de la fonction $x \mapsto x\sin(1/x)$, toutes deux définies sur $[0;1]$. Il est muni de la structure paralinéaire image réciproque de la structure standard de $[0;1]$. Les parties Σ et T sont paralinéaires, fermées, mais leur intersection n'est pas paralinéaire, en raison de son comportement au voisinage de l'origine.

Les espaces chordés que nous introduisons maintenant sont munis d'une classe raisonnable de parties paralinéaires, que nous appelons squelettiques, qui est en particulier stable par intersection finie et par réunion finie lorsqu'elles sont fermées ; en outre, cette classe contiendra automatiquement toutes les parties paralinéaires qui sont purement de dimension « maximale » (proposition 5.2.6).

5.1.2. — Un espace G-tropical *chordé* est un espace G-tropical muni d'un un ensemble de parties paralinéaires de X et de ses domaines, appelées parties *squelettiques élémentaires*, et soumises aux axiomes suivants :

a) Si V est un domaine de X, une partie squelettique élémentaire de V est fermée dans V ;

b) Si W est un domaine de V et si Σ est une partie squelettique élémentaire de V, alors $\Sigma \cap W$ est une partie squelettique élémentaire de W ;

c) Si (V_i) est une famille finie de domaines fermés de X, si Σ_i est pour tout i une partie squelettique élémentaire de V_i et si Σ désigne la réunion des Σ_i, il existe une famille (W_j) de domaines de X qui G-recouvre Σ et, pour tout j, une partie squelettique élémentaire de W_j contenant $\Sigma \cap W_j$.

Tout domaine V d'un espace G-tropical chordé X hérite d'une telle structure : ses parties squelettiques élémentaires sont les parties squelettiques élémentaires de X qui sont contenues dans V.

5.1.3. — Soit X un espace G-tropical chordé.

On dit qu'une partie de Σ de X est *squelettique* s'il existe une famille (V_i) de domaines de X tels que les $\Sigma \cap V_i$ forment un G-recouvrement de Σ et telle que pour tout i, l'intersection $\Sigma \cap V_i$ soit une partie paralinéaire fermée d'une partie squelettique élémentaire de V_i.

Soit Σ une partie de X et soit V un domaine de X tel que $\Sigma \subset V$. Alors Σ est squelettique dans X si et seulement si elle l'est dans V. (Si Σ est squelettique dans V, la même famille (V_i) convient ; sinon, on la remplace par la famille des $V_i \cap V$ qui a même trace sur Σ.)

Nous dirons qu'un point x de X est *squelettique* s'il appartient à une partie squelettique de X. Cela revient au même de demander qu'il appartienne à une partie squelettique élémentaire, ou encore que la partie $\{x\}$ soit squelettique.

Exemple 5.1.4. — Soit X un espace paralinéaire. Les parties paralinéaires fermées des domaines de X le munissent d'une structure d'espace G-tropical chordé. Ses parties squelettiques sont exactement ses parties paralinéaires.

Proposition 5.1.5. — *Soit X un espace G-tropical chordé.*

a) *Toute partie squelettique de X est paralinéaire.*

b) *Soit Σ une partie squelettique de X et soit T une partie de Σ. Pour que T soit une partie squelettique de X, il faut et il suffit qu'elle soit paralinéaire.*

c) *La réunion de deux parties squelettiques fermées de X est squelettique.*

d) *Toute partie de X qui est G-recouverte par des parties squelettiques est squelettique.*

e) *L'intersection de deux parties squelettiques de X est squelettique.*

Démonstration. — a) Soit Σ une partie squelettique de X. Par définition, il existe une famille (V_i) de domaines de X tels que les $\Sigma \cap V_i$ constituent un G-recouvrement de Σ et telle que pour tout i, l'intersection $\Sigma \cap V_i$ soit une partie paralinéaire fermée d'une partie squelettique élémentaire S_i de V_i. En particulier, $\Sigma \cap V_i$ est paralinéaire. Il s'ensuit par le lemme 3.2.9 que Σ est paralinéaire.

b) Si T est squelettique, elle est paralinéaire, d'après a). Supposons donc que T est paralinéaire est démontrons que c'est une partie squelettique. Soit (V_i) une famile de domaines de X telle que les $\Sigma \cap V_i$ forment un G-recouvrement de Σ et telle que, pour tout i, $\Sigma \cap V_i$ soit une partie paralinéaire d'une partie squelettique élémentaire S_i de V_i. Pour tout i, $T \cap V_i$ est une partie paralinéaire de T, donc de S_i, et les $(T \cap V_i)$ forment un G-recouvrement de T.

c) Soient Σ et T deux parties squelettiques fermées de X. Soit (V_i) une famille de domaines de X telle que les $\Sigma \cap V_i$ constituent un G-recouvrement de Σ et telle que pour tout i, $\Sigma \cap V_i$ soit une partie paralinéaire d'une partie squelettique élémentaire Σ_i de V_i. Choisissons de même une famille (W_j) de domaines de X et, pour tout j, une partie squelettique élémentaire T_j de W_j, qui attestent du caractère squelettique de T.

Pour montrer que $\Sigma \cup T$ est squelettique, on peut par définition raisonner G-localement sur X, ce qui permet de supposer que les V_i et les W_j sont fermés et en nombre fini. L'axiome c) de la définition d'une partie squelettique élémentaire assure alors l'existence d'une famille (U_ℓ) de domaines de X qui G-recouvrent la réunion R des Σ_i et les T_j, et, pour tout ℓ, d'une partie squelettique élémentaire R_ℓ de U_ℓ contenant $R \cap U_\ell$. Mais alors les U_ℓ constituent un G-recouvrement de $\Sigma \cap T$ et pour tout ℓ, la réunion $(\Sigma \cup T) \cap U_\ell$ est contenue dans R_ℓ ; et comme cette réunion est la réunion finie des $\Sigma \cap V_i \cap U_\ell$ et des

$T \cap W_j \cap U_\ell$, c'est une partie paralinéaire de R_ℓ. En conséquence, $\Sigma \cup T$ est une partie squelettique de X.

d) Soit Σ une partie de X qui est G-recouverte par une famille (Σ_i) de parties squelettiques. Pour montrer que Σ est squelettique, on peut par définition raisonner localement pour la topologie de Σ induite par la G-topologie de X, ce qui permet de supposer que les Σ_i sont des fermés de X et que la famille (Σ_i) est finie, et l'on déduit alors de c) que Σ est squelettique.

e) Soit Σ, T des parties squelettiques de X ; démontrons que $\Sigma \cap T$ est squelettique. Soit U un ouvert de X dans lequel Σ est fermé, soit V un ouvert de X dans lequel T est fermé. Posons $W = U \cap V$. Puisque $\Sigma \cap W$ et $T \cap W$ sont fermés dans W, leur réunion est une partie squelettique de W, d'après a), dans laquelle chacune est paralinéaire. Par suite, leur intersection $\Sigma \cap T \cap W = \Sigma \cap T$ est paralinéaire, et donc squelettique d'après b). □

Définition 5.1.6. — *Soit X un espace G-tropical chordé. On dit qu'une partie squelettique calibrée de X est pure de dimension p si son calibrage est G-localement constant et si sa restriction à tout ouvert non vide est non nul.*

Une telle partie est purement de dimension p. Par économie d'écriture, nous dirons que son calibrage est « partout non nul ».

Soit P une partie squelettique de dimension $\leqslant p$ munie d'un p-calibrage G-localement constant μ_P. Le support de μ_P est une partie squelettique fermée de P, purement de dimension p ; on le notera $|(P, \mu_P)|$, ou $|P|$ si le calibrage μ_P est sous-entendu. C'est une partie squelettique calibrée pure de dimension p.

5.1.7. — Soit P une partie squelettique calibrée fermée pure de dimension p. Si V est un domaine de U, la partie squelettique p-calibrée $|P \cap V|$ de V est pure. Si W est une partie paralinéaire de V, on a $||P \cap V| \cap W| = |P \cap W|$: ces deux parties squelettiques calibrées sont la réunion des cellules de dimension p de P contenues dans W dont le calibrage est partout non nul.

On a ainsi muni la famille des parties squelettiques fermées p-calibrées pures d'un domaine de X d'une structure de préfaisceau pour la G-topologie de X. *Ce préfaisceau est un faisceau.* En effet, soit V un domaine de X et soit (V_i) un G-recouvrement de V ; pour tout i, soit P_i une partie squelettique p-calibrée pure de V_i ; on suppose que pour tous i, j, on a $|P_i \cap (V_i \cap V_j)| = |P_j \cap (V_i \cap V_j)|$; démontrons qu'il existe une unique partie squelettique p-calibrée pure P de V telle que $|P \cap V_i| = P_i$ pour tout i.

Établissons l'unicité. Considérons deux telles parties squelettiques P et Q ; on a $|P \cap V_i| = |Q \cap V_i| = P_i$ pour tout i. Soit C une p-cellule compacte contenue dans P et démontrons qu'elle est contenue dans Q, avec même calibrage. Puisque C est G-recouverte par les V_i, on peut supposer, quitte à considérer un G-recouvrement de C, qu'il existe i tel que $C \subset V_i$. Alors $C \subset P_i$ et son calibrage est celui hérité de P_i. Puisque $P_i = |Q \cap V_i|$, elle est également contenue dans Q et son calibrage est celui hérité de Q. Cela conclut la preuve de l'unicité de P.

Prouvons maintenant l'existence de P. Soit P la réunion des P_i ; démontrons que c'est une partie squelettique fermée de V. Il suffit de le vérifier localement ; soit x un point de V ; comme les V_i forment un G-recouvrement de V, il existe un voisinage domanial compact W de x dans V et un ensemble fini I d'indices tels que $W \subset \bigcup_{i \in I} V_i$ et tels que pour tout i, $V_i \cap W$ soit compact.

Démontrons que $|P_j \cap W| \subset \bigcup_{i\in I} |P_i \cap W|$ pour tout j.

Soit C une p-cellule contenue dans $|P_j \cap W|$; on a $C = \bigcup_{i\in I} C \cap V_i$, et chacune de ces intersections est une partie paralinéaire compacte de C ; par suite, C est la réunion des $(C \cap V_i)^{(p)}$, parties purement de dimension p de $C \cap V_i$. Pour $i \in I$, on a

$$(C \cap V_i)^{(p)} \subset |P_j \cap (V_i \cap V_j \cap W)| = |P_i \cap (V_i \cap V_j \cap W)| \subset |P_i \cap W|.$$

Par suite, $C \subset \bigcup_{i\in I} |P_i \cap W|$ d'où,

$$\bigcup_{i\in I} |P_i \cap W| = \bigcup_j |P_j \cap W|.$$

Prenant la trace sur l'intérieur $\mathring{W}$ de W dans V, on obtient

$$\left(\bigcup_{i\in I} |P_i \cap W|\right) \cap \mathring{W} = \left(\bigcup_j |P_j \cap W|\right) \cap \mathring{W} = \bigcup_j \left(|P_j \cap W| \cap \mathring{W}\right) = P \cap \mathring{W}$$

puisque pour tout j, on a

$$|P_j \cap W| \cap \mathring{W} = ||P_j \cap W| \cap \mathring{W}| = |P_j \cap \mathring{W}| = P_j \cap \mathring{W}.$$

Cela prouve que

$$P \cap \mathring{W} = \bigcup_{i\in I} P_i \cap \mathring{W}.$$

Comme les P_i sont fermés, les parties $P_i \cap \mathring{W}$ sont des parties squelettiques fermées de $\mathring{W}$; leur réunion est alors une partie squelettique fermée de $\mathring{W}$. Cela conclut la démonstration que P une partie squelettique fermée.

Démontrons que P est G-recouverte par ses p-cellules qui sont contenues dans l'un des P_j. Il suffit de le vérifier localement, après restriction à un ouvert de la forme $\mathring{W}$ comme ci-dessus, et cela résulte alors de la dernière formule établie. Si C est une p-cellule de P contenue dans P_i et dans P_j, les calibrages de C déduits des calibrages de P_i et de P_j coïncident, par la condition de coïncidence des P_i. Ces calibrages munissent P d'un calibrage qui, par construction, prolonge celui de P_i. En particulier, ce calibrage est partout non nul.

Démontrons que $|P \cap V_i| = P_i$. Puisque $P_i \subset P \cap V_i$, on en déduit que $P_i \subset |P \cap V_i|$. Inversement, soit C une p-cellule de $P \cap V_i$; prouvons qu'elle est contenue dans P_i. Quitte à raisonner G-localement sur C, on peut supposer qu'il existe j tel que $C \subset P_j$. Alors, $C \subset |P_j \cap V_i| = |P_i \cap V_j| \subset P_i$.

5.1.8. — Soit P et Q des parties squelettiques fermées p-calibrées pures de X.

On dit que $P \preceq Q$ si $P \subset Q$ et si, pour toute p-cellule C de X contenue dans P sur lequel les calibrages de P et Q sont constants, le calibrage de C pour P est inférieur ou égal au calibrage de C pour Q. Cette condition se vérifie G-localement.

La relation « $P \preceq Q$ » est une relation d'ordre dans l'ensemble des parties squelettiques fermées p-calibrées pures de X.

Lemme 5.1.9. — *L'ensemble des parties squelettiques fermées p-calibrées pures de X est un treillis.*

Démonstration. — Soit P et Q deux parties squelettiques fermées p-calibrées pures de X. L'existence des bornes inférieure et supérieure de la paire $\{P, Q\}$ se vérifie G-localement sur X, et même G-localement sur la partie squelettique $P \cup Q$.

On définit ainsi G-localement deux parties squelettiques calibrées de dimension p, $P \wedge Q$ et $P \vee Q$, contenues dans $P \cup Q$. La partie $P \cup Q$ est squelettique, et est G-recouverte par les cellules compactes C telles que : d'une part $C \subset P$ et le calibrage de P est constant sur C ou $\mathring{C} \cap P = \varnothing$, et d'autre part $C \subset Q$ et le calibrage de Q est constant sur C ou $\mathring{C} \cap Q = \varnothing$. Il suffit de déterminer le calibrage d'une telle cellule dans $P \wedge Q$ et dans $P \vee Q$. Soit C une telle cellule. Si $C \subset P$, on note μ_C^P le vecteur-volume de C dans P ; sinon, on pose $\mu_C^P = 0$. On définit μ_C^Q de façon similaire. Les vecteurs-volume d'une cellule définissent une droite réelle orientée ; on définit alors $\mu_C^{P\wedge Q} = \inf(\mu_C^P, \mu_C^Q)$ et $\mu^{P\vee Q} = \sup(\mu_C^P, \mu_C^Q)$. Les vecteurs-volume $\mu_C^{P\wedge C}$ définissent un calibrage $\mu^{P\wedge Q}$ de $P \cup Q$; on définit $P \wedge Q$ comme la partie squelettique p-calibrée fermée pure $|(P \cup Q, \mu^{P\wedge Q})|$; il est immédiat que c'est la borne supérieure de $\{P, Q\}$. On définit de même $P \vee Q$. Ce sont pures. □

§ 5.2. ESPACES G-TROPICAUX VERTÉBRÉS

Définition 5.2.1. — *Soit X un espace G-tropical tel que $d_{\mathrm{trop}}(X) \leqslant n$ et soit $(V, f\colon V \to \mathbf{R}^m)$ une carte G-tropicale de X. On appelle* polyèdre de variation maximale *de f l'ensemble $\Sigma_f^{(n)}$ des points de V en lesquels la dimension tropicale de f vaut n.*

C'est une partie fermée de V, car l'ensemble des points en lesquels la dimension tropicale de f est strictement inférieure à n est ouvert par définition.

Dans cette notation, l'exposant n rappelle la borne fixée sur la dimension tropicale de X ; sa présence annonce la situation des espaces analytiques où $\Sigma_f^{(n)}$ coïncidera avec le lieu purement n-dimensionnel d'une partie Σ_f.

Définition 5.2.2. — *On appelle espace G-tropical* vertébré *la donnée d'un espace G-tropical chordé X et d'un entier n tel que $d_{\mathrm{trop}}(X) \leqslant n$, tels que pour toute carte G-tropicale (V, f) sur X, le sous-espace $\Sigma_f^{(n)}$ soit squelettique.*

Avec ces notations, on dira plutôt que X est un espace G-tropical vertébré de niveau n.

Exemple 5.2.3. — Soit X un espace paralinéaire, considéré comme espace G-tropical chordé dont les parties squelettiques sont les parties paralinéaires (exemple 5.1.4). Soit n un entier naturel tel que $\dim(X) \leqslant n$. Alors $d_{\mathrm{trop}}(X) = \dim(X) \leqslant n$ et pour tout domaine V de X et toute application paralinéaire $f\colon V \to \mathbf{R}^N$, le sous-espace $\Sigma_f^{(n)}$ de V est paralinéaire, donc squelettique. Cela munit X d'une structure d'espace G-tropical vertébré de niveau n.

5.2.4. — Soit V un domaine d'un espace G-tropical vertébré X de niveau n. L'espace G-tropical V hérite d'une structure d'espace chordé et vérifie $d_{\mathrm{trop}}(V) \leqslant n$. Muni de cet entier n, c'est un espace vertébré de niveau n.

Noter que dans la définition d'un espace G-tropical vertébré, le niveau n est une donnée de la structure d'espace vertébré, et non une propriété de l'espace chordé sous-jacent. Par exemple, lorsqu'un domaine V vérifie $d_{\mathrm{trop}}(V) < n$, il sera important de

le considérer comme espace vertébré de niveau n, même si sa structure n'est pas très intéressante parce que ses parties $\Sigma_f^{(n)}$ sont vides.

Dans un espace vertébré, les parties $\Sigma_f^{(n)}$ sont squelettiques ; elles sont en particulier paralinéaires, et ce simple fait a déjà des conséquences remarquables.

Proposition 5.2.5. — *Soit X un espace G-tropical et $f\colon X \to \mathbf{R}^m$ une application paralinéaire. On suppose que pour tout domaine V de X, le sous-espace $\Sigma_{f|_V}^{(n)}$ de V est paralinéaire ; c'est notammment le cas si X est un espace vertébré de niveau n.*

a) *Le sous-espace paralinéaire $\Sigma_f^{(n)}$ de X est purement de dimension n, et l'application $f|_{\Sigma_f^{(n)}}$ est une immersion par morceaux.*

b) *Pour tout domaine V de X, l'espace paralinéaire $\Sigma_{f|_V}^{(n)}$ est égal à $(\Sigma_f^{(n)} \cap V)^{(n)}$.*

c) *Si X est compact alors $f(X)^{(n)} = f(\Sigma_f^{(n)})$.*

Démonstration. — a) Par hypothèse, $\Sigma_f^{(n)}$ est une partie paralinéaire de X et l'application $f|_{\Sigma_f^{(n)}}\colon \Sigma_f^{(n)} \to \mathbf{R}^m$ est paralinéaire.

Rappelons d'abord que pour tout domaine compact V de X, les images $f(V)$ et $f(\Sigma_f^{(n)} \cap V)$ sont des polyèdres compacts de $\mathbf{R}^m$ tels que $f(\Sigma_f^{(n)} \cap V) \subset f(V)$, et ces polyèdres sont de dimension au plus n.

Soit x un point de $\Sigma_f^{(n)}$ et soit V un domaine compact de X qui est un voisinage de x. L'application $\Sigma_f^{(n)} \cap V \to \mathbf{R}^m$ déduite de f est paralinéaire ; pour démontrer que $\Sigma_f^{(n)}$ est de dimension n en x, il suffit de prouver que le polyèdre compact $f(\Sigma_f^{(n)} \cap V)$ est de dimension n. Notons P ce polyèdre ; pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, posons $P_\varepsilon = P +]-\varepsilon, \varepsilon[^m$ et notons V_ε l'ensemble des points y de V tels que $f(y) \notin P_\varepsilon$. Par construction, V_ε est un domaine de V, fermé, donc compact, qui ne rencontre pas $\Sigma_f^{(n)}$. Par suite, la dimension tropicale de f en tout point de V_ε est $< n$, de sorte que $f(V_\varepsilon)$ est un polyèdre compact de $\mathbf{R}^m$ de dimension $< n$. Par conséquent, on a $f(V)^{(n)} \subset P_\varepsilon$. En passant à la limite lorsque ε tend vers 0, on en déduit que $f(V)^{(n)} \subset P$. Comme f est de dimension tropicale n en x et comme V est un voisinage de x, le polyèdre $f(V)$ est de dimension n. Par conséquent, on a $f(V)^{(n)} \neq \varnothing$, de sorte que P est de dimension n.

Il en résulte que $\Sigma_f^{(n)}$ est purement de dimension n et que l'application de $\Sigma_f^{(n)}$ dans $\mathbf{R}^m$ déduite de f est une immersion par morceaux.

b) Soit V un domaine de X. Il résulte immédiatement de la définition que $\Sigma_{f|_V}^{(n)}$ est contenu dans $\Sigma_f^{(n)}$. D'après ce qui précède, la partie paralinéaire $\Sigma_{f|_V}^{(n)}$ est purement de dimension n ; elle est donc contenue dans $(\Sigma_f^{(n)} \cap V)^{(n)}$.

Inversement, soit x un point de $(\Sigma_f^{(n)} \cap V)^{(n)}$ et soit U un domaine compact de V qui est un voisinage de x dans V. Comme x appartient à $(\Sigma_f^{(n)} \cap V)^{(n)}$, le domaine U contient une partie paralinéaire (non vide) P de dimension n de $\Sigma_f^{(n)} \cap V$. La restriction de f à $\Sigma_f^{(n)}$ étant une immersion par morceaux, d'après a), on en déduit que $f(P)$ est de dimension n. En particulier, la dimension tropicale de $f|_{\Sigma_f^{(n)} \cap V}$ est égale à n, c'est-à-dire $x \in \Sigma_{f|_V}^{(n)}$. Ceci achève de prouver b).

c) Puisque X est compact, $f(\Sigma_f^{(n)})$ et $f(X)$ sont des polyèdres compacts de $\mathbf{R}^m$ tels que $f(\Sigma_f^{(n)}) \subset f(X)$. Puisque la restriction de f à $\Sigma_f^{(n)}$ est une immersion par morceaux, $f(\Sigma_f^{(n)})$ est purement de dimension n, si bien que $f(\Sigma_f^{(n)}) \subset f(X)^{(n)}$.

Réciproquement, soit s un point de $f(X)^{(n)}$, soit P un voisinage paralinéaire compact de s dans $f(X)$, et soit V le domaine compact $f^{-1}(P)$ de X ; on a $f(V) = P$. Comme V est compact, la dimension de $f(V)$ est la borne supérieure des dimensions tropicales de $f|_V$ en chacun des points de V. Puisque $s \in f(X)^{(n)}$, le polyèdre P est de dimension n, si bien qu'il existe un point $x \in V$ en lequel $f|_V$ est de dimension tropicale n. En particulier, $x \in \Sigma_f^{(n)}$; comme $f(x) \in P$, cela entraîne que P rencontre $f(\Sigma_f^{(n)})$. par suite, le point s est adhérent à $f(\Sigma_f^{(n)})$. Ce dernier étant compact, il s'ensuit que s appartient à $f(\Sigma_f^{(n)})$. □

Proposition 5.2.6. — *Soit X un espace G-tropical vertébré de niveau n et soit Σ une partie paralinéaire de X qui est purement de dimension n. Il existe un G-recouvrement (Σ_i) de Σ par des parties paralinéaires compactes et, pour tout i, une carte G-tropicale f_i sur un domaine compact V_i telle que $\Sigma_i \subset \Sigma_{f_i}^{(n)}$. En particulier, Σ est squelettique.*

Démonstration. — Par définition d'une partie paralinéaire, elle possède un G-recouvrement par des parties fidèlement paralinéaires compactes Σ_i. Puisque Σ est purement de dimension n, la famille $(\Sigma_i^{(n)})$ est encore un G-recouvrement de Σ. D'après le lemme 3.2.8, e), il existe pour tout i un domaine compact W_i de X tel que $\Sigma_i^{(n)} = \Sigma \cap W_i$.

Choisissons alors une fonction f_i dans $\Lambda(\Sigma_i^{(n)})$ et un domaine de définition V_i de f_i, que l'on peut supposer compact. Comme $\Sigma_i^{(n)}$ est purement de dimension n et comme f_i induit un homéomorphisme de $\Sigma_i^{(n)}$ sur son image, la dimension tropicale de f_i en tout point de $\Sigma_i^{(n)}$ vaut n. Par conséquent, $\Sigma_i^{(n)}$ est une partie paralinéaire de $\Sigma_{f_i}^{(n)}$.

La seconde assertion résulte de la proposition 5.1.5, b), car les $\Sigma_{f_i}^{(n)}$ sont des parties squelettiques (axiome e)), □

Définition 5.2.7. — *Soit X un espace G-tropical vertébré de niveau n.*

a) *On dit que X est* riche *si pour toute carte G-tropicale f définie sur un domaine compact V de X, il existe une partie squelettique compacte Σ de V telle que $f(\Sigma) = f(V)$.*

b) *On dit que X est* très riche *s'il est riche et si toute partie squelettique compacte est contenue dans une partie squelettique purement de dimension n.*

Un domaine d'un espace riche est riche.

Une partie ouverte d'un espace très riche est très riche.

Un espace paralinéaire de niveau n est riche ; il est très riche si et seulement s'il est purement de dimension n.

Exemple 5.2.8. — Soit k un corps complet pour une valeur absolue non archimédienne et soit X un espace k-analytique, topologiquement séparé, et purement de dimension n. Dans la seconde partie de ce livre, nous allons le munir d'une structure d'espace G-tropical vertébré. Dans le but d'éclairer les constructions et définitions de la présente partie, indiquons ici quelques aspects de cette structure à venir.

Les domaines de X, comme espace G-tropical, sont ses domaines analytiques.

Pour définir ses fonctions paralinéaires et ses fonctions affines, on procédéra à rebours de l'axiomatisation générale en commençant par définir les fonctions affines sur l'espace G-tropical X : ce sont celles qui sont localement combinaisons $\mathbf{Q}$-linéaires de fonctions de la forme $\log|f|$, où f est une fonction analytique inversible sur un domaine analytique de X. Les fonctions paralinéaires sur l'espace G-tropical X sont alors les fonctions qui sont G-localement affines.

Parmi toutes les cartes G-tropicales sur X, il suffira de considérer celles de la forme $f_{\mathrm{trop}}\colon V \to \mathbf{R}^n$ où V est un domaine analytique de X, $f\colon V \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ est un morphisme d'espaces analytiques (nous appellerons *moment* de tels morphismes), et $f_{\mathrm{trop}} = (\log|f_1|, \ldots, \log|f_n|)$.

Les parties squelettiques élémentaires de X sont les parties de la forme $\Sigma_f = f^{-1}(S_n)$, où V est un domaine de X et $f\colon V \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ est un moment et S_n est le squelette standard de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$. Alors, l'ensemble $(\Sigma_f)^{(n)}$ n'est autre que l'ensemble $\Sigma_{f_{\mathrm{trop}}}^{(n)}$.

Si X est un domaine analytique d'un bon espace, en particulier, si X est sans bord, nous démontrerons que l'espace G-tropical associé à X est décent (définition 6.3.1 et proposition 12.4.7) et localement différentiellement séparé (corollaire 15.2.4).

Lorsque X erst purement de dimension n, nous démontrerons que l'espace G-tropical associé à X est riche (corollaire 12.10.7), et même très riche si X est sans bord (théorème 12.11.1).

Remarque 5.2.9. — Soit X un espace G-tropical vertébré de niveau n. Dans ce cas, on peut donner une description squelettiques de la topologie sur l'espace des G-formes.

Soit $\mathscr{D}$ un jeu de cartes G-couvrant sur X. Soit Σ une partie squelettique de X. Pour tout élément $m \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$, l'application de restriction $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathscr{D},\mathrm{G}}(X) \to \mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{G}}(\Sigma)$ est continue lorsque ces deux espaces sont munis de leurs topologies $\mathscr{C}^m$.

Nous allons démontrer que *lorsque l'espace X est riche, la topologie $\mathscr{C}^m$ de $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathscr{D},\mathrm{G}}(X)$ est la topologie localement convexe la plus fine qui rende toutes ces applications continues.* On peut même se limiter aux parties squelettiques Σ qui sont des cellules compactes compactes, contenues dans le domaine de définition V d'une carte f appartenant à $\mathscr{D}$, et telles que $f|_\Sigma$ soit injective. A fortiori, on peut se limiter aux parties squelettiques compactes de X.

En effet, soit W un domaine compact d'une carte (V, f) appartenant à $\mathscr{D}$ et soit r un entier tel que $r \leqslant m$. Comme X est supposé riche, il existe une partie squelettique Σ de W, compacte, telle que $f(\Sigma) = f(W)$. L'application $f\colon \Sigma \to f(W)$ possède G-localement des sections. Leurs images définissent une famille finie (Σ_i) de parties squelettiques compactes de Σ telles que $\bigcup_i f(\Sigma_i) = f(W)$ et telles que $f|_{\Sigma_i}$ est injective pour tout i. Quitte à raffiner la famille (Σ_i), on peut supposer qu'elle est constituée de cellules compactes. Choisissons des normes $\mathscr{C}^r$ standard sur $f(W)$ et les Σ_i. Pour toute forme α sur $f(W)$ et tout entier r tel que $r \leqslant m$, on a une majoration uniforme

$$\|\alpha\|_{f(W),r} \ll \sup_i \|f^*\alpha|_{\Sigma_i}\|_{\Sigma_i,r}.$$

L'assertion en résulte.

§ 5.3. SUPPORTS FORTS

Soit X un espace G-tropical vertébré de niveau n.

5.3.1. — Soit ω une G-forme de type (p,q) sur X, où p et q sont deux entiers tels que $\max(p,q) = n$. (En pratique, on aura $p \in \{n-1, n\}$ et $q = n$.) On dit qu'une partie squelettique fermée Σ *supporte fortement* ω si elle contient le support de ω et si, pour toute partie squelettique fermée T contenant Σ, la forme $\omega|_{\mathrm{T}}$ est le prolongement par zéro de $\omega|_\Sigma$.

Notons que dans ce cas, la partie squelettique fermée Σ supporte fortement $\omega \wedge \alpha$ pour toute G-forme α, ainsi que les dérivées $\mathrm{d}'\omega$, $\mathrm{d}''\omega$, etc.

Si Σ est un support fort de ω, alors $\Sigma \cap Y$ est un support fort de $\omega|_Y$ pour tout domaine Y de X.

Soit (V_i) un G-recouvrement de X. D'après §3.3.5, pour que Σ supporte fortement ω, il faut et il suffit que pour tout i, $\Sigma \cap V_i$ supporte fortement $\omega|_{V_i}$.

On peut vouloir résumer les propriétés précédentes en disant que les G-formes fortement supportées par Σ constituent un sous-module différentiel gradué du G-faisceau $\mathscr{F}^{*,*}_{X_{\mathrm{G}}}$.

Remarque 5.3.2. — Soit ω une G-forme de type (p,q) sur X, où p et q sont deux entiers tels que $\max(p,q) = n$ et soit Σ une partie squelettique fermée de X qui contient le support de ω. Si la forme ω est à coefficients tropicalement continus, alors Σ est un support fort de ω, mais ce n'est pas vrai en général.

Par exemple, si θ est la fonction caractéristique de l'origine dans l'espace G-tropical $\mathbf{R}$, la $(1,0)$-forme $\omega = \theta\,\mathrm{d}'x$ a pour support $\Sigma = \{0\}$, qui est une partie squelettique fermée de $\mathbf{R}$. Ce n'en est pas un support fort, car $\omega|_\Sigma = 0$, dont le prolongement à $\mathbf{R}$ est la forme nulle, mais $\omega \neq 0$.

Proposition 5.3.3. — *Soit ω une G-forme de type (p,q) sur X, où p et q sont des entiers tels que $\max(p,q) = n$ et soit Σ une partie squelettique fermée de X qui supporte fortement ω. Alors, $\Sigma^{(n)}$ est une partie squelettique fermée de X qui supporte fortement ω.*

Démonstration. — Comme $\Sigma^{(n)}$ est une partie paralinéaire fermée de Σ, c'est une partie squelettique fermée de X.

Soit T une partie squelettique fermée de X qui contient $\Sigma^{(n)}$; démontrons que $\omega|_T$ est le prolongement par zéro de $\omega|_{\Sigma^{(n)}}$. Quitte à remplacer T par $T \cup \Sigma$, on suppose que T contient Σ. Quitte à raisonner G-localement, on peut supposer que T possède une décomposition cellulaire adaptée à Σ, et il s'agit de démontrer la restriction de ω à toute cellule fermée qui n'est pas contenue dans $\Sigma^{(n)}$ est nulle. C'est en effet le cas d'une cellule qui n'est pas dans Σ, par définition d'un support fort, et d'une cellule qui n'est pas dimension n, car la restriction d'une (p,q)-forme à une telle cellule est nulle.

Prouvons maintenant que le support de ω est contenu dans $\Sigma^{(n)}$. Soit x un point de $\Sigma^{(n)}$; prouvons que ω est nulle au voisinage de x. L'assertion est G-locale au voisinage de x ; on peut donc supposer que X est compact, que ω est G-tropicalisée par une carte f de domaine X et que $\Sigma^{(n)} = \varnothing$, c'est-à-dire que $\dim(\Sigma) < n$; il s'agit alors de démontrer que $\omega = 0$.

Notons P le polyèdre compact $f(X)$ et soit α une (p,q)-forme sur P telle que $\omega = f^*\alpha$. Par hypothèse, $\omega|_{\Sigma\cup\Sigma_f^{(n)}}$ est le prolongement par zéro de $\omega|_\Sigma$. Soit $\mathscr{C}$ une décomposition cellulaire de $\Sigma\cup\Sigma_f^{(n)}$ compatible à Σ et $\Sigma_f^{(n)}$. Soit C une n-cellule de $\mathscr{C}$; comme $\dim(\Sigma) < n$, $\mathring{C}$ ne rencontre pas Σ, donc $\omega|_C = 0$ par définition du prolongement par zéro. Comme $\Sigma_f^{(n)}$ est purement de dimension n, cela entraîne que $\omega|_{\Sigma_f^{(n)}} = 0$. La composition de l'injection de $\Sigma_f^{(n)}$ dans X et de f se factorise par $f(\Sigma_f^{(n)}) = P^{(n)}$ d'après la proposition 5.2.5. D'après la proposition 3.4.4, on a $\alpha|_{P^{(n)}} = 0$. Comme $\max(p,q) = n$, on a donc $\alpha|_P = 0$, d'où $\omega = 0$. □

Lemme 5.3.4. — *Si la forme ω est G-tropicalisée par une carte G-tropicale f de domaine X, alors $\Sigma_f^{(n)}$ supporte fortement ω.*

Démonstration. — Le support de ω est contenu dans l'ensemble des points $x \in X$ en lesquels f est de dimension tropicale $\geqslant n$ qui, par définition, est $\Sigma_f^{(n)}$.

Soit T un sous-espace paralinéaire fermé de X qui contient $\Sigma_f^{(n)}$. Démontrons que $\omega|_{\mathrm{T}}$ est le prolongement par zéro de $\omega|_{\Sigma_f^{(n)}}$. Soit $\mathscr{C}$ une décomposition cellulaire en f-cellules de T qui est compatible à $\Sigma_f^{(n)}$. Il suffit de prouver que pour toute cellule C de $\mathscr{C}$ telle que $\mathring{C}$ est disjoint de $\Sigma_f^{(n)}$, on a $\omega|_C = 0$.

Par hypothèse, f est de dimension tropicale $< n$ en tout point de $\mathring{C}$, donc il existe une cellule D, compacte, d'intérieur non vide, de $\mathring{C}$ telle que $\dim(f(D)) < n$. Comme C est une f-cellule, on $\dim(f(C)) = \dim(f(\mathring{C})) = \dim(f(D))$. D'après la proposition 3.4.4, on a donc $\omega|_C = 0$.

Cela démontre que $\Sigma_f^{(n)}$ supporte fortement ω. □

Proposition 5.3.5. — *Soit n un entier et soit X un espace G-tropical vertébré de niveau n. Soit (p,q) un couple d'entiers naturels tel que $\max(p,q) = n$ et soit ω une G-forme de type (p,q) sur X. Supposons que X est paracompact, ou que le support de ω est compact. Il existe alors une partie squelettique fermée de X qui supporte fortement ω.*

Démonstration. — Lorsque X est paracompact, on considère un G-recouvrement localement fini de X par des domaines compacts qui G-tropicalisent ω ; lorsque ω est à support compact, on considère un G-recouvrement fini d'un voisinage du support de ω par de tels domaines. Pour tout tel domaine V, soit f_V une carte G-tropicale sur V G-tropicalisant $\omega|_V$; d'après l'exemple précédent, $\Sigma_{f_V}^{(n)}$ supporte fortement $\omega|_V$. Soit Σ la réunion des parties squelettiques $\Sigma_{f_V}^{(n)}$. D'après la proposition 5.1.5, c'est une partie squelettique fermée de X ; de plus, pour tout domaine V du G-recouvrement donné, la partie squelettique fermée $\Sigma\cap V$ de V supporte fortement $\omega|_V$, puisque $\Sigma\cap V$ contient $\Sigma_{f_V}^{(n)}$. Par suite, Σ supporte fortement ω. □

Proposition 5.3.6. — *Soit n un entier et soit X un espace G-tropical vertébré de niveau n. Soit (p,q) un couple d'entiers naturels tel que $\max(p,q) = n$ et soit ω une G-forme de type (p,q). Soit Σ un support fort de ω ; alors le support de $\omega|_\Sigma$ est égal au support de ω.*

Démonstration. — La propriété étant G-locale, on peut supposer que X est est compact et le domaine d'une carte G-tropicale f qui G-tropicalise ω ; soit α une (p,q)-forme telle que $\omega = f^*\alpha$.

Soit $x \in X$. Si $x \in \mathrm{supp}(\omega|_\Sigma)$, alors $x \in \mathrm{supp}(\omega)$. Supposons inversement que $x \in \mathrm{supp}(\omega)$ et prouvons que $x \in \mathrm{supp}(\omega|_\Sigma)$.

Soit $\mathrm{T} = \Sigma \cup \Sigma_f^{(n)}$. Par définition d'un support fort, le support de $\omega|_\mathrm{T}$ est égal au support de $\omega|_\Sigma$. De même, comme $\Sigma_f^{(n)}$ est un support fort de ω, le support de $\omega|_\mathrm{T}$ est égal au support de $\omega|_{\Sigma_f^{(n)}}$. Il s'agit donc de prouver que $x \in \mathrm{supp}(\omega|_{\Sigma_f^{(n)}})$.

Le point $f(x)$ appartient au support de α dans $f(X)$ (corollaire 3.4.5), support qui n'est autre que le support de la restriction de α à $f(X)^{(n)}$, puisque α est une (p,q)-forme. L'application paralinéaire f induit une immersion par morceaux de $\Sigma_f^{(n)}$ sur son image $f(\Sigma_f^{(n)}) = f(X)^{(n)}$ (proposition 5.2.5), par laquelle $\omega|_{\Sigma_f^{(n)}}$ est l'image réciproque de α. Comme cette immersion par morceaux possède G-localement des sections, le support de $\omega|_{\Sigma_f^{(n)}}$ est l'image réciproque du support de α ; il contient en particulier le point x. □

§ 5.4. CARTES AGRÉABLES, POLYÈDRES ET CÔNES TROPICAUX

Définition 5.4.1. — *Soit X un espace G-tropical vertébré de niveau n, soit $f\colon X \to E$ une carte G-tropicale et soit C une partie de X. On dit C est une* f-cellule *si c'est une f-cellule de l'espace paralinéaire $\Sigma_f^{(n)}$.*

Une f-cellule de X est une partie squelettique de X ; elle est connexe et non vide, donc est contenue dans une unique composante connexe de X.

Remarque 5.4.2. — Soit C une partie de X et soit $f\colon X \to E$ une carte tropicale. Si f induit un homéomorphisme de C sur une cellule *de dimension n* de E, alors C est contenue dans $\Sigma_f^{(n)}$; c'est alors une f-cellule.

Définition 5.4.3. — *On dit qu'une carte G-tropicale $f\colon X \to E$ est* agréable *si $f(\Sigma_f^{(n)})$ est paralinéaire et si l'application paralinéaire $f|_{\Sigma_f^{(n)}}$ est propre sur son image.*

C'est en particulier le cas si $f|_{\Sigma_f^{(n)}}$ est propre, en particulier si $\Sigma_f^{(n)}$ possède une décomposition cellulaire finie en f-cellules.

Lorsque f est une carte agréable, nous noterons Π_f l'ensemble $f(\Sigma_f^{(n)})$ et l'appellerons le *polyèdre tropical* de la carte G-tropicale agréable f. Il est purement de dimension n et l'application f induit une immersion par morceaux de $\Sigma_f^{(n)}$ sur Π_f.

5.4.4. — Si X est compact, toute carte G-tropicale est agréable et l'on a $\Pi_f = f(X)^{(n)}$ (proposition 5.2.5).

Proposition 5.4.5. — *Soit X un espace G-tropical vertébré de niveau n, soit $f\colon X \to E$ une carte G-tropicale agréable et soit P un sous-espace paralinéaire P de E. Considérons la carte G-tropicale $f_P\colon f^{-1}(P) \to E$ sur le domaine $f^{-1}(P)$ (considéré comme*

espace G-tropical vertébré de niveau n) déduite de f par restriction. La carte f_P est agréable et on a les relations

$$\Sigma^{(n)}_{f_P} = (\Sigma^{(n)}_f \cap f^{-1}(P))^{(n)} \tag{5.4.5.1}$$

$$\Pi_{f_P} = (\Pi_f \cap P)^{(n)}. \tag{5.4.5.2}$$

Démonstration. — L'égalité $\Sigma^{(n)}_{f_P} = (\Sigma^{(n)}_f \cap f^{-1}(P))^{(n)}$ est l'assertion b) de la proposition 5.2.5. On a donc

$$f(\Sigma^{(n)}_{f_P}) = f((\Sigma^{(n)}_f \cap f^{-1}(P))^{(n)}).$$

Comme $f|_{\Sigma^{(n)}_f}$ est une immersion par morceaux compacte sur son image et comme $\Sigma^{(n)}_f \cap f^{-1}(P)$ en est une partie paralinéaire, il résulte de la proposition 2.1.12 que

$$f((\Sigma^{(n)}_f \cap f^{-1}(P))^{(n)}) = f(\Sigma^{(n)}_f \cap f^{-1}(P))^{(n)} = (f(\Sigma^{(n)}_f) \cap P)^{(n)} = (\Pi_f \cap P)^{(n)}.$$

Comme $\Sigma^{(n)}_{f_P}$ est une partie fermée de $\Sigma^{(n)}_f$, l'application f induit une immersion par morceaux compacte de $\Sigma^{(n)}_{f_P}$ sur son image. D'après ce qui précède, cette image est égale à $f(\Sigma^{(n)}_{f_P})$, donc est une partie paralinéaire de E. Ainsi, f_P est une carte G-tropicale agréable et son polyèdre tropical est égal à $\Pi_{f_P} = f(\Sigma^{(n)}_{f_P}) = (\Pi_f \cap P)^{(n)}$. □

5.4.6. — Soit X un espace G-tropical vertébré de niveau n et soit $f\colon X \to E$ une carte tropicale. Soit x un point de $\Sigma^{(n)}_f$.

Considérons un voisinage ouvert paracompact W de x. Alors $\Sigma^{(n)}_f \cap W = \Sigma^{(n)}_{f|_W}$; considérons-en une décomposition cellulaire $\mathscr{C}$ en f-cellules.

Soit V la réunion des n-cellules de $\mathscr{C}$ qui contiennent x. C'est un voisinage paralinéaire compact de x dans $\Sigma^{(n)}_f$ et la restriction de f à V est une immersion linéaire par morceaux de V dans E qui identifie chaque cellule C à une cellule forte de E. Par construction, x est le seul antécédent de $f(x)$ sur V. Soit W' un autre voisinage ouvert paracompact de X, soit $\mathscr{C}'$ une décomposition cellulaire de $\Sigma^{(n)}_f \cap W'$ et soit V' la réunion des n-cellules de $\mathscr{C}'$ contenant x. L'intersection $V \cap V'$ est un voisinage paralinéaire compact de x dans V. par propreté topologique de f il existe un voisinage paralinéaire compact U de $f(x)$ dans E tel que $f^{-1}(U) \subset V \cap V'$. Il s'ensuit que les polyèdres $f(V)$ et $f(V')$ coïncident au voisinage de $f(x)$ dans E. Leur germe commun est le germe d'un unique cône de sommet $f(x)$. On dit que c'est le *cône tropical* de f en x et on le note $\Pi_{f,x}$.

5.4.7. — Soit U un voisinage domanial compact de x, assez petit de sorte que $U \cap \Sigma^{(n)}_f \subset V$. Pour toute n-cellule C de $\mathscr{C}$ qui contient x, l'intersection $U \cap C$ est un voisinage de x dans C, donc $f(U \cap V)$ est un voisinage de $f(x)$ dans $f(C)$. Comme la famille des $f(C)$ est un G-recouvrement de $f(V)$, on en déduit que $f(U \cap V)$ est un voisinage de $f(x)$ dans $f(V)$, purement de dimension n. On a alors

$$f(U)^{(n)} = f(\Sigma^{(n)}_{f|_U}) \subset f(U \cap \Sigma^{(n)}_f) = f(U \cap V) \subset f(U)^{(n)},$$

où la première égalité provient de la proposition 5.2.5 c) et la dernière du fait que $f(U \cap V)$ est purement de dimension n. Il en résulte que $f(U^{(n)}) = f(U \cap V)$; par conséquent, le germe de polyèdre $f(U)^{(n)}$ en $f(x)$ ne dépend pas de U dès que $U \cap \Sigma^{(n)}_f \subset V$, puisqu'il est alors égal au germe de polyèdre de $f(V)$ en $f(x)$, c'est-à-dire encore à $\Pi_{f,x}$.

§ 5.5. ESPACES G-TROPICAUX CALIBRÉS

Soit X un espace G-tropical vertébré de niveau n.

Définition 5.5.1. — *On appelle* n-calibrage *de X la donnée, pour toute partie squelettique Σ de X, d'un n-calibrage strictement positif μ_Σ sur Σ. On exige en outre que si T est une partie squelettique contenue dans Σ, on ait l'égalité $\mu_T = \mu_\Sigma|_T$.*

Un espace G-tropical calibré *de niveau n est un espace G-tropical vertébré de niveau n muni d'un n-calibrage.*

Dans les applications que nous avons en vue, le calibrage est toujours G-localement constant.

Exemple 5.5.2. — Si X est un espace paralinéaire calibré de niveau n, alors l'espace G-tropical vertébré associé est naturellement muni d'un n-calibrage.

5.5.3. — Supposons que X soit muni d'un n-calibrage. Alors, tout domaine de X hérite d'un n-calibrage.

Lemme 5.5.4. — *Soit $\mathscr{S}$ un ensemble de parties squelettiques de X telle que toute partie squelettique de X soit G-recouverte par des parties paralinéaires d'éléments de $\mathscr{S}$. Pour tout $\Sigma \in \mathscr{S}$, supposons donné un n-calibrage μ_Σ de Σ de sorte que pour tous Σ et $\mathrm{T} \in \mathscr{S}$, les calibrages μ_Σ et μ_T coïncident sur $\Sigma \cap \mathrm{T}$. Il existe alors un unique n-calibrage de X qui coïncide avec les calibrages donnés sur les parties squelettiques appartenant à $\mathscr{S}$.*

Un cas particulier important du lemme est celui où $\mathscr{S}$ est l'ensemble des parties squelettiques élémentaires de X et de ses domaines.

Démonstration. — Soit Σ une partie squelettique de X.

Par hypothèse, elle possède un G-recouvrement de la forme (Σ_i), où, pour tout i, Σ_i est une partie paralinéaire d'un élément S_i de $\mathscr{S}$. On a nécessairement $\mu_\Sigma|_{\Sigma_i} = \mu_{S_i}|_{\Sigma_i}$. Soit i, j et des indices ; par hypothèse, les calibrages μ_{S_i} et μ_{S_j} coïncident sur $S_i \cap S_j$; par conséquent, les calibrages $\mu_{S_i}|_{\Sigma_i}$ et $\mu_{S_j}|_{\Sigma_j}$ coïncident sur l'intersection $\Sigma_i \cap \Sigma_j$. Il existe donc un unique calibrage μ_Σ de Σ qui coïncide avec $\mu_{S_i}|_{\Sigma_i}$ sur Σ_i, pour tout i.

Ce calibrage μ_Σ ne dépend pas du choix du G-recouvrement (Σ_i), comme on le voit en considérant la réunion de deux G-recouvrements.

La famille de ces calibrages convient, et c'est la seule. □

5.5.5. — Soit $f\colon X \to E$ une carte G-tropicale agréable. On munit alors le polyèdre Π_f du calibrage $f_*\mu_{\Sigma_f^{(n)}}$ image du calibrage de $\Sigma_f^{(n)}$ par l'immersion par morceaux propre $f|_{\Sigma_f^{(n)}}$; on note μ_{Π_f} ce calibrage.

Exemple 5.5.6. — Soit $f\colon X \to E$ une carte G-tropicale agréable. Soit P un sous-espace paralinéaire de Π_f. Posons $Y = f^{-1}(P)$ et posons $g = f|_Y$. D'après la proposition 5.4.5, la carte $g = f|_Y$ est agréable, on $\Sigma_g^{(n)} = (\Sigma_f^{(n)} \cap f^{-1}(P))^{(n)}$ et $\Pi_g = P^{(n)}$. Le calibrage de $\Sigma_g^{(n)}$ est la restriction de celui de $\Sigma_f^{(n)}$. Il découle alors des définitions que le calibrage de Π_g est la restriction du calibrage de Π_f.

Exemple 5.5.7. — Soit $f\colon X \to E$ une carte G-tropicale, soit $p\colon E \to E'$ une application affine, et soit $g = p \circ f$. Supposons que la carte G-tropicale g soit agréable.

Soit Π'_f la réunion des n-cellules de E contenues dans Π_f qui ne sont pas contractées par p. Comme c'est la réunion des n-cellules d'une décomposition cellulaire donnée de Π_f qui ne sont pas contractées par p, l'ensemble Π'_f est un sous-espace paralinéaire fermé de Π_f. Démontrons que p induit une immersion linéaire par morceaux *compacte* de Π'_f sur Π_g et que le calibrage canonique de Π_g est l'image de la restriction à Π'_f du calibrage canonique de Π_f.

Comme $g = p \circ f$, la dimension tropicale de g est en tout point inférieure à celle de f ; on a donc $\Sigma_g^{(n)} \subset \Sigma_f^{(n)}$.

Démontrons d'abord que $f_{\mathrm{trop}}^{-1}(\Pi'_f) = \Sigma_g^{(n)}$. Soit x un point de $\Sigma_f^{(n)}$ tel que $f(x) \in \Pi'_f$. Soit D une n-cellule contenue dans Π_f contenant $f(x)$ et non contractée par p ; comme f est une immersion par morceaux, on peut supposer qu'il existe une n-cellule C de $\Sigma_f^{(n)}$ telle que f induise un isomorphisme de C sur D. Comme D n'est pas contractée par p, la dimension tropicale de g en x est au moins égale à n, donc $x \in \Sigma_g^{(n)}$. Inversement, soit x un point de $\Sigma_g^{(n)}$ et soit C une n-cellule de $\Sigma_g^{(n)}$ dont l'image par f est une n-cellule D de Π_f ; comme $g|_C$ est injective, l'application $p|_D$ est injective, d'où $f(x) \in \Pi'_f$.

On a $\Pi_g = g(\Sigma_g^{(n)}) = p(f(\Sigma_g^{(n)})) = p(\Pi'_f)$ et l'application $p\colon \Pi'_f \to \Pi_g$ est une immersion linéaire par morceaux. Remarquons qu'elle est compacte : en effet, soit A une partie compacte de Π_g, alors $p^{-1}(A) \cap \Pi'_f = f(g^{-1}(A) \cap \Sigma_g^{(n)})$ donc est compacte puisque, g étant agréable, $g^{-1}(A) \cap \Sigma_g^{(n)}$ est compact.

D'après la première partie, l'image par f du calibrage de $\Sigma_g^{(n)}$ est égale à la restriction à Π'_f du calibrage de Π_f. Le calibrage de Π_g est donc l'image par p de ce calibrage de Π'_f.

5.5.8. — Soit X un espace G-tropical calibré de niveau n et soit $f\colon X \to E$ une carte tropicale. Soit x un point de $\Sigma_f^{(n)}$. Nous allons calibrer le cône tropical $\Pi_{f,x}$ défini au §5.4.6.

Soit V un voisinage paralinéaire compact de x dans $\Sigma_f^{(n)}$, assez petit pour que le germe du cône $\Pi_{f,x}$ en x soit le germe de $f(V)$ en $f(x)$. On en déduit un germe de calibrage de $\Pi_{f,x}$ en $f(x)$ qui se prolonge de manière unique en un calibrage de ce cône qui est adapté à une décomposition cellulaire conique, et donc à toute décomposition cellulaire conique assez fine. Ce calibrage ne dépend pas du choix de V.

Si U est un voisinage domanial compact de x, assez petit, le germe du polyèdre calibré $\Pi_{f|_U}$ en $f(x)$ coïncide avec le germe du cône tropical calibré $\Pi_{f,x}$.

§ 5.6. FORMES-VOLUME SUR UN ESPACE G-TROPICAL VERTÉBRÉ

Soit p et n des entiers naturels tels que $p \leqslant n$. Dans ce paragraphe, nous définissons un faisceau de formes-volume p-dimensionnelles sur un espace G-tropical vertébré X de niveau n. Ses sections sont localement de type Lebesgue sur une partie squelettique de dimension au plus p.

On fixe une classe de coefficients $\mathscr{G}$.

5.6.1. — Soit X un espace G-tropical vertébré de niveau n.

Soit $\mathscr{P}_p(X)$ l'ensemble des parties squelettiques fermées de X de dimension $\leqslant p$; ordonnons-le par l'inclusion. Pour tout $\Sigma \in \mathscr{P}_p(X)$, on dispose de l'espace $\mathscr{V}^p(\Sigma)$ des formes-volume p-dimensionnelles sur Σ. Les morphismes de prolongement par zéro font de la famille $(\mathscr{V}^p(\Sigma))_{\Sigma\in\mathscr{P}_p(X)}$ un système inductif filtrant ; notons $\mathscr{V}^p_{\mathrm{pf}}(X)$ sa limite inductive. Observons que pour tout Σ, l'application canonique de $\mathscr{V}^p(\Sigma)$ dans $\mathscr{V}^p_{\mathrm{pf}}(X)$ est injective.

Soit V un domaine de X. Soit $\lambda \in \mathscr{V}^p_{\mathrm{pf}}(X)$, provenant d'une forme-volume $\lambda_\Sigma \in \mathscr{V}^p(\Sigma)$, à coefficients dans $\mathscr{F}$, pour une certaine partie squelettique fermée $\Sigma \in \mathscr{P}_p(X)$. L'image de $\lambda_\Sigma|_{\Sigma\cap V}$ dans $\mathscr{V}^p(V)$ ne dépend que de λ, et sera notée $\lambda|_V$. Grâce à ces flèches de restriction, l'application $V \mapsto \mathscr{V}^p_{\mathrm{pf}}(V)$ apparaît comme un préfaisceau sur X_{G} qu'on note $\mathscr{V}^{\mathscr{F},p}_{X_{\mathrm{G}},\mathrm{pf}}$, où plus simplement $\mathscr{V}^p_{X_{\mathrm{G}},\mathrm{pf}}$ s'il ne peut y avoir d'ambiguïté quant à la classe $\mathscr{F}$.

Ce préfaisceau a une structure naturelle de module sur le faisceau d'anneaux des fonctions numériques sur X dont la restriction à toute partie squelettique appartient à $\mathscr{G}$.

Lemme 5.6.2. — *Le préfaisceau $\mathscr{V}^p_{X_{\mathrm{G}},\mathrm{pf}}$ est séparé.*

Démonstration. — Soit V un domaine de X, soit (V_i) un G-recouvrement de V et soit λ un élément de $\mathscr{V}^p_{X_{\mathrm{G}},\mathrm{pf}}(V)$ tel que $\lambda|_{V_i} = 0$ pour tout i. Démontrons que $\lambda = 0$.

Choisissons une partie squelettique fermée Σ de V telle que λ provienne d'un élément λ_Σ de $\mathscr{V}^p(\Sigma)$. Par hypothèse, la restriction de λ_Σ à $\Sigma \cap V_i$ est nulle pour tout i ; comme les $\Sigma \cap V_i$ constituent un G-recouvrement de Σ, on a $\lambda_\Sigma = 0$, et donc $\lambda = 0$. □

5.6.3. — On note $\mathscr{V}^{\mathscr{G},p}_{X_{\mathrm{G}}}$ le G-faisceau associé au G-préfaisceau $\mathscr{V}^{\mathscr{G},p}_{X_{\mathrm{G}},\mathrm{pf}}$ et on dit que c'est le *faisceau des formes-volume p-dimensionnelles à coefficients dans $\mathscr{G}$ sur X_{G}*. C'est un faisceau en modules sur le faisceau d'anneaux des fonctions numériques sur X dont la restriction à toute partie squelettique appartient à $\mathscr{G}$.

On note $\mathscr{V}^{\mathscr{G},p}_X$ le faisceau associé pour la topologie usuelle ; on dit que c'est le *faisceau des formes-volume p-dimensionnelles à coefficients dans $\mathscr{G}$ sur X*.

Notons $\pi\colon X_{\mathrm{G}} \to X_{\mathrm{top}}$ le morphisme de sites canonique ; il découle du lemme 5.6.2 que $\mathscr{V}^p_X$ est le sous-faisceau de $\pi_*\mathscr{V}^p_{X_{\mathrm{G}}}$ constitué des sections qui appartiennent localement, et non seulement G-localement, à $\mathscr{V}^p_{X_{\mathrm{G,pf}}}$.

Proposition 5.6.4. — *Supposons que X est paracompact. Soit (X_i) un G-recouvrement de X ; pour tout i, soit $\lambda_i \in \mathscr{V}^p_{\mathrm{pf}}(X_i)$. Si $\lambda_i|_{X_i\cap X_j} = \lambda_j|_{X_i\cap X_j}$ pour tout (i,j) il existe une unique forme-volume $\lambda \in \mathscr{V}^p_{\mathrm{pf}}(X)$ telle que $\lambda|_{X_i} = \lambda_i$ pour tout i.*

Démonstration. — L'unicité de λ provient du lemme 5.6.2 ci-dessus. En vertu de cette assertion d'unicité, l'existence peut être prouvée après raffinement du recouvrement (Y_i). Puisque X est paracompact, on peut donc supposer que le recouvrement (Y_i) est localement fini. Pour tout i, choisissons une partie squelettique fermée Σ_i de Y_i telle que λ_i provienne d'un élément $\lambda_{\Sigma_i} \in \mathscr{V}^p(\Sigma_i)$. Comme le G-recouvrement (Y_i) est localement fini, la réunion Σ des Σ_i est une partie squelettique fermée de X (proposition 5.1.5) dont la famille (Σ_i) est un G-recouvrement. Les λ_{Σ_i} se recollent alors en une section $\lambda_\Sigma \in \mathscr{V}^p(\Sigma)$. Notons λ la classe de λ_Σ dans $\mathscr{V}^p(X)$; alors $\lambda|_{X_i} = \lambda_i$ quel que soit i. □

Corollaire 5.6.5. — *Soit Y un domaine* paracompact *de X et soit $\lambda \in \mathscr{V}^{\mathscr{F},p}_{X_{\mathrm{G}}}(Y)$ une forme-volume p-dimensionnelle sur Y. Il existe une partie squelettique fermée Σ de Y de dimension $\leqslant p$ et une p-forme-volume λ_Σ sur Σ qui définit λ.*

Il est vraisemblable que le corollaire ne vaille pas sans l'hypothèse que Y est paracompact.

5.6.6. — Soit Y un domaine fermé de X ; notons i l'immersion canonique de Y dans X. Comme toute partie squelettique fermée de Y est une partie squelettique fermée de X, le prolongement par zéro définit un homomorphisme de G-préfaisceaux de $i_*\mathscr{V}^p_{Y_{\mathrm{G}},\mathrm{pf}}$ dans $\mathscr{V}^p_{X_{\mathrm{G}},\mathrm{pf}}$. On en déduit un morphisme de G-faisceaux de $i_*\mathscr{V}^p_{Y_{\mathrm{G}}}$ dans $\mathscr{V}^p_{X_{\mathrm{G}}}$. Si λ est une forme-volume p-dimensionnelle sur Y, on notera $i_*\lambda$ la forme-volume p-dimensionnelle correspondante sur X.

5.6.7. — On dit qu'une forme-volume p-dimensionnelle λ sur X est positive s'il existe un G-recouvrement (X_i) de X tel que, pour tout i, λ soit représentée par une formule-volume positive sur une partie squelettique fermée de X_i.

Dans ce cas, toute forme-volume sur une partie squelettie fermée d'un domaine Y de X induisant la forme-volume $\omega|_Y$ est elle-même positive.

§ 5.7. MESURES ASSOCIÉES À UNE FORME-VOLUME p-DIMENSIONNELLE

Soit X un espace G-tropical vertébré de niveau n et soit p un entier naturel tel que $p \leqslant n$. Nous allons associer à toute forme-volume λ, p-dimensionnelle, à coefficients boréliens, sur X_{G} une mesure de Borel régulière λ_{Bor} sur X et, lorsque cette mesure est localement finie, une mesure de Radon λ_{Rad} sur X telle que $\lambda_{\mathrm{Bor}} = |\lambda_{\mathrm{Rad}}|$ qui est positive lorsque λ est une forme-volume positive.

Soit $\mathscr{G}$ une classe de coefficients qui est contenue dans $\mathscr{B}$.

5.7.1. — Soit Σ et Σ' des parties squelettiques fermées de X telles que $\Sigma \subset \Sigma'$. Soit λ appartenant à $\mathscr{V}^{\mathscr{G},p}(\Sigma)$ et soit λ' son prolongement par zéro à Σ'. Notons μ et μ' les mesures de Borel sur Σ et Σ' associées à λ et λ' ; lorsqu'on les considère comme mesures de Borel sur X, elles sont égales.

Les mesure de Borel μ et μ' sont simultanément localement finies ou non. Lorsqu'elles le sont, les formes-volume λ et λ' donnent lieu à des mesures de Radon $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\mu}'$ sur Σ et Σ' dont μ et μ' sont les valeurs absolues. On a de plus $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}'$ lorsque ces mesures de Radon sont identifiées à des mesures de Radon sur X.

Par conséquent, il existe un unique morphisme de faisceaux $\lambda \mapsto \lambda_{\mathrm{Bor}}$ sur X_{G} qui, pour tout domaine Y de X, toute partie squelettique fermée Σ de Y et toute forme-volume λ_Σ sur Σ, p-dimensionnelle et à coefficients dans $\mathscr{G}$, applique la classe de λ_Σ dans $\mathscr{V}^{\mathscr{G},p}(Y)$ sur la mesure de Borel associée à λ_Σ, considérée comme une mesure de Borel sur Y.

Notons $\mathscr{V}^{\mathscr{G},p}_{X_{\mathrm{G}},\mathrm{pf}}$ le sous-faisceau de $\mathscr{V}^{\mathscr{G},p}_{X_{\mathrm{G}}}$ constitué des formes-volume λ telles que λ_{Bor} soit localement finie. Il existe un unique morphisme $\lambda \mapsto \lambda_{\mathrm{Rad}}$ de ce faisceau à valeurs dans le faisceau des mesures de Radon sur X qui, pour tout domaine Y de X, toute partie squelettique fermée Σ de Y et toute forme-volume λ_Σ sur Σ dont la mesure de

Borel associée soit localement finie, applique la classe de λ_Σ dans $\mathscr{V}^{\mathscr{G},p}(Y)$ sur la mesure de Radon associée à λ_Σ, considérée comme une mesure de Radon sur Y.

Observons que l'on a $\mathscr{V}^{\mathscr{G},p}_{X_{\mathrm{G}},\mathrm{lf}} = \mathscr{V}^{\mathscr{G},p}_{X_{\mathrm{G}}}$ si toute fonction de $\mathscr{G}$ est localement bornée. Si toute fonction de $\mathscr{G}$ est continue, on a aussi on a $\lambda_{\mathrm{Bor}} = 0$ si et seulement si $\lambda = 0$, et l'application $\lambda \mapsto \lambda_{\mathrm{Rad}}$ est une injection $\mathbf{R}$-linéaire.

5.7.2. — Soit $u\colon X \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ une fonction sur X. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour toute partie squelettique Σ de X qui est une cellule de dimension n et tout isomorphisme paralinéaire f de Σ sur une cellule C de $\mathbf{R}^n$, la fonction $u \circ f^{-1}$ est localement intégrable sur C pour la mesure de Lebesgue.

(ii) Pour toute partie squelettique Σ de X qui est une cellule de dimension n, il existe un isomorphisme paralinéaire f de Σ sur une cellule C de $\mathbf{R}^n$ tel que la fonction $u \circ f^{-1}$ soit localement intégrable sur C pour la mesure de Lebesgue.

(iii) Pour toute forme volume λ sur X à coefficients localement bornés, la fonction u est localement intégrable par rapport à la mesure λ_{Bor}.

On dit alors que u est *localement intégrable* sur X. C'est une condition G-locale.

On note $\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$ l'espace vectoriel des fonctions localement intégrables, à valeurs réelles, sur X. C'est même un module sur l'anneau des fonctions numériques localement bornées sur X.

Plus généralement, on notera $\mathscr{L}^1_{X,\mathrm{loc}}$ le G-faisceau des fonctions localement intégrables sur X qui associe à un domaine V de X l'ensemble des fonctions localement intégrables sur V.

5.7.3. — On dit qu'une partie N de X est *négligeable* si les propriétés équivalentes suivantes sont satisfaites :

(i) Pour toute partie squelettique Σ de X qui est une cellule de dimension n et tout isomorphisme paralinéaire f de Σ sur une cellule C de $\mathbf{R}^n$, le sous-espace $f(N \cap \Sigma)$ de $\mathbf{R}^n$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue.

(ii) Pour toute partie squelettique Σ de X qui est une cellule de dimension n, il existe un isomorphisme paralinéaire f de Σ sur une cellule C de $\mathbf{R}^n$, le sous-espace $f(N \cap \Sigma)$ de $\mathbf{R}^n$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue.

(iii) La fonction caractéristique de N est localement intégrable et pour toute forme volume λ sur X à coefficients localement bornés et à support compact, la fonction u est d'intégrale nulle par rapport à la mesure λ_{Bor}.

C'est une propriété G-locale.

Toute partie n-négligeable d'une partie squelettique de X (déf. 2.1.14) est négligeable.

Comme de coutume, on dira qu'une propriété sur X est vérifiée *presque partout* si l'ensemble des points de X où elle n'est pas vérifiée est négligeable. On notera ainsi $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$ l'espace vectoriel quotient de $\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$ par son sous-espace vectoriel des fonctions nulles presque partout.

Plus généralement, on notera $\mathrm{L}^1_{X,\mathrm{loc}}$ le G-faisceau des fonctions localement intégrables sur X modulo celles nulles presque partout.

§ 5.8. INTÉGRATION DES FORMES DIFFÉRENTIELLES

Soit X un espace G-tropical calibré de niveau n.

5.8.1. — Soit $\omega \in \mathscr{F}^{n,n}_{X_{\mathrm{G}}}(X)$, soit Σ une partie squelettique fermée de X qui supporte fortement ω. Par la construction du §4.5.5, en accouplant la restriction $\omega|_\Sigma$ à Σ de la forme ω et le n-calibrage μ_Σ de Σ, on obtient une forme-volume n-dimensionnelle $\tilde{\omega}_\Sigma$ sur Σ, et donc une forme-volume n-dimensionnelle sur X au sens du §5.6. D'après la proposition 4.5.8 et la définition d'un support fort, cette forme-volume sur X ne dépend pas du choix de Σ ; on la note $\widetilde{\omega}$. Elle est positive si ω est une forme positive, car le calibrage canonique est positif (lemme 14.3.4).

Lemme 5.8.2. — *Soit $\omega \in \mathscr{F}^{n,n}_{X_{\mathrm{G}}}(X)$. On suppose qu'il existe une partie squelettique fermée de X qui supporte fortement ω. Pour tout domaine analytique Y de X, il existe une partie squelettique fermée de Y qui supporte fortement $\omega|_Y$ et l'on a l'égalité $\widetilde{\omega|_Y} = \tilde{\omega}|_Y$ de formes-volume n-dimensionnelles sur Y.*

Démonstration. — Soit Σ une partie squelettique fermée de X qui supporte fortement ω. Alors, $\mathrm{T} = \Sigma \cap Y$ est une partie squelettique fermée de Y qui supporte fortement $\omega|_Y$. De plus, on a

$$\begin{aligned}
\widetilde{\omega|_Y} &= \langle (\omega|_Y)|_{\mathrm{T}}, \mu_{\mathrm{T}} \rangle && \text{par définition de } \widetilde{\omega|_Y} \\
&= \langle \omega|_{\mathrm{T}}, \mu_{\mathrm{T}} \rangle && \text{d'après (3.3.14)} \\
&= \langle (\omega|_\Sigma)|_{\mathrm{T}}, (\mu_\Sigma)|_{\mathrm{T}} \rangle && \text{d'après (3.3.14) et la définition d'un calibrage} \\
&= \langle \omega|_\Sigma, \mu_\Sigma \rangle|_T = \widetilde{\omega}|_Y
\end{aligned}$$

parce que l'accouplement entre (n,n)-formes et calibrages est un morphisme de faisceaux sur le site X_{G}. Le lemme est ainsi démontré. □

Proposition 5.8.3. — *Il existe un unique morphisme de faisceaux $\mathscr{F}^{n,n}_{X_{\mathrm{G}}} \to \mathscr{V}^n_{X_{\mathrm{G}}}$ sur X_{G}, noté $\omega \mapsto \widetilde{\omega}$, qui prolonge l'application définie en* (5.8.1) *lorsque ω possède un support fort. Ce morphisme est $\mathscr{F}^{0,0}_{X_{\mathrm{G}}}$-linéaire. Si ω est une G-forme positive, la forme-volume $\widetilde{\omega}$ est positive. Si ω est à coefficients dans une classe $\mathscr{G}$, il en va de même de la forme-volume $\widetilde{\omega}$.*

Démonstration. — Compte tenu du lemme 5.8.2, la première assertion résulte de ce que toute forme sur un domaine paracompact possède un support fort, et que tout domaine est G-recouvert par ses domaines paracompacts. Les autres propriétés découlent alors de la construction. □

5.8.4. — Explicitons cette construction lorsque ω est tropicale. Soit $f\colon X \to E$ une carte G-tropicale et soit α une (n,n)-forme sur un sous-espace paralinéaire de E contenant $f(X)$ telle que $\omega = f^*\alpha$. Alors, $\Sigma_f^{(n)}$ est un support fort de ω (lemme 5.3.4) et on a l'égalité de formes-volume sur $\Sigma_f^{(n)}$:

$$\tilde{\omega} = \langle f^*_{\mathrm{trop}}\alpha, \mu_{\Sigma_f^{(n)}} \rangle. \tag{5.8.4.1}$$

Si, de plus, la carte G-tropicale f est agréable, la proposition 4.5.8 entraîne alors que

$$f_{\mathrm{trop},*}(\tilde{\omega}) = \langle \alpha, f_*\mu_{\Sigma_f^{(n)}} \rangle = \langle \alpha, \mu_{\Pi_f} \rangle. \tag{5.8.4.2}$$

5.8.5. — Soit ω une forme de type (n,n) sur X_{G} à coefficients tropicalement boréliens. Nous venons de lui associer une forme-volume n-dimensionnelle $\tilde{\omega}$. Nous noterons alors ω_{Bor} la mesure de Borel sur X associée à $\tilde{\omega}$ par la construction du §5.7.1.

Nous dirons que ω est *localement intégrable* si cette mesure est localement finie, et que ω est intégrable si cette mesure est finie. Lorsque ω est localement intégrable, nous noterons ω_{Rad} la mesure de Radon associée à $\tilde{\omega}$; on a $|\omega_{\mathrm{Rad}}| = \omega_{\mathrm{Bor}}$. Lorsque ω est une G-forme positive, la mesure ω_{Rad} est positive.

Si f est une fonction borélienne sur X, on notera $\int_X f|\omega|$ et $\int_X f\omega$ les intégrales de f contre les mesures ω_{Bor} et ω_{Rad} lorsqu'elles existent. Cela définit en particulier l'intégrale $\int_X \omega$ pour toute G-forme de type (n,n) à support compact qui est localement intégrable (par exemple lisse).

Les G-formes localement intégrables constituent un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}^{n,n}(X_{\mathrm{G}})$ contenant les G-formes lisses. Les G-formes intégrables en sont un sous-espace vectoriel qui contient les G-formes lisses à support compact.

5.8.6. — Soit u une fonction localement intégrable sur X et soit ω une G-forme lisse de type (n,n) sur X. Alors, u est localement intégrable par rapport à la mesure ω_{Bor}, de sorte que $u\omega_{\mathrm{Rad}}$ est une mesure de Radon sur X.

L'application $(u,\omega) \mapsto u\omega_{\mathrm{Rad}}$ est bilinéaire ; elle induit une application linéaire de $\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(X_{\mathrm{G}}) \otimes \mathscr{A}^{n,n}(X_{\mathrm{G}})$ dans l'ensemble des mesures de Radon sur X. Cette application se factorise par $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(X_{\mathrm{G}}) \otimes \mathscr{A}^{n,n}(X_{\mathrm{G}})$. On la notera bien sûr $\alpha \mapsto \alpha_{\mathrm{Rad}}$.

Cette construction s'étend en des morphismes de G-faisceaux

$$\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc},X_{\mathrm{G}}} \otimes_{\mathscr{A}_{X_{\mathrm{G}}}} \mathscr{A}^{n,n}_{X_{\mathrm{G}}} \to \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc},X_{\mathrm{G}}} \otimes_{\mathscr{A}_{X_{\mathrm{G}}}} \mathscr{A}^{n,n}_{X_{\mathrm{G}}} \to \mathscr{M}_{\mathrm{Rad},X_{\mathrm{G}}}$$

sur X, où $\mathscr{M}_{\mathrm{Rad},X_{\mathrm{G}}}$ est le G-faisceau des mesures de Radon sur X.

Une section du faisceau $\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc},X_{\mathrm{G}}} \otimes_{\mathscr{A}_{X_{\mathrm{G}}}} \mathscr{A}^{p,q}_{X_{\mathrm{G}}}$ sera appelée G-forme de type (p,q) à coefficients localement intégrables.

§ 5.9. MESURES DE BORD

Soit X un espace G-tropical calibré de niveau n.

5.9.1. — Soit $\omega \in \mathscr{F}^{n-1,n}_{X_{\mathrm{G}}}(X)$, soit Σ une partie squelettique fermée de X qui supporte fortement ω. En accouplant la restriction à $\Sigma^{(n)}$ de la forme ω et le calibrage canonique de $\Sigma^{(n)}$ par la construction du §4.6.3, on obtient une forme-volume $(n-1)$-dimensionnelle sur $\Sigma^{(n)}$. D'après la proposition 4.6.5 et la définition d'un support fort, la forme-volume $(n-1)$-dimensionnelle sur X qu'on en déduit ne dépend pas du choix de Σ ; on la note $\widetilde{\omega}$.

Lemme 5.9.2. — *Soit $\omega \in \mathscr{F}^{n-1,n}_{X_{\mathrm{G}}}(X)$. On suppose qu'il existe une partie squelettique fermée de X qui supporte fortement ω. Pour tout domaine analytique* ouvert *Y de X, il existe une partie squelettique fermée de Y qui supporte fortement $\omega|_Y$ et l'on a l'égalité $\widetilde{\omega|_Y} = \tilde{\omega}|_Y$ de formes-volume $(n-1)$-dimensionnelles sur Y.*

Démonstration. — Soit Σ une partie squelettique fermée de X qui supporte fortement ω. Alors, $\mathrm{T} = \Sigma \cap Y$ est une partie squelettique fermée de Y qui supporte fortement $\omega|_Y$.

De plus, on a

$$\begin{aligned}\widetilde{\omega|_Y} &= \langle(\omega|_Y)|_{\mathrm{T}}, \mu_{\mathrm{T}}\rangle && \text{par définition de } \widetilde{\omega|_Y}\\ &= \langle\omega|_{\mathrm{T}}, \mu_{\mathrm{T}}\rangle && \text{d'après (3.3.14)}\\ &= \langle(\omega|_\Sigma)|_{\mathrm{T}}, (\mu_\Sigma)|_{\mathrm{T}}\rangle && \text{d'après (3.3.14) et la définition d'un calibrage}\\ &= \langle\omega|_\Sigma, \mu_\Sigma\rangle|_{\mathrm{T}} = \widetilde{\omega}|_Y\end{aligned}$$

car l'accouplement entre $(n-1,n)$-formes et calibrages est un morphisme de faisceaux sur le site topologique de X. Le lemme est ainsi démontré. □

Proposition 5.9.3. — *Notons $\pi\colon X_{\mathrm{G}} \to X$ le morphisme canonique de sites. Il existe un unique morphisme de faisceaux $\pi_*\mathscr{F}^{n-1,n}_{X_{\mathrm{G}}} \to \pi_*\mathscr{V}^{n-1}_{X_{\mathrm{G}}}$ sur l'espace topologique X, noté $\omega \mapsto \widetilde{\omega}$, qui prolonge l'application définie en* (5.9.1) *lorsque ω possède un support fort. Ce morphisme est $\mathscr{F}^{0,0}_X$-linéaire.*

Démonstration. — Compte tenu du lemme 5.9.2, cela résulte de ce que toute G-forme sur un ouvert paracompact possède un support fort, et que tout espace G-tropical est recouvert par ses ouverts paracompacts. □

5.9.4. — Explicitons cette construction lorsque ω est tropicale. Soit $f\colon X \to E$ une carte G-tropicale et soit α une $(n-1,n)$-forme sur un sous-espace paralinéaire de E contenant $f(X)$ telle que $\omega = f^*\alpha$. Alors, $\Sigma_f^{(n)}$ est un support fort de ω (lemme 5.3.4) et on a l'égalité de formes-volume $(n-1)$-dimensionnelles sur $\Sigma_f^{(n)}$:

$$\tilde{\omega} = \langle f^*\alpha, \mu_{\Sigma_f^{(n)}}\rangle. \tag{5.9.4.1}$$

Si, de plus, l'application $f|_{\Sigma_f^{(n)}}$ est topologiquement propre, la proposition 4.5.8 entraîne alors que

$$f_{\mathrm{trop},*}(\tilde{\omega}) = \langle\alpha, f_*\mu_{\Sigma_f^{(n)}}\rangle = \langle\alpha, \mu_{\Pi_f}\rangle. \tag{5.9.4.2}$$

Rappelons alors (*cf.* §4.6.13) que la forme-volume $(n-1)$-dimensionnelle $\langle\alpha, \mu_{\Pi_f}\rangle$ se calcule par accouplement avec la discordance du calibrage de Π_f.

Proposition 5.9.5 **(Compensation des bords).** — *Soit $(X_i)_{i\in I}$ un G-recouvrement localement fini de X et soit $\omega \in \mathscr{F}^{n-1,n}_{X_{\mathrm{G}}}(X)$ une G-forme de type $(n-1,n)$ sur X. Pour toute partie J de I, notons $X_J = \bigcap_{j\in J} X_j$ et u_J l'immersion de X_J dans X. On a l'égalité*

$$\tilde{\omega} = \sum_{\varnothing\neq J\subset I} (-1)^{\mathrm{Card}(J)-1}(u_J)_*\widetilde{\omega|_{X_J}}.$$

Démonstration. — En raisonnant localement, on suppose que X est paracompact et donc que ω possède un support fort. La formule découle alors de la proposition 4.6.6. □

5.9.6. — Soit ω une G-forme de type $(n-1,n)$ sur X à coefficients tropicalement boréliens. Nous venons de lui associer une forme-volume $(n-1)$-dimensionnelle $\tilde{\omega}$. Nous noterons alors ω_{Bor} la mesure de Borel sur X associée par la construction du §5.7.1.

Lorsque la forme-volume $\tilde{\omega}$ est localement intégrable, la mesure ω_{Bor} est localement finie ; on note alors $\omega|_{\mathrm{Rad}}$ la mesure de Radon associée à $\tilde{\omega}$. On a $|\omega_{\mathrm{Rad}}| = \omega_{\mathrm{Bor}}$.

Si f est une fonction borélienne sur X, on notera $\int_X^{\partial} f|\omega|$ et $\int_X^{\partial} f\omega$ les intégrales de f contre les mesures ω_{Bor} et ω_{Rad} lorsqu'elles existent. Cela définit en particulier l'intégrale $\int_X^{\partial}\omega$ pour toute G-forme de type $(n-1,n)$ à support compact qui est localement intégrable (par exemple lisse).

§ 5.10. INTÉGRALES ET TROPICALISATIONS

Soit X un espace G-tropical calibré de niveau n.

Proposition 5.10.1. — *Soit $f\colon X \to E$ une carte G-tropicale agréable, soit Π_f le polyèdre tropical de la carte f et soit μ_{Π_f} son calibrage.*

Soit $p \in \{n-1,n\}$ et soit α une (p,n)-forme à coefficients boréliens sur un sous-espace paralinéaire P de E contenant $f(X)$.

a) *Si $p=n$, on a l'égalité*

$$f_{\mathrm{trop},*}(f^*\alpha)_{\mathrm{Bor}} \geqslant \langle \alpha, \mu_{\Pi_f}\rangle_{\mathrm{Bor}}$$

de mesures de Borel sur $\Pi_f^{(n)}$.

b) *Si $p=n-1$, on a l'inégalité*

$$f_{\mathrm{trop},*}(f^*\alpha)_{\mathrm{Bor}} \geqslant \langle \alpha, \mu_{\Pi_f}\rangle_{\mathrm{Bor}}$$

de mesures de Borel sur $\Pi_f^{(n)}$.

c) *La mesure $(f^*\alpha)_{\mathrm{Bor}}$ est localement finie si et seulement si la forme $\alpha|_{\Pi_f}$ est localement intégrable sur Π_f ; dans ce cas, on a l'égalité*

$$f_{\mathrm{trop},*}(f^*\alpha)_{\mathrm{Rad}} = \langle \alpha, \mu_{\Pi_f}\rangle_{\mathrm{Rad}}$$

de mesures de Radon sur Π_f.

d) *En particulier, si α est intégrable sur Π_f, la forme $f^*\alpha$ est intégrable sur X, on a l'égalité*

$$\int_X f^*\alpha = \int_{\Pi_f} \langle \alpha, \mu_{\Pi_f}\rangle \tag{5.10.1.1}$$

lorsque $p=n$ et l'égalité

$$\int_X^{\partial} f^*\alpha = \int_{\Pi_f}^{\partial} \langle \alpha, \mu_{\Pi_f}\rangle \tag{5.10.1.2}$$

lorsque $p=n-1$.

Démonstration. — Posons $\omega = f^*\alpha$. D'après la relation (5.8.4.2) lorsque $p=n$ et la relation (5.9.4.2) lorsque $p=n-1$, on a l'égalité $(f_{\mathrm{trop}})_*(\tilde{\omega}) = \langle \alpha, \mu_{\Pi_f}\rangle$ de formes-volume p-dimensionnelles sur Π_f. Le lemme 4.4.6 entraîne alors que $f_*(\tilde{\omega}_{\mathrm{Bor}}) \geqslant \langle \alpha, \mu_{\Pi_f}\rangle_{\mathrm{Bor}}$. Loreque $p=n$, on vérifie, en revenant aux définitions et en utilisant la positivité du

calibrage canonique, que l'on a en fait l'égalité, d'où (1). En appliquant le lemme 4.4.6 aux mesures de Radon correspondantes, on en déduit (2), puis (3) par intégration. □

5.10.2. — La formule (5.10.1.1) définit explicitement l'intégrale d'une forme tropicale. Prouvons inversement que cette relation dans des cartes tropicales permet de reconstituer la mesure de Radon associée à une G-forme de type (n, n) et en donne ainsi une définition tropicale.

Soit ω une G-forme de type (n, n) sur X ; supposons-la à support compact et à coefficients tropicalement boréliens localement bornés.

Soit $(V_i)_{i\in I}$ une famille finie de domaines compacts de X tropicalisant ω et dont dont la réunion V recouvre le support de ω. Pour toute partie non vide J de I, posons $V_J = \bigcap_{j\in J} V_j$. On a alors

$$\int_X \omega = \int_V \omega = \sum_{\varnothing\neq J\subset I} (-1)^{\mathrm{Card}(J)-1} \int_{V_J} \omega.$$

Pour toute partie non vide J, la forme ω est tropicale sur V_J, et V_J est compact, si bien que toute carte G-tropicale sur V_J. Ainsi, l'intégrale $\int_{V_J} \omega$ peut se calculer à l'aide de la formule (5.10.1.1).

§ 5.11. FORMULES DE STOKES ET GREEN

Soit X un espace G-tropical calibré de niveau n.

Proposition 5.11.1. — a) *Soit ω une G-forme à coefficients $\mathscr{C}^1$ et à support compact sur X, de type $(n-1, n)$. On a la* formule de Stokes *:*

$$\int_X \mathrm{d}'\,\omega = \int_X^{\partial} \omega.$$

b) *Soit α et β des G-formes à coefficients $\mathscr{C}^2$ sur X, symétriques, de type (p, p) et (q, q) respectivement, où $p + q = n - 1$. Si l'intersection de leurs supports est compact, on a la* formule de Green *:*

$$\int_X (\alpha \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\beta - \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\alpha \wedge \beta) = \int_X^{\partial} (\alpha \wedge \mathrm{d}''\,\beta - \mathrm{d}''\,\alpha \wedge \beta).$$

Démonstration. — Comme le support de ω est compact, il existe une partie squelettique fermée Σ de X qui la supporte fortement. La formule de Stokes découle alors de la formule correspondante en géométrie paralinéaire (proposition 4.6.15), appliquée à $\Sigma^{(n)}$, à la forme $\omega|_{\Sigma^{(n)}}$ et au calibrage canonique de $\Sigma^{(n)}$.

La formule de Green s'en déduit comme dans le lemme 1.5.10 en appliquant la formule de Stokes à la forme à support compact $\omega = \alpha \wedge \mathrm{d}''\,\beta - \mathrm{d}''\,\alpha \wedge \beta$. Lorsque α et β sont toutes deux à support compact, elle découle aussi de la formule de Green en géométrie paralinéaire, appliqué à une partie polyédrale qui supporte fortement ces deux formes. □

CHAPITRE 6

ESPACES TROPICAUX

---

§ 6.1. ESPACES G-TROPICAUX AFFINÉS

Soit X un espace G-tropical.

6.1.1. — On se donne un sous-préfaisceau en $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels L_X du G-faisceau PL_X qui contient les fonctions constantes, qu'on appelle le préfaisceau des fonctions affines sur X.

On suppose :

a) Pour tout domaine V de X, le préfaisceau sur V induit par L_X est un faisceau pour sa topologie usuelle. Autrement dit, *toute fonction paralinéaire f sur un domaine V de X qui est localement affine est affine.*

b) Pour tout domaine V de X, une fonction sur V est paralinéaire si et seulement si elle est G-localement affine.

On dit qu'une carte G-tropicale (V, f) sur un domaine est *tropicale* si f est affine.

6.1.2. — Un espace G-tropical muni d'un tel sous-préfaisceau est appelé *espace G-tropical affiné.*

6.1.3. — Tout domaine d'un espace G-tropical affiné est naturellement muni d'une structure d'espace G-tropical affiné.

Exemple 6.1.4. — Soit X un sous-espace paralinéaire d'un espace affine E. Soit L_X le G-préfaisceau dont les sections sur un sous-espace paralinéaire U de X sont les fonctions sur U qui sont localement (pour la topologie ordinaire) restrictions de fonctions affines sur E. Alors L_X est un affinage de X qui munit X d'une structure d'espace paralinéaire affiné.

Exemple 6.1.5. — Nous définirons plus tard l'espace G-tropical associé à un espace analytique au sens de Berkovich et démontrerons (proposition 12.9.10) que la restriction des fonctions de la forme $r\log(|f|)+c$, où f est une fonction analytique inversible, $r \in \mathbf{Q}$ et $c \in \mathbf{R}$, en constituent un affinage.

6.1.6. — Si X et Y sont des espaces G-tropicaux affinés, un morphisme $f\colon X \to Y$ d'espaces G-tropicaux est dit affine si pour tout domaine V de Y et toute fonction affine $\varphi \in \mathscr{L}_Y(V)$, la fonction $\varphi \circ f$ sur le domaine $f^{-1}(V)$ de X est affine.

Si $f\colon X \to E$ est une application paralinéaire vers un espace affine E muni de son affinage canonique, il revient au même de dire que f est un morphisme affine ou que les composantes de f (dans un repère affine donné) sont des fonctions affines sur X.

§ 6.2. FORMES LISSES SUR UN ESPACE G-TROPICAL AFFINÉ

Soit $\mathscr{G}$ une classe de coefficients.

Définition 6.2.1. — *Soit (p,q) un couple d'entiers naturels. Soit ω une G-forme de type (p,q) à coefficients dans $\mathscr{G}$ sur un domaine V de X.*

On dit que ω est tropicale *s'il existe une carte tropicale qui G-tropicalise ω.*

On dit que ω est une forme *(de type (p,q) à coefficients dans $\mathscr{G}$) si pour tout point x de V, il existe un* voisinage ouvert *U de x dans V sur lequel ω est tropicale.*

Lorsque $\mathscr{G}$ est la classe des fonctions lisses, on parle de forme lisse sur l'espace G-tropical affiné X. Si de plus $p = q = 0$, on parle de fonction lisse.

6.2.2. — Les formes lisses forment un sous-G-préfaisceau en $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de $\mathscr{A}_X^{p,q}$ qui est un faisceau pour la topologie usuelle. Ces faisceaux sont stables par les opérateurs d', d'', J et par le produit extérieur.

6.2.3. — Un espace G-tropical affiné (X, L_X) est dit affinement séparé si pour tout couple (x,y) de points de X avec $x \neq y$, il existe une fonction affine f sur X telle que $f(x) \neq f(y)$. A fortiori, les fonctions lisses sur X séparent les points. On dira alors que X est différentiellement séparé.

Si X est affinement (resp. différentiellement) séparé, il en est de même de tout domaine.

Un espace G-tropical affiné (X, L_X) est dit localement affinement (resp. différentiellement) séparé si chacun de ses points possède un voisinage affinement (resp. différentiellement) séparé.

Cela entraîne que le faisceau des fonctions lisses sépare localement les points au sens du §A.2.2.

Corollaire 6.2.4. — *Soit (X, L_X) un espace G-tropical affiné qui est localement différentiellement séparé. Soit K une partie compacte de X et soit U un voisinage ouvert de K. Il existe une fonction lisse sur X qui vaut 1 au voisinage de K et dont le support est compact et contenu dans U.*

Démonstration. — C'est une conséquence du corollaire A.2.4. □

***Théorème 6.2.5* (Stone–Weierstraß).** — *Soit (X, L_X) un espace G-tropical affiné qui est localement différentiellement séparé et soit U un ouvert de X. Soit f une fonction continue à valeurs réelles sur X dont le support est compact et contenu dans U. Soit a et b des nombres réels tels que $a \leqslant f \leqslant b$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction lisse g sur X dont le support est compact, contenu dans U, telle que $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in X$ et telle que $a \leqslant g \leqslant b$.*

Démonstration. — C'est une conséquence du théorème A.2.5. □

Corollaire 6.2.6. — *Soit (X, L_X) un espace G-tropical affiné qui est localement différentiellement séparé.*

a) *L'ensemble des fonctions lisses à support compact sur X est dense dans l'espace $\mathscr{C}_{\mathrm{c}}(X)$ des fonctions continues à support compact sur X, muni de la topologie limite inductive des espaces de fonctions à support dans un compact donné.*

b) *L'ensemble des fonctions lisses à support compact sur X est dense dans l'espace $\mathscr{C}(X)$ des fonctions continues sur X muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.*

Démonstration. — C'est une conséquence du corollaire A.2.6. □

***Proposition 6.2.7* (Partitions de l'unité lisses).** — *On suppose que X est paracompact et que (X, L_X) est localement différentiellement séparé. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X. Il existe une partition de l'unité subordonnée à (U_i) formée de fonctions lisses sur X.*

Démonstration. — Cela résulte de la proposition A.2.8. □

Corollaire 6.2.8. — *Soit F une partie fermée de X qui est dénombrable à l'infini (par exemple, compacte). On suppose que (X, L_X) est localement différentiellement séparé. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de F par des ouverts de X. Il existe une famille localement finie (θ_i) de fonctions lisses sur X, à support compact, positives, telle que pour tout i, le support de θ_i soit contenu dans U_i et que $\sum \theta_i$ vaille 1 au voisinage de F.*

Démonstration. — Comme F est dénombrable à l'infini, elle possède un voisinage ouvert U dans X qui est paracompact (lemme A.1.4). Comme (U, L_U) est localement différentiellement séparé, l'assertion résulte de la proposition A.2.9. □

Corollaire 6.2.9. — *On suppose que X est paracompact et que (X, L_X) est localement différentiellement séparé. Les faisceaux $\mathscr{A}_X^{p,q}$ de formes lisses sur X sont fins.*

Démonstration. — D'après le corollaire A.2.10, le faisceau des fonctions lisses sur X est fin. Comme les faisceaux de formes sont des faisceaux de modules sur le faisceau des fonctions lisses, ils sont fins. □

6.2.10. — Décrivons maintenant la topologie naturelle sur les espaces des formes ; nous reprenons les notations introduites au paragraphe 3.6.8 lorsque nous avons définie la topologie des espaces de G-formes.

Soit W un domaine compact de X. Notons $\mathscr{D}_W^\circ$ l'ensemble des jeux de cartes D sur X tels que la réunion des intérieurs des domaines de cartes appartenant à D recouvre W. L'espace $\mathscr{A}^{p,q}(X)$ est réunion croissante, lorsque D parcourt l'ensemble préordonné filtrant $\mathscr{D}_W^\circ(X)$ des sous-espaces $\mathscr{A}_D^{p,q}(X)$.

§ 6.3. DESCRIPTION LOCALE D'OBJETS G-LOCAUX

Nous introduisons maintenant la notion d'espace G-tropical affiné décent : ce sont des espaces possédant suffisamment de fonctions affines pour pouvoir décrire localement les fonctions paralinéaires et les domaines. L'intérêt de cette notion est qu'alors les squelettes et les G-formes peuvent alors être décrites *localement* au moyen de fonctions affines.

Définition 6.3.1. — *On dit qu'un espace G-tropical affiné X est* décent *en un point x si pour tout domaine V de X contenant x, les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

a) *Pour toute fonction affine f sur V, il existe un voisinage ouvert U de x dans X et une fonction affine g sur U telle que f et g coïncident sur $U \cap V$;*

b) *Il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que $U \cap V$ soit défini dans U par conjonction et disjonction d'inégalités larges entre fonctions affines sur U.*

On dit que X est décent s'il est décent en chacun de ses points.

Tout domaine d'un espace G-tropical affiné décent est décent.

Proposition 6.3.2. — *Soit X un espace G-tropical affiné et soit $\mathscr{G}$ une classe de coefficients. Soit V un domaine de X et soit ω une forme sur V à coefficients dans $\mathscr{G}$.*

a) *Soit x un point de V en lequel X est décent. Il existe un voisinage domanial U de x dans X et une forme ω' de classe $\mathscr{G}$ sur U telle que ω et ω' coïncident sur $V \cap U$.*

b) *Si le support de ω est décent et dénombrable à l'infini et si X est localement différentiellement séparé, il existe une forme ω' de classe $\mathscr{G}$ sur X qui prolonge ω.*

c) *Si le support de ω est décent et compact et si X est localement différentiellement séparé, il existe une forme ω' de classe $\mathscr{G}$ à support compact sur X qui prolonge ω.*

Démonstration. — a) Soit V' un voisinage domanial compact de x dans V sur lequel ω est tropicale, soit $f\colon V' \to \mathbf{R}^n$ une carte tropicale et soit α une forme de classe $\mathscr{G}$ sur $f(V')$ telle que $\omega|_{V'} = f^*\alpha$.

La partie $f(V')$ de $\mathbf{R}^n$ est compacte. D'après le lemme 1.9.4, il existe une forme α' de classe $\mathscr{G}$ sur $\mathbf{R}^n$ qui prolonge α.

Comme X est décent en x (définition 6.3.1), il existe une fonction affine f' définie sur un voisinage ouvert U de x qui prolonge $f|_{U\cap V'}$. Quitte à restreindre U, on peut supposer que $U \cap V$ est contenu dans le voisinage V' de x dans V ; alors, $U \cap V' = U \cap V$. Posons $\omega = f'^*\alpha'$; c'est une forme de classe $\mathscr{G}$ sur U qui prolonge la restriction de ω à $U \cap V$.

b) Pour tout $x \in \mathrm{supp}(\omega)$, considérons un voisinage ouvert U_x de x et une forme ω_x sur U_x, de classe $\mathscr{G}$, qui prolonge $\omega|_{U_x\cap V}$. Soit (θ_x) une famille localement finie de fonctions lisses sur X, à support compact, positives, telle que pour tout x, le support de θ_x soit contenu dans U_x et que $\sum \theta_x$ vaille 1 au voisinage de $\mathrm{supp}(\omega)$ (proposition 6.2.8). Soit ω' la somme localement finie $\sum_x \theta_x\omega_x$; c'est une forme de classe sur $\mathscr{G}$ sur X qui prolonge ω.

c) Comme le support de ω est compact, il est dénombrable à l'infini, et la forme construite dans l'alinéa précédent est à support compact. □

Proposition 6.3.3. — *Soit X un espace G-tropical vertébré de niveau n, affiné, très riche. Soit Σ une partie squelettique de X et soit x un point de Σ en lequel X est décent. Il existe un voisinage ouvert U de x dans X et une carte tropicale f sur U telle que $\Sigma \cap U \subset \Sigma_f^{(n)}$.*

Démonstration. — Soit V un voisinage domanial compact de x. Comme X est très riche, il existe une partie squelettique compacte Σ' de X, purement de dimension n, telle que $\Sigma \cap V \subset \Sigma'$. Cela permet de supposer que Σ est compact et purement de dimension n.

D'après la proposition 5.2.6, il existe une famille finie (V_i, f_i) de cartes G-tropicales définies sur des domaines compacts, telle que $\Sigma \subset \bigcup_i \Sigma_{f_i}^{(n)}$. Si l'on restreint la réunion précédente aux indices i tels que $x \in V_i$, on obtient un voisinage de x dans Σ. On peut donc supposer que $x \in V_i$ pour tout i.

L'espace X est décent. On peut donc choisir, pour tout i, un voisinage U_i de x et une carte tropicale g_i sur U_i qui coïncide avec f_i sur $V_i \cap U_i$. Soit U l'intersection des U_i et soit g la carte tropicale sur U obtenue par concaténation des g_i. Pour tout i, on a $\Sigma_i \cap U \subset \Sigma_{g_i}^{(n)} \subset \Sigma_g^{(n)}$. Par suite, $\Sigma_g^{(n)}$ contient $\Sigma \cap U$. □

Proposition 6.3.4. — *Soit X un espace G-tropical affiné, soit ω une G-forme de classe $\mathscr{G}$ sur X et soit x un point de X en lequel X est décent. Il existe un voisinage domanial compact V de x dans X, une carte tropicale $f\colon V \to E$ et une G-forme α de classe $\mathscr{G}$ sur $f(V)$ telles que $\omega|_V = f^*\alpha$.*

Démonstration. — Soit (V_i) une famille finie de domaines compacts dont la réunion V est un voisinage de x et qui tropicalisent la G-forme ω. Pour tout i, on fixe un carte tropicale f_i sur V_i qui tropicalise $\omega|_{V_i}$ et une forme α_i sur $f_i(V_i)$ telles que $\omega|_{V_i} = f_i^*\alpha_i$.

Comme X est décent en x, il existe des cartes tropicales g_i définies au voisinage de x telles que g_i et f_i coïncident sur V_i au voisinage de x. Quitte à restreindre les V_i (et donc leur réunion V) et à remplacer f_i par g_i, on peut donc supposer que chaque f_i est définie sur V.

Pour chaque i, il existe une famille $(g_{i,j})$ de fonctions affines au voisinage de x telle que V_i soit défini sur un voisinage compact W de x dans V par conjonction et disjonction d'inégalités de la forme $g_{i,j} \leqslant g_{i,j}(x)$.

Considérons la carte tropicale h sur W définie par la réunion des familles (f_i) et $(g_{i,j})$. Par construction, on a $W \cap V_i = h^{-1}(h(W \cap V_i))$; en effet, si $y \in W$ et $z \in W \cap V_i$ vérifient $h(y) = h(z)$, alors $g_{i,j}(y) = g_{i,j}(z)$ pour tout j, si bien que y vérifie le système d'inégalités qui définit V_i dans W ; autrement dit, $y \in V_i$. Par conséquent, on a aussi $h(W \cap V_i \cap V_j) = h(W \cap V_i) \cap h(W \cap V_j)$.

On déduit de α_i une forme β_i sur $h(W \cap V_i)$ telle que $h|_{W\cap V_i}^*\beta_i = \omega|_{W\cap V_i}$. Sur $W \cap V_i \cap V_j$, les formes $h|_{W\cap V_i}^*\beta_i$ et $h|_{W\cap V_j}^*\beta_j$ coïncident toutes deux avec $\omega|_{W\cap V_i\cap V_j}$. Par suite, β_i et β_j coïncident sur $h(W \cap V_i \cap V_j)$ qui est égal à $h(W \cap V_i) \cap h(W \cap V_j)$ comme on l'a vu. Ces formes β_i se recollent en une G-forme β sur $h(W)$. Pour tout i, on a $h^*\beta|_{W\cap V_i} = h|_{W\cap V_i}^*\beta_i = \omega|_{W\cap V_i}$. Il s'ensuit $h^*\beta = \omega$. □

Corollaire 6.3.5. — *Soit X un espace G-tropical affiné qui est décent en tout point. Une fonction G-localement tropicalement continue sur X (resp. tropicalement borélienne) est tropicalement continue (resp. borélienne). En particulier, la fonction indicatrice d'un domaine fermé de Y est tropicalement borélienne.*

Démonstration. — En effet, toute fonction G-continue (resp. borélienne) sur un sous-espace paralinéaire de $\mathbf{R}^n$ est continue (resp. borélienne). La seconde assertion résulte de l'exemple 3.4.10. □

§ 6.4. TOPOLOGIES SUR LES ESPACES DE FORMES LISSES

6.4.1. — Soit X espace G-tropical affiné. Disons qu'un jeu de *cartes tropicales* sur X est couvrant si la réunion des intérieurs de ses domaines de définition recouvre X. Un tel jeu de cartes est G-couvrant.

Notons Γ_X la famille des jeux de cartes tropicales qui sont couvrants. Elle est filtrante. Par construction, l'espace des (p,q)-formes sur X coïncide avec l'espace $\mathscr{A}^{p,q}_{\Gamma_X}(X)$. Il hérite ainsi d'une topologie $\mathscr{C}^m$, pour tout $m \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$. Cette topologie est moins fine que la topologie induite par celle des G-formes ; plus explicitement, l'inclusion des formes dans les G-formes est continue pour les topologies $\mathscr{C}^m$.

De même, pour toute famille de supports Φ sur X, on en déduit des topologies $\mathscr{C}^m$ sur l'espace $\mathscr{A}^{p,q}_\Phi(X)$ des formes à support dans Φ sur X, moins fines que les topologies induites par celles des G-formes correspondantes.

Proposition 6.4.2. — *Soit α une forme de type (p',q') sur X. Soit Φ et Ψ des familles de supports sur X ; on suppose que pour toute partie fermée F de* $\mathrm{supp}(\alpha)$ *appartenant à Φ appartient également à Ψ.*

Pour toute forme $\omega \in \mathscr{A}^{p,q}_\Phi(X)$, la forme $\alpha \wedge \omega$ appartient à $\mathscr{A}^{p,q}_\Psi(X)$ et l'application

$$A^{p,q}_\Phi(X) \to \mathscr{A}^{p+p',q+q'}_\Psi(X), \qquad \omega \mapsto \alpha \wedge \omega$$

est linéaire continue.

Démonstration. — Cela découle de la proposition 6.4.2 appliquée à la famille filtrante Γ_X. □

Proposition 6.4.3. — *Soit $u\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces G-tropicaux affinés. Soit Φ une famille de supports sur X et soit Ψ une famille de supports sur Y ; on suppose que pour tout fermé F de X appartenant à Φ, la partie fermée $u^{-1}(F)$ de Y appartient à Ψ.*

Soit (p,q) un couple d'entiers naturels et soit $m \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$.

Pour toute forme $\alpha \in \mathscr{A}^{p,q}_\Phi(X)$, la G-forme $u^*\alpha$ est une forme appartenant à $\mathscr{A}^{p,q}_\Psi(Y)$. L'application

$$u^*\colon \mathscr{A}^{p,q}_\Phi(X) \to \mathscr{A}^{p,q}_\Psi(Y), \qquad \alpha \mapsto u^*\alpha$$

est linéaire et continue.

Démonstration. — Cela découle de la proposition 6.4.3 appliquée aux familles filtrantes Γ_X et Γ_Y, une fois remarqué que l'on $\Gamma_Y \preceq_u \Gamma_X$. □

Corollaire 6.4.4. — *Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces G-tropicaux affinés. Soit $m \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$.*

a) *L'application $f^*\colon \mathscr{A}^{p,q}(X) \to \mathscr{A}^{p,q}(Y)$ est continue pour les topologies $\mathscr{C}^m$ sur ces espaces ;*

b) *Si le morphisme f est* compact, *l'application $f^*\colon \mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{c}}(X) \to \mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{c}}(Y)$ est continue pour les topologies $\mathscr{C}^m$ sur ces espaces.*

Proposition 6.4.5. — *Soit X un espace G-tropical affiné et soit U une partie ouverte de X ; notons $j\colon U \to X$ l'inclusion. Soit Φ une famille de supports sur U, soit Ψ une famille de supports sur X ; on suppose que pour toute partie $F \in \Phi$, la partie F est*

fermée dans X et appartient à Ψ. (En particulier, on peut prendre pour Φ et Ψ les ensembles de parties compactes de U et X respectivement.)

a) *Pour toute forme $\omega \in \mathscr{A}_\Phi^{p,q}(U)$, la G-forme $j_!\omega$ sur X est une forme qui appartient à $\mathscr{A}_\Psi^{p,q}(X)$. et l'application*

$$j_! \colon \mathscr{A}_\Phi^{p,q}(U) \to \mathscr{A}_\Psi^{p,q}(X)$$

ainsi définie est linéaire et continue pour les topologies $\mathscr{C}^m$.

b) *Cette application est injective.*

c) *Supposons que $\Gamma \preceq_j \Delta$ et que toute partie fermée F de X appartenant à Ψ qui contenue dans U appartient à Φ. Supposons que plus que $d_{\mathrm{trop}}(x) < \max(p,q)$ pour tout $x \in X \boldsymbol{-} U$. Alors cette application $j_!$ est un homéomorphisme, d'inverse donné par j^*.*

Démonstration. — Cela résulte de la proposition 3.7.12, appliqué aux familles Γ_U et Γ_X, ce qui est licite car pour tout jeu de cartes tropicales couvrant U et toute partie F de U qui est fermée dans X, le jeu de carte obtenu en adjoignant la carte tropicale constante de domaine $X \boldsymbol{-} U$ est couvrant sur X. □

Proposition 6.4.6. — *Soit X un espace G-tropical affiné, soit Φ une famille de supports sur X, et soit $m \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$.*

a) *Pour toute forme $\omega \in \mathscr{A}_\Phi^{p,q}(X)$, la forme $\mathrm{J}\omega$ appartient à $\mathscr{A}_\Phi^{q,p}(X)$. L'application* J *ainsi définie est linéaire et continue.*

b) *Supposons $m \geqslant 1$. Pour toute G-forme $\omega \in \mathscr{A}_\Phi^{p,q}(X)$, on a $\mathrm{d}'\omega \in \mathscr{A}_\Phi^{p+1,q}(X)$ et $\mathrm{d}''\omega \in \mathscr{A}_\Phi^{p,q+1}(X)$. Les applications d' et d'' ainsi définies sont continues lorsqu'on munit $\mathscr{A}_\Phi^{p,q}(X)$ de la topologie $\mathscr{C}^m$ et les espaces $\mathscr{A}_\Phi^{p+1,q}(X)$ et $\mathscr{A}_\Phi^{p,q+1}(X)$ de la topologie $\mathscr{C}^{m-1}$.*

Démonstration. — L'assertion découle de la proposition 3.7.13, appliquée à la famille filtrante Γ_X des jeux de cartes tropicales couvrants sur X. □

§ 6.5. FORMES POSITIVES

Soit X un espace G-tropical affiné. Soit $\mathscr{G}$ une classe de coefficients.

Lemme 6.5.1. — *Soit ω une forme de type (p,p) et symétrique sur X qui est positive en tant que G-forme (*resp. *faiblement positive,* resp. *fortement positive). Pour tout point $x \in X$, il existe une carte tropicale f définie sur un voisinage U de x à valeurs dans un espace affine E, et une forme positive α (*resp. *faiblement positive,* resp. *fortement positive) sur un sous-espace paralinéaire de E contenant $f(U)$, telle que $\omega|_U = f^*\alpha$.*

Démonstration. — Soit x un point de X. Soit V un voisinage domanial compact de x sur lequel ω est tropicale ; soit $f \colon V \to E$ une carte tropicale qui tropicalise ω et soit α une forme sur un sous-espace paralinéaire de E contenant $f(V)$ tels que $\omega|_V = f^*\alpha$. D'après le lemme 3.5.3, la restriction à $f(V)$ de α est positive (*resp.* faiblement positive, *resp.* fortement positive). Il suffit donc de prendre pour carte tropicale la restriction à $\mathring{V}$ de f et pour forme α sa restriction à $f(V)$. □

Proposition 6.5.2. — *Soit ω une forme de type (p,p) et symétrique sur X, à coefficients dans $\mathscr{G}$ dont le support est contenu dans un ouvert paracompact et localement différentiellement séparé de X.*

a) *Il existe des formes positives ω_1 et ω_2 sur X, à coefficients dans $\mathscr{G}$, telles que $\omega = \omega_1 - \omega_2$.*

b) *Si, de plus, le support de ω est compact, les formes ω_1 et ω_2 peuvent être choisies à support compact.*

L'hypothèse sur le support de ω est notamment réalisée lorsque X est localement différentiellement séparé et paracompact. Dans le cas des espaces analytiques, elle sera également réalisée si le support de ω est compact et si l'espace X est presque bon.

Démonstration. — Soit U un voisinage ouvert paracompact et localement différentiellement séparé du support de ω. Dans le second cas, on s'arrange en outre pour que U soit relativement compact dans X, ce qui est possible car X possède une base d'ouverts qui sont dénombrables à l'infini.

Soit (f_i, P_i) une famille de cartes tropicales, de sorte que f_i soit un moment sur un ouvert V_i de X et P_i un polytope compact contenant $f_{i,\mathrm{trop}}(V_i)$, et, pour tout i, soit α_i une forme sur P_i telle que $\omega|_{V_i} = f_i^*\alpha_i$. Il existe alors une famille localement finie (λ_i) de fonctions lisses sur X, subordonnée au recouvrement $(U \cap V_i)_{i\in I}$ telles que $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$ pour tout i et $\sum \lambda_i$ est identiquement égale à 1 au voisinage du support de ω (corollaire 6.2.8). Pour tout i, choisissons des formes positives $\alpha_{i,1}$ et $\alpha_{i,2}$ sur P_i telles que $\alpha_i = \alpha_{i,1} - \alpha_{i,2}$ (proposition 1.10.2). Posons alors $\omega_1 = \sum \lambda_i f_i^*\alpha_{i,1}$ et $\omega_2 = \sum \lambda_i f_i^*\alpha_{i,2}$; ce sont des formes lisses et positives telles que $\omega = \omega_1 - \omega_2$. □

Remarque 6.5.3. — Nous appliquerons cette proposition aux formes lisses. Elle s'applique aussi aux G-formes lisses sur un espace tropical affiné décent, car de telles G-formes sont des formes à coefficients G-lisses (proposition 6.3.4).

Proposition 6.5.4. — *Soit X un espace G-tropical de niveau n, riche. Soit ω une G-forme à coefficients tropicalement continus sur X.*

a) *Pour que ω soit nulle, resp. positive, resp. faiblement positive, resp. fortement positive, il faut et il suffit que pour toute partie squelettique compacte P de X, la restriction $\omega|_P$ de ω à P soit nulle, resp. positive, resp. faiblement positive, resp. fortement positive.*

b) *Les points squelettiques x du support de ω sont denses dans* $\mathrm{supp}(\omega)$.

Démonstration. — a) Si ω est nulle (resp. . . .), il en est de même de ses restrictions $\omega|_P$ à toute partie squelettique comme dans l'énoncé. On démontre la réciproque par contraposition. Supposons que ω ne soit pas nulle et démontrons qu'il existe une partie polyédrale P de X, compacte, purement de dimension n, telle que $\omega|_P$ ne soit pas nulle. (Les cas positif, faiblement positif, fortement positif se démontrent de façon similaire.)

Par définition d'une G-forme, il existe un G-recouvrement de X par des domaines compacts de X sur lesquels ω est G-tropicale. Puisque ω n'est pas nulle, il existe un domaine compact V de X sur lequel ω est G-tropicale et non nulle. Soit $f\colon V \to E$ une carte G-tropicale qui G-tropicalise ω, soit α une forme sur $f(V)$ telle que $\omega|_V = f^*\alpha$. Comme $\omega|_V \neq 0$, la forme α n'est pas nulle.

Comme X est riche, il existe une partie squelettique compacte Σ de V telle que $f(\Sigma) = f(V)$. En appliquant la proposition 3.4.4 (lemme 3.5.3 dans le cas des formes

positives) à l'espace paralinéaire Σ, considéré comme espace G-tropical, on en déduit que $\omega|_\Sigma \neq 0$.

b) Soit U un ouvert de X rencontrant le support de ω ; on a $\omega|_U \neq 0$. D'après a), il existe une partie squelettique compacte P de U telle que $\omega|_P \neq 0$. Le support de $\omega|_P$ est non vide, il est contenu dans le support de ω et il est constitué de points squelettiques. □

Corollaire 6.5.5. — *Soit X un espace tropical de niveau n, très riche. Soit ω une G-forme à coefficients tropicalement continus sur X.*

a) *Pour que ω soit nulle, resp. positive, resp. faiblement positive, resp. fortement positive, il faut et il suffit que pour toute partie squelettique compacte P de X, purement de dimension n, la restriction $\omega|_P$ de ω à P soit nulle, resp. positive, resp. faiblement positive, resp. fortement positive.*

b) *Les points x du support de ω tels que $d_{\mathrm{trop}}(x) = n$ sont denses dans* $\mathrm{supp}(\omega)$.

Démonstration. — a) Une direction est évidente ; supposons que ω ne soit pas nulle (les autres cas sont analogues). L'espace X est riche ; d'après la proposition précédente, il existe une partie squelettique compacte Σ de X telle que $\omega|_\Sigma \neq 0$. Comme X est très riche, il existe une partie squelettique compacte Σ' de X, purement de dimension n, telle que $\Sigma \subset \Sigma'$; on a donc $\omega|_{\Sigma'} \neq 0$.

b) Soit U un ouvert de X qui rencontre le support de ω ; soit x un point squelettique de U qui appartient à $\mathrm{supp}(\omega)$. Comme X est très riche, il existe une partie squelettique Σ de U, purement de dimension n, telle que $x \in U$. Alors, $d_{\mathrm{trop}}(x) = n$. □

§ 6.6. ESPACES TROPICAUX

Définition 6.6.1. — *On dit qu'un espace G-tropical calibré et affiné X est harmonieux si pour tout ouvert U de X et toute carte tropicale $f\colon U \to E$ sur U, le calibrage canonique de $\Sigma_f^{(n)}$ est harmonieux relativement à f.*

Définition 6.6.2. — *Un espace tropical de niveau n est la donnée d'un espace G-tropical calibré et affiné X de niveau n, riche, muni d'une partie fermée $\partial(X)$. On fait en outre les hypothèses suivantes sur l'ouvert* $\mathrm{Int}(X)$, *complémentaire de $\partial(X)$:*

(i) *L'ouvert* $\mathrm{Int}(X)$ *est localement différentiellement séparé, décent, très riche et harmonieux.*

(ii) *Pour toute partie squelettique Σ de X et tout domaine V de X, la trace de $\partial(X)$ sur Σ et la trace du bord topologique $\partial(V/X)$ sur Σ sont n-négligeables.*

On dit que $\partial(X)$ est le *bord* de l'espace tropical X et que $\mathrm{Int}(X)$ est son *intérieur*.

6.6.3. — Soit X un sous-espace paralinéaire de dimension n d'un espace affine E. Soit $\mathscr{C}$ une décomposition cellulaire de X en cellules fortes de E et munissons X d'un calibrage qui est constant sur chaque cellule de $\mathscr{C}$.

Alors, X est un espace tropical de niveau n et de bord la réunion des $(n-1)$-cellules de $\mathscr{C}$.

6.6.4. — Soit X un espace tropical de niveau n de bord $\partial(X)$. Soit V un domaine de X. Posons $\partial(V) = \partial(V/X) \cup (V \cap \partial(X))$. Alors V est un espace tropical de niveau n de bord $\partial(V)$.

Par construction, $V - \partial(V)$ est un ouvert de $X - \partial(X)$; c'est donc un espace G-tropical vertébré très riche, un espace G-tropical affiné décent et un espace G-tropical calibré et affiné harmonieux.

Soit Σ une partie squelettique de V. La trace de $\partial(V)$ sur Σ est la réunion de deux parties n-négligeables, donc est n-négligeable. Soit W un domaine de V. Le bord topologique $\partial(W/X)$ est égal à $\partial(W/V) \cup (W \cap \partial(V/X))$; sa trace sur Σ est n-négligeable par hypothèse, si bien que la trace de $\partial(W/V)$ est n-négligeable.

Cela prouve que V est un espace tropical de niveau n de bord $\partial(V)$.

6.6.5. — Le cœur de notre travail consistera à munir tout espace analytique X de dimension n d'une structure d'espace tropical de niveau n dont le bord est donné par la théorie de Berkovich.

Proposition 6.6.6. — *Soit X un espace tropical de niveau n. Pour toute $(n-1,n)$-forme ω sur X, le support de la mesure de bord $\tilde{\omega}$ est contenu dans $\partial(X)$.*

Démonstration. — Comme $\mathrm{Int}(X)$ est ouvert dans X, il s'agit de démontrer que $\tilde{\omega}|_{\mathrm{Int}(X)} = 0$. Comme $\tilde{\omega}|_{\mathrm{Int}(X)} = \widetilde{\omega|_{\mathrm{Int}(X)}}$, on peut remplacer X par $\mathrm{Int}(X)$ et supposer que X est sans bord ; il s'agit de démontrer que $\tilde{\omega} = 0$.

L'assertion est locale sur X. Comme ω est une forme, on peut supposer qu'il existe une carte tropicale $f\colon X \to E$ et une $(n-1,n)$-forme α sur un sous-espace paralinéaire de E contenant $f(X)$ telles que $\omega = f^*\alpha$. On peut aussi supposer que X est paracompact. Alors $\Sigma_f^{(n)}$ est un support fort de ω qui est paracompact.

Considérons une décomposition cellulaire $\mathscr{C}$ de $\Sigma_f^{(n)}$ formée de f-cellules qui est adaptée au calibrage de $\Sigma_f^{(n)}$. La forme-volume $(n-1)$-dimensionnelle $\tilde{\omega}$ est supportée par la réunion des $(n-1)$-cellules de $\mathscr{C}$. Soit donc F une $(n-1)$-cellule de $\mathscr{C}$. Soit $\mathscr{C}_{>F}$ l'ensemble des n-cellules de $\mathscr{C}$ contenant F ; il est fini et non vide, car $\Sigma_f^{(n)}$ est purement de dimension n. Fixons une orientation o de $f(F)$ et, pour tout $C \in \mathscr{C}_{>F}$, notons o_C l'orientation de $f(F)$ déduite de celle de $f(C)$ par la règle de la normale sortante à $f(F)$. Il existe un unique n-vecteur, $\tilde{\mu}_C$, sur $\langle f(C)\rangle$ tel que $f_*(\mu_C)$ soit la classe du couple $(\tilde{\mu}_C, o_C)$.

La formule volume $(n-1)$-dimensionnelle $\tilde{\omega}$ se déduit d'une forme-volume $(n-1)$-dimensionnelle $\langle \omega, \mu_{\Sigma_f^{(n)}}\rangle$ sur $\Sigma_f^{(n)}$; rappelons-en la construction (§4.6.1). Par contraction par le n-vecteur μ_C et multiplication par $(-1)^{n(n-1)/2}$, on déduit de la forme $\alpha|_{f(C)}$ une $(n-1,0)$-forme sur $f(C)$; on la restreint à $f(F)$, on la transforme en forme-volume par le choix de l'orientation o et on la rapatrie sur F au moyen de l'isomorphisme $f|_F$. On obtient ainsi une forme-volume $\tilde{\omega}_C$ sur F. Par définition, la restriction à F de la $(n-1)$-forme-volume $\tilde{\omega}$ est la somme $\tilde{\omega}_F = \sum_{C\in\mathscr{C}_F} \tilde{\omega}_C$. Ainsi, $\tilde{\omega}_F$ est déduite de l'orientation $(-1)^{n(n-1)/2}o_F$ et de la $(n-1)$-forme $\sum_C \langle \alpha, \tilde{\mu}_C\rangle = \langle \alpha, \tilde{\mu}_F\rangle$ sur $f_{\mathrm{trop}}(F)$, où l'on a posé $\tilde{\mu}_F = \sum_{C\in\mathscr{F}} \tilde{\mu}_C$. Cette expression n'est autre que la discordance de C relativement à la carte tropicale f, donc est nulle par définition du bord d'un espace tropical. Ainsi, $\tilde{\omega}_F = 0$. □

Corollaire 6.6.7. — *Soit X un espace tropical de niveau n, soit ω une G-forme de type $(n-1,n)$ sur X et soit (X_i) un G-recouvrement de X par des domaines tels que pour tout i, $\omega|_{X_i}$ soit une forme. Alors, le support de $\widetilde{\omega}$ est contenu dans $\bigcup_i \partial(X_i)$.*

***Théorème 6.6.8* (Condition d'harmonie).** — *Soit X un espace tropical de niveau n, soit $f\colon X \to E$ une carte tropicale agréable. Alors Π_f est harmonieux en dehors de $f(\partial(X) \cap \Sigma_f^{(n)})$.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{D}$ une décomposition cellulaire de Π_f adaptée au calibrage canonique μ_{Π_f} et à $\partial(X)$. Soit F une $(n-1)$-cellule de $\mathscr{D}$ qui n'est pas contenue dans $f(\partial(X) \cap \Sigma_f^{(n)})$. La discordance de la face F est un $(0,n)$-vecteur δ_F de E ; supposons par l'absurde qu'il n'est pas nul et choisissons un multi-indice J de longueur n tel que $\langle \mathrm{d}'' x_J, \delta_F\rangle \neq 0$; choisissons aussi un multi-indice I de longueur $n-1$ tel que la restriction à F de la $(n-1)$-forme $\mathrm{d}' x_I$ ne soit pas nulle.

Soit x un point de $\mathring{F}$ qui n'appartient pas à $f(\partial(X))$. Soit u une fonction continue, non identiquement nulle sur Π_f dont le support est compact, disjoint de $f(\partial(X))$ et des faces de dimension $n-1$ autres que $f(F)$. Posons $\alpha = u\,\mathrm{d}' x_I \wedge \mathrm{d}'' x_J$ et $\omega = f^*\alpha$. Par construction, $\langle \alpha, \mu_{\Pi_f}\rangle$ est une forme-volume non nulle.

D'après la proposition 6.6.6, le support de la forme-volume $\tilde{\omega}$ est contenu dans $\partial(X)$. Il est aussi disjoint de $\partial(X)$, par construction. On a donc $\tilde{\omega} = 0$. D'après la relation 5.9.4.2, on a donc $\langle \alpha, \mu_{\Pi_f}\rangle = f_*(\tilde{\omega}) = 0$, ce qui contredit la construction de α. □

§ 6.7. EXEMPLES

6.7.1. Segments. — Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Il possède une structure évidente d'espace paralinéaire, qui en fait un espace G-tropical. Ses domaines sont les réunions localement finies d'intervalles. Munissons-le du 1-calibrage constant, donné par le vecteur-volume $|e_1|$. Munissons-le également de la structure d'espace affiné pour laquelle une fonction sur un domaine connexe de I est affine si et seulement si c'est la restriction d'une fonction affine sur $\mathbf{R}$. Alors I est un espace tropical de niveau 1 dont le bord est la frontière de I dans $\mathbf{R}$.

Si $1 \notin I$, on peut réaliser cet espace comme la couronne $|T| \in I$ sur un corps trivialement valué.

6.7.2. Un autre type de segment. — Soit I un intervalle de $\overline{\mathbf{R}}$ et posons $A = \partial(I) \cap \overline{\mathbf{R}}$. On munit I d'une structure d'espace G-tropical dont les domaines V sont les réunions localement finies d'intervalles qui sont voisinages de $V \cap A$. Une fonction sur un tel domaine est dite paralinéaire si elle l'est au sens usuel et si elle est constante au voisinage de tout point de $V \cap A$. Une partie de I est squelettique si c'est une partie paralinéaire de $I \cap \mathbf{R}$. On munit I du 1-calibrage constant donné par le vecteur-volume $|e_1|$. On dit qu'une fonction paralinéaire sur un domaine connexe V de I est affine si c'est la restriction à V d'une fonction affine sur I. En particulier, si V est un domaine connexe de I qui rencontre A, toute fonction affine sur V est constante.

Cet espace G-tropical est un espace tropical de niveau 1, de bord A.

Lorsque $I = [-\infty; 0[$, on peut réaliser cet exemple comme le disque unité ouvert sur un corps trivialement valué.

6.7.3. Une étoile. — Soit B un ensemble. On considère l'ensemble X_B quotient de l'ensemble produit $B\times[-\infty;0]$ par la relation d'équivalence qui identifie tous les points de la forme $(b,0)$ à un même point η. On le munit de la topologie la moins fine pour laquelle une partie V de X_B est ouverte si et seulement si d'une part $p^{-1}(V)\cap(\{b\}\times[-\infty;0])$ est ouverte dans $\{b\}\times[-\infty;0]$ pour tout $b\in B$, et d'autre part, si $\eta\in V$, alors l'ensemble des $b\in B$ tels que $p^{-1}(V)$ ne contient pas $\{b\}\times[-\infty;0]$ est fini. L'application p est continue. L'espace X_B est compact. Lorsque B est infini, la topologie de X_B est strictement moins fine que la topologie quotient.

Pour $b\in B$, l'application $t\mapsto p(b,t)$ induit un homéomorphisme de $[-\infty;0]$ sur une partie X_b de X_B que l'on appelle la branche d'indice b. Le point η est le centre de l'étoile X_B.

Les domaines de X_B sont définis de manière analogue : une partie V de X_B est un domaine si $V_b=\{t\,;\,(b,t)\in V\}$ est un domaine de $\{b\}\times[-\infty;0]$ et si, dès que $\eta\in V$, l'ensemble des $b\in B$ tels que $V_b\neq[-\infty;0]$ est fini.

Les parties squelettiques de X_B sont également définies de la sorte : une partie S de X_B est squelettique si $S\cap X_b$ est une partie paralinéaire de $X_b\simeq[-\infty;0]$, c'est-à-dire une partie paralinéaire de $]-\infty;0]$ et si, dès que $\eta\in S$, l'ensemble des $b\in B$ tels que $S\cap X_b\neq\{\eta\}$ est fini.

On calibre chaque branche X_b à l'aide du vecteur-volume $|e_1|$.

Une fonction f sur un domaine V est dite paralinéaire si, pour tout $b\in B$, la fonction $f_b\colon t\mapsto f(p(b,t))$ sur le domaine V_b est paralinéaire, constante au voisinage de $-\infty$ si $-\infty\in V_b$, et si, dès que $\eta\in V$, il existe une partie finie B_1 de B telle que pour tout $b\in B\smallsetminus B_1$, la fonction f_b est définie et constante sur $[-\infty;0]$.

Une fonction paralinéaire f sur un domaine V est dite affine si, pour tout $b\in B$, la fonction f_b sur V_b est affine, et si, dès que $\eta\in V$, la somme (presque nulle) des $f'_b(0)$, pour $b\in B$ tel que V_b soit un voisinage de 0 dans $[-\infty;0]$, soit égale à zéro.

Alors X_B est un espace tropical de niveau 1, sans bord.

Soit f une fonction sur un ouvert U de X. Pour que f soit lisse, il faut et il suffit que chacune des fonctions f_b sur l'ouvert $U_b=\{t\,;\,p(b,t)\in U\}$ de $[-\infty;0]$ soit lisse, constante au voisinage de $-\infty$ si $-\infty\in U_b$, et que si $\eta\in U$, l'ensemble des $b\in B$ tels que f_b ne soit pas définie et constante sur $[-\infty;0]$ est fini, et que la somme (presque nulle), pour $b\in B$ tel que U_b est voisinage de 0, des $f'_s(0)$ soit nulle.

On peut réaliser X_B comme l'espace analytique $\mathbf{P}^1_k$ sur un corps algébriquement clos trivialement valué ; l'ensemble B s'identifie à $\mathbf{P}^1(k)$ et le point η à la valeur absolue triviale sur le corps des fonctions $k(\mathbf{P}^1_k)$.

6.7.4. — On peut construire une variante de l'étoile précédente à partir d'une famille d'intervalles $[-\infty;0]$ indexée par un ensemble B et d'une famille d'intervalles $[-1;0]$ indexée par un ensemble A, en recollant les origines en un même point η, en lequel on peut, ou non, imposer la condition d'harmonie.

Lorsque A est fini, cet espace s'interprète comme un domaine de l'étoile associée à $A\cup B$.

Lorsque A est infini, le point η appartient au bord de l'espace tropical obtenu, même si la condition d'harmonie y est imposée, car η est alors adhérent à l'ensemble des points de la forme $p(a,0)$, pour $a\in A$.

6.7.5. — Soit (X_i, f_{ij}) un système projectif d'espaces tropicaux de même niveau n, indexé par un ensemble ordonné filtrant à droite I et soit $X = \varprojlim X_i$ sa limite projective. Pour tout i, on note $f_i \colon X \to X_i$ l'application canonique.

On fait l'hypothèse que pour $i \leqslant j$, le morphisme $f_{ij} \colon X_j \to X_i$ est surjectif et induit un isomorphisme entre parties squelettiques : pour tout domaine V de X_i et toute partie squelettique S de X_i, $f_{ij}^{-1}(S)$ est une partie squelettique du domaine $f_{ij}^{-1}(V)$ telle que f_{ij} induit un homéomorphisme de $f_{ij}^{-1}(S)$ sur S, et toute partie squelettique de $f_{ij}^{-1}(V)$ est de cette forme.

On peut alors munir alors X d'une structure d'espace tropical de niveau n de la façon suivante.

Par définition de la topologie de X et surjectivité des applications f_{ij}, une partie U de X est ouverte s'il existe un indice i et une partie ouverte U_i de X_i telle que $U = f_i^{-1}(X_i)$.

On dit qu'une partie V de X est un domaine s'il existe un indice i et un domaine V_i de X_i tel que $V = f_i^{-1}(V_i)$.

On dit qu'une fonction u sur un domaine V de X est paralinéaire (resp. affine) s'il existe un indice i, un domaine V_i de X_i tel que $V = f_i^{-1}(V_i)$ et une fonction paralinéaire (resp. affine) u_i sur V_i telle que $u = u_i \circ f_i$.

Avec ces définitions, une fonction u sur un domaine U de X est lisse s'il existe un indice i, un domaine U_i de X_i tel que $U = f_i^{-1}(U_i)$ et une fonction lisse u_i sur U_i telle que $u = u_i \circ f_i$.

On dit qu'une partie S d'un domaine V de X est squelettique s'il existe un indice i, un domaine V_i de X_i tel que $V = f_i^{-1}(V_i)$ et une partie squelettique S_i de X_i telle que $f_i \colon X \to X_i$ induise un homéomorphisme de S sur S_i. Soit alors j un indice tel que $j \geqslant i$; posons $V_j = f_{ij}^{-1}(V_i)$: c'est un domaine de X_j tel que $V = f_j^{-1}(V_j)$. Par hypothèse, $S_j = f_{ij}^{-1}(S_i)$ est une partie squelettique de V_j et f_{ij} induit un isomorphisme paralinéaire de S_j sur S_i, compatible aux calibrages. Ainsi, f_j induit un homéomorphisme de S sur S_j. On utilise ces homéomorphismes paralinéaire pour calibrer la partie squelettique S.

On peut appliquer cette construction en partant d'un espace analytique X, sur un corps complet archimédien k et d'un ouvert de Zariski U de X, en prenant pour famille (X_i) les morphismes propres $h_i \colon X_i \to X$, qui sont un isomorphisme au-dessus d'un ouvert dense de X contenant U. La limite projective $\widetilde{X}$ est un espace tropical sur lequel on peut interpréter les constructions de [**140**].

CHAPITRE 7

COURANTS SUR UN ESPACE TROPICAL

§ 7.1. COURANTS

Soit X un espace tropical de niveau n.

7.1.1. — On appelle *courant* de bidimension (p, q) sur X une forme linéaire continue sur l'espace $\mathscr{A}_{\mathrm{c}}^{p,q}(X)$ des formes lisses de type (p, q) à support compact, lorsque cet espace est muni de la topologie induite par la topologie $\mathscr{C}^\infty$ sur l'espace des formes lisses à support compact définie au paragraphe 6.4.1

On dit qu'un courant est d'ordre $\leqslant r$ s'il est continu pour la topologie $\mathscr{C}^r$ sur l'espace des formes (il est alors d'ordre $\leqslant s$ pour tout $s \geqslant r$).

On notera $\langle S, \alpha\rangle$ l'image de la forme α par le courant S.

On note $\mathscr{D}_{p,q}(X)$ l'ensemble des courants de bidimension (p, q). On le munit de la topologie de la convergence simple.

On posera aussi $\mathscr{D}^{p,q} = \mathscr{D}_{n-p,n-q}$ et on dira que c'est l'espace des courants de bidegré (p, q).

Remarque 7.1.2. — Explicitons la condition de continuité dans la définition d'un courant. L'espace $\mathscr{A}_{\mathrm{c}}^{p,q}(X)$ est la limite inductive des espaces $\mathscr{A}_{\mathscr{D},K}^{p,q}(X)$, où $\mathscr{D}$ parcourt l'ensemble des jeux de cartes tropicales couvrants sur X et K l'ensemble des parties compactes de X. Par définition, une forme linéaire sur l'espace $\mathscr{A}_{\mathrm{c}}^{p,q}(X)$ est continue si et seulement si sa restriction à chaque sous-espace $\mathscr{A}_{\mathscr{D},K}^{p,q}(X)$ est continue.

Fixons une telle donnée $(\mathscr{D}, K)$. L'espace $\mathscr{A}_{\mathscr{D},K}^{p,q}(X)$ est muni de la topologie induite de $\mathscr{A}_{\mathscr{D}}^{p,q}(X)$, laquelle est définie par les classes de semi-normes $\|\cdot\|_{W,r}$ associées aux domaines compacts W d'une carte g de $\mathscr{D}$ et à un entier r. (Pour fixer une semi-norme dans chaqque classe, il faut choisir une décomposition cellulaire de $g(W)$ et des systèmes de coordonnées affines sur chaque cellule.)

La continuité de S sur cet espace $\mathscr{A}_{\mathscr{D},K}^{p,q}(X)$ signifie donc qu'il existe un nombre réel c, un entier r et une famille finie (W_i) de domaines de compacts de X, où pour tout i, W_i est contenu dans le domaine d'une carte de $\mathscr{D}$, tels que, pour toute forme lisse $\omega \in \mathscr{A}_{\mathscr{D},K}^{p,q}(X)$, on ait

$$|\langle S, \omega\rangle| \leqslant c \sup_i \|\omega\|_{W_i,r}.$$

Comme l'espace tropical X est riche, la construction faite dans la remarque 5.2.9 fournit une description squelettique de la continuité de S : il existe un nombre réel c, un entier r et une partie squelettique compacte Σ de X telle que, pour toute forme lisse $\omega \in \mathscr{A}^{p,q}_{\mathscr{D},K}(X)$, on ait

$$|\langle S, \omega\rangle| \leqslant c\|\omega|_\Sigma\|_{\Sigma,r},$$

où $\|\cdot\|_{\Sigma,r}$ est une norme $\mathscr{C}^r$ standard sur Σ.

On peut résumer cette discussion en disant qu'un courant possède un ordre relatif à tout jeu de cartes couvrant et toute partie compacte de X. L'ordre construit dépend de la partie compacte considérée, comme dans le cas des distributions réelles.

On prendra garde que l'ordre construit dépend également du jeu de cartes considéré. On peut en effet construire un courant sur un espace tropical compact pour lequel ces ordres ne sont pas majorés.

Lemme 7.1.3. — *Supposons que X soit localement différentiellement séparé. Soit $\mathscr{B}$ un jeu de cartes sur X tel que tout jeu de cartes couvrant sur X admet un raffinement couvrant formé de cartes appartenant à $\mathscr{B}$. Soit S une application linéaire de $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{c}}(X)$ à valeurs dans espace vectoriel topologique localement convexe E. Soit r un élément de $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$. Pour que S soit continue pour la topologie $\mathscr{C}^r$ il faut et il suffit que pour toute carte tropicale f définie sur un ouvert U de X appartenant à la base $\mathscr{U}$ et toute fonction ρ sur U, lisse, positive et à support compact, la restriction à $\mathscr{A}^{p,q}_f(U)$ de l'application linéaire $\omega \mapsto S(\rho\omega)$ soit continue pour la topologie $\mathscr{C}^r$.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{D} = (f_i \colon U_i \to E_i)$ un jeu de cartes couvrant sur X et soit K une partie compacte de X ; il s'agit de prouver que la restriction de S à l'espace $\mathscr{A}^{p,p}_{\mathscr{D},K}(X)$ est continue pour sa topologie $\mathscr{C}^\infty$ (*resp.* $\mathscr{C}^r$). Par hypothèse, il existe un jeu de cartes $\mathscr{D}'$, couvrant, formé de cartes de $\mathscr{B}$ qui raffine le jeu $\mathscr{D}$. Cela permet de supposer que les cartes de $\mathscr{D}$ appartiennent à la base d'ouverts $\mathscr{U}$. On choisit une partie finie I de l'ensemble des indices i telle $K \subset \bigcup_{i\in I} \mathrm{Int}(U_i)$. Soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions lisses et positives sur X telles que pour tout i, le support de λ_i soit compact et contenu dans $\mathrm{Int}(U_i)$, et telles que $\sum_{i\in I} \lambda_i$ soit égale à 1 au voisinage de K. Pour toute forme $\omega \in \mathscr{A}^{p,q}_{\mathscr{D},K}$, on a donc $\omega = (\sum_{i\in I} \lambda_i)\omega$, de sorte que $S(\omega) = \sum_{i\in I} S(\lambda_i\omega)$. Il suffit ainsi de prouver que chacune des applications linéaires $\omega \mapsto S(\lambda_i\omega)$ est continue sur $\mathscr{A}_{\mathscr{D},K}$.

Soit $i \in I$. L'application de restriction à U_i induit une application de $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathscr{D},K}(X)$ dans $\mathscr{A}^{p,q}_{f_i}(U_i)$; cette application est continue pour les topologies $\mathscr{C}^m$. Par hypothèse, l'application linéaire $\alpha \mapsto S(\lambda_i\alpha)$ est continue sur $\mathscr{A}^{p,q}_{f_i}(U_i)$, pour la topologie $\mathscr{C}^\infty$ (*resp.*. $\mathscr{C}^r$). La composée de ces applications linéaires est donc continue. □

7.1.4. — Soit T un courant de bidimension (p, q) ; il découle de la proposition 6.4.6 que l'application $T \circ \mathrm{J}^{-1}$ est un courant de bidimension (q, p) que l'on note $\mathrm{J}T$. Cet opérateur J sur les courants est continu.

On dit qu'un courant T de bidimension (p, p) est symétrique si l'on a $\mathrm{J}T = T$.

7.1.5. — Soit T un courant et soit α une forme lisse sur X. Il découle de la proposition 6.4.2 que l'application $\beta \mapsto \langle T, \alpha \wedge \beta\rangle$ est un courant ; on le note $T \wedge \alpha$. Il est d'ordre r si T est d'ordre $\leqslant r$.

L'application $T \mapsto T \wedge \alpha$ est continue.

On observe la relation $\mathrm{J}(T \wedge \alpha) = \mathrm{J}T \wedge \mathrm{J}\alpha$.

Si $\alpha \in \mathscr{A}_{\mathrm{c}}^{p,q}(X)$ et T est de bidimension (p', q'), le courant $T \wedge \alpha$ est de bidimension $(p'-p, q'-q)$; si X est équidimensionnel et si T est de bidegré (p', q'), alors $T \wedge \alpha$ est de bidegré $(p'+p, q'+q)$.

Avec ces notations, on définit aussi $\alpha \wedge T = (-1)^{(p+q)(p'+q')} T \wedge \alpha$.

Munis de ces lois d'action, les espaces de courants sont des modules sur l'anneau des fonctions lisses sur X. Plus précisément, l'espace vectoriel bigradué $\mathscr{D}(X)$, somme directe des espaces $\mathscr{D}_{p,q}(X)$, est un module gradué (à gauche et à droite) sur l'algèbre graduée $\mathscr{A}(X)$ des formes lisses sur X.

7.1.6. Propriété de faisceau. — Soit T un courant sur X. Soit U un ouvert de X et soit j l'immersion de U dans X. Comme l'opération $j_!$ de prolongement par 0 des formes à support compact sur U est une application linéaire continue (prop. 6.4.5), l'application $\alpha \mapsto \langle T, j_!\alpha \rangle$ est un courant $T|_U$ sur X qu'on appelle restriction de T à U. Si T est d'ordre $\leqslant r$, il en est de même de $T|_U$.

L'application $U \mapsto \mathscr{D}_{p,q}(U)$ est ainsi un préfaisceau, et pour tout entier r, les courants d'ordre $\leqslant r$ en forment un sous-préfaisceau.

Pour tout courant T et tout ouvert U, on a $\mathrm{J}T|_U = (\mathrm{J}T)|_U$.

Proposition 7.1.7. — *Supposons que l'espace tropical X soit localement différentiellement séparé. Le préfaisceau $\mathscr{D}_{p,q}$ sur X est un faisceau de $\mathscr{A}^{0,0}$-modules. Pour tout entier r, le sous-préfaisceau des courants d'ordre $\leqslant r$ en est un sous-faisceau.*

En particulier, l'ordre d'un courant est une notion locale.

Démonstration. — Soit (U_i) un recouvrement ouvert d'un ouvert U de X, pour tout i, soit S_i un courant sur U_i tels que la restriction à $U_i \cap U_j$ des courants S_i et S_j coïncident, pour tous i, j. Démontrons qu'il existe un unique courant S sur U dont la restriction à U_i est égale à S_i.

Soit ω une (p,q)-forme à support compact sur U. Soit (φ_i) une famille finie de fonctions lisses à support compact sur U telle que le support de φ_i est contenu dans U_i et telle que $\sum \varphi_i$ soit égale à 1 au voisinage du support de ω (corollaire 6.2.8). On a $\omega = \sum \varphi_i \omega$, et seuls un nombre fini de termes de cette somme sont non nuls. Si S est un courant sur U dont la restriction à U_i est égale à S_i, on a donc nécessairement $\langle S, \omega \rangle = \sum \langle S_i, \varphi_i \omega \rangle$, d'où l'unicité d'un courant S vérifiant les conditions requises.

Soit (φ'_i) une seconde famille finie de fonctions lisses à support compact sur U telle que le support de φ'_i soit contenu dans U_i et que $\sum \varphi'_j$ soit égale à 1 au voisinage du support de ω. On a aussi $\omega = \sum_{i,j} \varphi'_j \varphi_i \omega$, si bien que

$$\sum_j \langle \varphi'_j \omega, S_j \rangle = \sum_{i,j} \langle \varphi'_j \varphi_i \omega, S_j \rangle = \sum_{i,j} \langle \varphi'_j \varphi_i \omega, S_j \rangle = \sum_i \langle \varphi_i \omega, S_i \rangle,$$

où la deuxième égalité découle de la condition de coïncidence des courants S_i.

Il existe donc une unique application S de l'espace $\mathscr{A}_{\mathrm{c}}^{p,q}(U)$ dans $\mathbf{R}$ telle que $\langle S, \omega \rangle = \sum \langle S_i, \varphi_i \omega \rangle$ pour tout famille (φ_i) de fonctions lisses à support compact telle que $\sum \varphi_i$ soit égale à 1 au voisinage du support de ω. Cette application est linéaire.

Démontrons que c'est un courant sur U. Soit K une partie compacte de U. Considérons alors une famille finie (φ_i) de fonctions lisses à support compact dont la somme est égale à 1 au voisinage de K et telle que le support de φ_i soit contenu dans U_i. Pour tout i, l'application $\omega \mapsto \varphi_i \omega$ de $\mathscr{A}_K^{p,q}(U)$ dans $\mathscr{A}_{\mathrm{c}}^{p,q}(U_i)$ est continue, donc la forme linéaire $\omega \mapsto \langle S_i, \varphi_i \omega \rangle$ sur $\mathscr{A}_K^{p,q}(U)$ est continue. Pour tout $\omega \in \mathscr{A}_K^{p,q}(U)$, on a $\langle S, \omega \rangle = \sum_i \langle S_i, \varphi_i \omega \rangle$.

Par suite, la restriction de S à $\mathscr{A}_K^{p,q}(U)$ est continue. Cela prouve que S est continue ; c'est donc un courant sur U.

Soit ω une (p,q)-forme dont le support est compact et contenu dans U_j ; soit (φ_i) une famille comme ci-dessus. Pour tout i, le support de $\varphi_i\omega$ est contenu dans $U_i \cap U_j$, donc $\langle S_i, \varphi_i\omega\rangle = \langle S_j, \varphi_i\omega, S_i\rangle$. Alors,

$$\langle S, \omega\rangle = \sum \langle S_i, \varphi_i\omega\rangle = \sum \langle S_j, \varphi_i\omega\rangle = \langle S_j, \omega\rangle$$

puisque $\sum \varphi_i$ est égal à 1 au voisinage du support de ω. Cela démontre que la restriction à U_j du courant S est égale à S_j et conclut la démonstration que les courants forment un faisceau.

Avec les notations qui précèdent, l'ordre de S est $\leqslant r$ si les S_i sont tous d'ordre $\leqslant r$. Cela entraîne que courants d'ordre $\leqslant r$ forment un sous-faisceau du faisceau des courants. □

Corollaire 7.1.8. — *Si X est localement différentiellement séparé et paracompact, les faisceaux $\mathscr{D}_X^{p,q}$ sur X sont des faisceaux fins.*

Démonstration. — Puisque ce sont des faisceaux de $\mathscr{A}_X^{0,0}$-modules, cela résulte du corollaire 6.2.9. □

7.1.9. Support d'un courant. — Soit X un espace tropical de niveau n, localement différentiellement séparé et soit T un courant de bidimension (p,q) sur X. Comme pour toute section d'un faisceau, le support de T est défini comme le complémentaire du plus grand ouvert de X sur lequel T est nul.

Il résulte des définitions que pour toute forme ω de bidegré (p,q) sur X, dont le support est compact et disjoint de $\mathrm{supp}(T)$, on a $\langle T, \omega\rangle = 0$.

Lemme 7.1.10. — *Soit X un espace tropical de niveau n, localement différentiellement séparé et soit T un courant de bidimension (p,q) sur X. Soit Φ la famille de supports sur X constituée des parties fermées F telles que $F \cap \mathrm{supp}(T)$ soit compact.*

Il existe une unique application, définie sur l'espace $\mathscr{A}_\Phi^{p,q}(X)$ des formes lisses de bidegré (p,q) sur X dont le support rencontre $\mathrm{supp}(T)$ *en une partie comapcte, qui applique α sur $\langle T, \lambda\alpha\rangle$ pour toute fonction lisse à support compact λ sur X qui vaut* 1 *au voisinage de* $\mathrm{supp}(T) \cap \mathrm{supp}(\alpha)$.

Cette application est une forme linéaire continue qui prolonge T.

En particulier, si le support de T est compact, $\langle T, \alpha\rangle$ est défini pour toute forme lisse de bidegré (p,q) sur X, et l'application $\mathscr{A}^{p,q}(X) \to \mathbf{R}$ ainsi définie est une forme linéaire continue.

Démonstration. — D'après le corollaire 6.2.4, il existe une fonction lisse λ, à support compact, et identiquement égale à 1 au voisinage de $\mathrm{supp}(T) \cap \mathrm{supp}(\alpha)$. Alors $\lambda\alpha$ est une (p,q)-forme à support compact sur X et l'on peut former l'expression $\langle T, \lambda\alpha\rangle$.

Vérifions qu'elle ne dépend pas du choix de λ. En effet, si λ' est un autre choix, on a $\lambda = \lambda'$ au de $\mathrm{supp}(T) \cap \mathrm{supp}(\alpha)$, de sorte que $\mathrm{supp}(\lambda - \lambda') \cap \mathrm{supp}(T) \cap \mathrm{supp}(\alpha) = \varnothing$. Il en résulte que $\mathrm{supp}((\lambda - \lambda')\alpha) \cap \mathrm{supp}(T) = \varnothing$. On a donc $\langle T, (\lambda - \lambda')\alpha\rangle = 0$, d'où $\langle T, \lambda\alpha\rangle = \langle T, \lambda'\alpha\rangle$.

Cela prouve l'existence et l'unicité d'une application comme indiqué.

Si α est à support compact, on peut supposer que la fonction λ est égale à 1 au voisinage de $\mathrm{supp}(\alpha)$; on a alors $\alpha = \lambda\alpha$ ce qui prouve que l'application construite prolonge T. On la notera toujours T.

Démontrons que ce prolongement T est linéaire.

Soit $c \in \mathbf{R}$; pour calculer $\langle T, c\alpha\rangle$, on peut prendre la même fonction λ que celle qui sert à définir $\langle T, \alpha\rangle$; on en déduit que $\langle T, c\alpha\rangle = c\langle T, \alpha\rangle$.

Soit α et β deux formes lisses de bidegré (p, q) dont les supports rencontrent $\mathrm{supp}(T)$ sur des parties compactes. On choisit une fonction lisse λ, à support compact, valant 1 au voisinage de $(\mathrm{supp}(\alpha) \cup \mathrm{supp}(\beta)) \cap \mathrm{supp}(T)$; On a alors

$$\langle T, \alpha + \beta\rangle = \langle T, \lambda(\alpha + \beta)\rangle = \langle T, \lambda\alpha\rangle + \langle T, \lambda\beta\rangle = \langle T, \alpha\rangle + \langle T, \beta\rangle,$$

d'où la linéarité.

Démontrons enfin la continuité de T. Par définition de la topologie sur l'espace $\mathscr{A}^{p,q}_{\Phi}(X)$, il suffit de prouver que pour toute partie fermée F appartenant à Φ, la restriction de T à l'espace des formes à support dans F est continue. On choisir alors λ valant 1 au voisinage de $F \cap \mathrm{supp}(T)$. On a $\langle T, \alpha\rangle = \langle T, \lambda\alpha\rangle$ pour toute forme α à support dans F, et la continuité résulte de ce que l'application $\alpha \mapsto \lambda\alpha$ est continue. □

7.1.11. Image directe d'un courant. — Soit X un espace tropical de niveau n, soit Y un espace tropical de niveau m et soit $\varphi\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces tropicaux qui est (topologiquement) propre.

L'application φ^* de $\mathscr{A}^{p,q}(X)$ dans $\mathscr{A}^{p,q}(Y)$ est linéaire continue (corollaire 3.7.10) ; comme φ est topologiquement propre, elle applique $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{c}}(X)$ dans dans $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{c}}(Y)$ et l'application linéaire induite est continue (*loc. cit.*). Elle induit par dualité une application linéaire φ_* de $\mathscr{D}_{p,q}(Y)$ dans $\mathscr{D}_{p,q}(X)$.

Si T est un courant d'ordre $\leqslant r$, le courant φ_*T est encore d'ordre $\leqslant r$.

On a $\varphi_*(\mathrm{J}T) = \mathrm{J}\varphi_*(T)$ pour tout courant T. En particulier, l'image directe d'un courant symétrique est symétrique.

On a enfin $\mathrm{supp}(\varphi_*T) \subset \varphi(\mathrm{supp}(T))$.

Supposons de plus que les espaces tropicaux X et Y sont localement holomorphiquement séparés, mais relâchons l'hypothèse de propreté sur φ. Dans ce cas, le courant φ_*T est défini dès que le support de T est φ-compact, par la formule $\langle \varphi_*T, \alpha\rangle = \langle T, \varphi^*\alpha\rangle$ pour toute forme lisse à support compact α sur X, puisqu'alors l'intersection des supports de T et de $\varphi^*\alpha$ est compacte. On a $\mathrm{supp}(\varphi_*T) \subset \varphi(\mathrm{supp}(T))$.

En particulier, si le support de T est compact, celui du courant φ_*T est également compact, et l'égalité $\langle T, \varphi^*\alpha\rangle = \langle \varphi_*T, \alpha\rangle$ vaut pour toute forme lisse α sur X.

7.1.12. Prolongement par zéro. — Soit X un espace tropical de niveau n. Soit U un ouvert de X, notons $j\colon U \hookrightarrow X$ l'immersion canonique, et soit T un courant sur U de bidimension (p, q). On dit que T *se prolonge par zéro à* X si, pour toute forme lisse α sur X, de bidegré (p, q) et à support compact, le support du courant $T \wedge \alpha|_U$ sur U est compact. Dans ce cas, la formule

$$\langle j_!T, \alpha\rangle = \langle T, \alpha|_U\rangle$$

définit un courant $j_!T$ sur X qu'on appelle le prolongement par zéro de T.

Cette application de prolongement est linéaire, commute à l'opérateur J et aux opérateurs différentiels d', d'', $\mathrm{d}'\mathrm{d}''$, etc.

Lemme 7.1.13. — *Supposons de plus que* $d_{\mathrm{trop}}(x) < \max(p, q)$ *pour tout* $x \in X - U$.

Tout courant de bidimension (p,q) se prolonge par zéro à X.

L'application de restriction de $\mathscr{D}^{p,q}(X)$ dans $\mathscr{D}^{p,q}(U)$ est un isomorphisme, l'application réciproque est donnée par $T \mapsto j_!T$.

Dans le cas des espaces de Berkovich, l'exemple typique sera le cas où $q = p$ et où U est le complémentaire d'un fermé de Zariski de dimension $< p$.

Démonstration. — Soit T un courant sur U. Pour toute (p,q)-forme lisse α à support compact sur X, le support de α est contenu dans U (lemme 3.3.6), donc le support de $T \wedge \alpha|_U$ est contenu dans U. Par suite, le courant T se prolonge par zéro à X. Plus précisément, l'application $\alpha \mapsto \alpha|_U$ est un isomorphisme d'espace vectoriels topologiques de $\mathscr{A}_{\mathrm{c}}^{n-p,n-q}(X)$ sur $\mathscr{A}_{\mathrm{c}}^{n-p,n-q}(U)$ (lemme 6.4.5), de sorte que le courant $j_!T$ est le seul courant de bidimension (p,q) sur X qui prolonge T. □

§ 7.2. COURANTS POSITIFS

Soit X un espace tropical de niveau n.

Définition 7.2.1. — *Soit p un entier. Un courant S de bidimension (p,p) est dit* faiblement positif*, respectivement* positif*, respectivement* fortement positif*, s'il est symétrique et si pour toute forme $\alpha \in \mathscr{A}_{\mathrm{c}}^{p,p}(X)$ qui est fortement positive, respectivement positive, respectivement faiblement positive, on a $\langle S, \alpha\rangle \geqslant 0$.*

7.2.2. — Les trois notions de positivité pour les formes de type $(0,0)$ et (n,n) coïncident ; il en est donc de même pour les courants. Comme les différentes notions de positivité coïncident pour les formes symétriques de type $(1,1)$ et $(n-1,n-1)$, il en est de même pour les courants symétriques.

Remarque 7.2.3. — Soit T un courant tel que T et $-T$ sont positifs ; démontrons que $T = 0$. Soit ω une forme lisse à support compact sur X ; prouvons que $\langle T, \omega\rangle = 0$. Si ω est antisymétrique, cela découle de la symétrie de T ; supposons donc que ω est symétrique. Il existe aussi des formes positives α_1 et α_2, lisses à support compact telles que $\omega = \alpha_1 - \alpha_2$ (proposition 6.5.2). Par linéarité, on peut donc supposer que ω est positive. Mais alors, $\langle T, \omega\rangle$ est à la fois positif (T est positif) et négatif ($-T$ est positif), donc nul.

Lemme 7.2.4. — *Supposons que l'espace tropical X soit localement différentiellement séparé. Les courants de bidimension (p,p) positifs (*resp. *faiblement positifs,* resp. *fortement positifs) forment un sous-faisceau du faisceau $\mathscr{D}_{p,p}(X)$ des courants de bidimension (p,p).*

Démonstration. — Soit S un courant de bidimension (p,p) sur X.

Supposons que S soit positif. Soit U un ouvert de X. Pour toute forme ω sur U, de type (p,p), positive et à support compact, le prolongement par 0 de ω est une forme positive à support compact sur X. Il en résulte que $S|_U$ est positif.

Soit maintenant (U_i) un recouvrement ouvert de X tel que $S|_{U_i}$ soit positif pour tout i ; démontrons que S est positif. Soit ω une forme de type (p,p) sur X, positive et à support compact. Reprenons la preuve que les faisceaux forment un courant (proposition 7.1.7). Il existe une famille finie (φ_i) de fonctions lisses, positives et à support compact sur X

telle que pour tout i, le support de φ_i soit contenu dans U_i, et telle que $\sum \varphi_i$ soit égale à 1 au voisinage du support de ω. On a de plus $\langle S, \omega\rangle = \sum \langle S, \varphi_i\omega\rangle \geqslant 0$. Pour tout i, on a a $\langle S, \varphi_i\omega\rangle \geqslant 0$, car $\varphi_i\omega$ est une forme positive dont le support est compact et contenu dans U_i. Cela démontre que S est positif.

Appliqué à chaque ouvert de X, cet argument démontre que les courants positifs de bidimension (p,p) forment un sous-faisceau du faisceau des courants de bidimension (p,p). Les cas des courants faiblement positifs et fortement positifs se démontrent de même. □

Lemme 7.2.5. — *Supposons que X soit localement différentiellement séparé. Soit T un courant sur X. On suppose que pour tout ouvert U de X, toute forme tropicale ω sur U qui est positive (*resp. *faiblement positive,* resp. *fortement positive) et toute fonction lisse positive ρ dont le support est compact et contenu dans U, on a $\langle T, \rho\omega\rangle \geqslant 0$. Alors T est positif (*resp. *fortement positif,* resp. *faiblement positif).*

Démonstration. — On traite le cas des formes positives, les deux autres sont analogues. Soit ω une forme lisse positive à support compact sur X ; démontrons que $\langle T, \omega\rangle \geqslant 0$. Pour tout $x \in X$, soit U_x un voisinage ouvert de X sur lequel ω est tropicale. Soit $(\lambda_x)_{x\in X}$ une famille à support fini de fonctions lisses positives telle que, pour tout $x \in X$, le support de λ_x soit compact et contenu dans U_x, et telle que $\sum \lambda_x$ soit égale à 1 au voisinage du support de ω (corollaire 6.2.8). On a alors $\omega = \sum_{x\in X} \lambda_x\omega$. Par hypothèse, $\langle T, \lambda_x\omega\rangle \geqslant 0$ pour tout x. Donc $\langle T, \omega\rangle \geqslant 0$. □

7.2.6. — L'image directe d'un courant positif (*resp.* faiblement positif, fortement positif) par un morphisme topologiquement propre d'espaces tropicaux est de même type. Cela résulte du fait que la même propriété vaut pour l'image inverse des formes (§3.5.2).

Lemme 7.2.7. — *Soit α une forme lisse symétrique sur X et soit T un courant symétrique sur X.*

a) *Supposons que la forme α soit fortement positive. Alors, si T est positif (*resp. *faiblement positif,* resp. *fortement positif), il en est de même de $T \wedge \alpha$.*

b) *Supposons que la forme α soit positive. Si T est positif, le courant $T \wedge \alpha$ est positif.*

c) *Supposons que la forme α soit faiblement positive. Si T est fortement positif, le courant $T \wedge \alpha$ est faiblement positif.*

Démonstration. — Ces assertions découlent des propriétés de positivité d'un produit de deux formes (prop. 3.5.5). □

Proposition 7.2.8. — *Soit X un espace tropical de niveau n, localement différentiellement séparé.*

a) *Toute mesure de Radon positive μ sur X induit, par restriction à $\mathscr{A}_{\mathrm{c}}(X)$, un courant positif $[\mu]$ d'ordre 0.*

b) *L'application $\mu \mapsto [\mu]$ ainsi définie est une bijection continue de l'espace des mesures de Radon positives sur X sur l'espace des courants positifs de bidimension $(0,0)$ sur X.*

Démonstration. — a) Soit μ une mesure de Radon positive sur X ; démontrons que la forme linéaire $[\mu]$ est un courant ; ce sera alors un courant positif. Soit K une partie compacte de X et soit $\mathscr{D}$ un jeu de cartes couvrant sur X. Il suffit de démontrer que la restriction de $[\mu]$ à l'espace $\mathscr{A}^{0,0}_{\mathscr{D},K}(X)$ est continue pour sa topologie $\mathscr{C}^0$. Soit $\|\mu\|_K$

la norme de μ sur K : pour toute fonction continue à support compact sur K, on a $|\mu(f)| \leqslant \|\mu\|_K \|f\|_K$. Cette inégalité vaut a fortiori pour toute fonction de $\mathscr{A}_{\mathscr{D},K}(X)$ et entraîne la continuité voulue.

b) Cette implication est injective car l'espace des fonctions lisses à support compact est dense dans l'espace des fonctions continues à support compact (corollaire 6.2.6).

Il reste à prouver qu'elle est surjective. Soit S un courant positif de bidimension $(0,0)$ sur X. Soit K une partie compacte de X. Soit λ une fonction lisse et positive, à support compact sur X, qui vaut 1 au voisinage de K. Pour toute fonction lisse f sur X dont le support est contenu dans K, on a $-\|f\|_K \lambda \leqslant f \leqslant \|f\|_K \lambda$. Comme S est positif, il en résulte l'inégalité

$$|S(f)| \leqslant \|f\|_K S(\lambda).$$

Par suite, S est continu lorsque l'espace des fonctions lisses à support compact est muni de la topologie de la convergence compacte. Par densité, S s'étend en une forme linéaire positive sur $\mathscr{C}_c(X)$, c'est-à-dire en une mesure de Radon positive. □

La démonstration précédente n'a utilisé que la positivité de la forme linéaire S et pas sa continuité. La proposition suivante montre comment ce fait se généralise en tout degré.

Proposition 7.2.9. — *Soit X un espace tropical de niveau n, localement différentiellement séparé, soit p un entier et soit S une application linéaire de $\mathscr{A}_{\mathrm{c}}^{p,p}(X)$ dans $\mathbf{R}$ telle que $S(\mathrm{J}\omega) = S(\omega)$ pour tout $\omega \in \mathscr{A}_{\mathrm{c}}^{p,p}(X)$. Si $S(\omega) \geqslant 0$ pour toute forme fortement positive ω, alors S est un courant faiblement positif, d'ordre* 0.

Démonstration. — Il s'agit de prouver la continuité de S lorsque $\mathscr{A}_{\mathrm{c}}^{p,p}(X)$ est muni de la topologie $\mathscr{C}^0$. D'après le lemme 7.1.3, il suffit de démontrer l'énoncé suivant : soit f une carte tropicale définie sur une partie ouverte U de X, soit ρ une fonction lisse, positive et à support compact sur U, la forme linéaire $\omega \mapsto S(\rho\omega)$ sur $\mathscr{A}_f^{p,p}(U)$ est continue pour la topologie $\mathscr{C}^0$.

Soit W un domaine compact de U qui contient le support de ρ. Notons E l'espace affine codomaine de f et munissons-le d'une norme euclidienne ; notons $\eta = \mathrm{d}'\mathrm{d}''\|x\|^2$ la $(1,1)$-forme fortement positive sur E. Soit P l'espace paralinéaire compact $f(W)$; considérons une norme $\mathscr{C}^0$ sur l'espace $\mathscr{A}^{p,p}(P)$. On déduit de la proposition 1.2.13 qu'il existe un nombre réel $c > 0$ tel que la forme $\alpha + c\|\alpha\|\eta^p$ est fortement positive, pour tout $\alpha \in \mathscr{A}^{p,p}(P)$.

Pour toute $\omega \in \mathscr{A}_f^{p,p}(U)$; il existe une unique forme $\alpha \in \mathscr{A}^{p,p}(P)$ telle que $\omega|_W = f^*\alpha$, et l'application $\omega \mapsto \|\omega\|_{P,0}$ est une semi-norme $\mathscr{C}^0$ sur $\mathscr{A}_f(U)$. On la note $\|\cdot\|_{W,0}$.

Soit $\omega \in \mathscr{A}_f^{p,p}(U)$; il existe une unique forme $\alpha \in \mathscr{A}^{p,p}(P)$ telle que $\omega|_W = f^*\alpha$, si bien que $\omega + c\|\alpha\| f^*\eta^p$ est fortement positive. Il en est de même de $\rho(\omega + c\|\alpha\|_{P,0} f^*\eta^p)$. Par l'hypothèse sur S, on a donc

$$S(\rho\omega) + c\|\omega\|_{W,0} S(\rho f^*\eta^p) \geqslant 0.$$

En appliquant ce raisonnement à $-\omega$, on en déduit l'inégalité

$$|S(\rho\omega)| \leqslant cS(\rho f^*\eta^p)\|\omega\|_{W,0}.$$

Cela démontre la continuité requise.

Ainsi, S est un courant. La condition $S(\mathrm{J}\omega) = S(\omega)$ implique alors que c'est un courant symétrique, et la condition de positivité $S(\omega) \geqslant 0$ pour ω positive entraîne que c'est un courant faiblement positif. □

Corollaire 7.2.10. — *Soit u une fonction localement intégrable sur X. La forme linéaire $\omega \mapsto \int_X u\omega$ sur $\mathscr{A}_{\mathrm{c}}^{n,n}(X)$ définit un courant d'ordre 0 et de bidimension (n,n) sur X, fortement positif si u est positif.*

On note $[u]$ ce courant.

Démonstration. — Les fonctions $u_+ = \sup(u,0)$ et $u_- = \sup(-u,0)$ sont localement intégrables. Les formes linéaires qu'elles définissent sont fortement positives, donc sont des courants d'ordre 0. Comme on a $u = u_+ - u_-$, la forme linéaire donnée est la différence de ces deux courants, donc est un courant. □

7.2.11. — Soit X un espace tropical de niveau n, localement différentiellement séparé. Soit p un entier naturel et soit T un courant positif (*resp.* faiblement positif, *resp.* fortement positif) de bidimension (p,p).

Soit ω une forme positive (*resp.* fortement positive, *resp.* faiblement positive) de bidegré (p,p). Le courant $T \wedge \omega$ est positif, de bidimension $(0,0)$; d'après la proposition 7.2.8, il est donc associé à une unique mesure μ_ω^T sur X. Cette mesure applique une fonction lisse à suppport compact u sur $\langle uT, \omega\rangle$. Lorsque ω est à support compact, cette mesure est à support compact. Lorsque ω est positive, cette mesure est positive.

Exemple 7.2.12. — Soit X un espace tropical de niveau n, localement différentiellement séparé. Soit p un entier naturel et soit T un courant positif (*resp.* faiblement positif, *resp.* fortement positif) de bidimension (p,p). Soit u une fonction borélienne et localement bornée sur X. L'application $\omega \mapsto \mu_\omega^T(u)$ est une forme linéaire sur $\mathscr{A}_{\mathrm{c}}^{p,p}(X)$ que nous noterons uT.

Lorsque u est positive, cette forme linéaire uT est positive, donc est un courant positif (*resp.* faiblement positif, *resp.* fortement positif) sur X.

Lorsque u est une fonction borélienne et localement bornée arbitraire, on l'écrit $u = u^+ - u^-$, où $u^+ = \sup(u,0)$ et $u^- = \sup(-u,0)$, comme différence de deux fonctions positives boréliennes localement bornées sur X. Comme $uT = u^+T - u^-T$, c'est un courant sur X, d'ordre 0.

Cette notation est compatible avec celle déjà introduite lorsque u est une fonction lisse puisque l'on a alors $\langle uT, \omega\rangle = \langle T, u\omega\rangle = \mu_\omega^T(u)$.

Exemple 7.2.13. — Soit (μ_n) une suite de mesures de Radon positives et soit μ une mesure de Radon positive sur X. Si $[\mu_n] \to [\mu]$ au sens des courants, alors $\mu_n \to \mu$ au sens des mesures. Cela résulte de la densité des fonctions lisses à support compact dans les fonctions continues à support compact (corollaire 6.2.6).

Exemple 7.2.14. — Il n'est pas vrai que tout courant d'ordre 0 se prolonge en une mesure. Considérons l'étoile X_B associée à un ensemble infini B (*cf.* §6.7.3, dont nous reprenons les notations). Soit $(c_b)_{b\in B}$ une famille de nombres réels. Pour toute fonction lisse f sur X, posons

$$\langle T, f\rangle = \sum_{b\in B} c_b\big(f_b(0) - f_b(-\infty)\big).$$

Cela définit un courant sur X, de bidimension $(0,0)$, mais il ne provient d'une mesure que lorsque la famille (c_b) est sommable. Cette mesure est alors égale à

$$\sum_{b\in B} c_b\delta_\eta - \sum_{b\in B} c_b\delta_{p(b,-\infty)}.$$

§ 7.3. COURANTS D'INTÉGRATION

7.3.1. — Soit X un espace tropical de niveau n. Pour toute (n,n)-forme lisse α à support compact sur X, posons alors $\langle \delta_X, \alpha\rangle = \int_X \alpha$, où l'intégrale d'une (n,n)-forme lisse à support compact sur X a été définie en (5.8.5). On définit ainsi une forme linéaire sur l'espace $\mathscr{A}_{\mathrm{c}}^{n,n}(X)$. Elle est positive ; d'après la proposition 7.2.9, c'est donc un courant sur X, qu'on appelle le *courant d'intégration sur* X et on le note δ_X. Il est de bidimension (n,n) et d'ordre 0. Une forme antisymétrique de type (n,n) sur X étant nulle, donc son intégrale aussi, le courant δ_X est symétrique.

7.3.2. — On définit de manière analogue le courant d'intégration « sur le bord » de X, noté δ_X^∂, par la formule $\langle \alpha, \delta_X^\partial\rangle = \int_X^\partial \alpha$, pour toute $(n-1,n)$-forme à support compact α sur X.

Cette forme linéaire est continue pour la topologie $\mathscr{C}^0$. Compte tenu de la définition de $\int_X \alpha$, cela découle en effet de la continuité pour la topologie $\mathscr{C}^0$ de l'intégrale de bord d'une forme sur un polytope calibré dans un espace affine.

Il est de bidimension $(n-1,n)$ et d'ordre 0 ; son support est contenu dans le bord de X.

7.3.3. — Soit Y un espace tropical de niveau m et soit $\varphi\colon Y \to X$ un morphisme topologiquement propre d'espaces tropicaux. Un cas particulier important est celui d'une partie squelettique de X munie de son n-calibrage canonique, plus généralement d'une partie squelettique de dimension $\leqslant d$ quelconque munie d'un d-calibrage.

Les constructions précédentes fournissent des courants $\varphi_*\delta_Y$ et $\varphi_*\delta_Y^\partial$ sur X de bidimensions (m,m) et $(m-1,m)$ respectivement.

Le courant $\varphi_*\delta_Y$ est fortement positif.

7.3.4. — Soit ω une G-forme de type (p,q) à coefficients tropicalement boréliens localement bornés sur X. On définit un courant $[\omega]$ de bidimension (p,q) et d'ordre 0 sur X par la formule $\alpha \mapsto \int_X \omega\wedge\alpha$ définie par l'intégrale des G-formes. Lorsque ω est une forme lisse, on a $[\omega] = \delta_X \wedge \omega$.

Si ω est positive (*resp.* faiblement positive, *resp.* fortement positive), il en va de même du courant $[\omega]$. Cela découle de la définition d'un courant positif, des propriétés de stabilité de la positivité par produit (prop. 3.5.5), et de ce que l'intégrale d'une (n,n)-forme positive est positive.

On définit aussi le courant $[\omega]^\partial$ par la formule $\alpha \mapsto \int_X^\partial \omega\wedge\alpha$ défini à l'aide de l'intégrale de bord des G-formes. Il est d'ordre 0 et de bidimension $(n-p-1, n-q)$. Lorsque ω est une forme lisse, on a $[\omega]^\partial = \delta_X^\partial \wedge \omega$.

Il découle de la définition de la topologie des espaces de courants que les applications $\omega \mapsto [\omega]$ et $\omega \mapsto [\omega]^\partial$ sont continues.

7.3.5. — Nous allons maintenant généraliser cette construction aux « G-formes » qui sont combinaisons linéaires de G-formes usuelles à coefficients dans un anneau de fonctions non nécessairement tropicales.

Soit V un domaine de X et soit U un voisinage ouvert de V dans X dans lequel V est fermé. Soit $u \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(V)$, $\omega \in \mathscr{A}_{X_{\mathrm{G}}}^{p,q}(V)$ et $\alpha \in \mathscr{A}_{\mathrm{c}}^{n-p,n-q}(U)$; la G-forme $\omega\wedge\alpha|_V$ est à support compact dans V, de sorte que u est intégrable pour la mesure associée. L'application $\alpha \mapsto \int_V u(\omega\wedge\alpha)_{\mathrm{Rad}}$ est un courant d'ordre 0 sur U. La section correspondante de

$\pi^*\mathscr{D}_{p,q}(V)$ ne dépend pas du choix de U. On définit ainsi un morphisme de G-faisceaux

$$\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc},X} \otimes \mathscr{A}^{p,q}_{X_{\mathrm{G}}} \to \pi^*(\mathscr{D}_{p,q})_X.$$

Par adjonction, on en déduit un morphisme de faisceaux

$$\pi_*(\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc},X} \otimes \mathscr{A}^{p,q}_{X_{\mathrm{G}}}) \to \pi_*\pi^*(\mathscr{D}_{p,q})_X.$$

Comme l'unité $\mathrm{id} \to \pi_*\pi^*$ est un isomorphisme de foncteurs, on en déduit un morphisme de faisceaux

$$\pi_*(\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc},X} \otimes \mathscr{A}^{p,q}_{X_{\mathrm{G}}}) \to (\mathscr{D}_{p,q})_X.$$

L'image d'une section ω sera notée $[\omega]$. La notation est cohérente avec le cas des G-formes lisses ; via l'isomorphisme de la proposition 3.4.11, elle est aussi cohérente avec les cas des G-formes à coefficients tropicalement boréliens localement bornés. Ce courant est d'ordre 0 et de bidimension $(n-p, n-q)$.

Par composition avec l'homomorphisme canonique

$$\pi_*(\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc},X} \otimes \mathscr{A}^{p,q}_{X_{\mathrm{G}}}) \to \pi_*(\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc},X} \otimes \mathscr{A}^{p,q}_{X_{\mathrm{G}}}),$$

on en déduit un homomorphisme

$$\pi_*(\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc},X} \otimes \mathscr{A}^{p,q}_{X_{\mathrm{G}}}) \to (\mathscr{D}_{p,q})_X$$

qu'on note encore $\omega \mapsto [\omega]$.

Pour toute forme α de type $(n-p, n-q)$, lisse à support compact, on a

$$\langle \mathrm{J}[\omega], \alpha\rangle = \langle [\omega], \mathrm{J}^{-1}\alpha\rangle = \int_X \omega \wedge \mathrm{J}^{-1}\alpha = \int_X \mathrm{J}^{-1}(\mathrm{J}\omega \wedge \alpha) = \int_X \mathrm{J}\omega \wedge \alpha = \langle [\mathrm{J}\omega], \alpha\rangle.$$

Ainsi, $\mathrm{J}[\omega] = [\mathrm{J}\omega]$.

On laisse au lecteur le soin d'écrire la variante de cette construction pour les intégrales de bord.

Proposition 7.3.6. — *Soit ω une G-forme (à coefficients tropicalement boréliens et localement bornés) sur X.*

a) *Pour que le courant $[\omega]$ soit nul (respectivement positif, respectivement faiblement positif, respectivement fortement positif), il faut et il suffit que pour toute partie squelettique Σ de X, la forme $\omega|_\Sigma$ soit nulle (respectivement positive, respectivement...) en dehors d'une partie n-négligeable.*

b) *Si ω est à coefficients tropicalement continus, le courant $[\omega]$ est nul (respectivement positif, respectivement faiblement positif, respectivement fortement positif) si et seulement si $\omega|_\Sigma$ est nulle (respectivement positive, respectivement...) pour toute partie squelettique Σ de X qui est purement de dimension n.*

Démonstration. — La condition est évidemment suffisante ; prouvons qu'elle est nécessaire. Soit ω une G-forme de type (p,q) dont le courant associé $[\omega]$ est nul (respectivement positif, etc.). Soit Σ une partie squelettique ; prouvons que la forme $\omega|_\Sigma$ est nulle (respectivement positive, etc.) en dehors d'une partie localement n-négligeable de Σ. Soit Σ' l'ensemble des points de Σ au voisinage desquels $\omega|_\Sigma$ a la propriété voulue ; démontrons que $\Sigma - \Sigma'$ est n-négligeable.

C'est une propriété locale, ce qui permet de supposer l'espace paracompact. Elle se teste alors sur un G-recouvrement localement fini ce qui permet de supposer qu'il existe un domaine compact V de X dont $\Sigma \cap V$ est une partie fidèlement paralinéaire fermée sur lequel ω est tropicale. Quitte à restreindre encore V, il existe donc une application

paralinéaire f sur V qui G-tropicalise $\omega|_V$ et atteste que $\Sigma \cap V$ est fidèlement paralinéaire (définition 3.2.1). Quitte à introduire une décomposition cellulaire de $\Sigma \cap V$ en f-cellules et à projeter, on se ramène au cas où f est à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ et où $\Sigma \cap V$ est une f-cellule purement de dimension n. Par définition d'un espace tropical, $f(\partial(V))$ est n-négligeable. Quitte à raffiner la décomposition cellulaire choisie, on suppose que $C = f(\Sigma \cap V)$ est une cellule forte de $\mathbf{R}^n$ dont le bord contient $f(\partial(V))$.

Soit α une (p,q)-forme sur C telle que $\omega|_\Sigma = f^*\alpha$. Si le courant $[\omega]$ est nul, justifions que pour toute $(n-p,n-q)$-forme β, lisse, à support compact, sur $\overset{\circ}{C}$, on a $\int_C \alpha \wedge \beta = 0$; si ce courant est positif (resp. faiblement positif, resp. fortement positif), justifions que pour toute forme $(n-p,n-q)$-forme β, lisse, positive (resp. fortement positive, resp. faiblement positive), à support compact, sur $\overset{\circ}{C}$, on a $\int_C \alpha \wedge \beta \geqslant 0$.

Considérons la forme $\eta = f^*\beta$ sur V ; par construction, c'est une $(n-p,n-q)$-forme lisse sur V et son support est contenu dans $\mathrm{Int}(V)$ qui est lui-même contenu dans $\mathrm{Int}(V/X)$; elle se prolonge donc par zéro en une $(n-p,n-q)$-forme lisse sur X, que l'on note encore η qui est à support compact. Si β est positive (resp. fortement positive, resp. faiblement positive), la forme η l'est également.

Si le courant $[\omega]$ est nul, on a $\int_X \omega \wedge \eta = 0$. D'après la proposition 5.10.1, il vient donc $\int_C \alpha \wedge \beta = 0$. Prenons pour β une forme du type $u\beta_0$, où β_0 est une $(n-p,n-q)$-superforme « constante » sur $\mathbf{R}^n$ et u est une fonction lisse à support compact sur C. En faisant varier u, on déduit de ce qui précède que l'ensemble des $x \in C$ tels que $\alpha(x) \wedge \beta_0$ soit non nulle est de mesure nulle dans C. (On utilise le fait si λ est une fonction borélienne bornée sur C à valeurs réelles telle que $\int_C u\lambda = 0$ pour toute fonction continue à support compact u sur C, alors l'ensemble des $x \in C$ tels que $\lambda(x) \neq 0$ est de mesure nulle.) Faisons maintenant varier β_0 dans une base des superformes sur $\mathbf{R}^n$; on obtient un ensemble négligeable N de C tel que, pour tout $x \in C - N$, $\alpha(x) \wedge \gamma = 0$, pour toute superforme γ de type $(n-p,n-q)$. Par dualité, $\alpha(x) = 0$ pour tout $x \in C - N$, d'où le résultat.

Si le courant $[\omega]$ est positif, on a $\int_X \omega \wedge \eta \geqslant 0$ puis, comme ci-dessus, $\int_C \alpha \wedge \beta \geqslant 0$. On déduit de même que pour toute $(n-p,n-q)$-superforme « constante » β_0 sur $\mathbf{R}^n$ qui est positive (resp. fortement positive, resp. faiblement positive), l'ensemble des $x \in C$ tels que $\alpha(x) \wedge \beta_0$ ne soit pas positive est de mesure nulle dans C. (On utilise le fait si λ est une fonction borélienne bornée sur C à valeurs réelles telle que $\int_C u\lambda \geqslant 0$ pour toute fonction continue positive et à support compact u sur C, alors l'ensemble des $x \in C$ tels que $\lambda(x) < 0$ est de mesure nulle.) Faisons maintenant varier β_0 dans une partie dénombrable dense du cône des formes positives (resp. fortement positives, resp. faiblement positives). On obtient un ensemble négligeable N de C tel que, pour tout $x \in C - N$, $\alpha(x) \wedge \gamma$ est positive, pour toute superforme γ qui est positive (resp...). Par dualité, $\alpha(x)$ est positive (resp. faiblement positive, resp. fortement positive) pour tout $x \in C - N$, d'où le résultat.

Si le support de $\omega|_\Sigma$ est négligeable, son intérieur est vide. Si $\omega|_\Sigma$ est à coefficients continus, son support est l'adhérence de son intérieur, la dernière assertion en découle immédiatement. □

Corollaire 7.3.7. — *Soit X un espace tropical de niveau n, soit ω une G-forme de type (n,n) sur X, à coefficients tropicalement continus et à support compact. Si ω est positive et non nulle, on a $\int_X \omega > 0$.*

Démonstration. — Soit ω une forme positive à support compact telle que $\int_X \omega = 0$. Soit K le support de ω. Comme ω est positive, les formes $(u - \inf_K(u))\omega$ et $(\sup_K(u) - u)\omega$ sont positives, leurs intégrales le sont aussi, d'où

$$0 = \inf_K(u) \int_X \omega \leqslant \int_X u\omega \leqslant \sup_K(u) \int_X \omega = 0$$

et l'égalité $\int_X u\omega = 0$. En particulier, le courant $[\omega]$ est nul. Alors, $\omega|_\Sigma = 0$ pour toute partie squelettique Σ. En appliquant cette égalité à un support fort de ω (proposition 5.3.5), on en déduit que $\omega = 0$. Cela démontre le corollaire. □

Corollaire 7.3.8. — *Soit X un espace tropical de niveau n. Soit p et q des entiers tels que* $\sup(p, q) = n$. *Notons $\pi\colon X_{\mathrm{G}} \to X$ le morphisme de sites naturel. L'homomorphisme de faisceaux $\pi_*\mathscr{C}^{p,q}_{\mathrm{G},X} \to (\mathscr{D}_{p,q})_X$ est injectif.*

Démonstration. — Traitons le cas où $q = n$, l'autre cas étant analogue. Soit U un ouvert de X et soit ω une forme de type (p, n) sur X telle que $[\omega] = 0$; prouvons que $\omega = 0$. On peut raisonner localement sur U et donc supposer que U est paracompact. Dans ce cas, ω possède un support fort, Σ (proposition 5.3.5), et le support de $\omega|_\Sigma$ est égal au support de ω (proposition 5.3.6). Puisque $[\omega] = 0$, la proposition 7.3.6 entraîne que $\omega|_\Sigma = 0$. On a donc $\mathrm{supp}(\omega) = \varnothing$, c'est-à-dire $\omega = 0$. □

Corollaire 7.3.9. — *Soit X un espace tropical de niveau n,* très riche. *Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, l'homomorphisme de faisceaux $\pi_*\mathscr{C}^{p,q}_{\mathrm{G},X} \to (\mathscr{D}_{p,q})_X$ est injectif.*

Démonstration. — Soit U un ouvert de X et soit ω une (p, q)-forme à coefficients tropicalement continus sur U. Supposons que $\omega \neq 0$. Le corollaire 6.5.5 affirme l'existence d'une partie squelettique Σ de U, purement de dimension n, telle que $\omega|_\Sigma$ soit non nulle. La proposition 7.3.6 entraîne alors que le courant $[\omega]$ sur U n'est pas nul. □

Corollaire 7.3.10. — *Soit X un espace tropical de niveau n, très riche. Soit p un entier naturel et soit ω une forme de type (p, p) sur X, symétrique, à coefficients tropicalement continus. Pour que le courant $[\omega]$ soit positif (resp. faiblement positif, resp. fortement positif), il faut et il suffit qu'il en soit de même de la forme ω.*

Démonstration. — Si ω est positive, on a déjà expliqué (§7.3.4) que le courant associé est positif, pour les trois types de positivité. Établissons la réciproque par contraposition. Supposons que ω ne soit pas positive. Le corollaire 6.5.5 affirme l'existence d'une partie squelettique Σ de X, de dimension n, telle que $\omega|_\Sigma$ n'est pas positive. La proposition 7.3.6 entraîne alors que le courant $[\omega]$ sur X n'est pas positif. Le cas des deux autres types de positivité se démontre de même. □

Corollaire 7.3.11. — *Soit X un espace tropical de niveau n, très riche. Soit ω une G-forme de type (p, q) sur X à coefficients tropicalement continus.*

a) *Si $\omega|_{\mathrm{Int}(X)} = 0$, alors $\omega = 0$.*
b) *Si $p = q$ et si $\omega|_{\mathrm{Int}(X)}$ est positive, alors ω est positive.*

Démonstration. — Démontrons la première assertion, la seconde se démontre de même. Supposons que $\omega|_{\mathrm{Int}(X)} = 0$. Pour démontrer que $\omega = 0$, il suffit de démontrer que $\omega|_\Sigma = 0$ pour toute partie squelettique compacte Σ de X. Soit Σ une telle partie ; comme X est très riche, il existe une partie squelettique compacte T de X, purement de dimension n, telle que $\Sigma \subset \mathrm{T}$. Par hypothèse, $\omega|_{\mathrm{Int}(X)\cap \mathrm{T}} = 0$. Puisque $\partial(X) \cap \mathrm{T}$ est n-négligeable, $\mathrm{Int}(X) \cap \mathrm{T}$ est dense dans T. Comme ω est à coefficients tropicalement continus, on en déduit $\omega|_\mathrm{T} = 0$ et, en particulier, $\omega|_\Sigma = 0$, comme il fallait démontrer. □

Rappelons (corollaire 7.2.10) que toute fonction localement intégrable u, a fortiori toute fonction continue u, définit un courant $[u]$ sur X de bidimension (n, n), donc de bidegré $(0, 0)$.

Corollaire 7.3.12. — *Soit X un espace tropical de niveau n, très riche. L'homomorphisme $u \mapsto [u]$ de $\mathscr{C}_X$ dans $\mathscr{D}_X^{0,0}$ est injectif.*

Démonstration. — Soit U un ouvert de X et $u \in \mathscr{C}_X(U)$ telle que $[u] = 0$. Démontrons que u est nulle. Raisonnons par l'absurde. Soit x un point de U tel que $u(x) \neq 0$ et soit V un voisinage ouvert de x dans U sur lequel u ne s'annule pas. Il existe une fonction continue v sur U, à support compact contenu dans V, telle que uv soit lisse et non nulle. On a alors $[uv] = v[u] = 0$, donc $uv = 0$, ce qui contredit le corollaire 7.3.9. □

Corollaire 7.3.13. — *Soit X un espace tropical de niveau n, très riche. Le support du courant δ_X est égal à X.*

Démonstration. — Soit U un ouvert de X tel que $\delta_X|_U = 0$. On $\delta_X = [1]$, et $\delta_X|_U = [1_U]$. Comme U est un ouvert d'un espace très riche, il est très riche. Par suite, $1_U = 0$, ce qui signifie que U est vide. □

Lemme 7.3.14. — *Soit U un ouvert de X tel que $d_{\mathrm{trop}}(x) < n$ pour tout $x \in X - U$. Soit (u_n) une suite de fonctions localement localement intégrables sur U, convergeant simplement vers une fonction u. S'il existe une fonction localement intégrable v sur X telle que $|u_n| \leqslant v|_U$, alors Alors la suite de courants $([u_n])$ converge vers le courant $[u]$ sur X.*

Dans cet énoncé, les fonctions u_n (*resp.* u) définissent a priori des courants $[u_n]$ de bidimension (n, n) sur U ; d'après le lemme 7.1.13, ces courants se prolongement par zéro à X et on a noté également $[u_n]$ et $[u]$ ces prolongements.

Démonstration. — Soit α une (n, n)-forme lisse à support compact sur X. Son support S est une partie compacte de U, par hypothèse sur la dimension tropicale des points de $X - U$. Pour tout n, on a $\langle [u_n], \alpha\rangle = \int_S u_n \alpha_{\mathrm{Rad}}$, et de même pour u. La mesure $|v|\alpha_{\mathrm{Bor}} = |v\alpha_{\mathrm{Rad}}|$ étant finie, il résulte donc du théorème de convergence dominée que $\langle [u_n], \alpha\rangle \to \langle [u], \alpha\rangle$. □

§ 7.4. COURANTS POSITIFS ET G-TOPOLOGIE

Le but de ce chapitre est d'étendre aux G-formes l'action des courants positifs, c'est-à-dire, étant donné un courant positif T sur X, définir $\langle T, \alpha\rangle$ pour toute G-forme α (à

support compact) sur un domaine V (non nécessairement ouvert) de X, et de montrer que les courants ainsi étendus forment un G-faisceau.

Lemme 7.4.1. — *Soit $\mathscr{B}$ une classe de fonctions numériques. Soit X un espace tropical et soit V un domaine fermé de X. Soit ω une G-forme de type (p,p) à coefficients dans $\mathscr{B}$ sur X. On suppose que $\omega|_V$ et $\omega|_{X-V}$ sont positives. Alors ω est positive.*

Démonstration. — L'assertion est G-locale. On peut donc supposer que X et V sont compacts et que ω est tropicale. Soit $f\colon X \to \mathbf{R}^n$ une carte affine qui tropicalise ω, soit α une forme lisse sur $f(X)$ telle que $\omega = f^*\alpha$. Il suffit de démontrer que α est positive. En raisonnant G-localement, on peut donc supposer que $f(X)$ est une cellule de $\mathbf{R}^n$.

Posons $P = f(V)$; comme $\omega|_V$ est positive, la forme $\alpha|_P$ est positive (lemme 3.5.3).

Posons $U = f(X) - P$; alors $f^{-1}(U) \subset X - V$, de sorte $\omega|_{f^{-1}(U)}$ est positive. Cela entraîne que $\alpha|_U$ est positive (lemme 3.5.3).

Par définition, la positivité d'une forme est une condition ponctuelle sur la cellule $f(X)$. Par suite α est positive. □

Proposition 7.4.2. — *Soit X un espace tropical de niveau n, localement différentiellement séparé. Soit p un entier naturel et soit T un courant positif de bidegré (p,p) et soit ω une forme lisse de type (p,p) sur X. Soit V un domaine de X tel que $\omega|_V \geqslant 0$. Alors, la restriction à V de la mesure μ_ω^T (exemple 7.2.12) est positive.*

Démonstration. — L'assertion est locale sur X, ce qui permet de supposer que V est fermé. Considérons des formes lisses et positives sur X telles que $\omega = \omega_1 - \omega_2$ (proposition 6.5.2) ; posons $\alpha = \omega_1 + \omega_2$. Puisque $\pm\omega \leqslant \alpha$, on observe l'inégalité de mesures positives $|\mu_\omega^T| \leqslant \mu_\alpha^T$. Quitte à remplacer X par un ouvert relativement compact, on suppose également que μ_α^T est finie.

Il s'agit de démontrer l'inégalité $\mu_\omega^T(A) \geqslant 0$ pour toute partie compacte A de V.

Fixons $\varepsilon > 0$. Par définition de la mesure d'une partie compacte associée à une forme linéaire sur l'espace des fonctions continues à support compact ([**35**], chap. 4, §4), il existe des fonctions continues f et g sur X telles que $|f - \mathbf{1}_A| \leqslant g$ et $\mu_\alpha^T(g) \leqslant \varepsilon$. Comme X est localement différentiellement séparé, il existe, d'après le théorème 6.2.5, des fonctions lisses f' et g' sur X telles que $\|f - f'\| \leqslant \varepsilon$ et $\|g - g'\| \leqslant \varepsilon$. Posons $u = f' + g' + 2\varepsilon$ et $v = 2g' + 4\varepsilon$; ce sont des fonctions lisses sur X telles que $0 \leqslant u - \mathbf{1}_A \leqslant v$. De plus, $\mu_\alpha^T(v) \leqslant 2\varepsilon + 4\varepsilon\|\mu_\alpha^T\|$. Alors,

$$|\mu_\omega^T(u) - \mu_\omega^T(A)| \leqslant |\mu_\omega^T|(u - \mathbf{1}_A) \leqslant |\mu_\omega^T|(v) \leqslant \mu_\alpha^T(v).$$

En particulier, $\mu_\omega^T(A) \geqslant \mu_\omega^T(u) - \mu_\alpha^T(v)$.

Démontrons maintenant l'inégalité $u\omega \geqslant -v\alpha$ de formes lisses sur X. En effet, cette inégalité vaut sur le domaine fermé V de X sur lequel $u\omega$ et $v\alpha$ sont des formes positives. D'autre part, sur l'ouvert $X - V$, on a $|u| \leqslant v$, si bien que

$$u\omega = u\omega_1 - u\omega_2 \geqslant -v\omega_1 - v\omega_2 = -v\alpha.$$

L'assertion découle alors du lemme 7.4.1. Par conséquent, on a $\mu_\omega^T(u) \geqslant -\mu_\alpha^T(v)$ d'où, finalement,

$$\mu_\omega^T(A) \geqslant -2\mu_\alpha^T(v) \geqslant -4\varepsilon(1 + 2\|\mu_\alpha^T\|).$$

Comme ε est arbitraire, cela démontre l'inégalité $\mu_\omega^T(A) \geqslant 0$ et conclut la démonstration. □

Corollaire 7.4.3. — *Soit X un espace tropical et soit T un courant positif sur X, de bidegré (p,p). Soit ω et ω' des formes de type (p,p) à support compact sur X telles que $\omega|_V = \omega'|_V$. Les restrictions à V des mesures μ_ω^T et $\mu_{\omega'}^T$ coïncident.*

Démonstration. — La mesure de Radon $\mu_{\omega'}^T - \mu_\omega^T$ est égale à $\mu_{\omega'-\omega}^T$. Puisque la restriction à V de $\omega' - \omega$ est nulle, la proposition précédente affirme que la restriction à V de cette mesure de Radon est à la fois positive et négative, donc nulle. L'assertion en résulte. □

Théorème 7.4.4. — *Soit X un espace G-tropical affiné décent et localement différentiellement séparé. Soit T un courant positif de bidegré (p,p) sur X. Il existe un unique morphisme $\mathbf{R}$-linéaire du G-faisceau des G-formes G-lisses de type (p,p) dans le G-faisceau des mesures de Radon sur X qui prolonge le morphisme $\omega \mapsto \mu_\omega^T$ lorsque ω est une forme lisse de type (p,p) définie sur un ouvert de X.*

Le support de cette mesure μ_ω^T est contenu dans l'intersection des supports de T et de ω.

En particulier, pour toute G-forme ω de type (p,p) sur un domaine V de X tel que $\mathrm{supp}(T) \cap \mathrm{supp}(\omega)$ soit compact dans V, on dispose d'une mesure à support compact μ_ω^T sur V. On notera $\langle T, \omega \rangle$ la masse totale de cette mesure, c'est-à-dire l'intégrale de la fonction constante 1 sur V. Cette notation est compatible avec celle déjà introduite lorsque V est ouvert et ω est une forme lisse.

Démonstration. — Soit ω une G-forme G-lisse de type (p,p) sur un domaine V de X. Soit (V_i) un G-recouvrement de V par des domaines compacts sur lesquels ω est une forme. Pour tout i, il existe une forme lisse ω_i à support compact sur X qui prolonge $\omega|_{V_i}$ (proposition 6.3.2, c)). Nécessairement, la restriction à V_i de μ_ω^T est la restriction à V_i de $\mu_{\omega_i}^T$ qui est imposée par les conditions du théorème. Il s'ensuit que la mesure μ_ω^T est entièrement déterminée, d'où l'unicité d'un tel morphisme de G-faisceaux. Établissons maintenant son existence.

Soit ω une G-forme G-lisse sur un domaine V de X. Soit $\mathscr{W}_V$ la famille des domaines W de V tels qu'il existe un voisinage ouvert W' de W dans X et une forme ω' sur W' telle que $\omega'|_W = \omega|_W$. Tout domaine compact de V sur lequel ω est une forme appartient à $\mathscr{W}_V$ (proposition 6.3.2, c)). Par conséquent, $\mathscr{W}_V$ est un G-recouvrement de V.

Soit $W \in \mathscr{W}_V$ et soit W' et ω' comme ci-dessus. D'après le corollaire 7.4.3, la mesure $\mu_{\omega'}^T|_W$ ne dépend pas du choix de la forme ω' ; on la notera μ_W. Soit W_1 et W_2 dans $\mathscr{W}_V$, soit W_1', ω_1' et W_2', ω_2' comme ci-dessus ; les restrictions à $W_1 \cap W_2$ de ω_1' et ω_2' sont égales à la restriction de ω ; d'après le corollaire 7.4.3, les mesures μ_{W_1} et μ_{W_2} coïncident sur $W_1 \cap W_2$. Il existe donc une unique mesure μ_ω^T sur V dont la restriction à W est égale à μ_W pour tout domaine W appartenant à $\mathscr{W}_V$.

Lorsque V est ouvert et ω est une forme, le domaine V appartient à $\mathscr{W}_V$, de sorte que μ_ω^T coïncide avec la mesure μ_ω^T précédemment définie.

Soit V et V' des domaines de X tels que $V' \subset V$. Soit $W \in \mathscr{W}_V$, soit W' et ω' comme ci-dessus ; la mesure $\mu_\omega^T|_W$ est la trace de la mesure $\mu_{\omega'}^T$. Le domaine W' est un voisinage ouvert de $V' \cap W$ et la forme ω' prolonge $\omega|_{V' \cap W}$; par suite, la restriction à $V' \cap W$ de la mesure $\mu_{\omega|_{V'}}^T$ est donnée la trace de la mesure $\mu_{\omega'}^T$; c'est donc la trace de la mesure $\mu_\omega^T|_W$. Comme les parties $W \cap V'$, où W parcourt $\mathscr{W}_V$, constituent un G-recouvrement de V', la mesure $\mu_{\omega|_V'}^T$ est la restriction à V' de la mesure μ_ω^T.

Cela prouve que les applications $\omega \mapsto \mu_\omega^T$ définissent un morphisme de G-faisceaux.

Il reste à démontrer qu'il est $\mathbf{R}$-linéaire. Soit α et β des G-formes G-lisses de type (p,p) sur un domaine V de X, soit a et b des nombres réels. Les domaines W de V qui possèdent un voisinage ouvert W' sur lequel les G-formes $\alpha|_W$ et $\beta|_W$ se prolongent en une forme définissent un G-recouvrement de V. Pour tout tel domaine W, la restriction à W de la mesure $\mu^T_{a\alpha+b\beta}$ est égale à la trace de la mesure $a\mu^T_\alpha + b\mu^T_\beta$. Par suite, $\mu^T_{a\alpha+b\beta} = a\mu^T_\alpha + b\mu^T_\beta$. □

Proposition 7.4.5. — *Soit X un espace G-tropical affiné décent et localement différentiellement séparé. Soit T un courant positif sur X, de bidegré (p,p).*

Si ω est une G-forme G-lisse positive sur un domaine V de X, la mesure μ^T_ω sur V est positive.

Démonstration. — Soit ω une G-forme G-lisse positive sur X. La positivité de la mesure μ^T_ω se vérifie G-localement. Il suffit donc de prouver que pour domaine compact V tel que $\omega|_V$ se prolonge en une forme ω' sur un voisinage ouvert V' de V, la restriction à V de la mesure μ^T_ω est positive. Or, par construction, la restriction à V de cette mesure μ^T_ω est égale à la restriction à V de $\mu^T_{\omega'}$, laquelle est positive d'après la proposition 7.4.2 puisque $\omega'|_V = \omega|_V$ est positive. □

Corollaire 7.4.6. — *L'application $\omega \mapsto \langle T, \omega\rangle$ est continue lorsque l'espace $\mathscr{A}^{p,p}_{\mathrm{G,c}}(X)$ est muni de sa topologie $\mathscr{C}^0$.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{D}$ un jeu de cartes G-tropicales G-couvrant sur X et soit F une partie compacte de X. Il s'agit d'établir la continuité de la restriction de cette forme linéaire à l'espace $\mathscr{A}^{p,p}_{\mathrm{G},\mathscr{D},F}$ des G-formes sur X qui sont G-tropicalisées par le jeu $\mathscr{D}$ et dont le support est contenu dans F. Comme les inclusions induites par les raffinements de jeux de cartes G-couvrants sont continues, il sera loisible de raffiner $\mathscr{D}$ au cours de la démonstration.

Toute carte G-tropicale de $\mathscr{D}$ est G-recouverte par des cartes tropicales de domaines compacts. Quitte à raffiner le jeu $\mathscr{D}$, on peut donc supposer qu'il est constitué de cartes tropicales définies sur des domaines compacts.

Soit $f\colon W \to E$ une telle carte. Comme X est décent, il existe un recouvrement fini (W_i) de W par des domaines compacts et pour tout i, une fonction affine f_i sur un voisinage ouvert U_i de W_i telle que $f_i|_{W_i} = f|_{W_i}$.

Quitte à raffiner le jeu $\mathscr{D}$, on peut donc supposer que pour toute carte $f\colon W \to E$, il existe un voisinage domanial compact W' de W sur lequel f se prolonge en une application affine que nous noterons encore f. La famille $\mathscr{E}$ des cartes tropicales (W', f) est alors un jeu de cartes tropicales sur X qui est couvrant. On munit les espaces $\mathscr{A}^{p,p}_{f,\mathrm{G}}(W)$ et $\mathscr{A}^{p,p}_{f,\mathrm{G}}(W')$ de normes standard $\mathscr{C}^0$.

Soit S une partie finie de $\mathscr{D}$ telle que la réunion des W, pour $W \in S$, contienne F. Pour toute partie non vide P de S, notons W_P l'intersection des W, pour $W \in P$. Par la formule d'inclusion-exclusion, on a

$$\mathbf{1}_W = \sum_{\varnothing \neq P \subset S} (-1)^{\mathrm{Card}(P)-1} \mathbf{1}_{W_P}.$$

Soit $\omega \in \mathscr{A}^{p,p}_{\mathrm{G},\mathscr{D},F}(X)$. Comme le support de ω est contenu dans F, on a donc

$$\langle T, \omega\rangle = \mu^T_\omega(1) = \mu^T_\omega(\mathbf{1}_W) = \sum_{\varnothing \neq P} (-1)^{\mathrm{Card}(P)-1} \mu^T_\omega(\mathbf{1}_{W_P}).$$

Il suffit de prouver la continuité de chacun des termes de cette somme. Chacun d'entre eux est du type $\omega \mapsto \mu_\omega^T(\mathbf{1}_C)$, où C est un domaine compact d'une carte W de $\mathscr{D}$. Il suffit donc de prouver que pour tel domaine C d'une carte W, l'application $\omega \mapsto \mu_\omega^T(\mathbf{1}_C)$ sur $\mathscr{A}^{p,p}_{\mathrm{G},\mathscr{D},F}(X)$ est continue.

Notons E l'espace affine codomaine de la carte f et munissons-le d'une norme euclidienne ; notons $\eta = \mathrm{d}'\mathrm{d}''\|x\|^2$ la $(1,1)$-forme fortement positive sur E. Soit P l'espace paralinéaire compact $f(W)$; considérons une norme $\mathscr{C}^0$ sur l'espace $\mathscr{A}^{p,p}(P)$. On déduit de la proposition 1.2.13 qu'il existe un nombre réel $c > 0$ tel que la forme $\alpha + c\|\alpha\|\eta^p$ est positive, pour tout $\alpha \in \mathscr{A}^{p,p}(P)$.

Pour toute G-forme $\omega \in \mathscr{A}^{p,p}_{\mathrm{G},\mathscr{D},F}(X)$, il existe une unique forme $\alpha \in \mathscr{A}^{p,p}(P)$ telle que $\omega|_W = f^*\alpha$ et l'application $\omega \mapsto \|\omega\|_{P,0}$ est une semi-norme $\mathscr{C}^0$ sur $\mathscr{A}^{p,p}_{\mathrm{G},\mathscr{D},F}(X)$. On la note $\|\cdot\|_{W,0}$.

Soit $\omega \in \mathscr{A}^{p,p}_{\mathrm{G},\mathscr{D},F}(X)$; il existe une unique forme $\alpha \in \mathscr{A}^{p,p}(P)$ telle que $\omega|_W = f^*\alpha$, si bien que $\omega + c\|\alpha\|f^*\eta^p$ est positive sur W. Par suite, la mesure $\mu_\omega^T + c\|\alpha\|\mu_{f^*\eta^p}^T$ sur W est positive. En particulier,

$$\mu_\omega^T(\mathbf{1}_C) \geqslant -c\mu_{f^*\eta^p}^T(\mathbf{1}_C)\|\omega\|_{W,0}.$$

On en déduit que

$$|\mu_\omega^T(\mathbf{1}_C)| \leqslant c\mu_{f^*\eta^p}^T(\mathbf{1}_C)\|\omega\|_{W,0},$$

ce qui conclut la démonstration. □

7.4.7. — Si α est une G-forme sur X et T un courant positif sur X, on définit ainsi un courant $T \wedge \alpha$ sur X : il applique une forme ω sur $\langle T, \alpha \wedge \omega\rangle$. Sa continuité résulte du corollaire précédent ; c'est même un courant d'ordre 0.

Proposition 7.4.8. — *Soit T un courant positif sur X et soit α une G-forme sur X. Si α est fortement positive, alors $T \wedge \alpha$ est un courant positif.*

Démonstration. — Soit ω une forme lisse à support compact sur X. Par définition, le courant $T \wedge \alpha$ applique ω sur $\mu_{\alpha\wedge\omega}^T(1)$. Il suffit donc de démontrer que la mesure $\mu_{\alpha\wedge\omega}^T$ est positive, et, d'après la proposition 7.4.5, il suffit de prouver que la G-forme $\alpha \wedge \omega$ est positive. Comme ω est positive et α est fortement positive, cela résulte de la proposition 3.5.5. □

7.4.9. — La construction s'étend par linéarité (et raisonnement local) aux courants qui sont localement différence de courants positifs.

§ 7.5. COURANTS SQUELETTIQUES

Définition 7.5.1. — *Soit X un espace tropical de niveau n, localement affinement séparé, soit p un entier naturel et soit T un courant de bidimension (p,p) sur X.*

a) *Soit f un carte tropicale sur X définie sur un ouvert U de X et soit P une partie squelettique fermée de U de dimension $\leqslant p$, munie d'un p-calibrage* G-localement constant. *On dit que P décrit le courant T relativement à la carte f si, pour tout (p,p)-forme lisse ω sur U qui est tropicalisée par f et toute fonction lisse ρ à support compact*

sur U, on a

$$\langle T, \rho\omega\rangle = \int_P \rho\omega|_P.$$

b) *On dit que T est un* courant squelettique *si, pour tout ouvert U de X et toute carte tropicale f sur U, le courant $T|_U$ est localement descriptible relativement au moment f par une partie squelettique munie d'un p-calibrage G-localement constant.*

Rappelons (remarque 7.2.5) qu'un courant est déterminé par sa valeur sur les formes du type $\rho\omega$ considérées dans la définition, dès lors que l'espace ambiant est localement différentiellement séparé.

Un courant squelettique est symétrique et d'ordre 0.

Si les calibrages des espaces squelettiques calibrés décrivant un courant squelettique sont positifs, ce courant est fortement positif.

Les courants squelettiques forment un sous-faisceau en $\mathbf{R}$-espaces vectoriels du faisceau des courants de bidimension (p,p) sur X.

Par définition, les courants squelettiques ont une description en termes de squelettes purement de dimension p ; nous parlerons ainsi de « courant squelettique de dimension p ».

Exemple 7.5.2. — Soit X un espace tropical de niveau n, localement différentiellement séparé, et soit P un sous-espace squelettique de X, fermé et de dimension p, muni d'un p-calibrage G-localement constant. L'application δ_P qui applique une forme lisse à support compact ω sur X sur l'intégrale $\int_P \omega|_P$ est un courant squelettique.

Exemple 7.5.3. — Soit X un espace tropical de niveau n, sans bord. Le courant d'intégration sur X est un courant squelettique de dimension n : pour toute carte tropicale f sur un ouvert de X, il est décrit par le polyèdre de variation maximale $\Sigma_f^{(n)}$ muni de son n-calibrage canonique.

Lemme 7.5.4. — *Supposons que P_f décrive T relativement à une carte tropicale $f\colon V \to E$ définie sur un ouvert V de X. Alors, pour tout ouvert W de V, le sous-espace calibré $P_f \cap W$ décrit T relativement à la carte $f|_W$ sur W.*

Démonstration. — Soit ω une (p,p)-forme lisse sur W qui est tropicalisée par $f|_W$ et soit ρ une fonction lisse à support compact sur W. Soit α une (p,p)-forme lisse au voisinage de $f(W)$ telle que $\omega = (f|_W)^*\alpha$ (cf. §3.3.3).

Soit K le support de ρ ; alors $f(K)$ est une partie compacte de $f(W)$ contenue dans l'ouvert de définition de α. En multipliant α par une fonction lisse sur E qui vaut 1 au voisinage de $f(K)$ et dont le support est contenu dans l'ouvert de définition de α, on obtient une forme α' sur E qui coïncide avec α au voisinage de $f(K)$. Soit ρ' le prolongement par 0 de ρ à V. On a $\rho' f^*\alpha'|_W = \rho(f|_W)^*\alpha$ et $\omega' = \rho' f^*\alpha'$ est le prolongement par zéro de $\omega = \rho(f|_W)^*\alpha$.

On a donc

$$\langle T|_W, \rho\omega\rangle = \langle T, \rho'\omega'\rangle = \int_{P_f} \rho'\omega'|_{P_f} = \int_{P_f\cap W} \rho'\omega'|_{P_f\cap W} = \int_{P_f\cap W} \rho\omega|_{P_f\cap W}.$$

Cela prouve que le squelette p-calibré $P_f \cap W$ décrit T relativement au moment $f|_W$. □

7.5.5. — Soit P une partie squelettique de dimension $\leqslant p$ munie d'un p-calibrage G-localement constant μ_P. Le support de μ_P est une partie squelettique fermée de P, purement de dimension p ; on le notera $|(P, \mu_P)|$, ou $|P|$ si le calibrage μ_P est sous-entendu. Il est naturellement muni du calibrage restreint, qui est partout non nul.

Dans une description d'un courant squelettique, on peut ainsi toujours supposer que la partie squelettique considérée est purement de dimension p et que son calibrage est partout non nul.

7.5.6. — Soit P un espace paralinéaire purement de dimension p et soit $f\colon P \to \mathbf{R}^n$ une application paralinéaire ; notons $P^{(f)}$ l'ensemble des points $x \in P$ tels que $\dim(f(Q)) = p$ pour tout voisinage paralinéaire Q de x dans P. Démontrons que $P^{(f)}$ est une partie paralinéaire fermée de P, purement de dimension p, et que la restriction de f à $P^{(f)}$ est une immersion par morceaux. Il suffit de le vérifier localement, ce qui permet de supposer que P possède une décomposition cellulaire $\mathscr{C}$ adaptée à f. Dans ce cas, l'ensemble $P^{(f)}$ est la réunion des p-cellules C de $\mathscr{C}$ telle que $f|_C$ est injective, d'où l'assertion.

On vérifie à l'aide d'une décomposition cellulaire que pour toute partie paralinéaire compacte Q de $P - P^{(f)}$, on a $\dim(f(Q)) < p$.

Dans le cas où P décrit un courant squelettique relativement à une carte tropicale f, alors $P^{(f)}$ le décrit également ; cela permettra de supposer que le calibrage de P est partout non nul et que $f|_P$ est une immersion par morceaux.

Proposition 7.5.7. — *Soit X un espace tropical de niveau n, localement affinement séparé, soit p un entier naturel et soit T un courant squelettique de dimension p sur X. Soit $f\colon X \to E$ et $g\colon X \to E'$ des cartes tropicales sur X, soit P_f et P_g des parties squelettiques p-calibrés fermées décrivant le courant T relativement aux cartes f et g. On a l'égalité de parties squelettiques p-calibrées : $(|P_f|^{(f)})^{(g)} = (|P_g|^{(g)})^{(f)}$.*

Démonstration. — On peut supposer que $P_f = |P_f|^{(f)}$ et que $P_g = |P_g|^{(g)}$; il s'agit alors de démontrer l'égalité de polyèdres calibrés $P_f^{(g)} = P_g^{(f)}$.

Introduisons la carte tropicale $h = (f, g)$ sur X, soit P_h une partie squelettique p-calibrée qui décrit le courant T relativement à la carte h et telle que $P_h = |P_h|^{(h)}$. Il suffit de prouver que l'on a l'égalité $P_f = P_h^{(f)}$ de parties squelettiques p-calibrées. En effet, comme f est une immersion par morceaux sur P_f, c'est aussi le cas de h, d'où $P_f^{(h)} = P_f$ et $P_f^{(g)} = (P_f^{(h)})^{(g)} = P_h^{(f)(g)}$; par symétrie, on a aussi $P_g^{(f)} = P_h^{(g)(f)}$. Ainsi, l'égalité $P_f^{(g)} = P_g^{(f)}$ de parties squelettiques calibrées équivaut à l'égalité $P_h^{(f)(g)} = P_h^{(g)(f)}$. Cette dernière égalité résulte de ce que les deux espaces paralinéaires $P_h^{(f)(g)}$ et $P_h^{(g)(f)}$ coïncident : si $\mathscr{C}$ est une décomposition cellulaire assez fine de P_h, c'est la réunion des cellules sur lesquelles f et g sont simultanément injectives.

Prouvons maintenant l'égalité $P_f = P_h^{(f)}$. Posons $P = P_f \cup P_h^{(f)}$. C'est une partie squelettique de X, purement de dimension p, munie de deux calibrages, μ et μ', respectivement déduits par prolongement par 0 de celui de P_f et de celui de $P_h^{(f)}$. Il suffit de démontrer que $\mu = \mu'$. Notons que f et h sont des immersions par morceaux sur P.

L'espace P est G-recouvert par des h-cellules compactes C de dimension p telles que $\mathring{C}$ soit ouvert dans P (ce sont également des f-cellules) ; on peut également supposer que l'intérieur de ces cellules est soit entièrement contenu dans P_f, soit entièrement contenu dans $P_h^{(f)}$, et que les calibrage $\mu|_C$ et $\mu'|_C$ sont constants relativement à f.

Soit C une telle cellule et soit V un ouvert de X tel que $V \cap C = \mathring{C}$.

Démontrons que $(\mathring{C}, \mu|_{\mathring{C}})$ décrit le courant $T|_V$ relativement à f. C'est effectivement le cas si C est une cellule de P_f, d'après le lemme 7.5.4. C'est également le cas si $\mathring{C}$ est disjointe de P_f, car alors le courant $T|_V$ est nul en toute forme f-tropicale (d'après le lemme 7.5.4), de même que le calibrage $\mu_{\mathring{C}}$, par définition de μ.

Démontrons que $(\mathring{C}, \mu'|_{\mathring{C}})$ décrit le courant $T|_V$ relativement à h. Si C est une cellule de P_h, cela résulte du lemme 7.5.4. Sinon, $\mathring{C}$ est disjointe de P_h, donc le courant $T|_V$ est nul en toute forme h-tropicale, et $\mu'|_{\mathring{C}} = 0$.

Soit α une (p,p)-forme sur $\mathbf{R}^m$, invariante par translation et non nulle sur $f(C)$. La forme $\omega = f^*\alpha$ est f-tropicale par construction, elle également h-tropicale car $h = (f,g)$. Soit ρ une fonction lisse à support compact sur V, positive, et dont la restriction à $\mathring{C}$ n'est pas nulle. On a

$$\langle T, \rho\omega\rangle = \int_{P_f} \rho f^*\alpha|_{P_f} = \int_{f(C)} \rho_C \langle \alpha, \mu_C\rangle,$$

où ρ_C est la fonction sur $f(C)$ déduite de ρ par restriction à C et l'isomorphisme $f|_C$, et μ_C est le vecteur-volume sur $f(C)$ tel que $\mu|_C = f^*\mu_C$.

Notons de même ρ'_C la fonction sur $h(C)$ déduite de ρ par l'isomorphisme $h|_C$. La projection q de $\mathbf{R}^{m+n}$ sur $\mathbf{R}^m$ induit un isomorphisme de $h(C)$ sur $f(C)$. Notons μ'_C le vecteur-volume sur $h(C)$ tel que $\mu'|_C = h^*\mu'_C$; on a alors

$$\langle T, \rho\omega\rangle = \int_{P_h} \rho h^*(q^*\alpha)|_{P_h} = \int_{h(C)} \rho'_C \langle q^*\alpha, \mu'_C\rangle = \int_{f(C)} \rho_C \langle \alpha, q_*\mu'_C\rangle.$$

On a donc

$$\int_{f(C)} \rho_C \langle \alpha, \mu_C\rangle = \int_{f(C)} \rho_C \langle \alpha, q_*(\mu'_C)\rangle.$$

Comme la forme α est arbitraire, les calibrages μ_C et $q_*(\mu'_C)$ sont constants, et la fonction ρ_C est positive et non nulle, on en déduit l'égalité $\mu_C = q_*(\mu'_C)$. On a donc $\mu'|_C = \mu|_C$. Cela termine la démonstration. □

Par exemple, lorsque T est le courant δ_P associé à une partie squelettique p-calibrée P de X, on a $P_f^T = (|P| \cap V)^{(f)}$ pour tout ouvert V et toute carte tropicale f sur V.

Si f et g sont des cartes tropicales sur un ouvert V de X, la conclusion de la proposition 7.5.7 se récrit $(P_f^T)^{(g)} = (P_g^T)^{(f)}$.

Proposition 7.5.8. — *Soit X un espace tropical de niveau n, localement affinement séparé, soit p un entier naturel et soit T un courant squelettique de dimension p sur X. Soit f une carte tropicale sur X.*

a) *Il existe une partie squelettique fermée P de X, munie d'un p-calibrage G-localement constant, qui décrit T relativement à f.*

b) *Soit P une telle partie squelettique. La partie squelettique p-calibrée $|P|^{(f)}$ est la plus petite squelettique fermée p-calibrée de X décrivant T relativement à f, et c'est la seule partie squelettique fermée p-calibrée décrivant T relativement à f dont le calibrage soit partout non nul et sur laquelle f soit une immersion par morceaux.*

Démonstration. — Par hypothèse, il existe un recouvrement ouvert (U_i) de X et, pour tout i, une partie squelettique P_i de U_i, munie d'un p-calibrage G-localement constant, qui décrit le courant $T|_{U_i}$ relativement à $f|_{U_i}$. On peut supposer que chaque P_i est purement de dimension p et que le calibrage y est partout non nul et que $f|_{P_i}$ est une immersion par morceaux, autrement dit, que $P_i = |P_i|^{(f)}$.

Comme $P_i \cap (U_i \cap U_j)$ et $P_j \cap (U_i \cap U_j)$ décrivent toutes deux le courant $T|_{U_i \cap U_j}$ relativement à $f|_{U_i \cap U_j}$, on a $P_i \cap (U_i \cap U_j) = P_j \cap (U_i \cap U_j)$ (proposition 7.5.7). Il existe donc une unique paralinéaire squelettique fermée P de X tel que $P \cap U_i = P_i$ pour tout i. De plus, il existe un unique p-calibrage sur P dont la trace sur U_i coïncide avec le p-calibrage de P_i ; il est G-localement constant.

Démontrons que P, muni de ce calibrage, décrit T relativement à la carte tropicale f.

Soit ω une forme f-tropicale sur X et soit ρ une fonction lisse à support compact sur X. Soit (θ_i) une famille localement finie de fonctions lisses à support compact, positives, telle que pour tout i, le support de θ_i soit contenu dans U_i, et que $\theta = \sum \theta_i$ vaille 1 au voisinage du support de ρ (corollaire 6.2.8).

Alors, $\omega = \rho\omega = \rho\theta\omega = \sum \rho\theta_i\omega$. Par suite,

$$\langle T, \rho\omega \rangle = \sum \langle T, \rho\theta_i\omega \rangle = \sum \int_{P_i} \rho\theta_i\omega = \sum \int_P \rho\theta_i\omega = \int_P \rho\omega.$$

Cela conclut la démonstration de (1).

Montrons maintenant (2). Soit P comme dans (1). Il est clair que $|P|^{(f)}$ décrit encore T relativement à f. Soit Q une partie squelettique fermée de X munie d'un calibrage G-localement constant et décrivant T relativement à f. Appliquons la proposition 7.5.7 lorsque $g = f$. On en déduit que $|Q|^{(f)} = |P|^{(f)}$; en particulier, $|P|^{(f)} \subset Q$, d'où la minimalité de $|P|^{(f)}$. Par ailleurs, le calibrage de $|P|^{(f)}$ est partout non nul, et $f|_{|P|^{(f)}}$ est une immersion par morceaux. Soit maintenant Q une partie squelettique fermée de X munie d'un calibrage G-localement constant partout non nul et décrivant T relativement à f, et telle que $f|_Q$ soit une immersion par morceaux. On a alors $|Q|^{(f)} = Q$; en appliquant ce qui précède à Q au lieu de P, on voit que $|Q|^{(f)}$ est la plus petite partie polyédrale fermée calibrée de X décrivant T relativement à f ; il vient $|Q|^{(f)} = |P|^{(f)}$, c'est-à-dire $Q = |P|^{(f)}$. □

7.5.9. — Nous noterons P_f^T la partie squelettique p-calibrée minimale décrivant le courant T relativement à f. Elle est pure et $f|_{P_f^T}$ est une immersion par morceaux.

Par exemple, lorsque T est le courant δ_P associé à une partie squelettique p-calibré P de X, on a $P_f^T = (|P| \cap V)^{(f)}$ pour tout ouvert V et toute carte tropicale f sur V.

Soit f une carte tropicale sur un ouvert V de X et soit U une partie ouverte de X. Alors $P_f^T \cap U$ décrit T relativement à $f|_U$ (lemme lemm.courant-paralineaire-restriction) et vérifie les conditions de l'assertion b) de la proposition 7.5.8 ; c'est donc $P_{f|_U}^T$.

En particulier, P_f^T est contenu dans le support de T, car le polyèdre vide représente le courant nul.

Si f et g sont des cartes tropicales sur un ouvert V de X, la conclusion de la proposition 7.5.7 se récrit $(P_f^T)^{(g)} = (P_g^T)^{(f)}$.

Lemme 7.5.10. — *Soit X un espace tropical de niveau n, localement différentiellement séparé, et soit T un courant squelettique de bidimension (p,p) sur X. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le courant T est faiblement positif ;*

(ii) *Le courant T est positif ;*

(iii) *Le courant T est fortement positif ;*

(iv) *Pour toute carte tropicale sur X définie sur un ouvert U, le calibrage de P_f^T est positif.*

En particulier, les trois notions de positivité des courants coïncident sur les courants squelettiques.

Démonstration. — Les implications (iii)⇒(ii) et (ii)⇒(i) sont évidentes.

Démontrons l'implication (i)⇒(iv). Supposons que T est faiblement positif. Soit f une carte tropicale définie sur un ouvert U de X. Pour démontrer que le calibrage de P_f^T est positif, il suffit de démontrer que sa restriction à toute f-cellule C, compacte et de dimension p, de P_f^T est positif. On peut également supposer que le calibrage de C est standard, de la forme $f^*\mu$, où μ est un p-vecteur volume sur $\langle f(C)\rangle$. Par définition de P_f^T, μ n'est pas nul. Soit $x \in \mathring{C}$; observons que $\mathring{C}$ est ouvert dans P_f^T. Soit ρ une fonction lisse, positive, sur X égale à 1 au voisinage de x et dont le support ne rencontre P_f^T qu'en $\mathring{C}$. Soit α une (p,p)-forme positive standard, non nulle, sur $f(C)$, et soit ω le prolongement par 0 de $\rho f^*\alpha$. Par définition de P_f^T, on a

$$\langle T, \rho\omega\rangle = \int_{P_f^T} \rho\omega|_{P_f^T} = \int_C \rho\langle\alpha,\mu\rangle.$$

Puisque cette expression est positive et non nulle, on a $\langle\alpha,\mu\rangle > 0$. Cela prouve que le vecteur-volume μ est positif.

Supposons (iv) et démontrons que le courant T est fortement positif. Soit $\omega \in \mathscr{A}_{\mathrm{c}}^{(p,p)}(X)$ une forme lisse à support compact sur X. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert fini d'un voisinage du support de ω sur les membres desquels ω est tropicale. Pour tout i, soit f_i une carte tropicale sur U_i qui tropicalise $\omega|_{U_i}$. Soit (ρ_i) une partition de l'unité lisse au voisinage de $\mathrm{supp}(\omega)$ subordonnée au recouvrement (U_i). Puisque $\sum\rho_i$ est égale à 1 au voisinage de $\mathrm{supp}(\omega)$, on a $\omega = \sum_i \rho_i\omega$. Alors,

$$\langle T,\omega\rangle = \sum_i \langle T,\rho_i\omega\rangle = \sum_i \int_{P_{f_i}^T} \rho_i\omega|_{P_{f_i}^T}.$$

Si ω est faiblement positive, alors $\langle \omega|_{P_{f_i}^T}, \mu_{P_{f_i}^T}\rangle$ est une mesure positive sur $P_{f_i}^T$. Il en résulte que $\langle T,\omega\rangle$ est positif, ce qu'il fallait démontrer. □

Proposition 7.5.11. — *Soit X un espace tropical de niveau n, localement différentiellement séparé, et soit p un entier naturel. Pour toute carte tropicale f sur un ouvert V de X, donnons-nous une partie squelettique p-calibrée fermée pure P_f. Supposons que la famille (P_f) vérifie les conditions suivantes :*

a) *Pour tout f, l'application paralinéaire $f|_{P_f}$ est une immersion par morceaux ;*

b) *On a $P_{f|W} = P_f \cap W$ pour toute carte tropicale f sur un ouvert V de X et tout ouvert W contenu dans V ;*

c) *S'il existe une application affine q tel que $f = q\circ g$, alors $P_f = P_g^{(f)}$.*

Alors, il existe un unique courant squelettique T sur X tel que P_f décrive T relativement à f, pour toute carte tropicale f sur un ouvert de X.

Démonstration. — Soit tout d'abord un ouvert V de X, des cartes tropicales f, f' sur V, des formes ω,ω', respectivement f-tropicales et f'-tropicales, des fonctions lisses ρ,ρ' à support compact sur V telles que $\rho\omega = \rho'\omega'$. En posant $g = (f,f')$, on voit que

$$\int_{P_f} \rho\omega|_{P_f} = \int_{P_g} \rho\omega|_{P_g} = \int_{P_g} \rho'\omega'|_{P_g} = \int_{P_{f'}} \rho'\omega'|_{P_{f'}},$$

en vertu de l'hypothèse (3).

L'unicité d'un courant T vérifiant les propriétés requises résulte de la remarque 7.2.5. Établissons son existence.

Soit ω une forme lisse à support compact sur X. Par définition, il existe un recouvrement fini (U_i) du support de ω par des parties ouvertes de X sur lesquelles ω est tropicale. Soit (ρ_i) une famille de fonctions lisses à support compact dont la somme $\rho = \sum \rho_i$ vaut 1 au voisinage du support de ω (de sorte que $\omega = \rho\omega$) et telles que pour tout i, le support de ω_i soit contenu dans U_i. Pour tout i, soit f_i un moment sur U_i qui tropicalise $\omega|_{U_i}$. On veut poser

$$\langle T, \omega\rangle = \sum_i \int_{P_{f_i}} \rho_i\omega|_{U_i}.$$

Vérifions d'abord que cette expression ne dépend pas du choix de la famille (U_i, f_i, ρ_i). Soit donc $(V_j, g_j, \theta_j)_j$ une autre famille finie vérifiant les mêmes propriétés ; posons $\theta = \sum_j \theta_j$. Pour tout couple (i, j), la fonction $\rho_i\theta_j$ est lisse et son support est une partie compacte de $U_i \cap V_j$. Puisque $\omega = \theta\omega = \sum_j \theta_j\omega$, on a

$$\sum_i \int_{P_{f_i}} \rho_i\omega|_{U_i} = \sum_{i,j} \int_{P_{f_i}} \rho_i\theta_j\omega|_{U_i}.$$

De même, on a

$$\sum_j \int_{P_{g_j}} \theta_j\omega|_{V_j} = \sum_{i,j} \int_{P_{g_j}} \rho_i\theta_j\omega|_{V_j}.$$

Fixons un couple (i, j). Par hypothèse, $P_{f_i} \cap V_j = P_{f_i|_{U_i\cap V_j}}$ et $P_{g_j} \cap U_i = P_{g_j|_{U_i\cap V_j}}$; comme $\rho_i\theta_j$ est à support compact contenu dans $U_i \cap V_j$, on a donc

$$\int_{P_{f_i}} \rho_i\theta_j\omega|_{U_i} = \int_{P_{f_i|_{U_i\cap V_j}}} \rho_i\theta_j\omega|_{U_i\cap V_j}$$

et

$$\int_{P_{g_j}} \rho_i\theta_j\omega|_{V_j} = \int_{P_{g_j|_{U_i\cap V_j}}} \rho_i\theta_j\omega|_{U_i\cap V_j}.$$

Soit h le moment (f_i, g_j) sur $U_i \cap V_j$. La troisième propriété des parties P_f entraîne alors

$$\int_{P_{f_i|_{U_i\cap V_j}}} \rho_i\theta_j\omega|_{U_i\cap V_j} = \int_{P_h} \rho_i\theta_j\omega|_{U_i\cap V_j} = \int_{P_{g_j|_{U_i\cap V_j}}} \rho_i\theta_j\omega|_{U_i\cap V_j}.$$

Cela entraîne l'égalité

$$\sum_i \int_{P_{f_i}} \rho_i\omega|_{U_i} = \sum_j \int_{P_{g_j}} \theta_j\omega|_{V_j}$$

et légitime la définition de $\langle T, \omega\rangle$.

Il est immédiat que l'application $\omega \mapsto \langle T, \omega\rangle$ est linéaire.

Pour démontrer que c'est un courant, on applique le critère du lemme 7.1.3. Soit U un ouvert de X, soit f une carte tropicale sur U et soit ρ une fonction lisse sur X dont le support est compact et contenu dans U, Pour toute forme lisse ω sur X, tropicalisée par f sur U, on a

$$\langle T, \rho\omega\rangle = \int_{P_f} \rho\omega|_{P_f}.$$

Le membre de droite provient de la forme linéaire $\alpha \mapsto \int_{P_f} \rho|_{P_f}\alpha$ sur $\mathscr{A}^{p,p}(P_f)$ qui est continue pour la topologie $\mathscr{C}^0$. Cela prouve que T est un courant, et même un courant d'ordre 0, et que c'est un courant paralinéaire décrit par P_f relativement à f. □

Corollaire 7.5.12. — *Soit X un espace tropical de niveau n, localement différentiellement séparé, et soit p un entier naturel. Les courants squelettiques de bidimension (p,p) sur X forment un treillis.*

Démonstration. — Soit S et T des courants squelettiques de bidimension (p,p) sur X. Pour toute carte tropicale f sur un ouvert de X, posons $P_f^{S\wedge T} = P_f^S \wedge P_f^T$ et $P_f^{S\vee T} = P_f^S \vee P_g^T$ (lemme 5.1.9). Les familles de parties squelettiques p-calibrées fermées $(P_f^{S\wedge T})_f$ et $(P_f^{S\vee T})_f$ définissent des courants squelettiques $S\wedge T$ et $S\vee T$ sur X tels que $S\vee T = \sup(S,T)$ et $S\wedge T = \inf(S,T)$. □

7.5.13. — En particulier, tout courant squelettique T sur X se décompose comme la différence $T^+ - T^-$ des deux courants squelettiques positifs $T^+ = \sup(0,T)$ et $T^- = \sup(0,-T)$.

Remarque 7.5.14. — Soit T un courant squelettique de bidimension (p,p) sur X et soit ω une forme lisse sur un ouvert U de X, tropicalisée par une carte tropicale f sur U. Comme T est différence de deux courants squelettiques positifs, on dispose d'une mesure μ_ω^T sur U. Par construction, elle applique toute fonction ρ, lisse à support compact sur U, sur $\langle T, \rho\omega\rangle$. Par définition d'un courant squelettique, on a donc

$$\mu_\omega^T(\rho) = \int_{P_f^T} \rho\omega|_{P_f^T}.$$

Cette formule s'étend alors au cas où ρ est borélienne.

Proposition 7.5.15. — *Soit T un courant squelettique de dimension p sur X, soit f une carte tropicale sur un ouvert U de X, soit q un entier naturel tel que $q \leqslant p$, soit ω une forme de type (q,p) sur U, f-tropicale, et soit α une forme de type $(p-q,0)$ sur U telle que $\alpha\wedge\omega$ soit à support compact sur U. Alors on a*

$$\langle T, \alpha\wedge\omega\rangle = \int_{P_f^T} \alpha\wedge\omega.$$

On en déduit une formule analogue pour des formes ω de type (p,q) et des formes α de type $(0,p-q)$.

Démonstration. — Soit (U_i) une famille finie d'ouverts de U recouvrant le support de $\alpha\wedge\omega$ et telle que pour tout i, la forme α soit tropicalisée sur U_i par une carte tropicale g_i sur U_i. Soit (θ_i) une partition de l'unité au voisinage du support de $\alpha\wedge\omega$ qui est subordonnée au recouvrement (U_i). On a

$$\langle T, \alpha\wedge\omega\rangle = \sum_i \langle T, \theta_i\alpha\wedge\omega\rangle.$$

Cela ramène au cas où α est tropicalisée par une carte g et où la famille (U_i) est réduite à l'ouvert U. Par définition d'un courant squelettique, on a alors

$$\langle T, \alpha\wedge\omega\rangle = \int_{P_{(f,g)}^T} \alpha\wedge\omega.$$

Comme ω est de type (q,p), sa restriction à toute cellule de $P^T_{(f,g)}$ qui est contractée par f est nulle. Ainsi,

$$\langle T, \alpha \wedge \omega \rangle = \int_{(P^T_{(f,g)})^{(f)}} \alpha \wedge \omega.$$

On a vu au §7.5.9 que la partie squelettique p-calibrée $(P^T_{(f,g)})^{(f)}$ est égale à $(P^T_f)^{(f,g)}$, c'est-à-dire à P^T_f puisque, f étant une immersion par morceaux sur P^T_f, l'application (f,g) en est également une. Ainsi,

$$\langle T, \rho\alpha \wedge \omega \rangle = \int_{P^T_f} \rho\alpha \wedge \omega,$$

d'où la proposition. □

§ 7.6. COURANTS SQUELETTIQUES ET G-TOPOLOGIE

Comme les courants squelettiques sont différence de courants positifs (§7.5.13), il résulte du paragraphe 7.4 que leur action sur les formes s'étend aux G-formes (à support compact) sur des domaines (non nécessairement ouverts) de X. Le but de ce paragraphe est de donner une description squelettique de cette extension et de montrer que les courants squelettiques ainsi étendus forment un G-faisceau.

Lemme 7.6.1. — *Soit X un espace tropical de niveau n, localement différentiellement séparé. Soit T un courant squelettique de dimension p sur X. Soit f et g deux cartes tropicales sur X et soit V un domaine de X sur lequel f et g coïncident. Alors $|P^T_f \cap V| = |P^T_g \cap V|$.*

Démonstration. — Par définition, $|P^T_f \cap V|$ est la réunion des p-cellules fermées de P^T_f qui sont contenues dans V et dont le calibrage est partout non nul. Soit C une telle cellule ; prouvons qu'elle est contenue dans P^T_g, avec même calibrage. Comme $C \subseteq P^T_f$, $f|_C$ est une immersion par morceaux ; puisque $C \subseteq V$, $g|_C = f|_C$ donc $g|_C$ est une immersion par morceaux. Par suite, $C \subseteq (P^T_f)^{(g)}$, lequel est égal à $(P^T_g)^{(f)}$ comme partie squelettique p-calibrée (proposition 7.5.7) ; en particulier, $C \subseteq P^T_g$, avec même calibrage. Cela prouve l'inclusion $|P^T_f \cap V| \subset |P^T_g \cap V|$ de parties squelettiques p-calibrées. Par symétrie, on a égalité. □

Dans toute la suite de ce paragraphe, nous supposons que l'espace tropical X est localement différentiellement séparé et décent (définition 6.3.1).

Proposition 7.6.2. — *Soit T un courant squelettique de dimension p sur X. Il existe une unique application $(V,f) \mapsto P^T_f$, qui, à tout domaine V de X et toute carte G-tropicale f sur V associe une partie squelettique p-calibrée sur V, vérifiant les conditions suivantes :*

(i) *Si U est un ouvert de X et f une carte tropicale sur U, alors P^T_f est la plus petite partie squelettique p-calibrée définissant T relativement à f, c'est-à-dire celle déjà noté ainsi ;*

(ii) *Si V est un domaine de X, f une carte G-tropicale sur V et W un domaine de V, alors $P^T_{f|_W} = |P^T_f \cap W|$.*

De plus, pour toute carte G-tropicale f sur un domaine V de X, la partie squelettique p-calibrée P_f^T est pure et la restriction de f à P_f^T est une immersion par morceaux.

Démonstration. — Démontrons l'unicité d'une telle application.

On démontre d'abord que les conditions imposées déterminent P_f^T lorsque V est un domaine de X et f une carte tropicale sur V, et entraînent que P_f^T est une partie squelettique sur laquelle f est une immersion par morceaux.

Il suffit de démontrer les autres propriétés localement sur V. Soit x un point de V. Comme X est décent, il existe un voisinage ouvert U de x dans X et un carte tropicale g sur U tel que $f|_{U\cap V} = g|_{U\cap V}$. La condition (i) impose $P^T_{g|_{U\cap V}} = |P_g^T \cap (U \cap V)|$, où P_g^T est la partie squelettique p-calibrée décrivant le courant T relativement à la carte tropicale g sur l'*ouvert* U de X. La condition (ii) appliquée à V et $U \cap V$ et à la carte tropicale f impose $P_{f|^T_{U\cap V}} = |P_f^T \cap (U \cap V)|$; appliquée à U et $U \cap V$ et à la carte g, elle impose $P_{g|^T_{U\cap V}} = |P_g^T \cap (U \cap V)|$. Comme $U \cap V$ est un ouvert de V, on a $|P_f^T \cap (U \cap V)| = |P_f^T| \cap (U \cap V)$; la condition (ii) appliquée à V, V et à la carte f entraîne que $P_f^T = |P_f^T|$, si bien que $|P_f^T \cap (U \cap V)| = P_f^T \cap (U \cap V)$. Ainsi, les conditions de la proposition entraînent que

$$P_f^T \cap (U \cap V) = |P_g^T \cap (U \cap V)|,$$

donc est déterminé sur $U \cap V$.

Comme la restriction de g à P_g^T est une immersion par morceaux et que $f|_{U\cap V} = g|_{U\cap V}$, cette formule montre également que la restriction de f à $P_f^T \cap (U \cap V)$ est une immersion par morceaux.

Démontrons maintenant que les conditions imposées déterminent P_f^T lorsque f est une carte G-tropicale sur un domaine V de X et entraînent que P_f^T est pure, et que $f|_{P_f^T}$ est une immersion par morceaux.

La relation (ii) appliquée à $W = V$ entraîne que P_f^T est pure.

Soit (V_i) un G-recouvrement de V qui tropicalise f. Les parties $P_i = P^T_{f|_{V_i}} = |P_f^T \cap V_i|$ sont déterminées par ce qui précède ; d'après la remarque 5.1.7, cela détermine P_f^T. De plus, la restriction de f à $P_f^T \cap V_i$ est une immersion par morceaux pour tout i, donc la restriction de f à P_f^T est une immersion par morceaux.

Établissons enfin l'existence d'une telle application. Soit (V, f) une carte G-tropicale. Choisissons un G-recouvrement (V_i) de V tropicalisant f. Pour tout i, choisissons une famille $(U_j, g_j)_{j\in J_i}$ où U_j est un ouvert de X et g_j une carte tropicale sur U_j tels que $g_j|_{U_j\cap V_i} = f|_{U_j\cap V_i}$, et telle que les U_j recouvrent V_i. L'existence d'une telle famille découle de l'hypothèse faite sur X. Quitte à remplacer les V_i par $V_i \cap U_j$, on suppose que (V_i) et (U_j) sont indexées par le même ensemble et que $V_i \subset U_i$ pour tout i.

Pour tout i, définissons une partie squelettique p-calibrée pure de V_i par la formule $P_i = |P_{g_i}^T \cap (U_i \cap V)|$. Vérifions qu'elles se recollent au sens des parties squelettiques p-calibrées pures, c'est-à-dire que pour tous i, j, on a $|P_i \cap V_j| = |P_j \cap V_i|$, soit encore

$$|P_{g_i}^T \cap (V_i \cap V_j)| = |P_{g_j}^T \cap (V_i \cap V_j)|.$$

Sur le domaine analytique $V_i \cap V_j$ de $U_i \cap U_j$, les cartes g_i et g_j coïncident avec f ; l'égalité voulue découle donc du lemme 7.6.1. Soit P la partie squelettique p-calibrée pure obtenue par recollement des P_i (remarque 5.1.7). Vérifions qu'elle ne dépend pas de la famille (V_i, U_i, g_i) : si (V_j', U_j', g_j') en est une autre, définissant une partie squelettique

p-calibrée P', la propriété de recollement appliquée à la réunion de ces deux familles entraîne que $P = P'$. Notons-le P_f^T.

Il reste à vérifier les propriétés (i) et (ii).

La propriété (i) est obtenue via la famille (V, U, f).

La propriété (ii) est obtenue en conservant la même famille (V_i, U_i, g_i) : La partie squelettique p-calibrée pure $P_{f|_W^T}$ est obtenue par recollement des $|P_{g_i}^T \cap (U_i \cap W)|$ qui est égal à $||P_{g_i}^T \cap (U_i \cap V)| \cap W|$, si bien que leur recollement est égal à $|P_f^T \cap W|$. □

Proposition 7.6.3. — *Soit T un courant squelettique de dimension p sur X, soit f une carte G-tropicale sur un domaine V de X, soit ω une G-forme sur V qui est tropicalisée par f et soit ρ une fonction G-lisse sur V telles que $\rho\omega$ soit à support compact dans V. Alors*

$$\langle T, \rho\omega\rangle = \int_{P_f^T} \rho\omega|_{P_f^T}.$$

Démonstration. — Soit (V_i) une famille finie de domaines compacts de V recouvrant le support de $\rho\omega$ et sur lesquels ρ est tropicale et f est affine. Pour toute partie finie non vide d'indices I, posons $V_I = \bigcap_{i\in I} V_i$. Par construction,

$$\langle T, \rho\omega\rangle = \sum_{I\neq\varnothing} (-1)^{\mathrm{Card}(I)-1} \mu_\omega^T(\rho \mathbf{1}_{V_I})$$

et

$$\int_{P_f^T} \rho|_{P_f^T} = \sum_{I\neq\varnothing} (-1)^{\mathrm{Card}(I)-1} \int_{P_f^T\cap V_I} \rho\omega|_{P_f^T\cap V_I}.$$

Il suffit de comparer ces deux expressions terme à terme, ce qui permet de supposer que V est compact, que f est affine et que ρ est lisse sur V. Il existe une forme α' sur $f(V)$ telle que $\omega = f^*\alpha'$; comme $f(V)$ est compact, cette forme lisse s'étend en une forme lisse α sur tout le codomaine de f. Choisissons une famille finie $(U_j, g_j)_{j\in J}$ recouvrant V, où U_j est un ouvert de X et g_j une carte tropicale sur U_j qui prolonge $f|_{V\cap U_j}$, une fonction lisse ρ_j sur U_j qui prolonge $\rho|_{V\cap U_j}$; pour tout j, la forme lisse $g_j^*\alpha$ sur U_j prolonge $\omega|_{V\cap U_j}$. Soit (θ_j) une partition de l'unité au voisinage de V subordonnée au recouvrement (U_j). Comme le support de $\rho\omega$ est contenu dans V, on a $\rho\omega = \sum_j \theta_j\rho\omega$, d'où

$$\langle T, \rho\omega\rangle = \sum_{j\in J} \langle T, \theta_j\rho\omega\rangle$$

et

$$\int_{P_f^T} \rho\omega|_{P_f^T} = \sum_{j\in J} \int_{P_f^T} \theta_j\rho\omega|_{P_f^T}.$$

Là encore, il suffit de comparer ces expressions terme à terme, ce qui permet de supposer que f et ρ sont les restrictions à V d'une carte tropicale g définie sur X et d'une fonction lisse (encore notée ρ) sur X. Alors, ω est la restriction à V de la forme lisse $g^*\alpha$ sur X. Par définition de l'extension d'un courant positif aux G-formes, il s'agit de démontrer que $\mu_{g^*\alpha}^T(\rho\mathbf{1}_V) = \int_{P_f^T} \rho\omega|_{P_f^T}$. Par définition d'un courant squelettique, pour toute fonction lisse u à support compact sur X, on a

$$\mu_{g^*\alpha}^T(u) = \langle T, ug^*\alpha\rangle = \int_{P_g^T} ug^*\alpha|_{P_g^T}.$$

Cette formule s'étend donc à toute fonction continue à support compact, et même à toute fonction intégrable. En particulier,

$$\mu^T_{g^*\alpha}(\rho \mathbf{1}_V) = \int_{P^T_g} \rho \mathbf{1}_V g^*\alpha|_{P^T_g}.$$

D'après la proposition 7.6.2, on a $|P^T_g \cap V| = P^T_f$, si bien que

$$\mu^T_\omega(\rho) = \int_{P^T_f} \rho f^*\alpha|_{P^T_f},$$

comme il fallait démontrer □

Proposition 7.6.4. — *Soit T un courant squelettique de dimension p sur X Soit f, g des cartes G-tropicales sur X. On a l'égalité de parties squelettiques p-calibrées pures :* $(P^T_f)^{(g)} = (P^T_g)^{(f)}$.

Démonstration. — On peut prouver cette relation G-localement. Il suffit donc de démontrer que pour tout domaine V de X, tout ouvert U de X dans lequel V est fermé et tel que $f|_V$ et $g|_V$ sont les restrictions de cartes tropicales f' et g' sur U, on a

$$|(P^T_f)^{(g)} \cap V| = |(P^T_g)^{((f)} \cap V|.$$

Par construction, $|P^T_f \cap V| = |P^T_{f'} \cap V|$. Alors,

$$|(P^T_f)^{(g)} \cap V| = |P^T_f \cap V|^{(g)} = |P^T_{f'} \cap V|^{(g)} = |(P^T_{f'})^{(g')} \cap V|.$$

De même,

$$|(P^T_g)^{(f)} \cap V| = |(P^T_{g'})^{(f')} \cap V|.$$

D'après la proposition 7.5.7 appliquée aux cartes tropicales f' et g' sur U, on a $(P^T_{g'})^{(f')} = (P^T_{f'})^{(g')}$; la proposition en résulte. □

Remarque 7.6.5. — Inversement, considérons une famille (P_f) de parties squelettiques p-calibrées pures, indexée par les cartes G-tropicales de X et satisfaisant les conditions suivantes :

(i) Pour toute carte G-tropicale f, la restriction de f à P_f est une immersion par morceaux.

(ii) Si V est un domaine de X, f une carte G-tropicale sur V et W un domaine de V, alors $P_{f|_W} = |P_f \cap W|$.

(iii) S'il existe une application affine q telle que $f = q \circ g$, alors $P_f = P^{(f)}_g$.

D'après la remarque 7.5.11, il existe un unique courant squelettique T sur X tel que $P^T_f = P_f$ pour toute carte tropicale f définie sur un ouvert de X.

Il résulte de la construction que l'on a $P^T_f = P_f$ pour toute carte G-tropicale sur un domaine V de X.

7.6.6. — Soit T un courant squelettique de dimension p sur X. Soit V un domaine de X ; observons que V est décent et localement différentiellement séparé. La famille des parties squelettiques p-calibrées (P_f^T), lorsque f parcourt les cartes G-tropicales définies sur un domaine de V vérifie les conditions du paragraphe 7.6.5. Elle définit donc une forme linéaire sur les G-formes de V dont la restriction aux formes est un courant squelettique que nous noterons $T|_V$.

On définit ainsi un G-préfaisceau sur X qui prolonge le faisceau des courants squelettiques.

Lemme 7.6.7. — *Ce G-préfaisceau est un G-faisceau.*

Démonstration. — Soit V un domaine de X et soit $(V_i)_{i\in I}$ un G-recouvrement de V ; pour tout i, soit T_i un courant squelettique de dimension p sur V_i et supposons que l'on a $T_i|_{V_i\cap V_j} = T_j|_{V_i\cap V_j}$ pour tous i, j. Il s'agit de démontrer qu'il existe un unique courant squelettique T de dimension p sur V tel que $T_i = T|_{V_i}$ pour tout i. Quitte à remplacer X par V, on suppose que $V = X$ pour alléger les notations.

Suivant la remarque 7.5.11, il s'agit de définir des parties squelettiques p-calibrées P_f indexées par les cartes tropicales f définies sur un ouvert U de X vérfiant les conditions de cette remarque.

Fixons U et f. On définit la partie squelettique calibrée P_f de U G-localement par rapport au G-recouvrement $(V_i\cap U)$. Soit i, j des indices dans I ; par définition du courant $T_i|_{U\cap V_i\cap V_j}$, on a

$$P_f^{T_i|_{U\cap V_i\cap V_j}} = |P_f^{T_i} \cap (U \cap V_i \cap V_j)|.$$

Comme les courants T_i et T_j coïncident sur $V_i \cap V_j$, on a

$$P_f^{T_i|_{U\cap V_i\cap V_j}} = P_f^{T_j|_{U\cap V_i\cap V_j}}.$$

Enfin, on a

$$P_f^{T_j|_{U\cap V_i\cap V_j}} = |P_f^{T_j} \cap (U \cap V_i \cap V_j)|.$$

Par suite, on a l'égalité

$$|P_f^{T_i} \cap (U \cap V_i \cap V_j)| = |P_f^{T_j} \cap (U \cap V_i \cap V_j)|.$$

Par recollement (remarque 5.1.7, on en déduit qu'il existe une unique partie squelettique p-calibrée P_f sur U telle que pour tout $i \in I$, on ait

$$|P_f \cap (U \cap V_i)| = |P_f^{T_i} \cap (U \cap V_i)|.$$

Il reste à démontrer que ces parties squelettiques p-calibrées P_f vérifient les conditions de la remarque 7.5.11 :

a) L'application paralinéaire f est une immersion par morceaux sur P_f car c'en est-une sur chaque $P^f \cap V_i \subset P_i$;

b) Si V est un ouvert de U, on a $P_{f|_V} = P_f \cap V$. Il suffit de le vérifier sur chaque V_i, où cela résulte de la condition correspondante pour $P_f^{T_i}$.

c) Si q est une application affine telle que $f = q \circ g$, la condition $|P_f| = |P_g|^{(f)}$ se vérifie G-localement en restriction à chaque V_i, et elle résulte alors de la condition correspondante pour $P_f^{T_i}$.

Pour conclure la démonstration du lemme, le courant squelettique T associé à ces parties squelettiques p-calibrées vérifie $T|_{V_i} = T_i$ pour tout i, par construction, et c'est le seul. □

Proposition 7.6.8. — *Soit T un courant squelettique de dimension p sur X, soit f une carte G-tropicale sur un domaine U de X, soit q un entier naturel tel que $q \leqslant p$, soit ω une G-forme G-lisse de type (q,p) sur U, f-tropicale, soit α une G-forme G-forme de type $(p-q,0)$ telle que $\alpha \wedge \omega$ soit à support compact sur U. Alors on a*

$$\langle T, \alpha \wedge \omega \rangle = \int_{P_f^T} \alpha \wedge \omega.$$

On en déduit une formule analogue pour des G-formes ω de type (p,q) et des G-formes α de type $(0,p-q)$.

Démonstration. — Par construction, $\alpha \wedge \omega$ est une G-forme à support compact sur X ; reprenons la construction de $\langle T, \alpha \wedge \omega \rangle$. Soit (V_i) une famille finie de domaines compacts recouvrant le support de $\alpha \wedge \omega$ et telle que pour tout i, la forme $\alpha|_{V_i}$ soit G-tropicalisée par une carte G-tropicale g_i. Compte tenu des définitions, on se ramène à supposer que $U = V_i$ et que α est G-tropicalisée par une carte G-tropicale g. Alors, on a

$$\langle T, \alpha \wedge \omega \rangle = \int_{P_{(f,g)}^T} \alpha \wedge \omega.$$

Comme ω est de type (q,p), sa restriction à toute cellule de $P_{(f,g)}^T$ qui est contractée par f est nulle. Ainsi,

$$\langle T, \alpha \wedge \omega \rangle = \int_{(P_{(f,g)}^T)^{(f)}} \alpha \wedge \omega.$$

D'après la proposition 7.6.2, la partie squelettique p-calibrée $(P_{(f,g)}^T)^{(f)}$ est égale à $(P_f^T)^{(f,g)}$, c'est-à-dire à P_f^T puisque, f étant une immersion par morceaux sur P_f^T, l'application (f,g) en est également une. Ainsi,

$$\langle T, \alpha \wedge \omega \rangle = \int_{P_f^T} \alpha \wedge \omega,$$

d'où la proposition. □

Proposition 7.6.9. — *Soit T un courant squelettique de dimension p sur X et soit F une partie fermée de X. Soit (U_i) un G-recouvrement de X par des domaines ; on fait l'une des deux hypothèses suivantes :*

(i) *Le recouvrement est localement fini et les U_i sont fermés ;*
(ii) *La partie F possède un voisinage ouvert paracompact dans X.*

Pour tout $i \in I$, soit f_i une carte G-tropicale sur U_i. Il existe alors une partie squelettique p-calibrée P pure de X telle que pour tout entier r tel que $0 \leqslant r \leqslant p$, toute G-forme ω de type $(p-r,p)$ sur X telle que $\omega|_{U_i}$ soit f_i-tropicale pour tout i, et toute G-forme ρ sur X telle que $\mathrm{supp}(\rho \wedge \omega) \subset F$, *on ait $\langle T, \rho \wedge \omega \rangle = \int_P \rho \wedge \omega$.*

Par définition, toute partie compacte d'un espace G-tropical possède une base de voisinages ouverts dénombrables à l'infini, de sorte que la proposition s'applique lorsque F est compacte.

Démonstration. — Commençons par traiter le cas où (U_i) est un G-recouvrement localement fini de F par des domaines fermés et soit U leur réunion. Pour tout ensemble fini non vide I d'indices, on a posé $U_I = \bigcap_{i \in I} U_i$ et notons f_I une carte G-tropicale sur U_I qui est plus fine que chacune des $f_i|_{U_I}$ pour $i \in I$ (par exemple leur concaténation), de

sorte que pour tout $i \in I$, toute forme sur U_I qui est f_i-tropicale est f_I-tropicale. Choisissons pour partie squelettique P la réunion (localement finie) des parties squelettiques fermées $P^T_{f_I}$. Pour tout I, le calibrage de $P^T_{f_I}$ induit un calibrage de P, nul hors de $P^T_{f_I}$; munissons P de la somme alternée (localement finie) de ces calibrages, celui de $P^T_{f_I}$ étant multiplié par $(-1)^{\mathrm{Card}(I)-1}$. Démontrons que $|P|$ convient.

Considérons donc une G-forme ω de type $(p-r,p)$ telle que $\omega|_{U_i}$ soit G-tropicale pour tout i, et une G-forme ρ de type (r,p) telles que $\mathrm{supp}(\rho\wedge\omega)$ soit compact et contenu dans F. En écrivant l'égalité de G-formes à coefficients tropicalement mesurables

$$\rho\wedge\omega = \mathbf{1}_U\rho\wedge\omega = \sum_{\varnothing\neq I}(-1)^{\mathrm{Card}(I)-1}\mathbf{1}_{U_I}\rho\wedge\omega,$$

il vient

$$\langle T,\rho\wedge\omega\rangle = \sum_{\varnothing\neq I}(-1)^{\mathrm{Card}(I)-1}\langle T|_{U_I},\rho\wedge\omega|_{U_I}\rangle.$$

Pour tout I, la G-forme $\omega|_{U_I}$ est f_I-tropicale et est de type (q,p), la proposition 7.5.15 entraîne que l'on a

$$\langle T,\rho\wedge\omega\rangle = \sum_{\varnothing\neq I}(-1)^{\mathrm{Card}(I)-1}\int_{P^T_{f_I}}\rho\wedge\omega.$$

On a donc $\langle T,\rho\wedge\omega\rangle = \int_P \rho\wedge\omega$, d'où la proposition dans le cas considéré.

Démontrons maintenant la proposition sous l'hypothèse que F possède un voisinage ouvert paracompact U. Quitte à considérer le courant paralinéaire $T|_U$ sur U, on peut supposer que X est paracompact. Pour tout $x\in F$, il existe un voisinage domanial compact W_x de x dans X et un ensemble fini d'indices I_x tel que $x\in U_i$ et tel que $W_x\cap U_i$ soit fermé dans W_x pour tout $i\in I_x$, et tel que la réunion des U_i pour $i\in I_x$ contienne W_x.

D'après le lemme A.1.5, il existe un recouvrement localement fini $(W_j)_{j\in J}$ de X par des domaines compacts de X, qui raffine le recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$. et tel que les intérieurs $\mathring{Z}_j$ recouvrent X. Pour tout $j\in J$, on choisit un indice i tel que $W_j\subset U_i$ et on note g_j la carte G-tropicale $f_i|_{W_j}$.

On est ainsi ramené au cas où l'hypothèse (i) est satisfaite, ce qui conclut la démonstration. □

§ 7.7. CALCUL DIFFÉRENTIEL SUR LES COURANTS

Soit X un espace tropical de niveau n.

7.7.1. — L'application linéaire d' de $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathrm{c}}(X)$ dans $\mathscr{A}^{p+1,q}_{\mathrm{c}}(X)$ est continue (prop. 3.7.13). On note b' sa transposée de $\mathscr{D}_{p+1,q}(X)$ dans $\mathscr{D}_{p,q}(X)$. Si T est un courant d'ordre $\leqslant r$, alors $\mathrm{b}'T$ est un courant d'ordre $\leqslant r+1$.

On définit de même $\mathrm{b}''\colon \mathscr{D}_{p,q+1}(X)\to\mathscr{D}_{p,q}(X)$ comme la transposée de l'application d''.

Il résulte de la définition de la topologie des espaces de courants que ces applications linéaires b' et b'' sont continues.

Par dualité, la relation $\mathrm{d}''\omega = \mathrm{J}\,\mathrm{d}'\,\mathrm{J}^{-1}\omega$ entraîne l'égalité

$$\mathrm{b}'' = \mathrm{J}\mathrm{b}'\mathrm{J}^{-1}. \tag{7.7.1.1}$$

On a aussi les relations $(\mathrm{b}')^2 = 0$, $(\mathrm{b}'')^2 = 0$, et $\mathrm{b}'\mathrm{b}'' = -\mathrm{b}''\mathrm{b}'$.

7.7.2. — Soit ω une G-forme de type (p, q) sur X et soit $[\omega]$ le courant de bidegré (p, q) qui lui est associé. Pour toute forme $\alpha \in \mathscr{A}_{\mathrm{c}}^{n-p-1,n-q}(X)$, on a

$$\mathrm{d}'(\omega \wedge \alpha) = \mathrm{d}'\,\omega \wedge \alpha + (-1)^{p+q}\omega \wedge \mathrm{d}'\,\alpha.$$

La formule de Stokes (proposition 5.11.1) entraîne alors l'égalité

$$\int_X^{\partial} \omega \wedge \alpha = \int_X \mathrm{d}'(\omega \wedge \alpha) = \int_X \mathrm{d}'\,\omega \wedge \alpha + (-1)^{p+q} \int_X \omega \wedge \mathrm{d}'\,\alpha,$$

autrement dit

$$[\mathrm{d}'\,\omega] = [\omega]^{\partial} + (-1)^{p+q+1} b'[\omega].$$

Si l'on définit l'opérateur d' de $\mathscr{D}^{p,q}(X)$ dans $\mathscr{D}^{p+1,q}$ par

$$\mathrm{d}' = (-1)^{p+q+1}\mathrm{b}', \tag{7.7.2.1}$$

il vient alors

$$\mathrm{d}'\,[\omega] = [\mathrm{d}'\,\omega] - [\omega]^{\partial}. \tag{7.7.2.2}$$

Lorsque X est sans bord et ω est une *forme* sur X, le courant $[\omega]^{\partial}$ est nul, et l'on a

$$\mathrm{d}'\,[\omega] = [\mathrm{d}'\,\omega]. \tag{7.7.2.3}$$

7.7.3. — De même, on pose

$$\mathrm{d}'' = (-1)^{p+q+1}\mathrm{b}''. \tag{7.7.3.1}$$

On en déduit que les relations du lemme 1.3.6 sont encore valides sur les espaces de courants :

$$\mathrm{d}'' = \mathrm{J}\,\mathrm{d}'\,\mathrm{J}^{-1} = -\mathrm{J}^{-1}\,\mathrm{d}'\,\mathrm{J} \tag{7.7.3.2}$$

$$(\mathrm{d}')^2 = (\mathrm{d}'')^2 = 0 \tag{7.7.3.3}$$

$$\mathrm{d}''\,\mathrm{d}' = -\,\mathrm{d}'\,\mathrm{d}'' \tag{7.7.3.4}$$

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\mathrm{J} = \mathrm{J}\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,. \tag{7.7.3.5}$$

Soit ω une G-forme de type (p, q). On a

$$\begin{aligned}\mathrm{d}''\,[\omega] &= \mathrm{J}\,\mathrm{d}'\,\mathrm{J}^{-1}[\omega] = \mathrm{J}\,\mathrm{d}'\,[\mathrm{J}^{-1}\omega] = \mathrm{J}[\mathrm{d}'\,\mathrm{J}^{-1}\omega] - \mathrm{J}[\mathrm{J}^{-1}\omega]^{\partial} \\ &= [\mathrm{J}\,\mathrm{d}'\,\mathrm{J}^{-1}\omega] - \mathrm{J}[\mathrm{J}^{-1}\omega]^{\partial},\end{aligned}$$

de sorte que

$$\mathrm{d}''\,[\omega] = [\mathrm{d}''\,\omega] - \mathrm{J}[\mathrm{J}^{-1}\omega]^{\partial}. \tag{7.7.3.6}$$

En outre, si X est sans bord et ω est une forme, alors $\mathrm{J}\omega$ est également une forme, donc on a

$$\mathrm{d}''\,[\omega] = [\mathrm{d}''\,\omega]. \tag{7.7.3.7}$$

7.7.4. — Supposons que l'espace X est sans bord. Comme le courant d'intégration δ_X est égal à [1], il est d' et d''-fermé.

Lemme 7.7.5. — *Pour tout courant $S \in \mathscr{D}_{p,q}(X)$ et toute forme $\alpha \in \mathscr{A}_{\mathrm{c}}^{p,q}(X)$, on a*

$$\langle \mathrm{d}'\mathrm{d}'' S, \alpha\rangle = \langle S, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\alpha\rangle.$$

Démonstration. — En effet, $\mathrm{d}'\mathrm{d}'' S = ((-1)^{p+q+2}\,\mathrm{b}')((-1)^{p+q+1}\,\mathrm{b}'')S = -\,\mathrm{b}'\,\mathrm{b}''\,S$ est l'image de S par le transposé de $-\,\mathrm{d}''\,\mathrm{d}' = \mathrm{d}'\mathrm{d}''$. □

Exemple 7.7.6. — Soit X un espace espace tropical de niveau n. Soit α une G-forme de type (p,q) à coefficients tropicalement de classe $\mathscr{C}^2$. On a donc

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''[\alpha] = \mathrm{d}'\left([\mathrm{d}''\alpha] - \mathrm{J}[\mathrm{J}^{-1}\alpha]^{\partial}\right) = [\mathrm{d}'\mathrm{d}''\alpha] - [\mathrm{d}''\alpha]^{\partial} - \mathrm{d}'\,\mathrm{J}[\mathrm{J}^{-1}\alpha]^{\partial}. \tag{7.7.6.1}$$

Supposons de plus que α soit symétrique. Alors, $p = q$ et $\mathrm{J}^{-1}\alpha = \alpha$, de sorte que

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''[\alpha] = [\mathrm{d}'\mathrm{d}''\alpha] - [\mathrm{d}''\alpha]^{\partial} - \mathrm{d}'\,\mathrm{J}[\alpha]^{\partial}. \tag{7.7.6.2}$$

Supposons de plus que X soit sans bord et $p = 0$, c'est-à-dire que α soit une fonction, G-localement tropicalisée par une fonction de classe $\mathscr{C}^2$, et démontrons que l'on a

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''[\alpha] = [\mathrm{d}'\mathrm{d}''\alpha] - [\mathrm{d}''\alpha]^{\partial}. \tag{7.7.6.3}$$

Compte tenu de la relation précédente, il suffit de vérifier que le courant $[\alpha]^{\partial}$ est nul. Or, pour toute forme β de type $(n-1,n)$, lisse et à support compact, le nombre réel $\langle[\alpha]^{\partial},\beta\rangle$, égal à $\int_X^{\partial}\alpha\beta$, est l'intégrale de α contre la mesure de bord associée à β. Comme β est une forme et comme X est sans bord, cette mesure de bord est nulle, d'où l'égalité $[\alpha]^{\partial} = 0$.

On retrouve en particulier la formule classique définissant le laplacien combinatoire d'un graphe ([**120**], [**141**]).

Lemme 7.7.7. — *Soit T un courant de bidimension (p,q) sur X et soit α une forme de type (p',q'). On a l'égalité :*

$$\mathrm{d}'(T\wedge\alpha) = (\mathrm{d}'\,T)\wedge\alpha + (-1)^{p+q}T\wedge\mathrm{d}'\,\alpha.$$

Démonstration. — En effet, pour toute forme β de type $(p-p',q-q')$ sur X, on a

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{d}'(T\wedge\alpha),\beta\rangle &= (-1)^{p-p'+q-q'+1}\langle T\wedge\alpha, \mathrm{d}'\,\beta\rangle\\
&= (-1)^{p-p'+q-q'+1}\langle T, \alpha\wedge\mathrm{d}'\,\beta\rangle\\
&= (-1)^{p-p'+q-q'+1}\langle T, (-1)^{p'+q'}(\mathrm{d}'(\alpha\wedge\beta) - \mathrm{d}'\,\alpha\wedge\beta)\rangle\\
&= (-1)^{p+q+1}\langle T, \mathrm{d}'(\alpha\wedge\beta)\rangle + (-1)^{p+q}\langle T, \mathrm{d}'\,\alpha\wedge\beta\rangle\\
&= \langle \mathrm{d}'\,T\wedge\alpha,\beta\rangle + (-1)^{p+q}\langle T\wedge\mathrm{d}'\,\alpha,\beta\rangle,
\end{aligned}$$

d'où l'égalité voulue. □

7.7.8. — Soit U un ouvert de X. Pour tout courant T sur X, on a $\mathrm{d}'(T|_U) = (\mathrm{d}'\,T|_U)$ et $\mathrm{d}''(T|_U) = (\mathrm{d}''\,T)|_U$.

Soit Y un espace tropical de niveau m et soit $\varphi\colon Y \to X$ un morphisme compact d'espaces tropicaux. Pour tout courant T sur Y, on a $\mathrm{d}'(\varphi_*T) = \varphi_*(\mathrm{d}'\,T)$ et $\mathrm{d}''(\varphi_*T) = \varphi_*(\mathrm{d}''\,T)$.

Proposition 7.7.9. — *Soit Y un espace tropical de niveau m et soit $\varphi\colon Y \to X$ un morphisme compact d'espaces tropicaux. On a $\mathrm{d}'(\varphi_*\delta_Y) = \varphi_*(\delta_Y^\partial)$. En particulier, si X est sans bord, le courant δ_X est d'-fermé.*

Démonstration. — Soit $d = \dim(Y)$ et soit α une $(d-1,d)$-forme lisse à support compact sur X. On a

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{d}'(\varphi_*\delta_Y), \alpha\rangle &= -\langle \varphi_*\delta_Y, \mathrm{d}'\,\alpha\rangle = -\int_Y \varphi^*\,\mathrm{d}'\,\alpha \\ &= -\int_Y \mathrm{d}'\,\varphi^*\alpha = -\int_Y^\partial \varphi^*\alpha \\ &= -\langle \varphi_*\delta_Y^\partial, \alpha\rangle,\end{aligned}$$

d'où la formule annoncée. □

Exemple 7.7.10. — Soit T un courant squelettique de dimension p sur X. Soit f une carte G-tropicale sur un domaine V de X et soit P_f^T la partie squelettique p-calibrée pure qui décrit T relativement à f. Soit q un entier tel que $0 \leqslant q \leqslant p-1$. Démontrons que pour toute G-forme ω de type (q,p) sur V qui est f-tropicale, et toute G-forme G-lisse ρ de type $(p-q-1,0)$ sur V telle que $\rho\wedge\omega$ soit à support compact, on a

$$\langle T, \mathrm{d}'(\rho\wedge\omega)\rangle = \int_{P_f^T}^\partial \rho\wedge\omega.$$

On a $\mathrm{d}'(\rho\wedge\omega) = \mathrm{d}'\,\rho\wedge\omega + (-1)^{p-q-1}\rho\wedge\mathrm{d}'\,\omega$. Comme les formes ω et $\mathrm{d}'\,\omega$ sont de type (q,p) et $(q+1,p)$ respectivement, la proposition 7.6.8 entraîne les relations

$$\langle T, \rho\wedge\mathrm{d}'\,\omega\rangle = \int_{P_f^T} \rho\wedge\mathrm{d}'\,\omega$$

et

$$\langle T, \mathrm{d}'\,\rho\wedge\omega\rangle = \int_{P_f^T} \mathrm{d}'\,\rho\wedge\omega.$$

Ainsi,

$$\langle T, \mathrm{d}'(\rho\wedge\omega)\rangle = \int_{P_f^T} (\mathrm{d}'\,\rho\wedge\omega + (-1)^{p-q-1}\rho\wedge\mathrm{d}'\,\omega) = \int_{P_f^T} \mathrm{d}'(\rho\wedge\omega).$$

La formule de Stokes entraîne alors

$$\langle T, \mathrm{d}'(\rho\wedge\omega)\rangle = \int_{P_f^T}^\partial \rho\wedge\omega.$$

Lorsqu'on suppose que f est une carte tropicale et que ρ et ω sont des formes lisses, on a également

$$\langle T, \mathrm{d}'(\rho\wedge\omega)\rangle = -\langle \mathrm{d}'\,T, \rho\wedge\omega\rangle.$$

La formule précédente se récrit alors

$$\langle \mathrm{d}' T, \rho \wedge \omega \rangle = -\langle T, \mathrm{d}'(\rho \wedge \omega) \rangle = -\int_{P_f^T}^{\partial} \rho \wedge \omega.$$

Informellement, le bord du courant squelettique T se calcule, au signe près, en intégrant les formes sur les bords des parties squelettiques calibrées associées à T.

Remarque 7.7.11. — La fermeture du courant δ_X, qui résulte de l'absence de bord pour X (proposition 7.7.9), se traduit tropicalement par des annulations de discordance (condition d'harmonie, théorème 6.6.8). Esquissons comment le résultat s'étend à un courant squelettique fermé T.

Considérons une carte tropicale f définie sur un ouvert U, à valeurs dans $\mathbf{R}^N$. Soit x un point de P_f^T. Comme au §5.4.6, on définit un germe de cône calibré $\Pi_{f,x}^T$ dans $\mathbf{R}^N$ au voisinage de $f(x)$; c'est l'image par l'immersion par morceaux f du germe de partie squelettique p-calibrée $P_{f,x}^T$ en x. On démontre comme pour la condition d'harmonie que ce germe $P_{f,x}^T$ est harmonieux.

§ 7.8. CARTES HARMONIQUES

Soit X un espace tropical de niveau n, sans bord.

7.8.1. — Soit $u\colon X \to \mathbf{R}^d$ une carte G-tropicale, soit P une partie paralinéaire de $\mathbf{R}^d$ contenant $u(X)$ et soit α une forme lisse sur P. Considérons la G-forme $\omega = u^*\alpha$.

Si ω est une forme, les courants $\mathrm{d}'[\omega]$ et $[\mathrm{d}'\omega]$ coïncident, mais ce n'est pas le cas en général, leur différente est le courant de bord $[\omega]^\partial$. Nous allons montrer que si u est « harmonique », ce phénomène disparaît pour les G-formes du type $u^*\alpha$.

Définition 7.8.2. — *On dit qu'une fonction paralinéaire u sur X est* harmonique *si le courant* $\mathrm{d}'\mathrm{d}''[u]$ *est nul.*

Plus généralement, une fonction u sur X est dite harmonique si elle est localement combinaison $\mathbf{R}$-linéaires de fonctions paralinéaires harmoniques. Les fonctions harmoniques forment un sous-faisceau en $\mathbf{R}$-espaces vectoriels du faisceau des fonctions continues sur X. Il contient les fonctions affines.

Remarque 7.8.3. — Du point de l'analyse fonctionnelle, il n'est pas clair que cette définition soit optimale. Contrairement à la situation en analyse complexe, il n'y a aucune raison dans le contexte général des espaces tropicaux qu'une fonction continue u telle que $\mathrm{d}'\mathrm{d}''[u] = 0$ soit harmonique au sens précédent.

D'autre part, si u est simplement supposée localement intégrable, il lui est associée un courant $[u]$ mais nous ne savons pas si la condition $\mathrm{d}'\mathrm{d}''[u] = 0$ entraîne même la continuité de u (à modification près qui ne change pas le courant).

Proposition 7.8.4. — *Soit $u = (u_1, \ldots, u_d)$ une suite finie de fonctions paralinéaires harmoniques sur X. Soit P un sous-espace paralinéaire de $\mathbf{R}^d$ contenant $u(X)$ et soit α une forme lisse de type $(n-1, n)$ sur P. Soit W un domaine de X. Pour toute fonction lisse ρ sur W telle que le support de $\rho u^*\alpha$ ne rencontre pas $\partial(W)$, on a $\int_W^{\partial} \rho u^*\alpha = 0$.*

Démonstration. — Soit Σ une partie squelettique de W qui est un support fort de $\rho u^*\alpha$ (proposition 5.3.5). Soit $\mathscr{C}$ une décomposition cellulaire de Σ qui est adaptée au bord $\partial(W)$, au calibrage de X, et telle les u_i soient affines sur chaque cellule. Pour toute cellule C de dimension n, notons μ_C son calibrage.

On a

$$\int_W^{\partial} \rho u^*\alpha = \sum_{D\in\mathscr{C}_{n-1}} \int_D \left(\sum_{C\supset D} \langle (\rho u^*\alpha)_C, \mu_C\rangle \right).$$

Soit D une $(n-1)$-cellule. Si D rencontre $\partial(W)$, chaque terme est nul, car le support de $\rho u^*\alpha$ ne rencontre pas $\partial(W)$.

Supposons désormais que D ne rencontre pas $\partial(W)$. Si C est une cellule contenant D telle que l'application affine $u|_C$ ne soit pas injective, on a $u^*\alpha = 0$ sur C. Si $\mathscr{C}_D$ est l'ensemble des cellules C de dimension n qui contiennent D telle que l'application affine $u|_C$ soit injective, on a donc

$$\int_W^{\partial} \rho u^*\alpha = \sum_{D\in\mathscr{C}_{n-1}} \int_D \left(\sum_{C\in\mathscr{C}_D} \langle (\rho u^*\alpha)_C, \mu_C\rangle \right).$$

Si $u|_D$ n'est pas injective, alors $u|_C$ n'est injective pour aucune cellule C contenant D, donc $\mathscr{C}_D$ est vide.

Supposons que $u|_D$ soit injective et notons u_D^{-1} la bijection réciproque de $u_D\colon D \to u(D)$. Soit $C \in \mathscr{C}_D$; notons u_C^{-1} la bijection réciproque de $u|_C\colon C \to u(C)$; sa restriction à $u(D)$ coïncide avec u_D^{-1}. Sur D, on a l'égalité de $(n-1,0)$-formes

$$\langle (\rho u^*\alpha)_C, \mu_C\rangle = \rho u_C^* \langle \alpha_{u(C)}, u_*\mu_C\rangle,$$

donc

$$\int_D \langle (\rho u^*\alpha)_C, \mu_C\rangle = \int_D \rho u_C^* \langle \alpha_{u(C)}, u_*\mu_C\rangle = \int_{u(D)} \rho\circ u_D^{-1} \langle \alpha_{u(C)}, u_*\mu_C\rangle.$$

La contraction d'une $(n-1,n)$-forme sur $\mathbf{R}^n$ avec un n-vecteur-volume est une opération ponctuelle ; comme α est supposée lisse, on peut écrire

$$\langle \alpha_{u(C)}, u_*\mu_C\rangle = \langle \alpha, u_*\mu_C\rangle|_C.$$

Alors

$$\int_{u(D)} \rho\circ u_D^{-1} \langle \alpha_{u(C)}, u_*\mu_C\rangle = \int_{u(D)} \rho\circ u_D^{-1} \langle \alpha, u_*\mu_C\rangle$$

et

$$\int_D \sum_{C\in\mathscr{C}_D} \langle (\rho u^*\alpha)_C, \mu_C\rangle = \int_{u(D)} \rho\circ u_D^{-1} \langle \alpha, \sum_{C\in\mathscr{C}_D} u_*\mu_C\rangle.$$

Il suffit donc de prouver l'égalité

$$\sum_{C\in\mathscr{C}_D} u_*\mu_C = 0$$

pour toute cellule D de dimension $(n-1)$ qui ne rencontre pas $\partial(W)$.

Pour utiliser l'hypothèse que toute composante v de u est harmonique, on écrit l'égalité $0 = \langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, v, \omega\rangle$ pour toute forme lisse ω qui est à support compact dans $\mathring{W}$. Par la formule de Green (proposition 5.11.1), on a

$$0 = \int_X v\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, \omega = \int_X \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, v \wedge \omega + \int_X^{\partial} \left(v\, \mathrm{d}''\, \omega - \mathrm{d}''\, v \wedge \omega \right).$$

Le premier terme est nul car v est PL, de même que le second car le support de l'intégrale de bord est contenu dans le bord de W (théorème 6.6.6, $\int_W^\partial v\,\mathrm{d}''\omega$ est l'intégrale de v contre la mesure de bord associée à $\mathrm{d}''\omega$). Ainsi, on a

$$\int_X^\partial \mathrm{d}''v\wedge\omega = 0.$$

Fixons une $(n-1)$-cellule $D\in\mathscr{C}$ dont l'intérieur ne rencontre pas $\partial(W)$. Soit $x\in\mathring{D}$. Comme $\mathrm{Int}(W)\subset\mathrm{Int}(X)$, il existe une carte tropicale F sur un voisinage ouvert U de x, à valeurs un espace $\mathbf{R}^N$, telle que $\mathring{D}\cap U\subset\Sigma_F^{(n)}$ (proposition 6.3.3). En particulier, F est une immersion par morceaux sur $\mathring{D}\cap U$. Si $p\colon\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}^{n-1}$ est une projection linéaire générique, l'application affine $f=p\circ F$ est une immersion par morceaux d'un voisinage de x dans D vers $\mathbf{R}^{n-1}$.

Dans la suite, on va se contenter de considérer des formes ω du type $\theta f^*\beta$, où θ est une fonction lisse dont le support ne rencontre aucune n-cellule de Σ autres que celles qui contiennent D, et β est une $(n-1,n-1)$-forme lisse sur $\mathbf{R}^{n-1}$.

Choisissons un $(n-1)$-vecteur μ_D, une orientation ε_D. Pour toute n-cellule de $\mathscr{C}$ contenant D, on en déduit une orientation de C (par la règle de la normale sortante) et un vecteur e_C dans C tel que le calibrage canonique de C soit égal à $[e_C\wedge\mu_D,\varepsilon_C]$. Fixons aussi une fonction affine φ_C sur C qui est nulle sur D et telle que $\varphi_C(e_C)=1$.

Soit $a_C=\partial_{e_C}(v|_C)$ la dérivée de $v|_C$ dans la direction de e_C ; alors $v_C=v-a_C\varphi_C$ est invariant par e_C et donc provient de D par la projection de C sur D parallèlement à e_C. Sur C, on a donc $\mathrm{d}''v=\mathrm{d}''v_C+a_C\,\mathrm{d}''\varphi_C$. Compte tenu de la construction de $\omega=\theta f^*\beta$, lorsqu'on calcule le produit extérieur $\mathrm{d}''v\wedge\omega$, qu'on le contracte par le calibrage canonique μ_C et qu'on le restreint à D, il reste

$$a_C\theta\langle f^*\beta|_D,\mu_D\rangle.$$

On a donc

$$\int_D\sum_{C\supset D}a_C\theta\langle f^*\beta,\mu_D\rangle=0.$$

Comme θ et β sont arbitraires, on en déduit $\sum_{C\supset D}a_Cf_*\mu_D=0$; en simplifiant par le $(n-1)$-vecteur non nul $f_*\mu_D$, on a ainsi prouvé l'égalité

$$\sum_{C\supset D}\partial_{e_C}(v|_C)=0.$$

Inversement, ces égalités, lorsque D parcourt l'ensemble des cellules de dimension $n-1$ de $\mathscr{C}$, entraînent que $\int_X^\partial\mathrm{d}''v\wedge\omega=0$, et donc que $\langle[\mathrm{d}'\mathrm{d}''v],\omega\rangle=0$.

Avec les notations précédentes, $\mu_C=\mu_D\wedge e_C$ et $u_*(\mu_C)=u_*(\mu_D)\wedge u_*(e_C)$. Le premier facteur $u_*(\mu_D)$ est indépendant de C, le second est le vecteur dont les coordonnées sont les $a_C\varphi_C(e_C)=\partial_{e_C}(v|_C)$, lorsque v parcourt les coordonnées de u. On a donc

$$\sum_{D\supset C}u_*(\mu_C)=u_*(\mu_D)\wedge\sum_{C\supset D}u_*(e_C)=0$$

puisque les composantes du vecteur $\sum_C u_*(e_C)$ sont données par $\sum_C\partial_{e_C}(v|_C)=0$. □

Théorème 7.8.5. — *Soit $u=(u_1,\dots,u_d)$ une suite finie de fonctions paralinéaires harmoniques. Soit P un sous-espace paralinéaire de $\mathbf{R}^d$ contenant $u(X)$ et soit α une forme lisse sur P. On a $[u^*\alpha]^\partial=0$.*

Démonstration. — Il s'agit de démontrer que $\langle [u^*\alpha]^\partial, \omega\rangle = 0$ pour toute forme lisse ω à support compact sur X. Considérons une partition de l'unité finie (ρ_j) formée de fonctions lisses telle que $1 = \sum \rho_j$ au voisinage du support de ω et telle que pour tout j, ω soit lisse sur un voisinage du support de ρ_j. Puisque l'on a

$$\langle [u^*\alpha]^\partial, \omega\rangle = \sum_j \langle [u^*\alpha]^\partial, \rho_j\omega\rangle,$$

il suffit de traiter le cas où la forme-test considérée s'écrit $\rho\omega$ où ρ est une fonction lisse à support compact et ω est une forme tropicale. Soit $f\colon X \to E$ une carte tropicale, soit P un sous-espace paralinéaire de E contenant $f(X)$, et soit β une forme lisse sur P telle que $\omega = f^*\beta$. On a

$$\langle [u^*\alpha]^\partial, \rho\omega\rangle = \int_X^\partial u^*\alpha \wedge \rho\omega = \int_X^\partial \rho u^*\alpha \wedge f^*\beta = \int_X^\partial \rho(u,f)^*\gamma$$

où $\gamma = p_1^*\alpha \wedge p_2^*\beta$ est une forme sur $\mathbf{R}^n \times E$. Comme (u, f) est harmonique, la proposition précédente entraîne la nullité recherchée. □

***Corollaire 7.8.6* (Condition d'harmonie).** — *Soit X un espace tropical de niveau n, soit $u\colon X \to \mathbf{R}^d$ une application, harmonique. Soit $\mathscr{D}$ une décomposition cellulaire de Π_u adaptée au calibrage canonique μ_{Π_u} et à $\partial(X)$. Toute $(n-1)$-cellule de $\mathscr{D}$ qui n'est pas contenue dans $u(\partial(X) \cap \Sigma_u))$ est harmonieuse.*

Démonstration. — Soit F une $(n-1)$-cellule de $\mathscr{D}$ qui n'est pas contenue dans $u(\partial(X) \cap \Sigma_u)$. La discordance du calibrage de X le long de F relativement à u est un $(0,n)$-vecteur δ_F de $\mathbf{R}^d$; supposons par l'absurde qu'il n'est pas nul et choisissons un multi-indice J de longueur n tel que $\langle \mathrm{d}'' x_J, \delta_F\rangle \neq 0$; choisissons aussi un multi-indice I de longueur $n-1$ tel que la restriction à F de la $(n-1)$-forme $\mathrm{d}' x_I$ ne soit pas nulle.

Soit x un point de $\mathring{F}$ qui n'appartient pas à $u(\partial(X))$. Soit φ une fonction continue, non identiquement nulle, et à support compact disjoint de $u(\partial(X))$ et ne rencontrant pas d'autre face de dimension $n-1$ que F ; posons $\alpha = \varphi\, \mathrm{d}' x_I \wedge \mathrm{d}'' x_J$ et $\omega = u^*\alpha$. Par construction, $\langle \alpha, \mu_{\Pi_u}\rangle$ est une forme-volume non nulle.

D'après le théorème 7.8.5, le support de la forme-volume $\tilde{\omega}$ est contenu dans $\partial(X)$. Il est aussi disjoint de $\partial(X)$, par construction. On a donc $\tilde{\omega} = 0$. D'après la proposition 4.5.8, on a donc $\langle \alpha, \mu_{\Pi_u}\rangle = u_*(\tilde{\omega}) = 0$, ce qui contredit la construction de α. □

7.8.7. — On dit qu'une G-forme ω sur X est *harmoniquement tropicalisable* s'il existe une application paralinéaire harmonique $u\colon X \to \mathbf{R}^d$ et une forme lisse α au voisinage d'un polyèdre contenant $u(X)$ telle que $\omega = u^*\alpha$. Elles forment une sous-algèbre différentielle graduée de $\mathscr{A}_{X^G}(X)$, invariante par J.

On définit alors le sous-faisceau $\mathscr{A}^{p,q}_{X,\mathrm{harm}}$ du faisceau $\pi_*\mathscr{A}^{p,q}_{X^\mathrm{G}}$ (déduit du G-faisceau $\mathscr{A}^{p,q}_{X_G}$ par restriction à la catégorie des ouverts de X) constitué des formes qui sont localement harmoniquement tropicalisables. C'est un sous-faisceau différentiel gradué de $\pi_*\mathscr{A}_{X^G}$, invariant par J.

Corollaire 7.8.8. — *L'inclusion $\mathscr{A}_{X,\mathrm{harm}} \to \mathscr{D}_X$ des G-formes localement harmoniquement tropicalisables dans les courants commute aux opérateurs différentiels* d' *et* d''.

Démonstration. — Soit ω une G-forme localement harmoniquement tropicalisable. Il faut démontrer les égalités $\mathrm{d}'[\omega] = [\mathrm{d}'\omega]$ et $\mathrm{d}''[\omega] = [\mathrm{d}''\omega]$. Via J, il suffit de traiter la

première relation. L'assertion est locale sur X, ce qui ramène au cas où ω est harmoniquement tropicalisable. Alors, $\mathrm{d}'[\omega] - [\mathrm{d}'\omega] = [\omega]^{\partial}$, qui est nul d'après le théorème 7.8.5. □

CHAPITRE 8

THÉORIE DE BEDFORD–TAYLOR

---

§ 8.1. FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES

Soit X un espace G-tropical affiné.

Définition 8.1.1. — *On note* Psh_X *le plus petit sous-faisceau du faisceau des fonctions sur* X*, à valeurs dans* $\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$*, tel que pour tout ouvert* U *de* X*, l'ensemble* $\mathrm{Psh}_X(U)$ *vérifie les propriétés :*

i) *Il contient les fonctions lisses* u *sur* U *telles que* $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u \geqslant 0$ *;*

ii) *Il est stable par limite décroissante de suites.*

Ses sections sont appelées des fonctions plurisousharmoniques (psh)*.*

Lemme 8.1.2. — *Pour tout ouvert* U *de* X*, l'ensemble des fonctions psh sur* U *est un cône convexe formé de fonctions semi-continues supérieurement ; il contient les fonctions constantes.*

La démonstration est identique à celle du lemme 1.10.6.

Démonstration. — Les fonctions constantes sont lisses et psh.

Les fonctions semi-continues supérieurement u telles que λu soit psh, pour tout nombre réel positif λ, forment un sous-faisceau de Psh_X qui vérifie les conditions (i) et (ii), donc est égal à Psh_X. Cela prouve que pour tout ouvert U de X, l'ensemble $\mathrm{Psh}_X(U)$ est un sous-cône de l'ensemble des fonctions semi-continues supérieurement sur U.

Démontrons que si u et v sont des fonctions psh sur un ouvert U de X, il en est de même de $u+v$.

Supposons d'abord que u soit lisse. Les fonctions f telles que $f+u$ soit psh forment un sous-faisceau de Psh_U qui contient les fonctions lisses psh et est stable par limite décroissante ; il contient donc toutes les fonctions psh sur U. En particulier, $u+v$ est psh lorsque u est lisse.

Dans le cas général, les fonctions f telles que $f+v$ soit psh forme un sous-faisceau de Psh_U qui contient les fonctions lisses psh d'après le premier cas traité et est stable par limite décroissante ; il contient donc toutes les fonctions psh sur U ; par suite, $u+v$ est psh. □

Remarque 8.1.3. — Cette définition est inspirée par le théorème de [**67**] en analyse complexe qui affirme que dans ce contexte, une fonction psh sur un espace de Stein est limite d'une suite décroissante de fonctions psh lisses.

Dans le présent travail, nous considérerons surtout des fonctions psh continues.

Par ailleurs, rappelons que si une suite décroissante de fonctions continues converge simplement vers une fonction continue, elle converge même localement uniformément (théorème de Dini), puisqu'un espace tropical est localement compact.

Lemme 8.1.4. — *Pour tout ordinal α, on définit par récurrence transfinie un sous-faisceau $\mathrm{Psh}_{X,\alpha}$ du faisceau des fonctions sur X par les conditions suivantes :*

a) *On définit $\mathrm{Psh}_{X,0}$ comme le faisceau des fonctions lisses u telles que $\mathrm{d}'\mathrm{d}'' u \geqslant 0$;*

b) *Si α est un ordinal, on définit $\mathrm{Psh}_{X,\alpha+1}$ comme le sous-faisceau des fonctions sur X qui sont localement limites décroissantes de fonctions de $\mathrm{Psh}_{X,\alpha}$;*

c) *Si α est un ordinal limite, on définit $\mathrm{Psh}_{X,\alpha}$ comme le sous-faisceau des fonctions sur X qui appartiennent localement à un $\mathrm{Psh}_{X,\beta}$ pour $\beta < \alpha$.*

La famille ordinale $(\mathrm{Psh}_{X,\alpha})$ est une famille croissante de sous-faisceaux de Psh_X qui vaut Psh_X pour α assez grand.

Démonstration. — Par récurrence transfinie, il résulte de la définition de Psh_X, que $\mathrm{Psh}_{X,\alpha} \subset \mathrm{Psh}_X$ pour tout ordinal α. La construction montre que cette famille de sous-faisceau est croissante. Elle est nécessairement stationnaire, par un argument de cardinal. Soit α un ordinal à partir duquel la famille est constante et démontrons que $\mathrm{Psh}_X \subset \mathrm{Psh}_{X,\alpha}$. Il suffit pour cela de démontrer que $\mathrm{Psh}_{X,\alpha}$ vérifie les deux conditions de la définition de Psh_X. Il est évident que $\mathrm{Psh}_{X,\alpha}$ contient les fonctions lisses u telles que $\mathrm{d}'\mathrm{d}'' u \geqslant 0$, qui appartiennent au sous-faisceau $\mathrm{Psh}_{X,0}$. Soit maintenant U un ouvert de X et (u_n) une suite décroissante de fonctions de $\mathrm{Psh}_{X,\alpha}(U)$ qui converge simplement vers une fonction localement intégrable u et démontrons que $u \in \mathrm{Psh}_{X,\alpha}(U)$. Par construction, on a $u \in \mathrm{Psh}_{X,\alpha+1}(U)$; par définition de α, on a donc $u \in \mathrm{Psh}_{X,\alpha}(U)$. □

Proposition 8.1.5. — *Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces G-tropicaux affinés. Pour toute fonction psh u sur X, la fonction $u \circ f$ sur Y est psh. Plus précisément, pour tout ordinal α tel que u appartient à $\mathrm{Psh}_{X,\alpha}$, la fonction $u \circ f$ appartient à $\mathrm{Psh}_{Y,\alpha}$.*

Démonstration. — Compte tenu du lemme 8.1.4, il suffit de démontrer la seconde assertion. On procède par récurrence sur α. Le cas $\alpha = 0$ résulte de ce que pour toute fonction psh lisse u, la fonction $u \circ f$ est psh lisse. L'assertion découle alors de la construction par récurrence des faisceaux $\mathrm{Psh}_{X,\alpha}$ et $\mathrm{Psh}_{Y,\alpha}$. □

Remarque 8.1.6. — En géométrie complexe, on pourrait définir une hiérarchie ordinale analogue des faisceaux de fonctions psh, mais leur théorie établit que cette hiérarchie est stationnaire à partir du cran 1. Dans notre cadre, nous ne savons même pas si la hiérarchie ordinale des espaces de fonctions psh est stationnaire. Cependant, tous les exemples de fonctions psh que nous connaissons appartiennent au premier cran de cette hiérarchie.

Définition 8.1.7. — *On note CPsh_X le plus petit sous-faisceau du faisceau $\mathscr{C}_X$ des fonctions continues sur X tel que pour tout ouvert U de X, l'ensemble $\mathrm{CPsh}_X(U)$ vérifie les propriétés :*

i) *Il contient les fonctions lisses u sur U telles que $\mathrm{d}'\mathrm{d}'' u \geqslant 0$;*

ii) *Il est stable par limite uniforme.*

On note CPsh_X ce sous-faisceau ; ses sections sont appelées des *fonctions continues plurisousharmoniques (cpsh).*

Lemme 8.1.8. — *Pour tout ordinal α, on définit par récurrence transfinie un sous-faisceau $\mathrm{CPsh}_{X,\alpha}$ par les conditions suivantes :*

a) *On définit $\mathrm{CPsh}_{X,0}$ comme le faisceau des fonctions lisses u telles que $\mathrm{d}'\mathrm{d}''u \geqslant 0$;*

b) *Si α est un ordinal, on définit $\mathrm{CPsh}_{X,\alpha+1}$ comme le sous-faisceau des fonctions sur X qui sont localement limites uniforme de fonctions de $\mathrm{CPsh}_{X,\alpha}$;*

c) *Si α est un ordinal limite, on définit $\mathrm{CPsh}_{X,\alpha}$ comme le sous-faisceau des fonctions sur X qui appartiennent localement à un $\mathrm{CPsh}_{X,\beta}$ pour $\beta < \alpha$.*

La famille ordinale $(\mathrm{CPsh}_{X,\alpha})$ est une famille croissante de sous-faisceaux de CPsh_X qui vaut CPsh_X pour α assez grand.

Démonstration. — La démonstration est analogue à celle du lemme 8.1.4 en remplaçant partout « limite décroissante » par « limite uniforme ». □

Proposition 8.1.9. — *Soit (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbf{R}$ qui converge localement uniformément vers une fonction f. Si les f_n sont psh, alors f est psh.*

Démonstration. — Comme les fonctions constantes sont psh, l'assertion découle du lemme suivant. □

Lemme 8.1.10. — *Soit X un ensemble et soit (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbf{R}$ qui converge uniformément vers une fonction f. La suite $(f_n + 2\|f - f_n\|_\infty)$ converge uniformément vers f et admet une sous-suite qui est décroissante.*

Démonstration. — Puisque $\|f - f_n\|_\infty$ tend vers 0, il est clair que la suite $(f_n + 2\|f - f_n\|_\infty)$ converge uniformément vers f. L'assertion est évidente s'il existe une infinité d'entiers n tels que $\|f - f_n\|_\infty = 0$. On peut donc supposer que $\|f - f_n\| > 0$ pour tout n. Soit n un entier. Puisque (f_n) converge uniformément vers f, il existe $m > n$ tel que $\|f_m - f\|_\infty < \|f - f_n\|_\infty/3$. Des inégalités $f_m \leqslant f + \|f_m - f\|_\infty$ et $f - \|f_n - f\|_\infty \leqslant f_n$, on déduit que

$$f_m + 2\|f_m - f\|_\infty \leqslant f + 3\|f_m - f\|_\infty \leqslant f_n + 3\|f_m - f\|_\infty + \|f_n - f\|_\infty \leqslant f_n + 2\|f_n - f\|_\infty.$$

Le lemme s'en déduit. □

Proposition 8.1.11. — *On a $\mathrm{CPsh}_X = \mathscr{C}_X \cap \mathrm{Psh}_X$: les fonctions continues plurisousharmoniques sont les fonctions continues (à valeurs réelles) qui sont plurisousharmoniques. Plus précisément, pour tout ordinal α, on a $\mathrm{CPsh}_{X,\alpha} = \mathscr{C}_X \cap \mathrm{Psh}_{X,\alpha}$.*

Démonstration. — Compte tenu des lemmes 8.1.4 et 8.1.8, il suffit de vérifier la seconde assertion. Prouvons cette égalité par récurrence transfinie. Les cas de l'ordinal 0 et d'un ordinal limite sont évidents. Il suffit donc de prouver que pour tout ordinal α, une fonction continue u définie sur un ouvert U est localement limite décroissante de fonctions de $\mathrm{CPsh}_{X,\alpha}$ si et seulement si elle est localement limite uniforme de telles fonctions.

Soit U un ouvert de X et soit (u_n) une suite décroissante de fonctions de $\mathrm{CPsh}_{X,\alpha}(U)$ qui converge simplement vers une fonction continue u sur U. Le théorème de Dini assure que la convergence est uniforme sur toute partie compacte de U. Comme U est localement

compact, la convergence est localement uniforme, si bien que la fonction u appartient à $\mathrm{CPsh}_{X,\alpha+1}$.

Soit U un ouvert de X et soit u une fonction continue sur U qui est localement limite décroissante d'une suite de fonctions de $\mathrm{CPsh}_{X,\alpha}$. Soit (U_i) un recouvrement ouvert de U tel que $u|_{U_i}$ soit limite décroissante d'une suite de fonctions de $\mathrm{CPsh}_{X,\alpha}(U_i)$. D'après ce qui précède, $u|_{U_i}$ appartient à $\mathrm{CPsh}_{X,\alpha+1}(U_i)$. Par la propriété de faisceau, u appartient à $\mathrm{CPsh}_{X,\alpha+1}(U)$.

Soit U un ouvert de X et soit (u_n) une suite de fonctions de $\mathrm{CPsh}_{X,\alpha}(U)$ qui converge uniformément vers une fonction continue u sur U. D'après le lemme précédent, il existe une sous-suite de la suite $(u_n+2\|u_n-u\|)$ qui converge uniformément, et en décroissant, vers u. Elles appartiennent à $\mathrm{CPsh}_{X,\alpha}$, donc à $\mathrm{Psh}_{X,\alpha}$, par l'hypothèse de récurrence, si bien que u appartient à $\mathscr{C}_X \cap \mathrm{Psh}_{X,\alpha+1}$.

Soit U un ouvert de X et soit u une fonction continue sur U qui est localement limite uniforme d'une suite de fonctions de $\mathrm{CPsh}_{X,\alpha}$. D'après ce qui précède, u appartient localement à $\mathscr{C}_X \cap \mathrm{Psh}_{X,\alpha+1}$, donc est une section de ce faisceau sur l'ouvert U. □

Proposition 8.1.12. — *Le faisceau des fonctions psh et localement intégrables sur X est le plus petit sous-faisceau $\mathrm{L}^1\mathrm{Psh}_X$ du faisceau des fonctions localement intégrables sur X tel que, pour tout ouvert U de X, l'ensemble $\mathrm{L}^1\mathrm{Psh}_X(U)$ vérifie les propriétés :*

i) *Il contient les fonctions lisses u sur U telles que $\mathrm{d}'\mathrm{d}''u \geqslant 0$;*

ii) *Si (u_n) est une suite décroissante d'éléments de $\mathrm{L}^1\mathrm{Psh}_X(U)$ qui converge simplement vers une fonction localement intégrable u sur U, alors u appartient à $\mathrm{L}^1\mathrm{Psh}_X(U)$.*

Démonstration. — On définit une suite $\mathrm{L}^1\mathrm{Psh}_{X,\alpha}$ de sous-faisceaux du faisceau des fonctions localement intégrables sur X de manière analogue à ce qui a été fait pour $\mathrm{Psh}_{X,\alpha}$ et on démontre par récurrence transfinie que $\mathrm{L}^1\mathrm{Psh}_{X,\alpha} = \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}} \cap \mathrm{Psh}_{X,\alpha}$. Seul le cas d'un ordinal successeur est non trivial ; supposant $\mathrm{L}^1\mathrm{Psh}_{X,\alpha} = \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}} \cap \mathrm{Psh}_{X,\alpha}$, démontrons que cette égalité persiste pour $\alpha+1$. L'inclusion $\mathrm{L}^1\mathrm{Psh}_{X,\alpha+1} \subset \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}} \cap \mathrm{Psh}_{X,\alpha+1}$ est évidente.

Inversement, soit u une fonction de $\mathrm{Psh}_{X,\alpha+1}(U)$ qui est localement intégrable ; il s'agit de démontrer qu'elle appartient à $\mathrm{L}^1\mathrm{Psh}_{X,\alpha+1}(U)$. Cela se vérifie localement sur U ce qui permet de supposer que u est limite décroissante d'une suite (u_n) de fonctions de $\mathrm{Psh}_{X,\alpha}(U)$. Pour tout n, u_n est semicontinue supérieurement, donc localement majorée, et est minorée par la fonction localement intégrable u, si bien que u_n est localement intégrable. On a donc $u_n \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}\,\mathrm{Psh}_{X,\alpha} = \mathrm{L}^1\mathrm{Psh}_{X,\alpha}$ par l'hypothèse de récurrence. Ainsi, $u \in \mathrm{L}^1\mathrm{Psh}_{X,\alpha+1}$. □

Définition 8.1.13. — *On dit qu'une fonction psh sur un ouvert de X est localement approchable si c'est une section du faisceau $\mathrm{Psh}_{X,1}$.*

§ 8.2. CONVEXITÉ TROPICALE

Soit X un espace G-tropical affiné.

Proposition 8.2.1. — *Soit $u_1, \ldots, u_n$ des fonctions psh sur X. Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$ et soit $g\colon \Omega \to \mathbf{R}$ une fonction lisse, convexe, croissante par rapport*

à chaque variable. On suppose que $(u_1(x), \dots, u_n(x)) \in \Omega$ *pour tout* $x \in X$*. Alors, la fonction* $u\colon x \mapsto g(u_1(x), \dots, u_n(x))$ *sur* X *est psh.*

Plus précisément, si α *est un ordinal tel que pour tout* i, u_i *appartient* $\mathrm{Psh}_{X,\alpha}$*, la fonction* u *appartient à* $\mathrm{Psh}_{X,\alpha}$*.*

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur α.

Supposons d'abord $\alpha = 0$, c'est-à-dire que toutes les u_j sont lisses. Alors u est lisse et l'on a

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial y_j}(u_1, \dots, u_n)\, \mathrm{d}'\, u_i \wedge \mathrm{d}''\, u_j + \sum_j \frac{\partial g}{\partial y_j} \circ u \cdot \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_j.$$

Puisque g est convexe, le premier terme est une forme positive, en vertu de l'exemple 3.5.4. Puisque g est croissante par rapport à chaque variable, $(\partial g/\partial y_j) \circ u$ est une fonction positive sur X ; par hypothèse, les $(1,1)$-formes $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_j$ sont positives ; par suite, le second terme est également positif. Cela démontre que $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u$ est une $(1,1)$-forme lisse positive, si bien que la fonction u est donc psh. Elle appartient donc à $\mathrm{Psh}_{X,0}$.

Supposons maintenant $\alpha > 0$.

Supposons que α soit un ordinal limite. Soit x un point de X ; il existe un voisinage ouvert U de x et un ordinal $\beta < \alpha$ tels que $u_k|_U \in \mathrm{Psh}_{X,\beta}(U)$ pour tout k. L'hypothèse de récurrence entraîne que $g(u_1, \dots, u_n)|_U = g(u_1|_U, \dots, u_n|_U)$ appartient à $\mathrm{Psh}_{X,\beta}$, donc à $\mathrm{Psh}_{X,\alpha}$. Il s'ensuit que u appartient à $\mathrm{Psh}_{X,\alpha}$.

Supposons maintenant que α soit le successeur d'un ordinal β. Soit x un point de X ; il existe un voisinage ouvert U de x et, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, une suite décroissante $(v_{k,m})$ de fonctions de $\mathrm{Psh}_{X,\beta}(U)$ qui converge vers $u_k|_U$. Commme g est continue et croissante par rapport à chaque variable, la suite $(g(v_{1,m}|_U, \dots, u_{n,m}|_U))_m$ converge en décroissant vers $g(u_1, \dots, u_n)|_U$. Par l'hypothèse de récurrence, ces fonctions appartiennent à $\mathrm{Psh}_{X,\beta}$. Par suite, $g(u_1, \dots, u_n)$ appartient à $\mathrm{Psh}_{X,\alpha}$. □

Corollaire 8.2.2. — *On reprend les hypothèses de la proposition mais on suppose seulement que* g *est la limite d'une suite décroissante* (g_k) *de fonctions lisses, convexes, croissantes en chaque variable. Si* α *est un ordinal tel que pour tout* i, u_i *appartient à* $\mathrm{Psh}_{X,\alpha}$*, la fonction* u *appartient à* $\mathrm{Psh}_{X,\alpha+1}$*. Si la suite* (g_k) *converge uniformémement vers* g*, alors* u *appartient à* $\mathrm{Psh}_{X,\sup(\alpha,1)}$*.*

Démonstration. — La suite $(g_k(u_1, \dots, u_n))$ est décroissante et converge simplement vers $g(u_1, \dots, u_n)$. D'après la proposition, ces fonctions sont dans $\mathrm{Psh}_{X,\alpha}$. Par suite, $g(u_1, \dots, u_n)$ est dans $\mathrm{Psh}_{X,\alpha+1}$.

Faisons l'hypothèse supplémentaire que la suite (g_k) converge uniformément vers g et démontrons que $g(u_1, \dots, u_n)$ est dans $\mathrm{Psh}_{X,\sup(1,\alpha)}$. On raisonne encore par récurrence sur α. Le cas $\alpha = 0$ est traité par la première partie ; supposons alors $\alpha > 0$.

Supposons que α soit un ordinal limite. Soit x un point de X ; il existe un voisinage ouvert U de x et un ordinal $\beta < \alpha$ tels que $u_k|_U \in \mathrm{Psh}_{X,\beta}(U)$ pour tout k. La première partie de la démonstration affirme que $g(u_1, \dots, u_n)|_U = g(u_1|_U, \dots, u_n|_U)$ appartient à $\mathrm{Psh}_{X,\beta+1}$, donc à $\mathrm{Psh}_{X,\alpha}$ puisque $\beta + 1 < \alpha$.

Supposons maintenant que α soit le successeur d'un ordinal β. Soit x un point de X ; il existe un voisinage ouvert U de x et, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, une suite décroissante $(v_{k,m})$ de fonctions de $\mathrm{Psh}_{X,\beta}(U)$ qui converge vers $u_k|_U$. Pour tout entier m, la fonction

$g_m(v_{1,m}|_U, \dots, v_{n,m}|_U)$ appartient à $\mathrm{Psh}_{X,\beta}$, car g_m est lisse. On a

$$g_{m+1}(v_{1,m+1}|_U, \dots, v_{n,m+1}|_U) \leqslant g_m(v_{1,m+1}|_U, \dots, v_{n,m+1}|_U) \leqslant g_m(v_{1,m1}|_U, \dots, v_{n,m}|_U),$$

si bien que la suite $(g_m(v_{1,m1}|_U, \dots, v_{n,m}|_U))$ est décroissante. Comme (g_m) converge uniformément vers g et comme pour tout k, la suite $(v_{k,m})$ converge simplement vers $u_k|U$, cette suite converge simplement vers $g(u_1|_U, \dots, u_n|_U)$. Cela démontre que $g(u_1, \dots, u_n)|_U$ appartient à $\mathrm{Psh}_{X,\beta+1}$, c'est-à-dire à $\mathrm{Psh}_{X,\alpha}$. □

Corollaire 8.2.3. — *Soit α un ordinal et soit $u_1, \dots, u_n$ des fonctions psh sur X, appartenant à $\mathrm{Psh}_{X,\alpha}$. La fonction $x \mapsto \max(u_1(x), \dots, u_n(x))$ appartient à $\mathrm{Psh}_{X,\sup(\alpha,1)}$, et est en particulier psh.*

Démonstration. — D'après le lemme 1.7.6, la fonction $t \mapsto \max(t_1, \dots, t_n)$ sur $\mathbf{R}^n$ est limite uniforme de la famille de fonctions $t \mapsto \log(e^{at_1} + \cdots + e^{at_m})/a$, lorsque $a \to +\infty$. Ces fonctions sont lisses, convexes et croissantes en chaque variable. L'assertion découle alors du corollaire précédent. □

Corollaire 8.2.4. — *Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$ et soit $g\colon \Omega \to \mathbf{R}$ une fonction convexe, croissante par rapport à chaque variable. Pour toute suite $(u_1, \dots, u_n)$ de fonctions continues psh sur X, la fonction $g(u_1, \dots, u_n)$ est continue et psh. Plus précisément, si α est un ordinal tel que $u_1, \dots, u_n$ appartiennent à $\mathrm{CPsh}_{X,\alpha}$, on a $g(u_1, \dots, u_n) \in \mathrm{CPsh}_{X,\sup(1,\alpha)}$.*

Démonstration. — Comme g est convexe sur l'ouvert Ω, elle est continue ; puisque les u_i sont continues, la fonction $g(u_1, \dots, u_n)$ est continue. D'après la proposition 8.1.11, il suffit de démontrer qu'elle appartient à $\mathrm{Psh}_{X,\sup(1,\alpha)}$. D'après cette même proposition, les fonctions u_k appartiennent à $\mathrm{Psh}_{X,\alpha}$.

Soit $x \in X$ et soit Ω' un voisinage ouvert convexe relativement compact de $(u_1(x), \dots, u_n(x))$ dans Ω. Comme les u_i sont continues, la partie U de X formée des $x \in X$ tels que $(u_1(x), \dots, u_n(x)) \in \Omega'$ est ouverte. Par convolution, $g|_{\Omega'}$ est limite uniforme d'une suite (g_k) de fonctions lisses qui sont convexes et croissantes en chaque variable. D'après le corollaire précédent, $g(u_1, \dots, u_n)|_U$ appartient à $\mathrm{Psh}_{X,\sup(1,\alpha)}$. Cela conclut la démonstration. □

Proposition 8.2.5. — *Soit X un espace G-tropical affiné. Soit $f\colon X \to E$ une carte tropicale, soit P un sous-espace paralinéaire de E contenant $f(X)$ et soit v une fonction convexe continue sur P (définition 1.10.5). Alors la fonction f^*v sur X est continue et psh.*

Démonstration. — Le sous-faisceau de $\mathscr{C}_P$ formé des fonctions v telles que f^*v soit psh contient les fonctions lisses telles que $\mathrm{d}'\mathrm{d}'' v \geqslant 0$ et est stable par limite uniforme. Il contient donc le faisceau des fonctions convexes sur P. Cela démontre la proposition. □

Définition 8.2.6. — *Soit X un espace G-tropical affiné. On dit qu'une fonction u sur X est* tropicalement convexe *si pour tout point x de X, il existe un voisinage U de x, une carte tropicale $f\colon U \to E$ sur U, une partie paralinéaire P de T_{trop} qui contient $f(U)$ et une fonction convexe convexe v sur P tel que $u|_U = f^*v$.*

Une fonction tropicalement convexe est psh.

§ 8.3. FONCTIONS PSH ET COURANTS POSITIFS

Soit X un espace tropical de niveau n. On suppose que X est sans bord ; en particulier, X est localement différentiellement séparé, très riche et décent.

Proposition 8.3.1. — *Soit u une fonction sur X à valeurs dans $\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$, localement intégrable.*

a) *Si u est plurisousharmonique, le courant $\mathrm{d}'\mathrm{d}''[u]$ est positif.*

b) *Si u est lisse, elle est plurisousharmonique si et seulement si le courant $\mathrm{d}'\mathrm{d}''[u]$ est positif.*

Démonstration. — Pour tout U, notons $\mathscr{P}(U)$ l'ensemble des fonctions localement intégrables u sur U telles que le courant $\mathrm{d}'\mathrm{d}''[u]$ sur U soit positif. Il est immédiat que $\mathscr{P}$ est un sous-faisceau du faisceau des fonctions localement intégrables (à valeurs dans $\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$) qui contient les fonctions lisses psh. Vérifions qu'il est également stable par limite décroissante. Soit (u_n) une suite décroissante de fonctions localement intégrables sur un ouvert U de X qui converge simplement vers une fonction u localement intégrable sur U. Soit ω une (n,n)-forme lisse et à support compact sur U. Si ω est positive, le théorème de convergence monotone entraîne que la suite $(\int u_n\omega)$ converge vers $\int u\omega$. Comme ω est différence de deux formes positives à support compact, cette convergence est encore vérifiée. Cela démontre que la suite de courants $([u_n])$ converge vers le courant $[u]$. Si de plus $\mathrm{d}'\mathrm{d}''[u_n]\geqslant 0$ pour tout n, alors $\mathrm{d}'\mathrm{d}''[u]\geqslant 0$ par passage à la limite. Par conséquent, $\mathscr{P}$ contient CPsh_X. Cela démontre l'assertion *a*).

Supposons maintenant que u est lisse. Si u est plurisousharmonique, alors $\mathrm{d}'\mathrm{d}''[u]$ est positif d'après *a*). Supposons inversement que le courant $\mathrm{d}'\mathrm{d}''[u]$ soit positif. Comme c'est le courant associé à la forme lisse $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u$, cette forme est positive, d'après le corollaire 7.3.10. La fonction u appartient donc à $\mathrm{CPsh}_X(U)$ par définition de ce cône. □

Proposition 8.3.2. — *Soit X l'espace tropical de niveau n associé à $\mathbf{R}^n$. Soit U un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$, soit u une fonction sur U à valeurs dans $\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$ qui n'est pas identiquement $-\infty$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La fonction u appartient à Psh_X ;*
(ii) *La fonction u est à valeurs finies et est convexe ;*
(iii) *La fonction u est localement intégrable et vérifie $\mathrm{d}'\mathrm{d}''[u]\geqslant 0$;*
(iv) *La fonction u appartient à $\mathrm{CPsh}_{X,1}$.*

En particulier, les faisceaux sur X des fonctions psh, des fonctions continues psh et des fonctions localement convexes coïncident.

Démonstration. — Soit U un ouvert de X et soit u une fonction lisse sur U telle que $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u\geqslant 0$. La hessienne de u est donc une forme quadratique positive en tout point. Si U est convexe, on en déduit que u est une fonction convexe sur U.

(i)⇒(ii). Soit Conv_X^* le sous-faisceau de $\mathscr{C}_X$ constitué des fonctions qui, localement, sont soit finies et localement convexes, soit identiquement $-\infty$. D'après ce qui précède, il contient les fonctions lisses à $\mathrm{d}'\mathrm{d}''$ positif. Par ailleurs, soit U un ouvert convexe de X et soit (u_k) une suite de fonctions finies convexes sur U qui converge simplement vers une fonction u sur U. Démontrons que u est soit finie et convexe, soit identiquement $-\infty$. On peut supposer que les u_k sont toutes finies et convexes.

Supposons qu'il existe $a \in U$ tel que $u(a) = -\infty$ et prouvons que u est identiquement égale à $-\infty$ sur U Soit $b \in U$; pour tout $t \in [0;1[$, on a $u_k((1-t)a+tb) \leqslant (1-t)u_k(a)+tu_k(b)$; lorsqu'on passe à la limite, on obtient $u((1-t)a+tb) = -\infty$. Ainsi, u est $-\infty$ sur le segment semi-ouvert $[a;b[$. Il en résulte que u est identiquement $-\infty$ sur U.

Sinon, u est finie, et en passant à la limite dans les inégalités de convexité pour les u_k, on voit que u est convexe.

Il en résulte que le faisceau des fonctions psh est contenu dans le faisceau Conv^*_X.

Démontrons (iv) sous l'une des hypothèses (ii) ou (iii). Les fonctions u de Conv^*_X qui ne sont pas identiquement $-\infty$ sont finies et continues sur U, donc localement intégrables.

L'assertion est locale ; on peut donc supposer que U est une boule ouverte $B(a;r)$ et qu'il existe $s > r$ tel que $\mathrm{d}'\mathrm{d}''[u]$ soit positif sur $B(a,s)$. Soit ρ une fonction lisse, positive, à support compact, d'intégrale 1 ; pour tout $\varepsilon > 0$, posons $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\rho(x/\varepsilon)$. Les convolées $u_\varepsilon = u * \rho_\varepsilon$ sont des fonctions lisses qui convergent uniformément vers u sur $B(0;r)$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Démontrons que u_ε est convexe. C'est le cas, par convolution, si u est convexe. Sinon, on a $\mathrm{d}'\mathrm{d}''[u] \geqslant 0$ par hypothèse, si bien que $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_\varepsilon) = \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u*\rho_\varepsilon) = \mathrm{d}'\mathrm{d}''[u]*\rho_\varepsilon \geqslant 0$, et cela entraîne que u_ε est convexe. Il en résulte que u est limite uniforme sur $B(a,r)$ de fonctions lisses et convexes. Elle appartient donc à $\mathrm{CPsh}_{X,1}$.

L'implication (iv)⇒(iii) résulte de la proposition 8.3.1, et l'implication (iv)⇒(i) découle de la proposition 8.1.11. □

§ 8.4. INÉGALITÉS DE CHERN–LEVINE–NIRENBERG

Nous nous inspirons ici du chapitre 2 de [**44**] pour démontrer des inégalités de type Chern–Levine–Nirenberg (voir [**41**]) dans notre contexte.

Soit X un espace tropical de niveau n, sans bord.

Proposition 8.4.1. — *Soit T un courant de bidegré (p,p), positif et fermé, soit q un entier tel que $0 \leqslant q \leqslant p$ et soit ω une forme lisse de type $(p-q,p-q)$ sur X. Pour tout voisinage compact K du support de ω, il existe un nombre réel $c_{K,\omega} \geqslant 0$ tel que pour toute famille $(u_0,\dots,u_q)$ de fonctions lisses sur X, telles que $u_1,\dots,u_q$ soient psh, on a*

$$|\langle u_0\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_q)\wedge T,\omega\rangle| \leqslant c_{K,\omega}\|u_0\|_K\|u_1\|_K\dots\|u_q\|_K.$$

Démonstration. — On prouve cette proposition par récurrence sur q. Considérons des formes lisses α_0 et β_0, positives et à support contenu dans $\overset{\circ}{K}$ telles que $\omega = \alpha_0 - \beta_0$ (proposition 6.5.2). Posons $\omega_0 = \alpha_0 + \beta_0$; c'est une forme lisse positive, de bidegré $(p-q,p-q)$ et à support compact contenu dans l'intérieur de K. Soit enfin C un nombre réel de sorte que la conclusion de la proposition soit vraie lorsque ω est remplacée par la forme $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\omega_0$ et q est remplacé par $q-1$.

Soit $u_1,\dots,u_p$ des fonctions lisses sur X, et soit u_0 une fonction lisse sur X. On commence par écrire

$$\begin{aligned}\langle u_0\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u_q\wedge T,\omega\rangle&\\ = \langle u_0\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u_q\wedge T,\alpha_0\rangle - \langle u_0\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u_q\wedge T,\beta_0\rangle.&\end{aligned}$$

Comme les formes $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u_1,\dots,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u_q$ sont fortement positives, et comme le courant T est positif, $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u_q\wedge T$ est positif (lemm 7.2.7). Comme α_0 est positive, le

premier terme est majoré par

$$\|u_0\|_K\langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_q \wedge T, \alpha_0\rangle.$$

Un raisonnement analogue avec l'autre terme, ainsi qu'avec $-u_0$, fournit la majoration

$$|\langle u_0\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_q \wedge T, \omega\rangle| \leqslant \|u_0\|_K\langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_q \wedge T, \omega_0\rangle.$$

Comme T est fermé, on a

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_1 \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_q \wedge T = \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_q \wedge T),$$

de sorte que

$$\langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_q \wedge T, \omega_0\rangle = \langle u_1\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_q \wedge T, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, \omega_0\rangle.$$

Par l'hypothèse de récurrence, on a donc

$$\langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_q \wedge T, \omega_0\rangle \leqslant c_{K,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\omega_0}\|u_1\|_K \ldots \|u_q\|_K,$$

d'où la majoration voulue. □

8.4.2. — On suppose que X est sans bord. Soit ρ une fonction lisse psh sur X tel que l'ouvert U de X défini par $\rho < 0$ soit relativement compact.

On pose $\rho_- = \sup(-\rho, 0)$; c'est une fonction continue et positive sur X, lisse et strictement positive sur U, nulle hors de U. Pour tout nombre réel $a > 0$, la fonction $\theta_a\colon t \mapsto \sup(-t, 0)^a$ sur $\mathbf{R}$ est continue ; si $a > 1$, elle est de dérivable est vérifie $\theta_a' = -a\theta_{a-1}$; elle est donc de classe $\mathscr{C}^{\lfloor a\rfloor}$; par suite, la fonction ρ_-^a sur U est à coefficients de classe $\mathscr{C}^{\lfloor a\rfloor}$; on a $\mathrm{d}'\,\rho_-^a = -a\rho_-^{a-1}\,\mathrm{d}'\,\rho$ et $\mathrm{d}''\,\rho_-^a = -a\rho_-^{a-1}\,\mathrm{d}''\,\rho$.

Soit a un nombre réel tel que $a > 1$. Pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, on définit une forme de type $(n-k, n-k)$ sur U par

$$\beta_k = \rho_-^{k+a}(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\rho)^{n-k} + (k+a)\rho_-^{k+a-1}\,\mathrm{d}'\,\rho \wedge \mathrm{d}''\,\rho \wedge (\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\rho)^{n-k-1}.$$

(Lorsque $k = n$, on omet le second terme.) La forme β_k est à coefficients de classe $\mathscr{C}^{\lfloor a\rfloor-1}$, et son support contenu dans $\overline{W}$, donc est compact, car $k + a - 1 > 0$. Comme ρ est lisse et psh, la $(1,1)$-forme lisse $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\rho$ est positive ; de plus, $\mathrm{d}'\,\rho \wedge \mathrm{d}''\,\rho$ est une $(1,1)$-forme positive ; par suite, la forme β_k est positive.

On a

$$\mathrm{d}''\,\beta_k = -2(k+a)\rho_-^{k+a-1}\,\mathrm{d}''\,\rho \wedge (\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\rho)^{n-k}$$

et

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\beta_k = 2(k+a)\left(-\rho_-^{k+a-1}(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\rho)^{n-k+1} + (k+a-1)\rho_-^{k+a-2}\,\mathrm{d}'\,\rho \wedge \mathrm{d}''\,\rho \wedge (\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\rho)^{n-k}\right).$$

Par suite, on a l'inégalité de formes

$$-2(k+a)\beta_{k-1} \leqslant \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\beta_k \leqslant 2(k+a)\beta_{k-1}.$$

Proposition 8.4.3. — *On suppose $a \geqslant 3$ et on pose $C(k,a) = (4e)^k a^{-1}(k+a)(2+a)\ldots(k+1+a)$. Soit V une fonction psh négative lisse sur U. Pour tout entier k et toute suite $(u_1, \ldots, u_k)$ de fonctions lisses psh sur X, on a*

$$\int_U \beta_k \wedge |V|\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u_k \leqslant C(k,a)\|u_1\|_U \ldots \|u_k\|_U \int_U |V|\beta_0.$$

Démonstration. — On démontre l'inégalité par récurrence sur k. Elle est évidente lorsque $k = 0$, car $C(0, a) = 1$. Supposons maintenant $k \geqslant 1$. Notons J_k l'intégrale à majorer et posons $\psi_k = \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_k$. Comme β_k est ponctuellement nulle hors de U, on a

$$J_k = \int_U (-V\beta_k)\wedge\psi_{k-1}\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_k = \int_X (-V\beta_k)\wedge\psi_{k-1}\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_k = \int_X (-V\beta_k)\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_k\psi_{k-1}).$$

Comme X est sans bord, la formule de Green (proposition 5.11.1) entraîne alors

$$J_k = \int_X \mathrm{d}'\mathrm{d}''(-V\beta_k) \wedge u_k\psi_{k-1}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} J_k &= -\int_X \mathrm{d}'(\mathrm{d}'' V \wedge \beta_k + V\,\mathrm{d}''\beta_k) \wedge u_k\psi_{k-1} \\ &= -\int_X (\mathrm{d}'\mathrm{d}'' V \wedge \beta_k - \mathrm{d}'' V \wedge \mathrm{d}'\beta_k + \mathrm{d}' V \wedge \mathrm{d}''\beta_k + V\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\beta_k) \wedge u_k\psi_{k-1} \\ &= -\int_X (\mathrm{d}'\mathrm{d}'' V \wedge \beta_k + 2\,\mathrm{d}' V \wedge \mathrm{d}''\beta_k + V\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\beta_k) \wedge u_k\psi_{k-1} \end{aligned}$$

en utilisant la symétrie de V, β_k et ψ_{k-1} (lemme 1.3.8). Puisque

$$\mathrm{d}'(V\,\mathrm{d}''\beta_k\wedge u_k\psi_{k-1}) = \mathrm{d}' V\wedge\mathrm{d}''\beta_k\wedge u_k\psi_{k-1}+V u_k\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\beta_k\wedge\psi_{k-1}-V\,\mathrm{d}''\beta_k\wedge\mathrm{d}' u_k\wedge\psi_{k-1},$$

la formule de Stokes (proposition 5.11.1) et le fait que X soit sans bord entraînent que

$$\int_X \mathrm{d}' V \wedge \mathrm{d}''\beta_k \wedge u_k\psi_{k-1} = \int_X V\,\mathrm{d}''\beta_k \wedge \mathrm{d}' u_k \wedge \psi_{k-1} - \int_X V u_k\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\beta_k \wedge \psi_{k-1}.$$

si bien que

$$J_k = \int_X u_k(V\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\beta_k - \mathrm{d}'\mathrm{d}'' V \wedge \beta_k) \wedge \psi_{k-1} + 2V\,\mathrm{d}' u_k \wedge \mathrm{d}''\beta_k \wedge \psi_{k-1}.$$

En utilisant de nouveau que β_k est ponctuellement nulle hors de U, on a

$$J_k = \int_U u_k(V\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\beta_k - \mathrm{d}'\mathrm{d}'' V \wedge \beta_k) \wedge \psi_{k-1} + 2V\,\mathrm{d}' u_k \wedge \mathrm{d}''\beta_k \wedge \psi_{k-1}.$$

On a

$$2V\,\mathrm{d}' u_k \wedge \mathrm{d}''\beta_k = -4(k+a)V\rho_-^{k+a-1}\,\mathrm{d}' u_k \wedge \mathrm{d}''\rho \wedge (\mathrm{d}'\mathrm{d}''\rho)^{n-k}.$$

Pour deux fonctions u, v de classe $\mathscr{C}^1$, et pour h strictement positive, la positivité de la forme $(\mathrm{d}' u - h\,\mathrm{d}' v) \wedge (\mathrm{d}'' u - h\,\mathrm{d}'' v)$ entraîne la majoration

$$\mathrm{d}' u \wedge \mathrm{d}'' v - \mathrm{d}' v \wedge \mathrm{d}'' u \leqslant h^{-1}\,\mathrm{d}' u \wedge \mathrm{d}'' u + h\,\mathrm{d}' v \wedge \mathrm{d}'' v.$$

Lorsque u_k est strictement positive, on en déduit la majoration

$$\begin{aligned} 2V\,\mathrm{d}' u_k \wedge \mathrm{d}''\beta_k \wedge \psi_{k-1} &\\ &\leqslant 4(k+a)^2(-V)u_k\rho_-^{k+a-2}\,\mathrm{d}'\rho\wedge\mathrm{d}''\rho\wedge(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\rho)^{n-k} \\ &\qquad + \rho_-^{k+a}(-V)u_k^{-1}\,\mathrm{d}' u_k\wedge\mathrm{d}'' u_k\wedge(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\rho)^{n-k}. \end{aligned}$$

Utilisant que V est psh sur U, donc $\mathrm{d}'\mathrm{d}''V \geqslant 0$, il vient alors

$$J_k \leqslant \int_U u_k(-V)\big(-\mathrm{d}'\mathrm{d}''\beta_k + 4(k+a)^2\rho_-^{k-2+a}\,\mathrm{d}'\rho\wedge\mathrm{d}''\rho\wedge(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\rho)^{n-k}\big)\wedge\psi_{k-1} + \int_U(-V)\rho_-^{k+a}(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\rho)^{n-k}u_k^{-1}\,\mathrm{d}'u_k\wedge\mathrm{d}''u_k\wedge\psi_{k-1}.$$

Compte tenu du calcul de $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\beta_k$, la forme entre parenthèse dans la première intégrale est égale à

$$2(k+a)\rho_-^{k+a-1}(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\rho)^{n-k+1} + (k+a+1)\rho_-^{k+a-2}\,\mathrm{d}'\rho\wedge\mathrm{d}''\rho\wedge(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\rho)^{n-k},$$

donc est majorée par $c\beta_{k-1}$, où $c = 2(k+a)(k+a+1)/(k+a-1)$. Ainsi,

$$J_k \leqslant c\|u_k\|_U J_{k-1} + \int_U(-V)\beta_k\wedge\psi_{k-1}\wedge u_k^{-1}\,\mathrm{d}'u_k\wedge\mathrm{d}''u_k,$$

inégalité valable sous l'hypothèse que u_k est strictement positive.

Soit B un nombre réel ; posons aussi $M = \|u_k\|_U$. nous allons appliquer l'inégalité précédente en remplaçant u_k par $v_k = \exp(Bu_k)$. On a $\mathrm{d}'v_k = \mathrm{d}'(\exp(Bu_k)) = Bv_k\,\mathrm{d}'u_k$, $\mathrm{d}''v_k = Bv_k\,\mathrm{d}''u_k$ et

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''v_k = \mathrm{d}'(B\exp(Bu_k)\,\mathrm{d}''u_k) = B^2v_k\,\mathrm{d}'u_k\wedge\mathrm{d}''u_k + Bv_k\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''u_k = v_k^{-1}\,\mathrm{d}'v_k\wedge\mathrm{d}''v_k + Bv_k\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''u_k.$$

Comme $\mathrm{d}'\mathrm{d}''u_k$ est positive et $u_k \geqslant -M$, on a donc

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''v_k \geqslant Be^{-BM}\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''u_k + v_k^{-1}\,\mathrm{d}'v_k\wedge\mathrm{d}''v_k.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} Be^{-BM}J_k &= \int_U \beta_k\wedge(-V)\psi_{k-1}\wedge(Be^{-BM}\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''u_k)\\ &\leqslant \int_U \beta_k\wedge(-V)\psi_{k-1}\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''v_k - \int_U\beta_k\wedge(-V)\psi_{k-1}\wedge v_k^{-1}\,\mathrm{d}'v_k\wedge\mathrm{d}''v_k\\ &\leqslant c\|v_k\|_U J_{k-1}\\ &\leqslant ce^{BM}J_{k-1}, \end{aligned}$$

si bien que $J_k \leqslant cB^{-1}e^{2BM}J_{k-1}$. En choisissant $B = 1/2M$, on en déduit

$$J_k \leqslant 2ec\|u_k\|_U J_{k-1} = 4e\frac{(k+a)(k+a+1)}{k+a-1}\|u_k\|_U J_{k-1}.$$

La proposition s'en déduit. □

§ 8.5. THÉORIE DE BEDFORD–TAYLOR : PRODUIT PAR UN COURANT POSITIF DE BIDEGRÉ $(1,1)$

Soit X un espace tropical de niveau n, sans bord.

Lemme 8.5.1. — *Soit (T_n) une suite de courants positifs et soit (u_n) une suite de fonctions continues. On suppose que la suite (T_n) converge vers un courant T et que la suite (u_n) converge localement uniformément vers une fonction u. On a $u_nT_n \to uT$.*

Démonstration. — On peut raisonner localement et supposer que (u_n) converge uniformément vers u. Soit $\varepsilon > 0$ et soit v une fonction lisse telle que $\|u - v\| \leqslant \varepsilon$; on écrit

$$u_n T_n - uT = (u_n - v)T_n + v(T_n - T) + (v - u)T.$$

Soit ω une forme lisse à support compact, et soit α, β des formes lisses positives à support compact telles que $\omega = \alpha - \beta$. Comme T_n est positif, on a

$$|\langle (u_n - v)T_n, \omega\rangle| \leqslant |\langle (u_n - v)T_n, \alpha\rangle| + |\langle (u_n - v)T_n, \beta\rangle| \leqslant \|u_n - v\|\langle T_n, \alpha + \beta\rangle.$$

Comme v est lisse, le second terme

$$\langle v(T_n - T), \omega\rangle = \langle T_n - T, v\omega\rangle$$

tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Enfin, comme T est positif,

$$|\langle (v - u)T, \omega\rangle| \leqslant \|v - u\|\langle T, \alpha + \beta\rangle.$$

Cela démontre que

$$\limsup_n |\langle u_n T_n - uT, \omega\rangle| \leqslant 2\|u - v\|\langle T, \alpha + \beta\rangle \leqslant 2\varepsilon\langle T, \alpha + \beta\rangle.$$

Comme ceci vaut pour tout ε, on a

$$\lim_n \langle u_n T_n, \omega\rangle = \langle uT, \omega\rangle.$$

Cela prouve que $u_n T_n \to uT$. □

8.5.2. — Soit T un courant de bidegré (p, p) sur X qui est positif et fermé. L'hypothèse que T est fermé signifie $\mathrm{d}' T = 0$ et $\mathrm{d}'' T = 0$. Par définition d'un courant positif, le courant T est symétrique ; ainsi, chacune de ces annulations entraîne l'autre.

Lemme 8.5.3. — *Soit S un courant fermé symétrique de bidegré (p, p), soit q un entier tel que $q \leqslant p - 1$ et soit α une forme lisse symétrique de type (q, q). On a*

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''(\alpha \wedge S) = (\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\alpha) \wedge S.$$

Démonstration. — Soit β une forme lisse de type $(p - q - 1, p - q - 1)$; démontrons que l'on a

$$\langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\alpha \wedge S, \beta\rangle = \langle \alpha \wedge S, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\beta\rangle.$$

Comme les courants $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\alpha \wedge S$ et $\alpha \wedge S$ sont symétriques, on peut supposer que β est symétrique. Par définition, on a

$$\langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\alpha \wedge S, \beta\rangle - \langle \alpha \wedge S, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\beta\rangle = \langle S, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\alpha \wedge \beta - \alpha \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\beta\rangle.$$

Or, on a

$$\mathrm{d}'(\alpha\,\mathrm{d}''\,\beta - \mathrm{d}''\,\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}'\,\alpha \wedge \mathrm{d}''\,\beta + \alpha\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\beta - \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\alpha \wedge \beta + \mathrm{d}''\,\alpha \wedge \mathrm{d}'\,\beta.$$

De plus, on démontre comme dans la preuve du lemme 1.5.10, la forme de type (p, p)

$$\mathrm{d}'\,\alpha \wedge \mathrm{d}''\,\beta + \mathrm{d}''\,\alpha \wedge \mathrm{d}'\,\beta$$

est antisymétrique. Sa valeur sur le courant symétrique S est donc nulle. Comme S est fermé, cela entraîne l'égalité voulue. □

8.5.4. — Soit T un courant de bidegré (p,p) sur X qui est positif et fermé. Soit u une fonction psh (continue) sur X. Comme est T est positif, on peut former le courant uT (exemple 7.2.12) et considérer le courant $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(uT)$. Si u est lisse, le lemme 8.5.3 entraîne que l'on a

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''(uT) = \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u \wedge T) = \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u \wedge T = T \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u),$$

car T est fermé.

En géométrie complexe, cette remarque est la base de la construction, par Bedford–Taylor **[6]**, de produits de courants. Nous allons utiliser la même méthode dans ce contexte. Pour poursuivre la construction, il faut garantir que le courant $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(uT)$ est encore positif. C'est le cas si T est positif et u est psh lisse et, plus généralement, si u est psh en vertu du lemme suivant.

Lemme 8.5.5. — *Soit T un courant de bidegré (p,p) sur X, positif et fermé. Pour toute fonction continue psh u, le courant $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(uT)$ est positif et fermé.*

Démonstration. — Pour tout ouvert U de X, soit $\mathscr{P}(U)$ l'ensemble des fonctions continues u sur U telles que $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(uT|_U)$ soit un courant positif. Le préfaisceau $\mathscr{P}$ ainsi défini est un sous-faisceau de $\mathscr{C}_X$. Si u est psh lisse, on $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(uT) = \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u) \wedge T$, donc u appartient à $\mathscr{P}$. Si (u_n) est une suite de fonctions de $\mathscr{P}(U)$ qui converge uniformément vers une fonction u, la suite de courants $(u_nT|_U)$ converge vers $uT|_U$, donc $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(uT|_U)$ est limite de la suite de courants $(\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_nT|_U))$. Ces courants étant positifs par hypothèse, le courant $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(uT|_U)$ est positif et u appartient à $\mathscr{P}(U)$. Cela entraîne que le faisceau $\mathscr{P}$ contient le faisceau CPsh_X, ce qu'il fallait démontrer. □

Proposition 8.5.6. — *Soit $j\colon Y \to X$ un morphisme topologiquement propre d'espaces tropicaux de niveaux m et n respectivement. Soit u une fonction psh continue sur X et soit S un courant positif fermé sur Y. Le courant j_*S sur X est positif fermé et l'on a l'égalité*

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u) \wedge j_*S = j_*(\mathrm{d}'\mathrm{d}''(j^*u) \wedge S).$$

Démonstration. — L'ensemble des fonctions psh u qui vérifient cette relation forment un sous-faisceau en $\mathbf{R}_+$-modules du faisceau des fonctions continues sur X. Il est stable par limite uniforme. Compte tenu de la définition du faisceau CPsh_X, il suffit donc de vérifier qu'il contient les fonctions lisses u telles que $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u \geqslant 0$. Dans ce cas, pour toute forme lisse ω à support compact sur un ouvert U de X, on a

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''(uj_*S), \omega\rangle &= \langle uj_*S, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\omega\rangle = \langle j_*S, u\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\omega\rangle \\ &= \langle S, j^*u\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,j^*\omega\rangle = \langle j^*uS, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,j^*\omega\rangle = \langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''(j^*uS), j^*\omega\rangle \\ &= \langle j_*\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''(j^*uS), \omega\rangle,\end{aligned}$$

ainsi qu'il fallait démontrer. □

§ 8.6. COURANTS DE BEDFORD–TAYLOR

8.6.1. — Soit u et v des fonctions psh telles que $h = u - v$ est lisse. Alors on a $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(uT) = \mathrm{d}'\mathrm{d}''(hT) + \mathrm{d}'\mathrm{d}''(vT) = \mathrm{d}'\mathrm{d}''(h) \wedge T + \mathrm{d}'\mathrm{d}''(vT)$, car h est lisse. En particulier, si $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, h = 0$, on en déduit que $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(uT) = \mathrm{d}'\mathrm{d}''(vT)$. Nous ne savons pas si cette égalité

persiste en général, c'est-à-dire sans supposer que h est lisse. Cela nous conduit à poser la définition suivante.

Définition 8.6.2. — *On dit qu'un courant positif fermé T est de* Bedford–Taylor *si pour tout ouvert U de X et pour tout couple (u, v) de fonctions psh sur U telles que $\mathrm{d'd''}(u) = \mathrm{d'd''}(v)$, on a $\mathrm{d'd''}(uT|_U) = \mathrm{d'd''}(vT|_U)$.*

Si c'est le cas, il est légitime de noter $\mathrm{d'd''}(u) \wedge T$ le courant $\mathrm{d'd''}(uT)$. On s'autorisera cependant cette notation même si T n'est pas de Bedford–Taylor. Cet abus de notation sera relativement sans danger car tous les courants que nous construisons dans ce texte sont de Bedford–Taylor.

Proposition 8.6.3. — *Soit (U_i) un recouvrement ouvert de X tel que $T|_{U_i}$ est de Bedford–Taylor pour tout i ; alors T est de Bedford–Taylor.*

Démonstration. — En effet, soit u, v des fonctions psh sur un ouvert V de X telles que $\mathrm{d'd''}(u) = \mathrm{d'd''}(v)$; l'égalité de courants $\mathrm{d'd''}(uT) = \mathrm{d'd''}(vT)$ sur V résulte de sa validité sur chacun des $U_i \cap V$. On en déduit que les courants de Bedford–Taylor forment un sous-faisceau du faisceau des courants positifs fermés. □

Exemple 8.6.4. — Le courant δ_X est de Bedford–Taylor.
En effet, $u\delta_X = [u]$ donc $\mathrm{d'd''}(u\delta_X) = \mathrm{d'd''}([u]) = \mathrm{d'd''}\, u$.

Proposition 8.6.5. — *Si α est une forme lisse positive fermée et T est de Bedford–Taylor, alors il en est de même du courant $T \wedge \alpha$.*

Démonstration. — Soit en effet des fonctions u, v psh telles que $\mathrm{d'd''}(u) = \mathrm{d'd''}(v)$; si α est une forme lisse à support compact, on a

$$\mathrm{d'd''}(u(T \wedge \alpha)) = \mathrm{d'd''}(uT \wedge \alpha) = \mathrm{d'd''}(uT) \wedge \alpha.$$

De même, $\mathrm{d'd''}(v(T \wedge \alpha)) = \mathrm{d'd''}(vT) \wedge \alpha$. Comme T est un courant de Bedford–Taylor, on a $\mathrm{d'd''}(uT) = \mathrm{d'd''}(vT)$, d'où $\mathrm{d'd''}(uT) \wedge \alpha = \mathrm{d'd''}(vT) \wedge \alpha$. Cela démontre l'égalité requise. □

Proposition 8.6.6. — *Soit (T_k) une suite de courants de Bedford–Taylor qui converge faiblement vers un courant T. Le courant T est de Bedford–Taylor.*

Démonstration. — Le courant T est positif fermé. Si u est une fonction psh, on a $\mathrm{d'd''}(uT) = \lim \mathrm{d'd''}(uT_k)$ (lemme 8.5.1). Il en résulte que T est un courant de Bedford–Taylor. □

Corollaire 8.6.7. — *Soit T un courant de Bedford–Taylor et soit u une fonction continue positive. Le courant uT est de Bedford–Taylor.*

Démonstration. — Cela se déduit de la proposition par approximation locale par une fonction lisse. □

Proposition 8.6.8. — *Soit T un courant de Bedford–Taylor. Pour toute fonction continue psh u, le courant $\mathrm{d'd''}(uT)$ est de Bedford–Taylor.*

Démonstration. — Soit u une fonction psh sur X. Soit $\mathscr{P}$ le sous-préfaisceau de $\mathscr{C}_X$ tel que, pour tout ouvert U, $\mathscr{P}(U)$ soit l'ensemble des fonctions continues f sur U telles que $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(fT)$ soit un courant de Bedford–Taylor ; c'est un faisceau. Si f est lisse psh, alors $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(fT) = \mathrm{d}'\mathrm{d}''(f)\wedge T$, qui est de Bedford–Taylor, puisque T l'est, de sorte que $\mathscr{P}$ contient les fonctions lisses psh. Ce faisceau est également stable par limites uniformes (lemme 8.5.1). Par suite, $\mathscr{P}$ contient le faisceau des fonctions psh. En particulier, le courant $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(uT)$ est de Bedford–Taylor. □

§ 8.7. THÉORIE DE BEDFORD–TAYLOR : ITÉRATION

8.7.1. — Soit $u_1, \dots, u_q$ des fonctions psh sur X et soit T un courant positif fermé. Compte tenu du lemme 8.5.5, on définit par récurrence un courant positif fermé

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_2\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''(\dots\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_qT)))).$$

Par construction, ce courant est même $\mathrm{d}'\mathrm{d}''$-exact si $q \geqslant 1$.

Lorsque T est un courant de Bedford–Taylor, on démontre par récurrence à l'aide de la proposition 8.6.8 qu'il en est de même du courant

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_2\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''(\dots\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_qT)))).$$

et que ce courant ne dépend que de la suite de courants $(\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1), \dots, \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_q), T)$, justifiant ainsi la notation.

Lorsque les u_j sont lisses, ce courant est égal à

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1)\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_2)\cdots\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_q)\wedge T.$$

Dans la suite de ce texte, nous nous autoriserons l'abus de notation consistant à écrire ce courant

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1)\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_2)\cdots\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_q)\wedge T$$

même si T n'est pas de Bedford–Taylor.

En prenant $T = \delta_X$, on a $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u)\wedge\delta_X = \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u)$, pour toute fonction psh u. Plus généralement, on a

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1)\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_2)\cdots\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_q)\wedge\delta_X = \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1)\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_2)\cdots\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_q).$$

Proposition 8.7.2. — *Soit (T_k) une suite de courants positifs fermés qui converge vers un courant positif fermé T. Soit (u_0^k), $(u_1^k), \dots, (u_q^k)$ des suites de fonctions continues sur X qui convergent localement uniformément vers des fonctions $u_0, u_1, \dots, u_q$ sur X. On suppose que pour tout $j \in \{1, \dots, q\}$ et tout k, la fonction u_j^k est psh. Alors, la suite de courants*

$$u_0^k\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1^k)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_q^q)\wedge T_k$$

converge vers le courant

$$u_0\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_q)\wedge T.$$

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur q. Pour $q = 0$, l'assertion résulte du lemme 8.5.1. Supposons $q \geqslant 1$ et l'assertion démontrée pour $q-1$. Pour tout k, posons $S_k = \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_2^k\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''(\dots\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_q^kT_k)))$ et $S = \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_2\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''(\dots\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_qT)))$; ce sont des courants positifs fermés, par récurrence, et l'on a $S_k \to S$. D'après le lemme 8.5.1, on a $u_1^kS_k \to u_1S$. Par continuité de l'opérateur $\mathrm{d}'\mathrm{d}''$ sur les courants, on a donc

$\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1^k S_k) \to \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1 S)$. Comme pour tout k, le courant $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1^k S_k)$ est positif fermé, le courant $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1 S)$ l'est également. En appliquant de nouveau le lemme 8.5.1, on en conclut que $u_0^k\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1^k S_k)$ converge vers $u_0\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1 S)$, ce qu'il fallait démontrer. □

Nous aurons besoin de la variante suivante.

Proposition 8.7.3. — *Soit (T_k) une suite de courants positifs fermés qui converge vers un courant positif fermé T. Soit $f\colon X \to \mathbf{R}^n$ une carte harmonique. Soit (v_0^k), $(v_1^k), \dots, (v_q^k)$ des suites de fonctions convexes continues sur $\mathbf{R}^n$ qui convergent localement uniformément vers des fonctions $v_0, v_1, \dots, v_q$; pour tout i et tout k, posons $u_i^k = f^* v_i^k$ et $u_i = f^* v_i$. Alors, la suite de courants*

$$u_0^k\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1^k) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_q^q) \wedge T_k$$

converge vers le courant

$$u_0\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_q) \wedge T.$$

Démonstration. — La démonstration est analogue à la précédente ; on en reprend les notations. Pour $q = 0$, il s'agit du lemme 8.5.1 qui n'exige que la continuité des fonctions en jeu. Supposons $q \geqslant 1$ et l'assertion démontrée par $q-1$. Posons $S_k = \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_2^k\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''(\dots \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_q^k T_k)))$ et $S = \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_2\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''(\dots \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_q T)))$; ce sont des courants positifs fermés, par récurrence, et l'on a $S_k \to S$. D'après le lemme 8.5.1, on a $u_1^k S_k \to u_1 S$ d'où, par continuité de l'opérateur $\mathrm{d}'\mathrm{d}''$ sur les courants, la convergence $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1^k S_k) \to \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1 S)$. Pour tout k, le courant $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1^k S_k)$ est positif fermé en vertu du corollaire 8.11.3, si bien que le courant $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1 S)$ est positif fermé. En appliquant de nouveau le lemme 8.5.1, on en conclut que $u_0^k\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1^k S_k)$ converge vers $u_0\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1 S)$, ce qu'il fallait démontrer. □

Proposition 8.7.4. — *Soit T un courant positif fermé. Soit $u_1, \dots, u_m$ des fonctions psh et soit σ une permutation de $\{1, \dots, m\}$; on a*

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1) \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_2) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_m) \wedge T = \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_{\sigma(1)}) \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_{\sigma(2)}) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_{\sigma(m)}) \wedge T.$$

Démonstration. — Soit v une fonction psh sur X. Soit $\mathscr{P}$ le sous-faisceau de CPsh_X formé des fonctions psh u telles que $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''(vT)) = \mathrm{d}'\mathrm{d}''(v\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''(uT))$. Si u est lisse, on a

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''(vT)) = \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u) \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(vT) = \mathrm{d}'\mathrm{d}''(vT \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u)) = \mathrm{d}'\mathrm{d}''(v\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''(uT)),$$

de sorte que ce faisceau $\mathscr{P}$ contient les fonctions lisses. Il est stable par limites uniformes. Par suite, il contient le faisceau des fonctions psh.

Cela entraîne l'assertion voulue lorsque $m = 2$.

Le cas où σ est la transposition échangeant deux entiers successifs en découle immédiatement. Le cas général s'en déduit car σ est composée de telles transpositions. □

Proposition 8.7.5. — *Soit $j\colon Y \to X$ un morphisme topologiquement propres d'espaces tropicaux de niveaux m et n respectivement. Soit $u_1, \dots, u_p$ des fonctions psh sur X et soit S un courant positif fermé sur Y. Le courant $j_* S$ sur X est positif fermé et l'on a l'égalité*

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1) \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_2) \wedge \dots \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_p) \wedge j_* S = j_*(\mathrm{d}'\mathrm{d}''(j^* u_1) \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(j^* u_2) \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(j^* u_p) \wedge S).$$

Démonstration. — La démonstration se déduit de la proposition 8.5.6 par une récurrence immédiate sur p. □

§ 8.8. EXTENSION AUX DIFFÉRENCES DE FONCTIONS PSH

Lemme 8.8.1. — *Soit u une fonction lisse sur X. Tout point x de X possède un voisinage sur lequel u s'écrit comme la différence de deux fonctions lisses psh.*

Plus précisément, soit U un ouvert contenu dans un domaine compact W sur lequel u est tropicalisée par une carte tropicale f, il existe des fonctions lisses psh u_1, u_2 sur U, f-tropicales, telles que $u|_U = u_1 - u_2$.

Démonstration. — Soit $f\colon W \to T$ un moment tropicalisant u, soit P le polyèdre compact $f(W)$ et soit v une fonction lisse au voisinage de P telle que $u|_W = v \circ f_{\mathrm{trop}}$.

D'après la proposition 1.10.2, il existe des fonctions lisses v_1 et v_2 au voisinage de P telles que $v = v_1 - v_2$ et telles que les formes $\mathrm{d}'\mathrm{d}'' v_1$ et $\mathrm{d}'\mathrm{d}'' v_2$ sont positives. Les fonctions $u_1 = v_1 \circ f_{\mathrm{trop}}|_U$ et $v_2 = u_2 \circ f_{\mathrm{trop}}|_U$ sur U sont lisses, psh, et l'on a $u = u_1 - u_2$. □

Proposition 8.8.2. — a) *Soit u une fonction G-lisse sur X. Soit W un domaine analytique compact W sur lequel u est tropicalisée par un moment f, il existe des fonctions convexes v_1, v_2 sur l'enveloppe convexe de $f(W)$ telles que $u|_U = f^*v_1 - f^*v_2$.*

b) *Soit u une fonction paralinéaire sur X et soit W un domaine analytique compact de X sur lequel u est tropicalisée par un moment f. Il existe des fonctions paralinéaires convexes v_1, v_2 sur l'enveloppe convexe de $f(W)$ telles que $u|_U = f^*v_1 - f^*v_2$.*

Démonstration. — D'après la proposition 6.3.4, il existe un voisinage domanial compact V de x, une carte tropicale $f\colon V \to E$ sur V et une fonction G-lisse v sur $f(V)$ telle que $u|_V = f^*v$. Lorsque u est paralinéaire, v l'est. D'après les propositions 1.10.10 et 1.10.11, il existe alors des fonctions convexes v_1 et v_2 sur l'enveloppe convexe de $f(V)$ telles que $v = v_1 - v_2$ sur $f(V)$, que l'on peut choisir paralinéaires sur u l'est. D'après la proposition 8.2.5, les fonctions $u_1 = f^*v_1$ et $u_2 = f^*v_2$ sur V sont tropicalement convexes et sont paralinéaires si u l'est ; elles vérifient $u = u_1 - u_2$. □

Corollaire 8.8.3. — *Soit u une fonction G-lisse sur X. Tout point de X en lequel X est décent possède un voisinage sur lequel u s'écrit comme la différence de deux fonctions tropicalement convexes, que l'on peut choisir paralinéaires si u l'est.*

8.8.4. — Soit $\mathrm{CPsh}_X^{\pm}$ le sous-faisceau en $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de $\mathscr{C}_X$ engendré par le faisceau CPsh_X des fonctions psh. Ses sections seront appelées dpsh (« différence de fonctions plurisousharmoniques »). D'après le lemme 8.8.1, ce sous-faisceau contient les fonctions lisses. De même, les fonctions localement différence de deux fonctions tropicalement convexes seront appelées tropicalement d-convexes ; de telles fonctions sont dpsh. Lorsque X est décent, toute fonction G-lisse est tropicalement d-convexe (proposition 8.8.2).

8.8.5. — Soit T un courant positif fermé sur X de bidegré (q, q). Il existe un unique morphisme $(p+1)$-linéaire sur $\mathscr{C}_X^0 \times (\mathrm{CPsh}_X^{\pm})^p$,

$$(u^0, u^1, \dots, u^p) \mapsto u^0\, \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u^p,$$

à valeurs dans le faisceau des courants de bidegré $(p+q, p+q)$ sur X qui coïncide avec cette application lorsque $u^0, u^1, \dots, u^p$ sont psh et u^0 est positive. Par construction, l'image de ce faisceau est constituée de différences de deux courants positifs. Il est

symétrique en $(u^1, \dots, u^p)$. Si T est de Bedford–Taylor, il ne dépend que de u^0 et des courants $\mathrm{d'd''}\, u^1, \dots, \mathrm{d'd''}\, u^p$. Si, de plus, u^0 est dpsh, on a

$$\mathrm{d'd''}(u^0\, \mathrm{d'd''}\, u^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d'd''}\, u^p) = \mathrm{d'd''}\, u^0 \wedge \mathrm{d'd''}\, u^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d'd''}\, u^p.$$

Soit $f^1, \dots, f^p$ des fonctions lisses telles que $\mathrm{d'd''}(f^i) = 0$. On a

$$u^0\, \mathrm{d'd''}(u^1 + f^1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d'd''}(u^p + f^p) \wedge T = u^0\, \mathrm{d'd''}(u^1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d'd''}(u^p) \wedge T,$$

même si T n'est pas de Bedford–Taylor. Autrement dit, ce morphisme passe au quotient en un morphisme de source $\mathscr{C}^0_X \times (\mathrm{CPsh}^{\pm}_X / \mathrm{Harm}_X)^p$ où Harm_X est le faisceau sur X des fonctions lisses h telles que $\mathrm{d'd''}\, h = 0$.

Remarque 8.8.6. — Supposons que $u^1, \dots, u^p$ sont tropicalement d-convexes et soit α une forme lisse de type $(n-p, n-p)$ sur X. Alors $u_0 \mapsto \langle u_0\, \mathrm{d'd''}\, u^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d'd''}\, u^p, \alpha\rangle$ est une mesure de Radon sur X, car les u^j sont dpsh.

Démontrons que son support est localement contenu dans une partie squelettique. (Il est donc contenu dans une partie squelettique de X si ce support est compact ou si X est paracompact.)

Plus précisément, soit U un ouvert de X, soit $f\colon U \to E$ une carte tropicale, soit P une partie paralinéaire de E contenant $f(U)$ et soit $a^1, \dots, a^p$ des fonctions d-convexes sur P telles que $u^j = f^* a^j$ pour $j \in \{1, \dots, p\}$, soit enfin ω une forme de type $(n-p, n-p)$ sur P telle que $\alpha = f^*\omega$. Démontrons que la trace sur U du support de cette mesure de Radon est contenu dans $\Sigma_f^{(n)}$.

Lorsque les a^j sont lisses et convexes, la restriction à U de cette mesure est égale à la mesure associée à la forme lisse positive $f^*(\mathrm{d'd''}\, a^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d'd''}\, a^p \wedge \omega)$ et son support est contenu dans $\Sigma_f^{(n)}$. Cette propriété est locale sur X, et est préservée par limite uniforme, d'après la continuité du produit de courants à la Bedford–Taylor. Il en résulte qu'elle vaut dès que les a^p sont convexes. Par multilinéarité, le résultat vaut également lorsque les a^j sont d-convexes.

Remarque 8.8.7. — Lorsque les fonctions u^j comme ci-dessus sont par ailleurs G-$\mathscr{C}^2$, l'expression $u^0\, \mathrm{d'd''}\, u^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d'd''}\, u^p$ peut être interprétée comme une G-forme de type (p, p). Le lecteur prendra garde que le courant défini au §8.8.4 n'est pas en général celui associé à cette G-forme. Ce dernier courant ne jouera d'ailleurs pas de rôle dans la théorie, ce qui rend inoffensif cet abus de notation.

Définition 8.8.8. — *Soit X un espace tropical de niveau n, sans bord. Si u est une fonction dpsh sur X, le courant $(\mathrm{d'd''}\, u)^n$ est une mesure sur X, appelée* mesure de Monge-Ampère *de u, et notée $\mathrm{MA}(u)$. Si u est psh, cette mesure est positive.*

Remarque 8.8.9. — Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces tropicaux. Soit p un entier naturel tel que $p > \dim(X)$ et soit $u^1, \dots, u^p$ des fonctions dpsh sur X. Les fonctions $f^*u^1, \dots, f^*u^p$ sont dpsh et l'on a

$$\mathrm{d'd''}(f^*u^1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d'd''}(f^*u^p) = 0.$$

L'assertion est évidente si les u^i sont lisses. Dans ce cas, le courant $\mathrm{d'd''}(f^*u^1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d'd''}(f^*u^p) = 0$ est associé à la forme lisse de même nom, laquelle est l'image réciproque de la forme $\mathrm{d'd''}(u^1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d'd''}(u^p)$ sur X, et celle-ci est nulle puisque $p > \dim(X)$.

Pour établir le cas général, on peut supposer que les u^i sont psh. Les suites $(u^1, \dots, u^p)$ de fonctions psh qui vérifient la propriété requise forment un sous-faisceau de $(\mathrm{CPsh}_X)^p$. Par construction du produit $\mathrm{d'd''}(u^1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d'd''}(u^p)$, il est stable par limite uniforme.

Il contient les suites de fonctions lisses d'après ce qui précède, donc contient toutes les suites de fonctions psh.

§ 8.9. UN EXEMPLE DE CALCUL DE MESURE DE MONGE-AMPÈRE

8.9.1. — Soit X un espace tropical de niveau n, sans bord. Soit $(f_1, \dots, f_m)$ une famille finie de fonctions *affines* sur X et soit $f\colon X \to \mathbf{R}^m$ la carte tropicale correspondante. Posons $g = \max(f_1, \dots, f_m)$. C'est une fonction continue psh sur X (exemple 8.2.1). Le but de ce paragraphe est de fournir une description tropicale de la mesure positive $\mathrm{MA}(g)$.

Pour cela, nous commençons par en étudier l'analogue paralinéaire.

8.9.2. — Soit C un cône polyédral calibré de dimension $\leqslant n$ dans $\mathbf{R}^m$ et soit ξ son sommet. On suppose que le calibrage μ de C est adapté à une décomposition cellulaire $(C_j)_{j\in J}$ de C dont les cellules sont des cônes polyédraux de sommet ξ ; notons μ_j le vecteur-volume de C_j. Soit V_j le sous-espace affine de $\mathbf{R}^m$ engendré par C_j.

Soit I l'ensemble des $i \in \{1, \dots, m\}$ tels que $\xi_i = \max(\xi_1, \dots, \xi_m)$. Pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$ et tout $x \in \mathbf{R}^m$, posons $g_\varepsilon(x) = \varepsilon \log(\sum_{i\in I} \exp(x_i)/\varepsilon))$. Cette fonction sur $\mathbf{R}^m$ est convexe et lisse (proposition 1.7.7). Lorsque $\varepsilon \to 0$, elle converge uniformément vers $g_0\colon x \mapsto \max_{i\in I} x_i$. En particulier, elle converge uniformément vers la fonction $g\colon x \mapsto \max(x_1, \dots, x_n)$ dans le voisinage de ξ défini par les inégalités $x_j < \max(\xi_1, \dots, \xi_n)$ pour $j \notin I$.

Soit $j \in J$. Appliquons la proposition 1.7.7 aux cônes $C_j - \xi$ (de sommet 0) et aux formes linéaires $x \mapsto x_i$, pour $i \in I$. La mesure positive $\langle (\mathrm{d}'\mathrm{d}'' g_1)^n, \mu_j\rangle$ sur C_j est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et est de masse finie ; notons λ_j cette masse. C'est un nombre réel positif ou nul ; il est strictement positif si et seulement la famille $(x_i|_{V_j})_{i\in I}$ est très séparante (définition 1.7.4) ; un indice i_0 étant fixé, cela revient à demander que l'image de V_j sous $(x_i - x_{i_0})_i$ soit de dimension $< n$. Pour toute fonction ψ sur C_j, continue et à support compact, on a

$$\int_{C_j} \psi \langle (\mathrm{d}'\mathrm{d}'' g_\varepsilon)^n, \mu\rangle \to \lambda_j \psi(0)$$

lorsque $\varepsilon \to 0$.

Posons $\lambda_C = \sum_{j\in J} \lambda_j$. C'est un nombre réel positif ou nul. Il est nul si et seulement l'image sous $(x_i - x_{i_0})$ de C est e dimension $< n$. Il ne dépend pas du choix de la décomposition cellulaire (C_j).

Observons que $C^{(n)} = \varnothing$ si et seulement si $\dim(C) < n$; dans ce cas, on a $\lambda_C = 0$. Dans le cas contraire, $C^{(n)}$ est un cône de sommet ξ et l'on a $\lambda_C = \lambda_{C^{(n)}}$.

Soit U un voisinage paralinéaire de ξ dans C et soit ψ une fonction continue à support compact sur V. Appliquons la proposition 1.7.7 aux cônes $C_j - \xi$ (de sommet 0) et aux formes linéaires $x \mapsto x_i$, pour $i \in I$. On en déduit que pour toute fonction ψ sur C, continue et à support compact, on a

$$\int_{C} \psi \langle (\mathrm{d}'\mathrm{d}'' g_\varepsilon)^n, \mu\rangle \to \lambda_C \psi(0)$$

lorsque $\varepsilon \to 0$.

Remarque 8.9.3. — Comme ci-dessus, considérons un cône polyédral calibré $C \subset \mathbf{R}^m$ de sommet ξ, et soit I l'ensembles des i tels que $\xi_i = \max(\xi_1, \dots, \xi_m)$. Soit $p_I \colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^I$ la projection naturelle. Alors $p_I(C)$ est un cône polyédral de $\mathbf{R}^I$, de sommet $p_I(\xi)$. Posons $C' = C^{(p_I)}$; c'est le plus grand sous-espace paralinéaire de C tel que l'application linéaire p_I induise une immersion par morceaux affine surjective de C' sur $p_I(C)^{(n)}$; c'est un cône. Munissons alors $p_I(C)^{(n)}$ (ou $p_I(C)$, si l'on veut) du calibrage image de la restriction à C' du calibrage de C. Il résulte de la construction que l'on a $\lambda_C = \lambda_{p_I(C)}$.

Proposition 8.9.4. — *Soit X un espace tropical de niveau n, sans bord. Soit $(f_1, \dots, f_m)$ une famille finie non vide de fonctions affines sur X et soit $f \colon X \to \mathbf{R}^m$ la carte tropicale correspondante. Soit $j \in \{1, \dots, m\}$.*

Posons $g = \max(f_1, \dots, f_m)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in X$, posons $g_\varepsilon(x) = \varepsilon \log(\sum_{i=1}^m \exp(f_i(x)/\varepsilon))$. Les fonctions g_ε sont lisses, psh, tropicalisées par f ; de plus, g_ε converge uniformément vers g quand ε tend vers 0. En particulier, la fonction $g = \max(f_1, \dots, f_m)$ sur X est psh.

Pour tout $x \in \Sigma_f^{(n)}$, notons $\Pi_{f,x}$ le cône tropical de f en x (définition 5.4.6) et λ_x le nombre réel positif ou nul associé au cône calibré $\Pi_{f,x}$ de $\mathbf{R}^m$. L'ensemble des $x \in \Sigma_f^{(n)}$ tels que $\lambda_x \neq 0$ est fermé et discret dans X et l'on a

$$\mathrm{MA}(g) = \sum_{x \in \Sigma_f^{(n)}} \lambda_x \delta_x.$$

En particulier, $\mathrm{MA}(g)$ est nul au voisinage de x si la dimension tropicale de $(f_i - f_j)_i$ en x est $< n$.

Démonstration. — Soit h la fonction $(x_1, \dots, x_m) \mapsto \max(x_1, \dots, x_m)$ sur $\mathbf{R}^m$; pour tout $\varepsilon > 0$, soit h_ε la fonction donnée par $(x_1, \dots, x_m) \mapsto \varepsilon \log(\sum_{i=1}^m \exp(x_i/\varepsilon))$. D'après le lemme 1.7.6, la fonction h_ε sur $\mathbf{R}^m$ est convexe et l'on a $g = f^*h = \lim_{\varepsilon \to 0^+} f^*h_\varepsilon$ (uniformément). D'après la proposition 8.2.5, la fonction g sur X est donc psh et la mesure positive $\mathrm{MA}(g)$ est limite de mesures lisses $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(f^*h_\varepsilon)^n$.

La partie squelettique $\Sigma_f^{(n)}$ de X est un support fort des formes $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(f^*h_\varepsilon)^n$; elle contient donc le support de la mesure associée et, par passage à la limite, le support de la mesure $\mathrm{MA}(g)$.

Soit $x \in X$. D'après ce qui précède, la mesure $\mathrm{MA}(g)$ est nulle au voisinage de x si $x \notin \Sigma_f^{(n)}$. On suppose dans la suite que $x \in \Sigma_f^{(n)}$.

Soit I l'ensemble des $i \in \{1, \dots, m\}$ tels que $g(x) = f_i(x)$. On a donc $g = \max_{i \in I}(f_i)$ au voisinage de x.

Supposons que $x \notin \Sigma_{p_I \circ f}^{(n)}$; dans ce cas, le même argument que précédemment entraîne que $\mathrm{MA}(g)$ est nulle au voisinage de x. D'autre part, le cône $p_I(\Pi_{f,x})$ est de dimension $< n$, et donc $\lambda_x = 0$ d'après la remarque 8.9.3. Sinon, on peut considérer le cône tropical de $p_I \circ f$ en x, et son invariant λ coïncide avec celui de $\Pi_{f,x}$, comme on le voit en combinant la remarque 5.5.7 et la remarque 8.9.3. On peut donc supposer que $I = \{1, \dots, m\}$. On peut aussi supposer que X est compact.

Soit $\mathscr{C}$ une décomposition cellulaire de $\Sigma_f^{(n)}$ en f-cellules commodes (lemme 14.1.5). Soit V la réunion dans $\Sigma_f^{(n)}$ des n-cellules de $\mathscr{C}$ qui contiennent x ; c'est un voisinage compact de x dans $\Sigma_f^{(n)}$. Posons $\xi = f(x)$.

Soit φ une fonction continue sur X. dont le support est contenu dans V. On a

$$\int_X \varphi\,\mathrm{MA}(g) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_X \varphi\,\mathrm{MA}(f^*h_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sum_{\substack{C\in\mathscr{C}\\ \dim(C)=n\\ x\in C}} \int_C \varphi\,\mathrm{MA}(f^*h_\varepsilon).$$

Fixons une n-cellule $C \in \mathscr{C}$ contenant x et posons $D = f(C)$. Par hypothèse, D est une cellule forte de $\mathbf{R}^m$ et f induit un homéomorphisme paralinéaire de C sur D ; soit $\psi\colon D \to \mathbf{R}$ l'unique fonction continue telle que $\psi \circ f|_C = \varphi|_C$. Comme C est une f-cellule commode, l'image par f du calibrage canonique μ_C de C est un vecteur-volume constant μ_D de D. On a donc

$$\int_C \varphi\,\mathrm{MA}(f^*h_\varepsilon) = \int_D \psi\langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''(h_\varepsilon)^n, \mu_D\rangle.$$

Lorsque $\varepsilon \to 0$, le second membre converge vers $\lambda_D\psi(0) = \lambda_D\varphi(x)$, où λ_D est l'invariant λ du cône de sommet ξ engendré par D, calibré par le vecteur-volume μ_D. Par suite,

$$\int_X \varphi\,\mathrm{MA}(f^*h_\varepsilon) = \sum_{C\in\mathscr{C}_n} \int_C \varphi\,\mathrm{MA}(f^*h_\varepsilon) \to \left(\sum_D \lambda_D\right)\varphi(x).$$

Il reste à observer que $\lambda_x = \sum_D \lambda_D$, ce qui découle du fait que le cône tropical $\Pi_{f,x}$ est le cône de sommet ξ engendré par le polyèdre $f_{\mathrm{trop}}(V)$, muni de l'image du calibrage canonique.

Nous avons ainsi démontré que $\mathrm{MA}(g)|_U = \lambda_x\delta_x$ pour tout voisinage ouvert U de x tel que $U \cap \Sigma_f^{(n)} \subset V$.

En particulier, le support de la mesure $\mathrm{MA}(g)$ est discret ; il est fermé par construction. La formule globale $\mathrm{MA}(g) = \sum_{x\in\Sigma_f^{(n)}} \lambda_x\delta_x$ en résulte. □

§ 8.10. PRODUITS DE COURANTS SQUELETTIQUES

Soit X un espace tropical de niveau n, sans bord.

Proposition 8.10.1. — *Soit T un courant squelettique fermé de bidimension (p,p) sur X et soit u une fonction G-lisse sur X.*

Soit f une carte tropicale sur un ouvert U de X, soit r un entier naturel tel que $r \leqslant p$, soit ω une forme lisse f-tropicale de type $(p-r,p)$ et soit ρ une forme lisse à support compact de type $(r,0)$ sur U ; on a

$$\langle \mathrm{d}'(uT), \rho\wedge\omega\rangle = \int_{P_f^T} \mathrm{d}'(u)\wedge\rho\wedge\omega.$$

En particulier, on a $\mathrm{d}'(uT) = \mathrm{d}'u \wedge T = T \wedge \mathrm{d}'u$.

Démonstration. — D'après l'exemple 7.7.10, on a

$$\langle \mathrm{d}'(uT), \rho\omega\rangle = \int_{P_f^T} \mathrm{d}'u\wedge\rho\wedge\omega - \int_{P_f^T}^{\partial} u\rho\wedge\omega.$$

Comme le courant T est fermé, ce même exemple affirme en outre que

$$-\int_{P_f^T}^{\partial} v\rho\wedge\omega = \langle \mathrm{d}'\,T, v\rho\wedge\omega\rangle = 0$$

pour toute fonction lisse v sur U. Par densité des fonctions lisses dans les fonctions continues, on a donc $\int_{P_f^T}^{\partial} u\rho\wedge\omega = 0$. Ainsi,

$$\langle \mathrm{d}'(uT), \rho\wedge\omega\rangle = \int_{P_f^T} \mathrm{d}'\,u\wedge\rho\wedge\omega = \langle T\wedge \mathrm{d}'\,u, \rho\wedge\omega\rangle,$$

en vertu de la proposition 7.5.15.

L'assertion est en particulier vérifiée si $r = 0$, auquel cas ρ est une fonction lisse. D'après la remarque 7.2.5, cela démontre l'égalité $\mathrm{d}'(uT) = T\wedge \mathrm{d}'\,u$. □

Proposition 8.10.2. — *Soit T un courant squelettique fermé de type (p,p) sur X. Soit $f\colon X\to \mathbf{R}^n$ une carte tropicale, soit v une fonction G-lisse sur $\mathbf{R}^n$ et soit $u = f^*v$. Pour toute forme lisse f-tropicale ω symétrique de type $(p-1,p-1)$ et toute fonction lisse ρ sur X telles que le support de $\rho\omega$ soit compact, on a*

$$\langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''(uT), \rho\omega\rangle = \int_{P_f^T} \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u\wedge\rho\omega - \int_{P_f^T}^{\partial} \mathrm{d}''\,u\wedge\rho\omega.$$

Démonstration. — Soit W un domaine compact de X qui est un voisinage du support de $\rho\omega$. Soit (V_i) une famille finie de domaines compacts de X dont les intérieurs recouvrent W et tels que $\rho|_{\mathring{V}_i}$ soit tropicale, pour tout i. Soit V la réunion des V_i.

Pour tout i, soit f_i une carte tropicale sur V_i tropicalisant ρ et soit h_i la carte tropicale $(f_i, f|_{V_i})$. D'après la proposition 7.6.9 et la remarque qui la suit, il existe un sous-espace squelettique p-calibré Q contenant $P_f^T\cap W$ tel que, pour toute forme lisse θ dont le support est contenu dans $\mathring{W}$ de type $(p-q,0)$ et toute forme lisse η de type (q,p) dont la restriction à $\mathring{V}_i$ est h_i-tropicale, pour tout i, on ait $\langle T, \theta\wedge\eta\rangle = \int_Q \theta\wedge\eta$.

On écrit

$$\langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''(uT), \rho\omega\rangle = \langle uT, \mathrm{d}'\mathrm{d}''(\rho\omega)\rangle = \langle T, u\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''(\rho\omega)\rangle.$$

Sur V_i, la forme $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(\rho\omega)$ est h_i-tropicale ; la fonction u est G-lisse. Par construction de Q, on a donc

$$\langle T, u\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''(\rho\omega)\rangle = \int_Q u\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''(\rho\omega).$$

Appliquons la formule de Green (proposition 4.6.15), ce qui est loisible puisque u et $\rho\omega$ sont symétriques ; on a :

$$\int_Q u\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''(\rho\omega) = \int_Q \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u\wedge\rho\omega + \int_Q^{\partial} u\,\mathrm{d}''(\rho\omega) - \mathrm{d}''\,u\wedge\rho\omega.$$

La G-forme $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u\wedge\rho\omega$ sur X est de type (p,p) ; pour tout i, sa restriction à V_i est h_i-tropicale ; son support est contenu dans K. En appliquant la proposition 7.6.9, on obtient donc

$$\int_Q \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u\wedge\rho\omega = \langle T, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u\wedge\rho\omega\rangle.$$

La G-forme $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u\wedge\omega$ sur X est f-tropicale et de type (p,p). Compte tenu de la proposition 7.5.15, on a ainsi

$$\langle T,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u\wedge\rho\omega\rangle=\langle T,\rho\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u\wedge\omega\rangle=\int_{P_f^T}\rho\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u\wedge\omega=\int_{P_f^T}\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u\wedge\rho\omega.$$

La fonction G-lisse v sur $\mathbf{R}^n$ est limite localement uniforme de fonctions lisses v_n ; posons $u_n=f^*v_n$. Pour tout n, on peut écrire

$$\int_Q^\partial u_n\,\mathrm{d}''(\rho\omega)=\int_Q\mathrm{d}'(u_n\,\mathrm{d}''(\rho\omega))=\langle T,\mathrm{d}'(u_n\,\mathrm{d}''(\rho\omega))\rangle,$$

en appliquant la proposition 7.6.9 à la forme $\mathrm{d}'(u_n\,\mathrm{d}''(\rho\omega))$. Puisque T est fermé, on a ensuite

$$\int_Q^\partial u_n\,\mathrm{d}''(\rho\omega)=-\langle\mathrm{d}'\,T,u_n\,\mathrm{d}''(\rho\omega)\rangle=0.$$

En passant à la limite, on obtient

$$\int_Q^\partial u\,\mathrm{d}''(\rho\omega)=0.$$

Démontrons maintenant que

$$\int_Q^\partial\mathrm{d}''\,u\wedge\rho\omega=\int_{P_f^T}^\partial\mathrm{d}''\,u\wedge\rho\omega.$$

On commence par appliquer le théorème de Stokes et la proposition 7.6.9 :

$$\int_Q^\partial\mathrm{d}''\,u\wedge\rho\omega=\int_Q\mathrm{d}'(\mathrm{d}''\,u\wedge\rho\omega)=\langle T,\mathrm{d}'(\mathrm{d}''\,u\wedge\rho\omega)\rangle.$$

On a

$$\begin{aligned}\mathrm{d}'(\mathrm{d}''\,u\wedge\rho\omega)&=\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u\wedge\rho\omega-\mathrm{d}''\,u\wedge\mathrm{d}'(\rho\omega)\\&=\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u\wedge\rho\omega-\mathrm{d}''\,u\wedge\mathrm{d}'\,\rho\omega-\mathrm{d}''\,u\wedge\rho\,\mathrm{d}'\,\omega.\end{aligned}$$

Les G-formes $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u\wedge\omega$, $\mathrm{d}''\,u\wedge\omega$ et $\mathrm{d}''\,u\wedge\mathrm{d}'\,\omega$ sont f-tropicales de type (p,p), $(p-1,p)$ et (p,p) respectivement. D'après la proposition 7.6.9, on a donc

$$\begin{aligned}\int_Q^\partial\mathrm{d}''\,u\wedge\rho\omega&=\int_Q(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u\wedge\rho\omega-\mathrm{d}''\,u\wedge\mathrm{d}'\,\rho\omega-\mathrm{d}''\,u\wedge\rho\,\mathrm{d}'\,\omega)\\&=\langle T,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u\wedge\rho\omega-\mathrm{d}''\,u\wedge\mathrm{d}'\,\rho\omega-\mathrm{d}''\,u\wedge\rho\,\mathrm{d}'\,\omega\rangle\\&=\int_{P_f^T}(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u\wedge\rho\omega-\mathrm{d}''\,u\wedge\mathrm{d}'\,\rho\omega-\mathrm{d}''\,u\wedge\rho\,\mathrm{d}'\,\omega)\\&=\int_{P_f^T}\mathrm{d}'(\mathrm{d}''\,u\wedge\rho\omega)\\&=\int_{P_f^T}^\partial\mathrm{d}''\,u\wedge\rho\omega.\end{aligned}$$

Cela démontre la formule annoncée. □

Théorème 8.10.3. — *Soit X un espace tropical de niveau n, sans bord. Soit T un courant squelettique* fermé *de bidimension (p,p) sur X et soit u une fonction paralinéaire sur X. Le courant $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(uT)$ est squelettique.*

Démonstration. — L'assertion étant locale, on peut supposer que X est paracompact et que u est tropicale (proposition 6.3.4).

Il suffit de prouver que pour toute carte tropicale f sur un ouvert U de X, il existe une partie squelettique $(p-1)$-calibrée Q_f^T de U telle que pour toute forme ω f-tropicale de type $(p-1,p-1)$, symétrique et toute fonction lisse à support compact ρ sur U, on a $\langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''(uT), \rho\omega\rangle = \int_{Q_f^T} \rho\omega$. On peut supposer la carte f assez fine pour que u soit f-tropicale. Pour simplifier les notations, on suppose $U = X$.

Le courant $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(uT)$ est symétrique.

Comme u est paralinéaire, la G-forme $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u$ sur X est nulle, de sorte que, d'après la proposition 8.10.2, on a

$$\langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''(uT), \rho\omega\rangle = -\int_{P_f^T}^{\partial} \mathrm{d}''\, u \wedge \rho\omega$$

pour toute forme lisse f-tropicale ω de type $(p-1,p-1)$ et toute fonction lisse ρ telles que $\rho\omega$ soit à support compact.

Soit $\mathscr{C}$ une décomposition cellulaire de P_f^T en f-cellules, assez fine pour que la restriction de u à chaque cellule de $\mathscr{C}$ soit f-affine. Pour tout entier d, notons $\mathscr{C}_d$ l'ensemble des cellules de dimension d de $\mathscr{C}$.

On a

$$\int_{P_f^T}^{\partial} \mathrm{d}''\, u \wedge \rho\omega = \sum_{C\in\mathscr{C}_p} \int_C^{\partial} \mathrm{d}''\, u \wedge \rho\omega.$$

L'intégrale de bord $\int_C^{\partial} \mathrm{d}''\, u\wedge\rho\omega$ est une somme d'intégrales sur des cellules $D \in \mathscr{C}_{p-1}$ de réunion $\partial(C)$. La formule précédente montre que la forme linéaire $\rho \mapsto \langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''(uT), \rho\omega\rangle$ sur l'espace des fonctions lisses à support compact est une mesure supportée par la réunion de ces cellules, absolument continue par rapport à leur mesure de Lebesgue. Pour déterminer cette mesure, il suffit donc de la calculer après restriction à l'intérieur d'une telle cellule $D \in \mathscr{C}_{p-1}$. On peut ainsi supposer que le support de ρ ne rencontre aucune autre cellule de dimension $p-1$ que D.

Choisissons une forme affine v_D sur $\mathbf{R}^n$ telle que $u|_D = f|_D^* v_D$. Si l'on remplace u par $u - f^*v_D$, on ne change pas le courant à calculer, car f^*v_D est lisse et T est fermé, de sorte que $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(f^*v_D T) = \mathrm{d}'\mathrm{d}''(f^*v_D)\wedge T = 0$, étant donné que $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(f^*v_D) = 0$. On peut donc supposer que $u|_D = 0$.

Choisissons une orientation ε_D de $f(D)$ et un $(p-1)$-vecteur non nul ν_D sur $f(D)$, de sorte que $f^*[\nu_D, \varepsilon_D]$ est un vecteur-volume non nul sur D.

Soit $C \in \mathscr{C}_p$ une cellule telle que $D \subset C$. Travaillons un instant en coordonnées : supposons donc que $D = \{0\}\times\mathbf{R}^{p-1}$ et $C = \mathbf{R}_-\times\mathbf{R}^{p-1}$ munis de leurs orientations canoniques ε_D et ε_C. Munissons D du $(p-1)$-vecteur $\nu_D = e_2\wedge\cdots\wedge e_p$ et C du p-vecteur $\nu_C = e_1\wedge\cdots\wedge e_p$. Il existe un unique nombre réel λ_C tel que le vecteur-volume de C soit donné par $\mu_C = \lambda_C[\nu_C, \varepsilon_C]$. Il existe aussi un unique nombre réel a_C tel que l'on ait $u(x_1,\dots,x_p) = a_C x_1$ sur C. On peut uniquement décomposer la forme $\omega|_C$ sous la forme

$$\omega|_C = \omega_0 + \mathrm{d}'\, x_1\wedge\omega_1 + \mathrm{d}''\, x_1\wedge\omega_2 + \mathrm{d}'\, x_1\wedge\mathrm{d}''\, x_1\wedge\omega_3,$$

où les ω_i sont des formes ne faisant intervenir que les variables $x_2, \dots, x_p$, respectivement de type $(p-1,p-1)$, $(p-2,p-1)$, $(p-1,p-2)$ et $(p-2,p-2)$. Avec ces notations, on a aussi $\omega|_D = \omega_0|_D$. Puisque le support de ρ ne rencontre aucune face de $\partial(C)$ autre que D, on a

$$\begin{aligned}
\int_C^{\partial} \langle \mathrm{d}'' u \wedge \rho\omega, \mu_C\rangle &= \int_D a_C\lambda_C \langle \mathrm{d}'' x_1 \wedge \rho\omega, [\nu_C, \varepsilon_C]\rangle \\
&= \int_D a_C\lambda_C \langle \mathrm{d}'' x_1 \wedge \rho\omega, [e_1 \wedge \nu_D, \varepsilon_C]\rangle \\
&= \int_D a_C\lambda_C \langle \mathrm{d}'' x_1 \wedge \rho(\omega_0 + \mathrm{d}' x_1 \wedge \omega_1), [e_1 \wedge \nu_D, \varepsilon_C]\rangle \\
&= a_C\lambda_C \int_D \langle \rho(\omega_0 + \mathrm{d}' x_1 \wedge \omega_1)|_D, [\nu_D, \varepsilon_D]\rangle \\
&= a_C\lambda_C \int_D \langle \rho\omega_0|_D, \nu_D\rangle \\
&= a_C\lambda_C \int_D \langle \rho\omega|_D, \nu_D\rangle.
\end{aligned}$$

Soit μ_D le $(p-1)$-vecteur-volume sur D défini par $\mu_D = (\sum_{C\supset D} a_C\lambda_C) f^*[\nu_D, \varepsilon_D]$. Comme le support de ρ ne rencontre aucune face de $\partial(C)$ autre que D, on a

$$\langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''(uT), \rho\omega\rangle = \int_D \langle \rho\omega, \mu_D\rangle.$$

Lorsque D varie, ces vecteurs-volumes μ_D munissent la réunion Q des cellules de dimension $p-1$ de $\mathscr{C}$ d'un $(p-1)$-calibrage μ_Q telle que pour toute forme lisse ω, f-tropicale et de type $(p-1,p-1)$ et toute fonction lisse ρ telles que le support de $\rho\omega$ soit compact, on ait

$$\langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''(uT), \rho\omega\rangle = \int_Q \theta\omega.$$

Cela conclut la démonstration du théorème. □

Remarque 8.10.4. — Soit T un courant squelettique *fermé*. Les arguments de la proposition 8.10.2 et du théorème 8.10.3 entraînent un résultat plus général sur la structure du courant $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(uT)$ lorsque u est seulement supposée G-lisse. D'après la proposition 8.10.2, ce courant est la somme de deux termes.

Le premier terme est le courant $T \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u$, produit du courant paralinéaire G par la G-forme $\mathrm{d}'\mathrm{d}'' u$.

Le second terme, donné par $\rho\omega \mapsto -\int_{P_f^T}^{\partial} \mathrm{d}'' u \wedge \rho\omega$ lorsque ω et u sont f-tropicales, pour un moment f, a été explicité dans la preuve du théorème 8.10.3 lorsque u est paralinéaire. Cependant, en reprenant les arguments de cette démonstration, on constate qu'on y construit (si X est paracompact et u f-tropicale) un espace paralinéaire Q_f^T muni d'un « calibrage G-lisse » tel que ce terme soit égal à $\rho\omega \mapsto \int_{Q_f^T} \rho\omega$, lorsque ω est est f-tropicale et $\rho\omega$ à support compact. Dans les calculs de *loc. cit.*, il suffit en effet de remplacer le nombre réel a_C par la dérivée partielle $\partial u/\partial x_1$, qui est une fonction lisse sur chaque cellule D.

Corollaire 8.10.5. — *Soit X un espace tropical de niveau n, sans bord, soit T un courant squelettique fermé sur X et soit $u_1, \dots, u_m$ des fonctions paralinéaires sur X. Le courant $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_m) \wedge T$ est paralinéaire.*

Démonstration. — Compte tenu de la définition

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_m) \wedge T\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1 \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_2) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_m) \wedge T),$$

le corollaire se déduit du théorème 8.10.3 par récurrence sur m. □

§ 8.11. TROPICALISATIONS HARMONIQUES ET COURANTS DE BEDFORD–TAYLOR

On démontre ici plusieurs conséquences du théorème 7.8.5 pour les courants de Bedford–Taylor.

Proposition 8.11.1. — *Soit X un espace tropical de niveau n, sans bord, soit T un courant squelettique sur X qui est de Bedford–Taylor et soit α une G-forme sur X qui est localement harmoniquement tropicalisable. On a les égalités*

$$\mathrm{d}'(T \wedge \alpha) = T \wedge \mathrm{d}'\,\alpha \quad \textit{et} \quad \mathrm{d}''(T \wedge \alpha) = T \wedge \mathrm{d}''\,\alpha.$$

Démonstration. — Par partition de l'unité, il suffit de démontrer cette égalité de courants contre une forme du type $\rho\omega$ où ρ est une fonction lisse dont le support est contenu l'intérieur $\mathring{W}$ d'un domaine compact W de X telles qu'il existe une carte tropicale f sur W qui tropicalise α et ω ; on exige également que α s'écrive $u^*\beta$, où $u\colon W \to \mathbf{R}^d$ est une carte G-tropicale dont la restriction à $\mathring{W}$ est harmonique.

Notons (p, q) le bidegré de α ; par définition de $T \wedge \alpha$, $T \wedge \mathrm{d}'\,\alpha$ et du calcul différentiel sur les courants, on a

$$\langle T \wedge \mathrm{d}'\,\alpha, \rho\omega\rangle = \int_{P_f^T} \mathrm{d}'\,\alpha \wedge \rho\omega$$

et

$$\langle \mathrm{d}'(T \wedge \alpha), \rho\omega\rangle = (-1)^{p+q+1}\langle T \wedge \alpha, \mathrm{d}'(\rho\omega)\rangle = (-1)^{p+q+1} \int_{P_f^T} \alpha \wedge \mathrm{d}'(\rho\omega).$$

Il s'agit de prouver que

$$0 = \int_{P_f^T} (\mathrm{d}'\,\alpha \wedge \rho\omega + (-1)^{p+q}\alpha \wedge \mathrm{d}'(\rho\omega)) = \int_{P_f^T} \mathrm{d}'(\alpha \wedge \rho\omega).$$

En remplaçant α par $\alpha \wedge \omega$ et en adjoignant f_{trop} à u, on se ramène au cas où $\omega = 1$; la forme α est alors de type (p, p). Le courant T est de type (p, p) et P_f^T est purement de dimension p. Notons β une forme lisse au voisinage de $u(W)$ telle que $\alpha = u^*\beta$.

Notons Σ un voisinage paralinéaire compact de $P_f^T \cap \mathrm{supp}(\rho)$ dans P_f^T. Soit $\mathscr{C}$ une décomposition cellulaire de Σ qui est adaptée à son p-calibrage et telle les u_i soient affines sur chaque cellule. Pour toute cellule C de dimension p, notons μ_C son p-calibrage.

Par la formule de Stokes, on a

$$\int_{P_f^T} \mathrm{d}'(\rho\alpha) = \int_{\Sigma} \mathrm{d}'(\rho u^*\beta) = \int_{\Sigma}^{\partial} \rho u^*\beta = \sum_{D \in \mathscr{C}_{p-1}} \int_D \left(\sum_{C \supset D} \langle (\rho u^*\beta)_C, \mu_C\rangle \right).$$

Soit D une $(p-1)$-cellule. Si C est une cellule contenant D telle que l'application affine $u|_C$ ne soit pas injective, on a $u^*\beta = 0$ sur C. Si $\mathscr{C}_D$ est l'ensemble des cellules $C \in \mathscr{C}$ de dimension p qui contiennent D et telles que l'application affine $u|_C$ soit injective, on a donc

$$\int_\Sigma^\partial \rho u^*\beta = \sum_{D\in\mathscr{C}_{p-1}} \int_D \left(\sum_{C\in\mathscr{C}_D} \langle (\rho u^*\beta)_C, \mu_C\rangle \right).$$

Si $u|_D$ n'est pas injective, alors $u|_C$ n'est injective pour aucune cellule C contenant D, donc $\mathscr{C}_D$ est vide.

Supposons que $u|_D$ soit injective et notons u_D^{-1} la bijection réciproque de $u_D\colon D \to u(D)$. Soit $C \in \mathscr{C}_D$; notons u_C^{-1} la bijection réciproque de $u|_C\colon C \to u(C)$; sa restriction à $u(D)$ coïncide avec u_D^{-1}. Sur D, on a l'égalité de $(p-1,0)$-formes

$$\langle (\rho u^*\alpha)_C, \mu_C\rangle = \rho u_C^* \langle \alpha_{u(C)}, u_*\mu_C\rangle,$$

donc

$$\int_D \langle (\rho u^*\alpha)_C, \mu_C\rangle = \int_D \rho u_C^* \langle \alpha_{u(C)}, u_*\mu_C\rangle = \int_{u(D)} \rho\circ u_D^{-1} \langle \alpha_{u(C)}, u_*\mu_C\rangle.$$

La contraction d'une $(p-1,p)$-forme sur $\mathbf{R}^p$ avec un p-vecteur-volume est une opération ponctuelle ; comme α est supposée lisse, on peut écrire

$$\langle \alpha_{u(C)}, u_*\mu_C\rangle = \langle \alpha, u_*\mu_C\rangle|_C.$$

Alors

$$\int_{u(D)} \rho\circ u_D^{-1} \langle \alpha_{u(C)}, u_*\mu_C\rangle = \int_{u(D)} \rho\circ u_D^{-1} \langle \alpha, u_*\mu_C\rangle$$

et

$$\int_D \sum_{C\in\mathscr{C}_D} \langle (\rho u^*\alpha)_C, \mu_C\rangle = \int_{u(D)} \rho\circ u_D^{-1} \langle \alpha, \sum_{C\in\mathscr{C}_D} u_*\mu_C\rangle.$$

Il suffit donc de prouver l'égalité

$$\sum_{C\in\mathscr{C}_D} u_*\mu_C = 0$$

pour toute cellule D de dimension $(p-1)$ de $\mathscr{C}$.

Utilisons l'hypothèse que toute composante v de u est harmonique : comme T est un courant de Bedford–Taylor, on a donc $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(vT) = 0$ sur $\mathring{W}$. Si ω est une forme lisse f-tropicale et ρ est une fonction lisse telles que $\rho\omega$ soit à support compact dans $\mathring{W}$, la proposition 8.10.2 fournit l'égalité

$$0 = \langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''(vT), \rho\omega\rangle = \int_\Sigma \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, v\wedge\rho\omega - \int_\Sigma^\partial \mathrm{d}''\, v\wedge\rho\omega = -\int_\Sigma^\partial \mathrm{d}''\, v\wedge\rho\omega$$

puisque v est paralinéaire.

Fixons une $(p-1)$-cellule $D \in \mathscr{C}$ et soit $x \in \mathring{D}$. Considérons un morphisme de tores $p\colon T \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{p-1}$ tel que la composée $(p\circ f)_{\mathrm{trop}}$ induise une immersion par morceaux d'un voisinage de x dans D vers $\mathbf{R}^{p-1}$.

Dans la suite, on va se contenter de considérer des formes ω du type $f^*p^*\gamma$, où γ est une $(p-1,p-1)$-forme lisse sur $\mathbf{R}^{p-1}$, et des fonctions lisses ρ dont le support ne rencontre aucune p-cellule de Σ autres que celles qui contiennent D.

Choisissons un $(p-1)$-vecteur μ_D, une orientation ε_D. Pour toute p-cellule de $\mathscr{C}$ contenant D, on en déduit une orientation de C (par la règle de la normale sortante)

et un vecteur e_C dans C tel que le calibrage canonique de C soit égal à $[e_C \wedge \mu_D, \varepsilon_C]$. Fixons aussi une fonction affine φ_C sur C qui est nulle sur D et telle que $\varphi_C(e_C) = 1$.

Soit $a_C = \partial_{e_C}(v|_C)$ la dérivée de $v|_C$ dans la direction de e_C ; alors $v_C = v - a_C\varphi_C$ est invariant par e_C et donc provient de D par la projection de C sur D parallèlement à e_C. Sur C, on a donc $\mathrm{d}'' v = \mathrm{d}'' v_C + a_C \mathrm{d}'' \varphi_C$. Compte tenu de la construction de $\omega = f^*p^*\gamma$, lorsqu'on calcule le produit extérieur $\mathrm{d}'' v \wedge \omega$, qu'on le contracte par le calibrage canonique μ_C et qu'on le restreint à D, il reste

$$a_C \theta \langle f^*p^*\gamma|_D, \mu_D\rangle.$$

On a donc

$$\int_D \sum_{C \supset D} a_C \rho \langle f^*p^*\gamma, \mu_D\rangle = 0.$$

Comme θ et β sont arbitraires, on en déduit $\sum_{C\supset D} a_C f_*p^*\mu_D = 0$; en simplifiant par le $(p-1)$-vecteur non nul $p_*f_*\mu_D$, on a ainsi prouvé l'égalité

$$\sum_{C\supset D} \partial_{e_C}(v|_C) = 0.$$

Avec les notations précédentes, $\mu_C = \mu_D \wedge e_C$ et $u_*(\mu_C) = u_*(\mu_D) \wedge u_*(e_C)$. Le premier facteur $u_*(\mu_D)$ est indépendant de C, le second est le vecteur dont les coordonnées sont les $a_C\varphi_C(e_C) = \partial_{e_C}(v|_C)$, lorsque v parcourt les coordonnées de u. On a donc

$$\sum_{D\supset C} u_*(\mu_C) = u_*(\mu_D) \wedge \sum_{C\supset D} u_*(e_C) = 0$$

puisque les composantes du vecteur $\sum_C u_*(e_C)$ sont données par $\sum_C \partial_{e_C}(v|_C) = 0$. □

Corollaire 8.11.2. — *Soit T un courant squelettique sur X, localement différence de courants de Bedford–Taylor, et soit $u_1, \dots, u_d$ des fonctions G-lisses, localement harmoniquement tropicalisables. Alors le produit*

$$T \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_d)$$

pris au sens de la théorie de Bedford–Taylor coïncide avec le produit du courant squelettique T par la G-forme $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_d)$.

Démonstration. — Pour résoudre le conflit de notations, désignons dans cette preuve par $\cap$ le produit à la Bedford–Taylor et par $\wedge$ le produit naïf entre G-formes, ou celui d'un courant paralinéaire par une G-forme. Il s'agit de prouver

$$T \cap \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1) \cap \cdots \cap \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_d) = T \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_d).$$

Par récurrence, on peut supposer que

$$T \cap \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1) \cap \cdots \cap \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_{d-1}) = T \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_{d-1}).$$

Ce courant S est localement différence de courants de Bedford–Taylor ; il s'agit alors de démontrer que $S \cap \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1) = S \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1)$. On est ainsi ramené au cas $d = 1$ et $S = T$. Alors, on a

$$T \cap \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1) = \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1 T) = \mathrm{d}'\left(\mathrm{d}''(u_1 T)\right) = \mathrm{d}'(T \wedge \mathrm{d}'' u_1) = T \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_1$$

d'après la proposition 8.11.1 appliquée avec d'' puis avec d'. Cela conclut la démonstration. □

Corollaire 8.11.3. — *Soit X un espace tropical de niveau n, sans bord. Soit T un courant positif fermé sur X et soit u une fonction continue, localement de la forme f^*v, où f est une carte harmonique et v est une fonction convexe. Alors u est dpsh et le courant $T \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u$ sur X est positif.*

Démonstration. — Le résultat est local sur X ; on peut donc supposer qu'il existe une telle carte harmonique sur X. Par approximation, on peut également supposer que v est lisse. Alors, u est G-lisse, de sorte que u est dpsh. De plus, la G-forme $\mathrm{d}'\mathrm{d}'' u$ est égale à $f^*(\mathrm{d}'\mathrm{d}'' v)$, donc est positive. Le corollaire précédent identifie le courant $T \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u$ au produit de T par la G-forme positive $\mathrm{d}'\mathrm{d}'' u$. par définition de ce dernier courant, il est positif. □

§ 8.12. NÉGLIGEABILITÉ DES ENSEMBLES POLAIRES

Théorème 8.12.1. — *Soit X un espace tropical de niveau n, sans bord. On suppose que tout point x de X possède une base de voisinages ouverts U sur lesquels il existe une fonction psh lisse $\rho\colon U \to \mathbf{R}$ telle que l'ouvert de U défini par $\{\rho < 0\}$ soit un voisinage relativement compact de x dans U.*

Soit $u_1, \dots, u_n$ des fonctions psh continues sur X qui sont localement approchables, soit V une fonction psh localement approchable sur X. Si V est localement intégrable sur X, est elle est localement intégrable pour la mesure $\mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_1 \wedge \dots \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_n$ sur X.

Démonstration. — L'assertion est locale sur X. Soit x un point de X. Comme les fonctions u_i et la fonction V sont localement approchables, on peut donc supposer que les u_i sont limite uniforme de suites $(u_{i,\ell})_\ell$ et que V est limite décroissante d'une suite $(V_p)_p$ de fonctions psh lisses sur X. Compte tenu de l'hypothèse sur X, on peut en outre supposer qu'il existe une fonction psh lisse ρ sur X telle que l'ouvert U défini par $\rho < 0$ soit un voisinage relativement compact de x.

Reprenons les notations de la proposition 8.4.3 en prenant $m = n$ et $a = 3$. Pour tous entiers ℓ et p, on a donc l'inégalité

$$\int_U \beta_n \wedge (-V_p)\, \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_{1,\ell} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_{n,\ell} \leqslant C(n,3)\|u_{1,\ell}\|_U \dots \|u_{n,\ell}\|_U \int_U (-V_p)\beta_0.$$

Comme β_n est nulle hors de U, on peut récrire cette inégalité

$$\int_X \beta_n \wedge (-V_p)\, \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_{1,\ell} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_{n,\ell} \leqslant C(n,3)\|u_{1,\ell}\|_U \dots \|u_{n,\ell}\|_U \int_U (-V_p)\beta_0.$$

Faisons tendre ℓ vers $+\infty$; la proposition 8.7.2 et l'exemple 7.2.13 entraînent

$$\int_X \beta_n \wedge (-V_p)\, \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_n \leqslant C(n,3)\|u_1\|_U \dots \|u_n\|_U \int_U (-V_p)\beta_0.$$

Faisons maintenant tendre p vers $+\infty$; par convergence monotone, on obtient

$$\int_X \beta_n \wedge (-V)\, \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_n \leqslant C(n,3)\|u_1\|_U \dots \|u_n\|_U \int_U (-V)\beta_0.$$

La fonction β_n est continue et strictement positive sur U. Par suite, $(-V)$ est localement intégrable sur U pour la mesure $\mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_n$. □

Corollaire 8.12.2. — *Soit X un espace tropical comme dans le théorème 16.9.2. Soit $u_1, \dots, u_m$ des fonctions psh continues sur X qui sont localement approchables, soit α une forme lisse de type $(n-m, n-m)$ sur X, et soit V une fonction psh localement approchable sur X. Si V est localement intégrable sur X, est elle est localement intégrable pour la mesure $\mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_1 \wedge \dots \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_m \wedge \alpha$ sur X.*

Démonstration. — L'assertion est locale sur X. On peut donc supposer que la forme α est tropicale, du type $f^*\omega$, où $f\colon X \to \mathbf{R}^N$ est une carte affine. Soit $x \in X$. Pour vérifier la propriété d'intégrabilité au voisinage de x, on peut remplacer α par $\rho\alpha$, où ρ est une fonction lisse à support compact, non nulle en x. Soit $v = f^*\|t\|^2$; il existe alors un nombre réel c tel que $-c(\mathrm{d}'\mathrm{d}'' v)^{n-m} \leqslant \alpha \leqslant c(\mathrm{d}'\mathrm{d}'' v)^{n-m}$. Le théorème précédent, appliqué aux fonctions $u_1, \dots, u_m, v, \dots, v$, entraîne le résultat voulu. □

Corollaire 8.12.3. — *Soit X un espace tropical comme dans le théorème 8.12.1. Soit $u_1, \dots, u_m$ des fonctions psh continues sur X qui sont localement approchables, soit α une forme lisse de type $(n-m, n-m)$ sur X. et soit V une fonction psh localement approchable sur X. Si V est localement intégrable sur X, la mesure $\mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_1 \wedge \dots \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_m \wedge \alpha$ sur X ne charge pas le lieu polaire de V.*

CHAPITRE 9

INTERSECTION TROPICALE

---

§ 9.1. PRODUIT D'ESPACES TROPICAUX

Soit X et Y des espaces tropicaux. Le but de ce paragraphe est de définir une structure d'espace tropical sur le produit $X \times Y$. On commence par munir ce produit d'une structure d'espace G-tropical.

Lemme 9.1.1. — *Soit X et Y des espaces G-tropicaux. L'espace topologique produit est séparé, localement compact et chacun de ses points a une base d'ouverts qui sont dénombrables à l'infini.*

Démonstration. — Comme X et Y sont séparés et localement compacts, il en est de même de leur produit. Soit $(x, y) \in X \times Y$ et soit W un voisinage de (x, y) dans $X \times Y$. Par définition de la topologie produit, il existe un voisinage ouvert U de x dans X et un voisinage ouvert V de y dans Y tels que $U \times V \subset W$. Par hypothèse, x possède un voisinage ouvert U_1 contenu dans U qui est réunion d'une famille dénombrable $(K_i)_{i\in I}$ de parties compactes ; de même, y possède un voisinage ouvert V_1 contenu dans U qui est réunion d'une famille dénombrable $(L_j)_{j\in J}$ de parties compactes. Alors $U_1 \times V_1$ est un voisinage ouvert de (x, y) contenu dans W qui est réunion de la famille dénombrable $(K_i \times L_j)_{(i,j)\in I\times J}$ de parties compactes. □

9.1.2. — Soit X et Y des espaces G-tropicaux. On dit qu'une partie localement fermée D de $X \times Y$ est un domaine élémentaire s'il existe une carte tropicale (V, f, P) sur X (où P est fermé), une carte tropicale (W, g, Q) (où Q est fermé) sur Y et une partie paralinéaire fermée R de $P \times Q$ telles que $D = (f \times g)^{-1}(R)$. On dit qu'une partie localement fermée de $X \times Y$ est un domaine si elle est G-recouverte par ses domaines élémentaires.

Toute partie ouverte est un domaine.

L'intersection de deux domaines élémentaires est un domaine élémentaire, donc l'intersection de deux domaines est un domaine.

Toute partie localement fermée de $X \times Y$ qui est G-recouverte par des domaines est encore un domaine.

Tout domaine élémentaire est G-recouvert par des domaines élémentaires compacts, si bien que tout domaine est G-recouvert par les domaines compacts qu'il contient.

Les axiomes sur les domaines sont donc vérifiés.

9.1.3. — On dit qu'une fonction φ définie sur un domaine élémentaire de la forme $V \times W$ comme ci-dessus est élémentairement paralinéaire s'il existe une fonction paralinéaire h sur R telle que $\varphi(x,y) = h(f(x), g(y))$ pour tout $(x,y) \in V \times W$.

On dit qu'une fonction φ définie sur un domaine de $X \times Y$ est paralinéaire si ce domaine est G-recouvert par des domaines élémentaires sur lesquels φ est élémentairement paralinéaire.

Les axiomes sur les fonctions paralinéaires sont vérifiés.

9.1.4. — Soit X et Y des espaces G-tropicaux affinés ; construisons un affinage de l'espace G-tropical $X \times Y$. On dit qu'une fonction paralinéaire h sur un domaine W de $X \times Y$ est affine si pour tout point $(x,y) \in W$, il existe un domaine U de X et un domaine V de Y tels $(U \times V) \cap W$ soit un voisinage de (x,y) dans W, une fonction affine f sur U et une fonction affine g sur V telles que l'on ait $h(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)$ pour tout $(\xi,\eta) \in (U \times V) \cap W$.

Une fonction h sur un domaine W de $X \times Y$ est paralinéaire si et seulement si elle est G-localement affine. Il suffit de traiter le cas des fonctions élémentairement paralinéaires. Cela résulte alors de ce qu'une fonction paralinéaire sur une partie paralinéaire de $\mathbf{R}^n$ est G-localement affine.

9.1.5. — Supposons que X et Y soient chordés, c'est-à-dire munis d'une classe de parties squelettiques élémentaires vérifiant les axiomes du §5.1.2. On dit alors qu'une partie fermée d'un domaine W de $X \times Y$ est squelettique élémentaire s'il existe des domaines U de V de X et Y respectivement, une partie squelettique élémentaire Σ de U, une partie squelettique élémentaire T de V, telle que la partie donnée soit égale à $(\Sigma \times \mathrm{T}) \cap W$. Démontrons que l'on munit ainsi l'espace $X \times Y$ d'une structure d'espace chordé.

Les axiomes *a*) et *b*) de *loc. cit.* résultent de la construction.

Démontrons l'axiome *c*). Soit (W_i) une famille finie de domaines fermés de X ; pour tout i, soit Υ_i une partie squelettique élémentaire de W_i et soit Υ la réunion des Σ_i. Pour tout i, soit U_i un domaine de X, Σ_i une partie squelettique élémentaire de U_i, V_i un domaine de Y, T_i une partie squelettique élémentaire de V_i telles que $\Upsilon_i = (\Sigma_i \times \mathrm{T}_i) \cap W_i$.

L'assertion est G-locale, et donc locale, sur Υ. Soit $(x,y) \in \Upsilon$. Les espaces X et Y sont localement compacts et les parties Υ_i sont localement fermées dans W_i, donc dans $X \times Y$; on peut donc remplacer X et Y par des voisinages domaniaux compacts de x et y de sorte que $(x,y) \in \Upsilon_i$ pour tout i ; comme les domaines W_i sont fermés dans $X \times Y$, ils sont donc compacts, de même que leurs parties squelettiques élémentaires Υ_i. Alors, $x \in U_i$ et $y \in V_i$ pour tout i ; comme les U_i sont des parties localement fermées de X et les V_i sont des parties localement fermées de Y, on peut restreindre de nouveau X et Y et supposer que les U_i et les V_i sont compacts. Soit Σ la réunion des Σ_i et soit T la réunion de T_i. D'après l'axiome *c*) appliquée à la famille finie des parties squelettiques élémentaires Σ_i des domaines fermés U_i de X, il existe une famille (U'_j) de domaines de X qui G-recouvre Σ et, pour tout j, une partie squelettique élémentaire Σ'_j de U'_j qui contient $\Sigma \cap U'_j$. De même, il existe une famille (V'_k) de domaines de Y qui G-recouvre T et, pour tout k, une partie squelettique élémentaire T'_k de V'_k qui contient $\mathrm{T} \cap V'_k$.

Pour tout couple (j,k), posons $W'_{j,k} = U'_j \times V'_k$; les $W'_{j,k}$ sont des domaines de $X \times Y$ qui G-recouvrent $\Sigma \times \mathrm{T}$, donc Υ. Par ailleurs $\Sigma'_j \times \mathrm{T}'_k$ est une partie squelettique élémentaire de $W'_{j,k}$ qui contient $(\Sigma \cap U'_j) \times (\mathrm{T} \cap V'_k) = (\Sigma \times \mathrm{T}) \cap W'_{j,k}$, donc contient $\Upsilon \cap W'_{j,k}$.

Lemme 9.1.6. — *Soit X et Y des espaces G-tropicaux vertébrés de niveaux respectifs m et n. L'espace G-tropical chordé $X \times Y$ est un espace G-tropical vertébré de niveau $m+n$.*

Démonstration. — Il s'agit de démontrer *a*) que la dimension tropicale de $X \times Y$ est au plus égale à $m+n$ et *b*) que pour toute carte G-tropicale (W,h) sur X, la partie $\Sigma_h^{(m+n)}$ est squelettique.

a) Démontrons que $d_{\mathrm{trop}}(X \times Y) \leqslant m+n$. Soit u une carte tropicale sur un domaine compact W de $X \times Y$; démontrons que $u(W)$ est une partie paralinéaire de dimension au plus $m+n$. L'assertion est G-locale sur W ; on peut ainsi supposer que W est un domaine élémentaire compact sur lequel u est élémentairement paralinéaire. On se ramène ainsi au cas où il existe un domaine compact U de X, un domaine compact V de Y, des cartes G-tropicales $f\colon U \to E$ et $g\colon V \to F$, une partie paralinéaire fermée R de $f(U) \times g(V)$ et une application paralinéaire $h\colon R \to \mathbf{R}^p$ tels que $W = (f,g)^{-1}(R)$ et $u = h \circ (f,g)$. On a $u(W) \subset h((f,g)(U \times V)) = h(f(U) \times g(V))$. Par hypothèse, $f(U)$ et $g(V)$ sont des parties paralinéaires de dimensions au plus m et n respectivement ; par suite, $h(f(U) \times g(V))$ est une partie paralinéaire de dimension au plus $m+n$, et il en est donc de même de $u(W)$.

b) Soit (W,h) une carte G-tropicale sur X. Par hypothèse, W est G-recouvert par ses domaines élémentaires de la forme $W_i = (U_i \times V_i) \cap (f_i \times g_i)^{-1}(R_i)$, où, pour tout i, (U_i, f_i, P_i) est une carte G-tropicale sur X (où P_i est fermé) (V_i, g_i, Q_i) est une carte G-tropicale sur Y (où Q_i est fermé), R_i est une partie paralinéaire fermée de $P_i \times Q_i$, $h|_{W_i} = \varphi_i(f_i, g_i)$, et φ_i est une fonction paralinéaire sur $P_i \times Q_i$. Quitte à raffiner ce G-recouvrement, on suppose que les U_i sont fermés dans X, les V_i sont fermés dans Y et les applications paralinéaires φ_i sont en fait affines ; on pose alors $h_i = \varphi_i(f_i, g_i)$ sur $U_i \times V_i$.

L'assertion à démontrer est locale sur W. Soit $(x,y) \in W$. Par définition d'un G-recouvrement, il existe un voisinage ouvert Ω de (x,y) dans $X \times Y$ et un ensemble fini I d'indices tels que $W_i \cap \Omega$ soit fermé dans W pour tout i et $\bigcup_{i \in I} W_i \cap \Omega = W \cap \Omega$. Il suffit de prouver que $\Sigma_h^{(m+n)} \cap \Omega$ est une partie paralinéaire d'une une partie squelettique élémentaire de Ω. Quitte à restreindre Ω, on peut supposer que c'est le produit d'un voisinage de x et d'un voisinage de y, si bien qu'on peut supposer que $\Omega = X \times Y$. On a l'inclusion

$$\Sigma_h^{(m+n)} \subset \bigcup_{i \in I} \Sigma_{h_i}^{(m+n)}.$$

Pour tout i, on $h_i = \varphi_i(f_i, g_i)$, d'où l'inclusion

$$\Sigma_{h_i}^{(m+n)} \subset \Sigma_{(f_i,g_i)}^{(m+n)} = \Sigma_{f_i}^{(m)} \times \Sigma_{g_i}^{(n)},$$

si bien que

$$\Sigma_h^{(m+n)} \subset \bigcup_{i \in I} (\Sigma_{f_i}^{(m)} \times \Sigma_{g_i}^{(n)}) \cap (f_i, g_i)^{-1}(R_i).$$

Notons Σ le terme de droite. Pour tout i, $\Sigma_{f_i}^{(m)} \times \Sigma_{g_i}^{(n)}$ est une partie squelettique (élémentaire) de $U_i \times V_i$ sur laquelle (f_i, g_i) est une application paralinéaire ; par suite, $(\Sigma_{f_i}^{(m)} \times \Sigma_{g_i}^{(n)}) \cap (f_i, g_i)^{-1}(R_i)$ est une partie squelettique fermée de $U_i \times V_i$, donc de $X \times Y$. Par suite, Σ est une réunion finie de parties squelettiques fermées, donc est squelettique.

Il suffit maintenant de démontrer que $\Sigma_h^{(m+n)}$ en est une partie paralinéaire.

Nous allons démontrer que $\Sigma_h^{(m+n)}$ est le lieu $(m+n)$-dimensionnel Σ' de $h|_\Sigma$.

On a $\Sigma' \subset \Sigma_h^{(m+n)}$.

Démontrons l'inclusion réciproque. Soit $(\xi,\eta) \in \Sigma_h^{(m+n)}$; il existe $i \in I$ tel que $(\xi,\eta) \in U_i \times V_i$ et $d_{\mathrm{trop}}(h|_{W_i}) = m+n$. Démontrons qu'alors que la restriction de h à $(\Sigma_{f_i}^{(m)} \times \Sigma_{g_i}^{(n)}) \cap (f_i,g_i)^{-1}(R_i)$ est de dimension tropicale $m+n$ en (ξ,η).

On est donc ramené au cas où $X = U_i$ et $Y = V_i$; on note ainsi $f = f_i$, $g = g_i$, $\varphi = \varphi_i$ et $R = R_i$; on a donc $h = \varphi(f,g)$ et $W = (f,g)^{-1}(R)$.

La restriction de f à $\Sigma_f^{(m)}$ est une immersion par morceaux, et celle de g à $\Sigma_g^{(n)}$ est une immersion par morceaux, de sorte que la restriction de (f,g) à $\Sigma_f^{(m)} \times \Sigma_g^{(n)}$, est encore une immersion par morceaux, de même que sa restriction à Σ.

Soit Z un voisinage domanial compact de (ξ,η) dans $X \times Y$; démontrons que $h(Z \cap \Sigma)$ est de dimension $m+n$. Comme Z est G-recouvert par des voisinages domaniaux compacts produit, on peut le supposer de la forme $K \times L$, où K et L sont des voisinages domaniaux compacts de ξ et η dans X et Y respectivement.

Par hypothèse, $h((K \times L) \cap W)$ est de dimension $m+n$. On a

$$h((K \times L) \cap W) = \varphi(f,g)((K \times L) \cap (f,g)^{-1}(R)) = \varphi((f(K) \times g(L)) \cap R).$$

Considérons des décompositions cellulaires $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ de $f(K)$ et $g(L)$ respectivement. Il existe donc une cellule $C \in \mathscr{C}$ et une cellule $D \in \mathscr{D}$ telles que $\varphi((C \times D) \cap R)$ soit de dimension $m+n$. Comme $\dim(C) \leqslant m$ et $\dim(D) \leqslant n$, cela entraîne que l'on a $\dim(C) = m$, $\dim(D) = n$, et l'application affine φ est injective sur le sous-espace $\langle C\rangle \times \langle D\rangle$. De plus, $(C \times D) \cap R$ est de dimension $m+n$; il existe donc une m-cellule C' contenue dans C et une n-cellule D' contenue dans D telles que $C' \times D' \subset R$; notons que la restriction de φ à $C' \times D'$ est encore injective.

Posons $W' = (K \times L) \cap (f,g)^{-1}(C' \times D')$; c'est un domaine compact de W ; démontrons que $h(W' \cap \Sigma)$ est de dimension $m+n$. On a

$$h(W' \cap \Sigma) = \varphi((f,g)(K \times L \cap \Sigma) \cap (C' \times D')).$$

Nous allons prouver que $(f,g)(K \times L \cap \Sigma)$ contient $C' \times D'$; il en résultera que $h(W' \cap \Sigma)$ contient $\varphi(C' \times D)$ dont on a prouvé qu'il est dimension $m+n$, d'où l'assertion.

Il reste à établir que $(f,g)(K \times L \cap \Sigma)$ contient $C' \times D'$. Observons que $C' \subset f(K)$ et $D' \subset g(L)$. D'après la proposition 5.2.5, on a $f(K)^{(m)} = f(\Sigma_{f|_K}^{(m)})$ et $g(L)^{(n)} = g(\Sigma_{g|_L}^{(n)})$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} C' \times D' &\subset f(K)^{(m)} \times g(L)^{(n)} \\ &\subset f(\Sigma_{f|_K}^{(m)}) \times g(\Sigma_{g|_L}^{(n)}) \\ &\subset f(\Sigma_f^{(m)} \cap K) \times g(\Sigma_g^{(n)} \cap L) \\ &= (f,g)((\Sigma_f^{(m)} \cap K) \times (\Sigma_g^{(n)} \cap L)), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} C' \times D' &\subset (f,g)((\Sigma_f^{(m)} \times \Sigma_g^{(n)}) \cap (K \times L)) \cap R \\ &= (f,g)((\Sigma_f^{(m)} \times \Sigma_g^{(n)}) \cap (K \times L) \cap (f,g)^{-1}(R)) \\ &= (f,g)((K \times L) \cap \Sigma). \end{aligned}$$

Le lemme est ainsi démontré. □

9.1.7. — Supposons que X et Y sont des espaces G-tropicaux calibrés de niveaux m et n respectivement et munissons $X \times Y$ d'une structure d'espace G-tropical calibré de niveau $m+n$. D'après le lemme 5.5.4, il suffit de construire une famille compatible de calibrages sur les parties squelettiques de $X \times Y$ de la forme $\Sigma \times \mathrm{T}$, où Σ est une partie squelettique de X et T est une partie squelettique de Y, et la famille des calibrages produit convient.

9.1.8. — Supposons maintenant que X et Y sont des espaces tropicaux de niveaux respectifs m et n, d'intérieurs respectifs $\mathrm{Int}(X)$ et $\mathrm{Int}(Y)$.

On définit pour bord de $X \times Y$ la partie $(\partial(X) \times Y) \cup (X \times \partial(Y))$, de sorte que l'intérieur de $X \times Y$ est sa partie $\mathrm{Int}(X) \times \mathrm{Int}(Y)$.

Il s'agit de démontrer (i) que cet intérieur est localement différentiellement séparé, décent, très riche et harmonieux, et (ii) que pour toute partie squelettique Σ de $X \times Y$ et tout domaine W de $X \times Y$, la trace de $\partial(X)$ et du bord topologique $\partial(W/X \times Y)$ sur Σ sont $(m+n)$-négligeables.

(i) Pour prouver (i), on peut remplacer X et Y par leurs intérieurs, et donc les supposer sans bord.

Démontrons que $X \times Y$ est localement différentiellement séparé. Il suffit de prouver que si X et Y sont différentiellement séparés, alors $X \times Y$ est différentiellement séparé. Soit (x, y) et (x', y') des points distincts de X et Y, soit f une fonction lisse sur X qui prend des valeurs distinctes en x et x' s'ils sont distincts et soit g une fonction lisse sur Y qui prend des valeurs distinctes en x et x' s'ils sont distincts. Les couples $(f(x), g(y))$ et $(f(x'), g(y'))$ sont distincts, et il existe une application linéaire $\varphi\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ qui les sépare. La fonction $\varphi(f, g)$ sur $X \times Y$ est lisse ; elle sépare (x, y) et (x', y').

Démontrons que $X \times Y$ est décent.

a) Soit W un domaine de $X \times Y$ et soit (x, y) un point de W. Soit h une fonction affine sur W, à valeurs réelles. Par définition d'une fonction affine sur W, il existe un domaine U de X et un domaine V de Y tels que $(U \times V) \cap W$ soit un voisinage de (x, y) dans W, une fonction affine f sur U et une fonction affine g sur V telles que h coïncide avec $f + g$ sur $(U \times V) \cap W$. Comme X est décent en x, il existe un voisinage ouvert U' de x dans X et une fonction affine f' sur U' tels que f coïncide avec f' sur $U \cap U'$. De même, comme Y est décent en y, il existe un voisinage ouvert V' de y dans Y et une fonction affine g' sur V' tels que g coïncide avec g' sur $V \cap V'$. Alors $U' \times V'$ est un voisinage ouvert de (x, y) dans $X \times Y$, la fonction $f' + g'$ est une fonction affine $U' \times V'$ qui coïncide avec $f + g$ sur le voisinage

$$((U' \cap U) \times (V' \cap V)) \cap W = (U' \times V') \cap (U \times V) \cap W$$

de (x, y) dans W.

b) Soit W un domaine de $X \times Y$ et soit (x, y) un point de W. Démontrons qu'il existe un voisinage ouvert W' de (x, y) dans $X \times Y$ tel que $W \cap W'$ soit défini dans W' par conjonction et disjonction d'inégalités larges entre fonctions affines sur W'. Cette propriété est stable par réunion finie et ne dépend que du germe de W en (x, y) ; par définition des domaines de $X \times Y$, on peut donc supposer que W est un domaine élémentaire, c'est-à-dire est de la forme $(f, g)^{-1}(R)$, où (U, f, P) et (V, g, Q) sont des cartes tropicales sur des domaines U et V de X et Y respectivement, P et Q étant fermés, et

R est une partie paralinéaire fermée de $P \times Q$. Par définition, R est défini dans $P \times Q$ par conjonction et disjonction d'inégalités larges entre fonctions affines.

Comme X est décent en x, on peut supposer que f est la restriction à U d'une fonction affine, toujours notée f, définie au voisinage de x. De même, on peut supposer que g est la restriction à V d'une fonction affine, toujours notée g, définie au voisinage de y.

Il existe également une carte tropicale (U', f', P') définie au voisinage de x dans X telle que f soit définie sur U', et une partie paralinéaire fermée P'' de P' telle que $U = (f')^{-1}(P'')$. On introduit de même (V', g', Q') pour le facteur Y. On a alors

$$W \cap (U' \times V') = (f, g)^{-1}(R) \cap (f')^{-1}(P'') \cap (g')^{-1}(Q''),$$

ce qui prouve que W est localement définie par une conjonction et disjonction d'inégalités larges entre fonctions affines.

Démontrons que $X \times Y$ est riche.

Soit $h\colon W \to E$ une carte G-tropicale définie sur un domaine compact W de $X \times Y$; démontrons qu'il existe une partie squelettique compacte Σ de W telle que $h(\Sigma) = h(W)$. En raisonnant G-localement sur W, on se ramène à démontrer l'assertion lorsque W est un domaine élémentaire de $X \times Y$ et h est élémentairement paralinéaire, c'est-à-dire qu'il existe des domaines compacts U et V de X et Y, des applications paralinéaires f et g sur U et V et une partie paralinéaire compacte R de $f(U) \times g(V)$ et une application paralinéaire $\varphi\colon R \to E$ telle que $W = (f, g)^{-1}(R)$ et $h = \varphi \circ (f, g)|_W$. Comme X et Y sont riches, il existe des parties squelettiques compactes Σ de U et T de V telles que $f(\Sigma) = f(U)$ et $g(\mathrm{T}) = g(V)$. Alors on a

$$\begin{aligned} h(W) &= \varphi((f, g)(W)) = \varphi((f, g)((f, g)^{-1}(R))) \\ &= \varphi((f(U) \times g(V)) \cap R) = \varphi((f(\Sigma) \times g(\mathrm{T})) \cap R) \\ &= \varphi((f, g)((\Sigma \times \mathrm{T}) \cap (f, g)^{-1}(R))) \\ &= h((\Sigma \times \mathrm{T}) \cap (f, g)^{-1}(R)))). \end{aligned}$$

Par construction, $\Sigma \times \mathrm{T}$ est une partie squelettique de $U \times V$, et sa trace avec $(f, g)^{-1}(R)$ en est une partie paralinéaire donc est une partie squelettique de $U \times V$. Elle est contenue dans W, donc c'est une partie squelettique de W.

Démontrons que $X \times Y$ est très riche. On vient de démontrer qu'il est riche ; il reste à démontrer que toute partie squelettique compacte est contenue dans une partie squelettique purement de dimension $m + n$. On peut raisonner G-localement. Compte tenu de la définition des parties squelettiques, il suffit de traiter le cas d'une partie squelettique élémentaire. Soit donc Σ et T des parties squelettiques compactes de X et Y respectivement. Comme X est très riche, il existe une partie squelettique Σ' de X qui est purement de dimension m et contient Σ ; il existe de même une partie squelettique T' de Y qui est purement de dimension n et contient T. Alors $\Sigma' \times \mathrm{T}'$ est une partie squelettique de $X \times Y$, purement de dimension $m + n$, qui contient $\Sigma \times \mathrm{T}$.

Soit $h\colon W \to E$ une carte tropicale sur une partie ouverte W de $X \times Y$. Démontrons que W est harmonieux relativement à h. L'assertion est locale, ce qui permet de supposer que X et Y sont dénombrables à l'infini ; alors, $X \times Y$ est dénombrable à l'infini, et donc paracompact. On peut également restreindre X et Y de sorte que h s'écrit $\varphi \circ (f, g)$, où $f\colon X \to A$ et $g\colon Y \to B$ sont des cartes tropicales sur X et Y et $\varphi\colon A \times B \to E$ est une application affine. Soit $\mathscr{E}$ une décomposition cellulaire de $\Sigma_h^{(m+n)}$ en h-cellules qui est adaptée au calibrage de $\Sigma_h^{(m+n)}$; prouvons que $\Sigma_h^{(m+n)}$ est harmonieux le long de toute

$(m+n-1)$-cellule appartenant à $\mathscr{E}$. Compte tenu de la définition, il suffit de traiter le cas où $h=(f,g)$. Alors, $\Sigma_h^{(m+n)}=\Sigma_f^{(m)}\times\Sigma_g^{(n)}$, comme on l'a vu ci-dessus. On peut modifier la décomposition cellulaire et la supposer de la forme $\mathscr{C}\times\mathscr{D}$ où $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ sont des décompositions cellulaires de $\Sigma_f^{(m)}$ et $\Sigma_g^{(n)}$ respectivement.

Une cellule de $\mathscr{C}\times\mathscr{D}$ est de la forme $F\times G$ où F et G sont des cellules de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$; elle est de dimension $m+n-1$ si et seulement $(\dim F,\dim G)=(m-1,n)$ ou $(m,n-1)$. La discordance du calibrage de $\Sigma_h^{(m+n)}$ le long de $F\times G$ est un $(m+n)$-vecteur $\delta_{F\times G}$ de $A\times B$. Dans le premier cas, on a $\delta_{F\times G}=\delta_F\otimes g_*(\mu_G)$, où δ_F est la discordance du calibrage de $\Sigma_f^{(m)}$ le long de F, donc est nulle. Le second cas est similaire.

9.1.9. — Soit W un domaine de $X\times Y$ et soit Υ une partie squelettique de X. Démontrons que la trace de $\partial(X\times Y)$ et celle de $\partial(W/X\times Y)$ sur Υ sont $m+n$-négligeables.

Comme X et Y sont des espaces tropicaux, leurs domaines sont munis de bords : le bord d'un domaine U de X a été défini par $\partial(U)=\partial(U/X)\cup(U\cap\partial(X))$. Définissons de même le bord d'un domaine W de $X\times Y$ par la formule

$$\partial(W)=\partial(W/X\times Y)\cup(W\cap\partial(X\times Y)).$$

Remarquons que si W est de la forme $U\times V$, où U est un domaine de X et V est un domaine de Y, alors

$$\partial(W)=\partial(U)\times V\cup U\times\partial(V).$$

Avec ces notations, il s'agit de démontrer et la trace de $\partial(W)$ sur Υ est $m+n$-négligeable.

Soit (Z_i) une famille de domaines de $X\times Y$ telle que la famille $(Z_i\cap W\cap\Upsilon)$ soit un G-recouvrement de $W\cap\Upsilon$ et telle que que pour tout i, la trace de $\partial(W\cap Z_i)$ sur Υ soit négligeable. Démontrons que la trace de $\partial(W)$ sur Υ est négligeable. Il existe une famille d'ouverts (O_j) dans $X\times Y$, recouvrant $W\cap\Upsilon$ et, pour tout j, un ensemble fini I_j d'indices telle que pour tout $i\in I_j$, $Z_i\cap O_j$ soit un domaine fermé de O_j, et leur réunion contient $W\cap O_j\cap\Upsilon$. La négligeabilité paralinéaire est une propriété locale ; il suffit de démontrer que pour tout j, $\partial(W)\cap\Upsilon\cap O_j$ est négligeable. On a

$$\partial(W)\cap O_j\cap\Upsilon=\partial(W\cap O_j)\cap\Upsilon\subset\bigcup_{i\in I_j}\partial(W\cap Z_i\cap O_j)\cap\Upsilon\subset\bigcup_{i\in I_j}\partial(W\cap Z_i)\cap\Upsilon,$$

donc est négligeable.

Le domaine W est G-recouvert par des domaines élémentaires compacts de $X\times Y$. D'après ce qui précède, on peut donc se ramener au cas où X et Y sont compacts et où il existe une carte G-tropicale f de domaine X, une carte G-tropicale g de domaine Y telles que $W=(f\times g)^{-1}(R)$, où R est la partie paralinéaire compacte $(f\times g)(W)$

La partie squelettique Υ est G-recouverte par des parties paralinéaires de parties squelettiques élémentaires, de la forme $\Sigma\times\mathrm{T}\cap\Omega$, où Ω est un domaine de $X\times Y$ et Σ et T sont des parties squelettiques élémentaires de domaines U et V de X et U. D'après ce qui précède, il suffit de démontrer que

$$\partial(W\cap U\times V)\cap\Sigma\times\mathrm{T}$$

est négligeable. On peut donc supposer que $U=X$, $V=Y$ et $\Upsilon=\Sigma\times\mathrm{T}$.

Comme Σ est une partie paralinéaire, elle est G-recouverte par des parties fidèlement paralinéaires de la forme $\Sigma\cap U$, où U est un domaine de X. De même, T est G-recouverte par des parties fidèlement paralinéiares de la forme $\mathrm{T}\cap V$, où V est un domaine de Y. Cela permet de supposer qu'il existe des cartes tropicales f' et g' de domaines X et Y respectivement, fidèles sur Σ et T respectivement.

On remplace alors f et f' par (f, f'), g et g' par (g, g'), de sorte que le couple (f, g) est fidèle sur $\Sigma \times \mathrm{T}$.

La trace de $\partial(X) \times Y$ sur $\Sigma \times \mathrm{T}$ est contenue dans $(\partial(X) \cap \Sigma) \times \mathrm{T}$ donc est négligeable puisque $\partial(X) \cap \Sigma$ est m-négligeable. De même, la trace de $X \times \partial(Y)$ sur $\Sigma \times \mathrm{T}$ est négligeable. Il reste à démontrer que la trace de $\partial(W/(X \times Y))$ sur $\Sigma \times \mathrm{T}$ est négligeable.

Choisissons une décomposition cellulaire $\mathscr{C}$ de $f(X) \times g(Y)$ compatible avec R et avec $f(\Sigma) \times g(\mathrm{T})$. Soit $\mathscr{D}$ la décomposition cellulaire de $\Sigma \times \mathrm{T}$ déduite de $\mathscr{C}|_{f(\Sigma)\times g(\mathrm{T})}$ via l'isomorphisme paralinéaire $(f \times g)|_{\Sigma\times\mathrm{T}}$ de $\Sigma \times \mathrm{T}$ sur $f(\Sigma) \times g(\mathrm{T})$. Puisque $\mathscr{C}$ est compatible avec R et puisque $W = (f \times g)^{-1}(R)$, la décomposition $\mathscr{D}$ est compatible avec $W \cap (\Sigma \times \mathrm{T})$. Soit D une $(m+n)$-cellule de $\mathscr{D}$ contenue dans W, et posons $C = (f \times g)(D)$. Par construction, C est une $(m+n)$-cellule de $\mathscr{C}$, et $C \subset R$. Puisque $f(X) \times g(Y)$ est de dimension au plus $m+n$, la cellule C est maximale dans $\mathscr{C}$, et $\mathring{C}$ est dès lors un ouvert de $f(X) \times g(Y)$. À ce titre, $\mathring{C}$ est contenu dans $\mathrm{Int}(R/f(X) \times g(Y))$, si bien que $(f \times g)^{-1}(\mathring{C})$ est contenu dans $\mathrm{Int}(W/X \times Y)$. En particulier, $\mathring{D} \subset \mathrm{Int}(W/X \times Y)$ (on a en effet par construction $\mathring{D} = (f \times g)^{-1}(\mathring{C}) \cap (\Sigma \times \mathrm{T})$). Ceci étant valable pour toute $(m+n)$-cellule D de $\mathscr{D}$ qui est contenue dans $W \cap (\Sigma \times \mathrm{T})$, il s'ensuit que $\partial(W/(X \times Y)) \cap (\Sigma \times \mathrm{T})$ est contenu dans une réunion de cellules de $\mathscr{D}$ de dimensions strictement inférieures à $m + n$, ce qui achève la démonstration.

§ 9.2. FORMES SUR UN ESPACE TROPICAL PRODUIT

Proposition 9.2.1. — *Soit X et Y des espaces tropicaux de niveaux m et n respectivement. Soit $\mathscr{D}_X$ un jeu de cartes tropicales couvrant sur X, soit $\mathscr{D}_Y$ un jeu de cartes tropicales couvrant sur Y et soit $\mathscr{D}_{X\times Y}$ un jeu de cartes tropicales couvrant sur $X \times Y$.*

Soit K, L, M des parties compactes de X, Y et $X \times Y$ respectivement.

Il existe un jeu de cartes tropicales fini $\mathscr{E}_X$ sur X, un jeu de cartes tropicales fini $\mathscr{E}_Y$ sur Y tels que

(i) *Le jeu $\mathscr{E}_X$ sur X raffine le jeu $\mathscr{D}_X$ et couvre K ;*
(ii) *Le jeu $\mathscr{E}_Y$ sur Y raffine le jeu $\mathscr{D}_Y$ et couvre L ;*
(iii) *Le jeu produit $\mathscr{E}_X \times \mathscr{E}_Y$ sur $X \times Y$ raffine le jeu $\mathscr{D}_{X\times Y}$ et couvre M.*

Démonstration. — Il n'est pas restrictif de supposer que $M = K \times L$ et qu'il n'est pas vide.

Pour tout tout $z \in K \times L$ il existe une carte tropicale produit (f_z, g_z) sur $X \times Y$, définie sur un voisinage $U_z \times V_z$ de z, qui raffine une carte de $\mathscr{D}_{X\times Y}$. Il n'est pas restrictif de supposer que pour tout z, la carte (U_z, f_z) raffine $\mathscr{D}_X$ et que la carte (V_z, g_z) raffine $\mathscr{D}_Y$. Recouvrons $K \times L$ par une sous-famille de ces domaines de cartes, indexée par une partie finie Z de $K \times L$. Les cartes (U_z, f_z) ainsi obtenues forment un jeu de cartes qui couvre K et qui raffine le jeu $\mathscr{D}_X$. Les cartes tropicales (V_z, g_z) ainsi obtenues forment un jeu de cartes sur Y qui couvre L et raffine $\mathscr{D}_Y$.

Soit $y \in L$. L'intersection des V_z, pour $z \in Z$ tels que $y \in V_z$, est un voisinage V'_y de y. On le munit de la carte tropicale g'_y obtenue en concaténant les $g_z|_{V'_y}$, pour $z \in Z$ tels que $y \in V_z$. Chacune de ces cartes raffine le jeu $\mathscr{D}_Y$: soit en effet $y \in Y$; comme les V_z recouvrent L, il existe z tel que $y \in V_z$ et l'on a alors $V'_y \subset V_z$. Soit J une partie

finie de L telle que les V'_y, pour $y \in J$, recouvrent la partie compacte L. Le jeu de cartes tropicales formé des (V'_y, g'_y), pour $y \in J$, raffine $\mathscr{D}_Y$ et couvre L.

Soit I l'ensemble des applications $i\colon J \to Z$ telles que $y \in V_{i(y)}$. Pour $i \in I$, soit U'_i l'intersection des $U_{i(y)}$, pour $y \in J$. C'est une partie ouverte de X qu'on munit de la carte tropicale déduite par concaténation des $f_{i(y)}$, pour $y \in J$. Comme J n'est pas vide (car L n'est pas vide), on a l'inclusion $U'_i \subset U_{i(y)}$, où $y \in J$. Par suite, cette carte raffine le jeu $\mathscr{D}_X$.

Démontrons que le jeu de cartes $(U'_i)_{i\in I}$ couvre K. Soit en effet $x \in K$. Pour tout $y \in J$, il existe $z \in Z$ tel que le point (x, y) appartienne à $U_z \times V_z$; on note $i(y)$ un tel point. On a ainsi construit un élément $i \in I$ tel que $x \in U'_i$ puisque $x \in U_{i(y)}$ pour tout $y \in J$.

Vérifions maintenant que le jeu produit $(U'_i \times V'_y)_{i,y}$ raffine le jeu $\mathscr{D}_{X\times Y}$. Soit $i \in I$ et $y \in J$. Par construction de V'_y, on a $V'_y \subset V_z$ si $y \in V_z$; comme $y \in V_{i(y)}$, on donc $V'_y \subset V_{i(y)}$. Par suite, on a $U'_i \times V'_y \subset U_{i(y)} \times V'_y \subset U_{i(y)} \times V_{i(y)}$, d'où l'assertion. Il est clair que ce jeu couvre $K \times L$. □

9.2.2. — Soit $\mathscr{D}$ un jeu de cartes tropicales couvrant sur $X \times Y$ et soit M une partie compacte de $X \times Y$. D'après la proposition 9.2.1, il existe un jeu de cartes tropicales $\mathscr{E}$ sur X qui couvre $p_1(M)$ et un jeu de cartes tropicales $\mathscr{E}'$ sur X qui couvre $p_2(M)$ tels que le jeu produit $\mathscr{E} \times \mathscr{E}'$ raffine le jeu $\mathscr{D}$ et couvre M. Soit $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ de tels jeux.

Soit (ρ_λ) une partition de l'unité au voisinage de $p_1(M)$ sur X subordonnée aux cartes de $\mathscr{E}$ et (ρ'_μ) une partition de l'unité au voisinage de $p_2(M)$ sur Y subordonnée aux cartes de $\mathscr{E}'$. Alors la famille $(\rho_\lambda\rho'_\mu)$ est une partition de l'unité au voisinage de M, subordonnée aux cartes de $\mathscr{E} \times \mathscr{E}'$. Pour toute forme $\omega \in \mathscr{A}^*_{\mathscr{D},M}$, on peut écrire

$$\omega = \sum_{\lambda,\mu} \rho_\lambda\rho'_\mu\omega. \tag{9.2.2.1}$$

Pour tout couple (λ, μ), la forme $\omega|_{U_\lambda\times V_\mu}$ sur $U_\lambda \times V_\mu$ est tropicalisée par une carte (f_λ, g_μ). Choisisssons un domaine compact $W_{\lambda,\mu}$ de $U_\lambda \times V_\mu$ qui contient un voisinage de $\mathrm{supp}(\rho_\lambda) \times \mathrm{supp}(\rho'_\mu)$. Il découle de l'exemple 1.9.13 que $\omega|_{W_\lambda,\mu}$ est de la forme

$$\sum_i (f_\lambda, g_\mu)^*\gamma_{\lambda,\mu,i}p_1^*f_\lambda^*\alpha_{\lambda,\mu,i} \wedge p_2^*g_\mu^*\beta_{\lambda,\mu,i},$$

où les $\alpha_{\lambda,\mu,i}$ sont des formes de type (p, q) sur l'espace affine but de f_λ et les $\beta_{\lambda,\mu,i}$ sont des formes de type (p', q') sur l'espace affine but de g_μ et les $\gamma_{\lambda,\mu,i}$ sont des fonctions lisses sur le produit de ces deux espaces affines.

Pour tout triplet (λ, μ, i), le support de la forme

$$\rho_\lambda\rho'_\mu(f_\lambda, g_\mu)^*\gamma_{\lambda,\mu,i}p_1^*f_\lambda^*\alpha_{\lambda,\mu,i} \wedge p_2^*g_\mu^*\beta_{\lambda,\mu,i}$$

sur $U_\lambda \times V_\mu$ est contenu dans le produit $\mathring{U}_\lambda \times \mathring{V}_\mu$. On note $j_!(\cdot)$ son prolongement par zéro. De même, le support de la forme $\rho_\lambda f_\lambda^*\alpha_{\lambda,\mu,i}$ sur U_λ est contenu dans $\mathring{U}_\lambda$; on note $\widetilde{\alpha}_{\lambda,\mu,i}$ son prolongement par zéro. On définit de même $\widetilde{\beta}_{\lambda,\mu,i}$, le prolongement par zéro de $\rho'_\mu g_\mu^*\beta_{\lambda,\mu,i}$.

On a ainsi

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{\lambda,\mu} \rho_\lambda \rho'_\mu \omega \\ &= \sum_{\lambda,\mu} j_!(\rho_\lambda \rho'_\mu \omega|_{W_{\lambda,\mu}}) \\ &= \sum_{\lambda,\mu,i} j_!(\rho_\lambda \rho'_\mu (f_\lambda, g_\mu)^* \gamma_{\lambda,\mu,i} p_1^* f_\lambda^* \alpha_{\lambda,\mu,i} \wedge p_2^* g_\mu^* \beta_{\lambda,\mu,i}) \\ &= \sum_{\lambda,\mu,i} j_!((f_\lambda, g_\mu)^* \gamma_{\lambda,\mu,i} p_1^* \widetilde{\alpha}_{\lambda,\mu,i} \wedge p_2^* \widetilde{\beta}_{\lambda,\mu,i}).\end{aligned}$$

Pour tout triplet (λ, μ, i) comme ci-dessus, on peut choisir une fonction lisse $\theta_{\lambda,\mu,i}$ sur $X \times Y$ qui vaut 1 au voisinage de $\mathrm{supp}(\rho_\lambda) \times \mathrm{supp}(\rho'_\mu)$ et dont le support est contenu dans l'intérieur de $U_\lambda \times V_\mu$. On a donc

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{\lambda,\mu,i} j_!(\theta_{\lambda,\mu,i}(f_\lambda, g_\mu)^* \gamma_{\lambda,\mu,i} p_1^* \widetilde{\alpha}_{\lambda,\mu,i} \wedge p_2^* \widetilde{\beta}_{\lambda,\mu,i}) \\ &= \sum_{\lambda,\mu,i} j_!(\theta_{\lambda,\mu,i}(f_\lambda, g_\mu)^* \gamma_{\lambda,\mu,i}) p_1^* \widetilde{\alpha}_{\lambda,\mu,i} \wedge p_2^* \widetilde{\beta}_{\lambda,\mu,i}.\end{aligned}$$

En particulier, on a le corollaire suivant.

Corollaire 9.2.3. — *Toute forme à support compact ω sur $X \times Y$ est une somme finie de formes à support compact du type*

$$\gamma p_1^* \alpha \wedge p_2^* \beta$$

où α est une forme à support compact sur X, β est une forme à support compact sur Y, et γ est une fonction lisse à support compact sur $X \times Y$.

Corollaire 9.2.4. — *Les formes sur $X \times Y$ du type $p_1^* \alpha \wedge p_2^* \beta$, où α et β sont des formes lisses à support compact sur X et Y respectivement, engendrent un sous-espace vectoriel dense des formes lisses à support compact sur $X \times Y$.*

Démonstration. — Compte tenu du corollaire précédent, il suffit de vérifier que toute *fonction* lisse à support compact c sur $X \times Y$ est approchable par des fonctions de la forme $p_1^* a \cdot p_2^* b$, où a et b sont des fonctions lisses à support compact sur X et Y respectivement. Soit K et L des parties compactes de X et Y telles que $K \times L$ contienne le support de c. D'après la proposition 9.2.1, il existe des jeux de cartes tropicales finis, $\mathscr{E}_X$ sur X, et $\mathscr{E}_Y$ sur Y, qui couvrent K et L respectivement, telles que le jeu produit $\mathscr{E}_X \times \mathscr{E}_Y$ tropicalise c au voisinage de $K \times L$. Soit (λ_i) une partition de l'unité sur X au voisinage de K subordonnée au jeu $\mathscr{E}_X$ et soit (μ_j) une partition de l'unité sur Y au voisinage de L subordonnée au jeu $\mathscr{E}_Y$. On a alors $c = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j c$. Fixons i et j. Soit U le domaine d'une carte $f\colon U \to \mathbf{R}^m$ de $\mathscr{E}_X$ telle que $\mathrm{supp}(\lambda_i) \subset U$ et soit V le domaine d'une carte $g\colon V \to \mathbf{R}^n$ de $\mathscr{E}_Y$ telle que $\mathrm{supp}(\mu_j) \subset V$. Sur $U \times V$, la fonction c est tropicalisée par la carte (f, g) et il existe une fonction lisse γ sur $\mathbf{R}^{m+n}$ telle que $c = (f, g)^* \gamma$. Il existe alors une suite (P_n) de polynômes sur $\mathbf{R}^{m+n}$ telle que $(\partial^k P_n)$ converge uniformément vers $\partial^k \gamma$ sur toute partie compacte de $\mathbf{R}^{m+n}$, pour tout multi-exposant $k \in \mathbf{N}^{m+n}$. Alors $(f, g)^* P_n$ converge vers c dans $\mathscr{A}^0_{\mathscr{E}_X \times \mathscr{E}_Y}(X \times Y)$. Par suite, $\lambda_i \mu_j (f, g)^* P_n$ converge vers $\lambda_i \mu_j c$ dans $\mathscr{A}^0_{\mathrm{c}}(X \times Y)$. Comme ce sont des fonctions de la forme requise, le corollaire s'en déduit. □

9.2.5. — Reprenons les notations du paragraphe 9.2.2 en supposant de plus que Y est compact et que le jeu $\mathscr{E}'$ sur Y est réduit à une seule carte g de domaine Y. La partition de l'unité (ρ'_μ) est réduite à la fonction constante 1, et on peut supposer que les fonctions $\theta_{\lambda,\mu,i}$ se déduisent de fonctions lisses sur X. La forme ω considérée se décompose alors comme

$$\omega = \sum_{\lambda,i} j_!(\theta_{\lambda,i}(f_\lambda, g)^*\gamma_{\lambda,i}) p_1^*\widetilde{\alpha}_{\lambda,i} \wedge p_2^* g^*\beta_{\lambda,i}.$$

9.2.6. — On note $\mathscr{A}_X^{p',q'} \boxtimes \mathscr{A}_Y^{p'',q''}$ le sous-faisceau de $\mathscr{A}^{\cdot,\cdot}_{X\times Y}$ en $\mathscr{A}_{X\times Y}$-modules engendré par les formes du type $p_1^*\alpha \wedge p_2^*\beta$ où $\alpha \in \mathscr{A}_X^{p',q'}$ et $\beta \in \mathscr{A}_Y^{p'',q''}$; il est contenu dans $\mathscr{A}_{X\times Y}^{p'+p'',q'+q''}$. Ses sections sont appelées formes de type $(p', q'; p'', q'')$ sur $X \times Y$. Lorsque $p'' = q'' = 0$, on dira plus simplement $(p', q'; 0)$-forme.

Proposition 9.2.7. — a) *On a*

$$\mathscr{A}^{p,q}_{X\times Y} = \bigoplus \mathscr{A}_X^{p',q'} \boxtimes \mathscr{A}_Y^{p'',q''},$$

où la somme directe porte sur les $(p', q', p'', q'') \in \mathbf{N}^4$ *tels que* $p = p' + p''$ *et* $q = q' + q''$.

b) *Soit* $(f\colon X \to E, P)$ *et* $(g\colon Y \to F, Q)$ *des cartes tropicales, et soit* ω *une forme sur* $X \times Y$ *qui est tropicalisée par la carte tropicale* $(f, g)\colon X \times Y \to E \times F$ *d'image contenue dans* $P \times Q$. *Pour tout* (p', q', p'', q''), *la composante de* ω *sur* $\mathscr{A}_{X_{\mathrm{G}}}^{p',q'} \boxtimes \mathscr{A}_{Y_{\mathrm{G}}}^{p'',q''}$ *est somme de termes du type* $\rho \cdot (f \circ p_1)^*\alpha \wedge (g \circ p_2)^*\beta$, *où* ρ *est une fonction lisse sur* $X \times Y$ *tropicalisée par* (f, g), α *est une* (p', q')*-forme sur* P *et* β *est une* (p'', q'')*-forme sur* Q.

Démonstration. — La démonstration se fait en plusieurs étapes.

1) Démontrons d'abord une assertion d'unicité. Soit W un ouvert de $X \times Y$ et, pour tout $\pi = (p', q', p'', q'')$, soit ω_π une forme sur W appartenant à $\mathscr{A}_{X_{\mathrm{G}}}^{p',q'} \boxtimes \mathscr{A}_{Y_{\mathrm{G}}}^{p'',q''}$; supposons que $\sum \omega_\pi = 0$ et démontrons que $\omega_\pi = 0$ pour tout π.

Soit $(x, y) \in W$; démontrons que pour tout π, ω_π est nulle au voisinage de (x, y). Il existe un voisinage domanial compact U de x et un voisinage domanial compact V de y, une carte tropicale $f\colon U \to E$ et une carte tropicale $g\colon V \to F$ telles que pour tout π, ω_π soit tropicalisée par la carte tropicale (f, g) sur $U \times V$. Il suffit de prouver que pour tout π, la restriction de ω_π à $U \times V$ est nulle. Pour tout π, soit γ_π une forme sur $f(U) \times g(V)$ telle que $\omega_\pi = (f, g)^*\gamma_\pi$; compte tenu du lemme 1.9.4, on peut même supposer que γ_π est la restriction d'une forme sur $E \times F$.

La nullité de $\omega = \sum \omega_\pi$ équivaut à la nullité de la forme $\gamma = \sum \gamma_\pi$ sur le sous-espace paralinéaire compact $f(U) \times g(V)$, et de même pour chacune de ses composantes ω_π. Soit $\mathscr{C}$ une décomposition cellulaire de $f(U)$, $\mathscr{D}$ une décomposition cellulaire de $g(V)$, et considérons la décomposition cellulaire produit de $f(U) \times g(V)$. Soit $C \in \mathscr{C}$ et $D \in \mathscr{D}$; par hypothèse $\gamma|_{C\times D} = 0$, et il s'agit de démontrer que $\gamma_\pi|_{C\times D} = 0$. Cela ramène à prouver l'assertion sur une cellule-produit, puis au cas de $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^e$, auquel cas elle est évidente par un calcul explicite.

2) Prouvons un énoncé d'existence. Soit ω une forme sur $X \times Y$, soit $(f\colon U \to \mathbf{R}^d, P)$ une carte tropicale définie sur un ouvert U de X, soit $(g\colon V \to \mathbf{R}^e, Q)$ une carte tropicale définie sur un ouvert V de Y et supposons que la restriction de ω à l'ouvert $U \times V$ de $X \times Y$ soit tropicalisée par la carte tropicale (f, g) d'image contenue dans la partie paralinéaire $P \times Q$. Soit Ω un voisinage ouvert de $P \times Q$ dans $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^e$ et soit γ une forme sur Ω telle que $\omega|_{U\times V} = (f, g)^*\gamma$. D'après l'exemple 1.9.13, on peut décomposer

la forme γ en une somme $\sum_\pi \sum_{I,J,K,L} \rho_\pi^{IJKL}\, \mathrm{d}' x_I \wedge \mathrm{d}'' x_J \wedge \mathrm{d}' y_K \wedge \mathrm{d}'' y_L$, où I, J, K, L sont des multindices de longueurs p', p'', q', q'', avec $\pi = (p', q', p'', q'')$, les variables de $\mathbf{R}^d$ étant notées x_i et celles de $\mathbf{R}^e$ étant notées y_j, et où les ρ_π^{IJKL} sont des fonctions lisses sur Ω. Ainsi,

$$(f,g)^*\gamma = \sum_\pi \sum_{I,J,K,L} (f,g)^*\rho_\pi^{IJKL} f^*(\mathrm{d}' x_I \wedge \mathrm{d}'' x_J) \wedge g^*(\mathrm{d}' y_K \wedge \mathrm{d}'' y_L),$$

qui est une décomposition du type demandé.

3) Démontrons l'assertion a) de la proposition. L'indépendance des différents facteurs résulte de l'étape 1). Démontrons que leur somme est le faisceau $\mathscr{A}^{\cdot,\cdot}_{X\times Y}$. Soit ω une forme sur un ouvert W de $X \times Y$. L'étape 2) démontre que ω appartient à localement à la somme considérée ; elle y appartient donc globalement.

4) L'assertion b) est alors le cas particulier de l'étape 2) appliquée à $U = X$ et $V = Y$. □

9.2.8. — Soit X et Y des espaces tropicaux de niveaux m et n respectivement. L'opérateur différentiel d' sur sur les formes sur $X \times Y$ se décompose comme la somme de deux opérateurs différentiels d'_X et d'_Y. Si ω est une forme de type $(p', q'; p'', q'')$, on note $\mathrm{d}'_X\,\omega$ et $\mathrm{d}'_Y\,\omega$ les composantes de $\mathrm{d}'\,\omega$ de type $(p'+1, q'; p'', q'')$ et $(p', q'; p''+1, q'')$ respectivement. On vérifie dans des cartes que l'on a $\mathrm{d}'\,\omega = \mathrm{d}'_X\,\omega + \mathrm{d}'_Y\,\omega$. Ces applications s'étendent par linéarité à toutes les formes.

Par construction, si α est une forme sur X, on a

$$\mathrm{d}'_X(p_1^*\alpha) = p_1^*(\mathrm{d}'\,\alpha) \quad \text{et} \quad \mathrm{d}'_Y(p_1^*\alpha) = 0,$$

et des formules analogues si β est une forme sur Y.

De la formule de Leibniz

$$\mathrm{d}'(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}'\,\omega \wedge \eta + (-1)^{p+q}\omega \wedge \mathrm{d}'\,\eta$$

si ω est de type (p, q), on déduit les deux égalités

$$\mathrm{d}'_X(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}'_X\,\omega \wedge \eta + (-1)^{p+q}\omega \wedge \mathrm{d}'_X\,\eta$$

et

$$\mathrm{d}'_Y(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}'_Y\,\omega \wedge \eta + (-1)^{p+q}\omega \wedge \mathrm{d}'_Y\,\eta.$$

On définit de même les opérateurs d''_X et d''_Y.

9.2.9. — Par transposition, on déduit des opérateurs d'_X, d''_X, d'_Y et d''_Y des opérateurs linéaires analogues sur les espaces de courants, avec les mêmes règles de signes que celles du paragraphe 7.7. Par exemple, si S est un courant et ω une forme de type (p, q) sur $X \times Y$, on a

$$\langle \mathrm{d}'_X\,S, \omega\rangle = (-1)^{p+q+1}\langle S, \mathrm{d}'_X\,\omega\rangle.$$

§ 9.3. INTÉGRALES DÉPENDANT DE PARAMÈTRES

Lemme 9.3.1. — *Soit X et Y des espaces tropicaux de niveaux m et n respectivement. Soit r un élément de $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$.*

Soit Φ la famille des parties fermées de $X \times Y$ qui sont compactes au-dessus de Y.

Soit $\omega \in \mathscr{A}_\Phi(X \times Y)$. Pour tout $y \in Y$, on note ω_y la forme sur X, image réciproque de ω par l'application $x \mapsto (x, y)$.

a) *Pour tout $y \in Y$, le support de ω_y est compact.*

b) *L'application $y \mapsto \omega_y$ de Y dans $\mathscr{A}_{\mathrm{c}}(X)$ est continue lorsque ce dernier espace est muni de la topologie $\mathscr{C}^r$.*

Démonstration. — Il n'y a rien à démontrer si Y est vide ; nous le supposons désormais non vide.

a) Le support de $\omega|_{X\times\{y\}}$ est contenu dans $\mathrm{supp}(\omega) \cap X \times \{y\}$. Il est donc compact.

b) L'assertion est locale sur Y, ce qui permet de se ramener au cas où Y est compact. La famille Φ est alors la famille des parties compactes de $X \times Y$.

Soit $\mathscr{D}$ un jeu de cartes couvrant sur $X \times Y$ qui tropicalise ω. Soit K la projection du support de ω sur X ; c'est une partie compacte de X. Appliquons la proposition 9.2.1 à la partie compacte $K \times Y$ de $X \times Y$: il existe ainsi des jeux de cartes finis $\mathscr{E}$ sur X et $\mathscr{E}'$ sur Y tels que le jeu produit $\mathscr{E} \times \mathscr{E}'$ raffine $\mathscr{D}$ et couvre $K \times Y$.

Pour tout $y \in Y$, la forme ω_y est tropicalisée par $\mathscr{E}$ et son support est contenu dans K. L'application $y \mapsto \omega_y$ est donc à valeurs dans $\mathscr{A}_{\mathscr{E},K}(X)$. Pour démontrer qu'elle est continue pour la topologie $\mathscr{C}^r$, il suffit donc de prouver que c'est le cas de l'application induite de Y dans $\mathscr{A}_{\mathscr{E},K}(X)$.

Soit W un domaine compact contenue dans une des cartes $(f\colon U \to E)$ du jeu $\mathscr{E}$ et soit $\|\cdot\|_{W,r}$ une seminorme $\mathscr{C}^r$ sur $\mathscr{A}(X)$ associée à une décomposition cellulaire de $f(W)$ et un système de coordonnées sur ses cellules. Il s'agit de prouver que pour z assez proche de y, $\|\omega_z - \omega_y\|_{W,r}$ est aussi petit que l'on veut. Soit $(g\colon V \to F)$ une carte du jeu $\mathscr{E}'$ tel que y appartient à l'intérieur de V ; soit W' un voisinage domanial compact de y contenu dans V. Par définition, il existe une forme α sur $f(W) \times g(W')$ telle que $\omega|_{W\times W'} = (f, g)^*\alpha$; on peut supposer que α est une forme lisse sur $E \times F$. Pour $z \in W'$, la forme $\omega_z|_W$ est égale à $f^*\alpha|_{g(z)}$, où pour tout $t \in F$, α_t est la restriction de α à $E \times \{t\}$, identifié à E.

Posons $P = f(W)$ et $Q = g(W')$. Par définition, $\|\omega_z\|_{W,r} = \|\alpha_{g(z)}\|_{P,r}$. On se ramène ainsi la continuité de l'application $t \mapsto \alpha_t$ de Q dans $\mathscr{A}(P)$ pour la norme $\|\cdot\|_{P,r}$.

En raisonnant cellule par cellule, on se ramène au cas où P est une cellule C. Alors, les formes sur C ont une base standard comme module sur sur l'espace des fonctions lisses sur C. En fixant une telle base, on se ramène au cas où α est une fonction lisse. Il s'agit alors de prouver que lorsque φ est une fonction lisse sur $E \times F$, l'application $t \mapsto \varphi(\cdot, t)$ de F dans $\mathscr{C}^\infty(P)$ est continue pour la topologie $\mathscr{C}^r$, ce qui résulte de la formule de Taylor. □

9.3.2. — Soit X et Y des espaces tropicaux de niveaux m et n respectivement. Soit S un courant de bidimension (p, q) sur X. Soit γ une $(p, q; 0)$-forme lisse sur $X \times Y$ dont le support est compact au-dessus de Y.

Pour tout $y \in Y$, on peut restreindre γ à $X \times \{y\}$; on obtient ainsi une (p, q)-forme lisse dont le support est compact, qu'on notera $\gamma(\cdot, y)$. On note alors $S_*(\gamma)(y)$ la valeur du courant S sur cette forme. On a ainsi défini une fonction $S_*(\gamma)$ sur Y.

Lemme 9.3.3. — *Le support de $S_*(\gamma)$ est contenue dans la partie fermée $p_2(\mathrm{supp}(\gamma))$.*

Démonstration. — Comme $\mathrm{supp}(\gamma)$ est compact au-dessus de Y, son image est fermée dans Y.

Supposons que y n'appartienne pas à l'image du support de γ. Par compacité de ce support au-dessus de Y, il existe un voisinage ouvert U de y dans Y tel que $\gamma|_{X\times U} = 0$. Alors $\gamma(\cdot, y') = 0$ pour tout $y' \in U$ si bien que $S_*(\gamma)$ est nulle sur U. En particulier, y n'appartient au support de $S_*(\gamma)$. □

Proposition 9.3.4. — *Soit f une carte tropicale sur un domaine U de X, soit g une carte tropicale sur un domaine V de Y, soit ρ une fonction lisse sur X dont le support est compact et contenu dans l'intérieur de U.*

a) *Soit γ une forme lisse sur de bidegré $(p, q; 0)$ sur $X \times Y$ qui est tropicalisée par (f, g) sur $U \times V$. La forme $\rho\gamma$ sur $X \times Y$ est à support compact au-dessus de Y, de type $(p, q; 0)$, et la fonction $S_*(\rho\gamma)$ est lisse sur V, tropicalisée par g.*

b) *L'application $\mathscr{A}^{p,q;0}_{(f,g)}(X \times Y) \to \mathscr{A}^0_g(Y)$ donnée par $\gamma \mapsto S_*(\rho\gamma)$ est continue.*

Démonstration. — a) Notons E et F les espaces affines buts de f et g. Il s'agit de prouver que la restriction de $S_*(\rho\gamma)$ à tout domaine compact W de V est lisse et tropicalisée par g.

Soit W un tel domaine et soit K un domaine compact qui contient le support de ρ. Considérons un jeu de cartes tropicales fini sur X qui couvre K, toutes plus fines que f, et qui tropicalise ρ, et adjoignons-lui la carte tropicale triviale de domaine le complémentaire de K. Notons $\mathscr{E}$ le jeu ainsi obtenu.

Par définition d'une forme lisse tropicalisée, il existe une forme lisse α sur la partie paralinéaire $f(K) \times g(W)$ telle que $\gamma|_{K\times W} = (f, g)^*\alpha$. Cette forme se prolonge en une forme lisse sur l'espace affine $E \times F$, qu'on notera encore α

Pour toute forme lisse β de type $(p, q; 0)$ sur $E \times F$, on définit une fonction T_β sur F de la façon suivante. Considérons la forme $\rho(x)f^*\beta$ sur $U \times F$; son support est contenu dans $\mathrm{supp}(\rho) \times F$; on la prolonge (par zéro) en une forme lisse ω sur $X \times F$. Pour tout z, la forme ω_z sur X est lisse et à support compact (contenu dans le support de ρ) et l'on pose $T_\beta(z) = \langle S, \omega_z\rangle$.

Nous allons prouver que $T(\beta)$ est $\mathscr{C}^\infty$ pour toute forme lisse β sur $E \times F$. Comme dans [**122**, chapitre 4], cela va découler de la définition de la continuité d'un courant et des topologies sur les espaces de formes.

Lorsque z' tend vers un point z, les formes lisses $\omega_{z'}$ convergent vers la forme lisse ω_z dans $\mathscr{A}^{p,q}_c(X)$, d'après le lemme 9.3.1. Puisque S est une forme linéaire continue sur $\mathscr{A}^{p,q}_c(X)$, il en résulte que $T_\beta(z')$ tend vers $T_\beta(z)$. Cela prouve que la fonction T_β est continue.

On fait un raisonnement similaire pour les dérivées partielles de T_β. Fixons un vecteur e de F et notons $\partial_e\psi$ la dérivée partielle de ψ par rapport à e. Alors, les formes lisses sur X (dépendant de t) données par

$$\frac{\omega_{z+te} - \omega_z}{t}$$

convergent vers la forme $\partial_e\omega_z$ qui est définie de façon analogue à ω en remplaçant β par $\partial_e\beta$. Par continuité du courant S, on a donc

$$\lim_{t\to 0} \frac{T_\beta(z + te) - T_\beta(z)}{t} = \langle S, \partial_e\omega_z\rangle.$$

Cela prouve que T_β admet une dérivée partielle par rapport au vecteur e. De plus, cette dérivée partielle est une fonction continue de z, car elle est égale à $T_{\partial_e\beta}$. Ainsi, T_β est de classe $\mathscr{C}^1$. En itérant l'opération, on en déduit que T_β est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Pour tout $v \in W$, la forme $\rho(\cdot)\gamma(\cdot, v)$ sur X coïncide avec $\rho(\cdot)f^*\alpha(\cdot, g(v))$ sur U, et est nulle en dehors de K. Cela prouve que que

$$S_*(\rho\gamma)(v) = T_\alpha(g(v)).$$

Par conséquent, $S_*(\rho\gamma)$ est lisse et tropicalisée par g.

b) Démontrons maintenant la continuité de l'application linéaire de $\mathscr{A}^{p,q;0}_{(f,g)}(X \times Y)$ dans $\mathscr{A}^0_g(Y)$ donnée par $\gamma \mapsto S_*(\rho\gamma)$.

Par définition de la continuité du courant S, il existe une famille finie (W_i) de domaines compacts de X, chacun étant contenu dans un domaine du jeu de cartes $\mathscr{E}$, un entier r, et un nombre réel c tels que $|\langle S, \theta\rangle| \leqslant c \sup_i \|\theta\|_{W_i,r}$ pour toute forme lisse θ sur X qui appartient à $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathscr{E},K}(X)$.

Pour tout $v \in W$,

$$S_*(\rho(f,g)^*\alpha)(v) = T_\alpha(g(v))$$

et par construction, $T_\alpha(z) = \langle S, \rho(\cdot)f^*\alpha(\cdot, z)\rangle$ pour tout $z \in F$. Les formes $\rho(\cdot)\alpha(\cdot, z)$ appartiennent à $\mathscr{A}^{p,q}_{\mathscr{E},K}(X)$. On a donc

$$|T_\alpha(z)| \leqslant c \sup_i \|\rho(\cdot)f^*\alpha(\cdot)z\|_{W_i,r}.$$

Il existe un nombre réel c' tel que $\|\rho(\cdot)f^*\alpha(\cdot, z)\|_{W_i,r} \leqslant c'\|\alpha\|_{f(K)\times g(W_i),r}$ pour toute forme lisse α sur $E \times F$. Ainsi, il existe un nombre réel c'' tel que

$$|T_\alpha(z)| \leqslant c'' \sup_i \|\alpha\|_{f(K)\times g(W_i),r}$$

pour toute forme lisse α sur $E \times F$ et tout $z \in g(W)$. Cela entraîne que $\gamma \mapsto S_*(\rho\gamma)$ est continue lorsque la source est munie de la topologie $\mathscr{C}^r$, et le but est muni de la topologie $\mathscr{C}^0$.

Compte tenu des formules $\partial_e T_\alpha = T_{\partial_e\alpha}$, on en déduit que $\gamma \mapsto S_*(\rho\gamma)$ est continue lorsque la source est munie de la topologie $\mathscr{C}^{k+r}$ et le but est muni de la topologie $\mathscr{C}^k$, pour tout entier k.

Par conséquent, l'application $\gamma \mapsto S_*(\rho\gamma)$ est continue lorsque la source et le but sont munis de la topologie $\mathscr{C}^\infty$.

□

Corollaire 9.3.5. — *Soit $\mathscr{D}$ un jeu de cartes sur $X \times Y$ et soit M une partie de $X \times Y$ qui est compacte au-dessus de Y. Soit $\mathscr{E}_X$ et $\mathscr{E}_Y$ des jeux de cartes tropicales sur X et Y tel que le jeu de cartes $\mathscr{E}_X \times \mathscr{E}_Y$ raffine $\mathscr{D}$ et couvre M.*

Pour toute forme lisse $\gamma \in \mathscr{A}^{p,q;0}_{\mathscr{D},M}(X \times Y)$ et toute fonction lisse ρ sur X, la fonction $S_*(\rho\gamma)$ appartient à $\mathscr{A}^0_{\mathscr{E}_Y,p_2(M)}(Y)$.

Démonstration. — D'après le lemme 9.3.3, le support de $S_*(\rho\gamma)$ est contenu dans $p_2(M)$. Il suffit alors de démontrer que pour toute carte tropicale g appartenant au jeu $\mathscr{E}_Y$, la fonction $S_*(\rho\gamma)$ est lisse et tropicalisée par g sur le domaine V de g. Cela revient à dire que pour tout domaine compact W de V, la restriction à W de $S_*(\rho\gamma)$ est lisse et tropicalisée par g.

La partie $M \cap (X \times W)$ de $X \times Y$ est compacte ; soit K sa projection sur X. Le jeu $\mathscr{E}_X$ couvre K. Soit (ρ_λ) une partition de l'unité sur X au voisinage de K subordonnée aux cartes de $\mathscr{E}_X$. Comme le support de γ est contenu dans M, on en déduit que γ coïncide avec $\sum_\lambda \rho_\lambda\gamma$ sur $X \times W$, si bien que $S_*(\rho\gamma)$ coïncide avec $\sum_\lambda S_*(\rho\rho_\lambda\gamma)$ sur W. Il suffit

alors de démontrer que chacun des termes de cette somme est lisse et tropicalisé par g sur W.

Fixons un indice λ et considérons une carte f du jeu $\mathscr{E}_X$ telle que le support de ρ_λ soit contenu dans le domaine U de f. L'assertion découle alors de la proposition 9.3.4. □

Théorème 9.3.6. — a) *L'application $\gamma \mapsto S_*(\gamma)$ définit une application linéaire continue de $\mathscr{A}_{\mathrm{c}}^{p,q;0}(X \times Y)$ dans $\mathscr{A}_{\mathrm{c}}^{0}(Y)$.*

b) *Soit Φ la famille de supports constituée des parties fermées de $X \times Y$ qui sont compactes au-dessus de Y. L'application $\gamma \mapsto S_*(\gamma)$ définit une application linéaire continue de $\mathscr{A}_{\Phi}^{p,q;0}(X \times Y)$ dans $\mathscr{A}^{0}(Y)$.*

Démonstration. — a) Il suffit de démontrer que pour tout jeu de cartes tropicales couvrant $\mathscr{D}$ et toute partie compacte M de $X \times Y$, l'application S_* induit une application continue de $\mathscr{A}_{\mathscr{D},M}^{p,q;0}(X \times Y)$ dans $\mathscr{A}_{\mathrm{c}}^{0}(Y)$. Son image est contenue dans $\mathscr{A}_{p_2(M)}^{0}(Y)$.

D'après la proposition 9.2.1, il existe des jeux de cartes tropicales $\mathscr{E}_X$ et $\mathscr{E}_Y$ sur X et Y respectivement, finis, tels que le jeu produit $\mathscr{E}_X \times \mathscr{E}_Y$ raffine $\mathscr{D}$ et couvre M. D'après le corollaire 9.3.5, on a $S_*(\gamma) \in \mathscr{A}_{\mathscr{E}_Y,p_2(M)}^{0}(Y)$ pour tout $\gamma \in \mathscr{A}_{\mathscr{D},M}^{p,q;0}(X \times Y)$. Il suffit de démontrer que l'application de $\mathscr{A}_{\mathscr{D},M}^{p,q;0}(X \times Y)$ dans $\mathscr{A}_{\mathscr{E}_Y,p_2(M)}^{0}(Y)$ induite par S_* est continue.

Soit (ρ_λ) une partition de l'unité sur X au voisinage du compact $p_1(M)$, subordonnée au recouvrement formé des intérieurs des domaines des cartes de $\mathscr{E}_X$. Comme dans a), on a

$$S_*(\gamma) = \sum_\lambda S_*(\rho_\lambda \gamma).$$

Il suffit de démontrer que chacune des applications linéaires $\gamma \mapsto S_*(\rho_\lambda\gamma)$ est continue.

Soit λ un indice, soit f la carte correspondante de $\mathscr{E}_X$, soit U son domaine. Soit g une carte de $\mathscr{E}_Y$ et soit V son domaine. D'après l'assertion b) de la proposition 9.3.4, l'application linéaire $\gamma \mapsto S_*(\rho_\lambda\gamma)$ induit une application linéaire continue de $\mathscr{A}_{(f,g)}^{p,q;0}(X \times Y)$ dans $\mathscr{A}_{g}^{0}(Y)$. L'assertion en découle.

b) Soit $\mathscr{D}$ un jeu de cartes tropicales couvrant sur $X \times Y$ et soit M une partie fermée de $X \times Y$ qui est compacte au-dessus de Y. Démontrons que l'application de $\mathscr{A}_{\mathscr{D},M}^{p,q;0}(X \times Y)$ dans $\mathscr{A}^{0}(Y)$ déduite de S_* est continue.

Soit (W_i) une famille de domaines compacts de Y dont les intérieurs recouvrent Y. Soit $\mathscr{E}_i^X$ et $\mathscr{E}_i^Y$ des jeux de cartes tropicales sur X et W_i respectivement tel que le jeu produit $\mathscr{E}_i^X \times \mathscr{E}_i^Y$ raffine $\mathscr{D}$ et couvre la partie compacte $M \cap (X \times W_i)$. On prouve comme précédemment que pour toute forme lisse $\gamma \in \mathscr{A}_{\mathscr{D},M}^{p,q;0}(X \times Y)$ et toute fonction lisse ρ sur X, la fonction $S_*(\rho\gamma)$ est lisse appartient à $\mathscr{A}_{\mathscr{E}_i^Y}^{0}$ pour tout i. Soit $\mathscr{E}$ le jeu de cartes tropicales sur Y réunion des jeux $\mathscr{E}_i^Y$. Comme les intérieurs des W_i recouvrent Y, ce jeu est couvrant, et S_* applique $\mathscr{A}_{\mathscr{D},M}^{p,q;0}(X \times Y)$ dans $\mathscr{A}_{\mathscr{E}}^{0}(Y)$. Il suffit de démontrer que l'application linéaire qui s'en déduit par restrictions est continue.

Considérons une carte tropicale g appartenant à $\mathscr{E}$, soit V son domaine, soit W un domaine compact de V et soit r un entier naturel ; on note $\|\cdot\|_{W,r}$ une semi-norme $\mathscr{C}^r$ correspondante sur l'espace $\mathscr{A}_{\mathscr{E}}^{0}(Y)$.

L'assertion a) appliquée à $X \times W$ entraîne la continuité de l'application linéaire $\gamma \mapsto S_*(\gamma)|_W$, car W est compact. Ainsi, pour que $\|S_*(\gamma)\|_{W,r}$ soit petite, il suffit que γ soit

suffisamment proche de 0 dans $\mathscr{A}^0_{\mathscr{D},M}(X \times W)$, et a fortiori, dans $\mathscr{A}^{p,q;0}_{\mathscr{D},M}(X \times Y)$. Cela conclut la démonstration. □

9.3.7. — Soit Φ la famille de supports sur $X \times Y$ constituée des parties fermées qui sont compactes au-dessus de Y. On définit un faisceau sur Y en associant à tout ouvert U de X, le sous-espace de $\mathscr{A}^{p,q;p',q'}(X \times U)$ constitué des formes de type $(p,q;p',q')$ sur $X \times U$ dont le support est compact au-dessus de U. On le note $p_{2,*}\mathscr{A}^{p,q;p',q'}_{X\times Y,\Phi}$.

Théorème 9.3.8. — *Soit S un courant de bidimension (p,q) sur X. Soit Φ la famille de supports sur $X \times Y$ constituée des parties fermées qui sont compactes au-dessus de Y.*

a) *Il existe un unique morphisme de faisceaux sur Y :*

$$p_{2,*}\mathscr{A}^{p,q;p',q'}_{X\times Y,\Phi} \to \mathscr{A}^{p',q'}_Y,$$

qui, pour tout ouvert U de Y et toute toute forme γ de type $(p,q;0)$ sur $X \times U$ dont le support est compact au-dessus de U et toute forme β de type (p',q') sur U, applique $\gamma \wedge p_2^*\beta$ sur $S_*(\gamma)\beta$.

b) *Ce morphisme de faisceaux est fonctoriel en Y. En particulier, si $v\colon Y \to Y'$ est un morphisme d'espaces tropicaux et ω est une forme sur $X \times Y'$, on a $S_*((\mathrm{id}_X \times v)^*\omega) = v^*S_*(\omega)$.*

c) *L'application linéaire*

$$\mathscr{A}^{p,q;p',q'}_\Phi(X \times Y) \to \mathscr{A}^{p',q'}(Y)$$

qui s'en déduit par passage aux sections globales est continue.

d) *L'application linéaire*

$$\mathscr{A}^{p,q;p',q'}_{\mathrm{c}}(X \times Y) \to \mathscr{A}^{p',q'}_{\mathrm{c}}(Y)$$

qui s'en déduit par passage aux sections globales est continue.

Cette dernière application linéaire coïncide avec l'application S_* lorsque $(p',q') = (0,0)$; nous la noterons donc encore S_*.

Démonstration. — a) L'unicité d'un tel morphisme de faisceaux résulte de ce que les formes de ce type engendrent le faisceau $p_{2,*}\mathscr{A}^{p,q;p',q'}_{X\times Y,\Phi}$. En effet, soit U un ouvert de Y et soit $\omega \in \mathscr{A}^{p,q;p',q'}_\Phi(X \times Y)$. Soit y un point de U, soit W un domaine compact de Y contenu dans U et qui est voisinage de y. La forme $\omega|_{X\times W}$ est alors à support compact ; d'après le corollaire 9.2.3, elle est combinaison linéaire de formes du type $\gamma \wedge p_2^*\beta$; il en résulte que $\omega|_{\mathring{W}}$ est combinaison linéaire de formes du type requis.

Il suffit alors, pour démontrer l'existence de ce morphisme de faisceaux, de vérifier que si U est un ouvert de Y, (γ_i) une famille finie de formes de type $(p,q;0)$ sur $X \times U$ à supports compacts au-dessus de U, (β_i) une famille finie de formes de type (p',q') sur U telles que la forme $\omega = \sum \gamma_i \wedge p_2^*\beta_i$ est nulle, on a l'égalité

$$\sum S_*(\gamma_i)\beta_i = 0.$$

Posons $\varpi = \sum S_*(\gamma_i)\beta_i$.

Comme un espace tropical est supposé riche, il suffit de vérifier que la restriction de ϖ à toute partie squelettique T de U est nulle. En considérant un G-recouvrement de T, on peut supposer que T est une cellule D, dont on note d la dimension.

Soit (η_λ) une base standard des (p',q')-formes sur D. Pour tout i, on écrit $\beta_i|_D = \sum b_{i,\lambda}\eta_\lambda$, où les $b_{i,\lambda}$ sont des fonctions lisses sur D. Pour tout λ, posons

$$\theta_\lambda = \sum_i \gamma_i|_{X\times D} p_2^* b_{i,\lambda}.$$

Les θ_λ sont des formes lisses sur $X \times D$ telles que $\omega|_{X\times D} = \sum_\lambda \theta_\lambda \wedge p_2^*\eta_\lambda$. Avec ces notations, on a donc

$$\varpi|_D = \sum_{i,\lambda} S_*(\gamma_i)\beta_i|_D = \sum_{i,\lambda} S_*(\gamma_i) b_{i,\lambda}\eta_\lambda = \sum_{i,\lambda} S_*(\gamma_i p_2^* b_{i,\lambda})\eta_\lambda = \sum_\lambda S_*(\theta_\lambda)\eta_\lambda.$$

Puisque $\omega|_{X\times D} = 0$, il en résulte que $\theta_\lambda = 0$ pour tout λ. Cela prouve donc que $S_*(\theta_\lambda) = 0$, d'où l'égalité $\varpi|_D = 0$. Cela conclut la démonstration de l'existence du morphisme de faisceaux de l'énoncé.

b) Cette propriété se vérifie localement. Il suffit alors d'établir l'assertion pour une forme ω du type $\gamma \wedge p_2^*\beta$, auquel cas cela découle de la définition.

c) Notons ici $\widetilde{S}_*$ cette application linéaire. Soit $\mathscr{D}$ un jeu de cartes couvrant sur $X \times Y$ et soit M une partie fermée de $X \times Y$ qui est compacte au-dessus de Y. Soit N la projection de M sur Y ; c'est une partie fermée de Y. Nous allons construire un jeu $\mathscr{E}'$ sur Y tel que l'image de $\mathscr{A}^{p,q;p',q'}_{\mathscr{D},M}(X \times Y)$ soit contenue dans $\mathscr{A}^{p',q'}_{\mathscr{E},N}(Y)$.

Soit (W_i) une famille de domaines compacts de Y dont les intérieurs recouvrent Y.

Fixons un indice i. Compte tenu de la proposition 9.2.1, considérons des jeux de cartes tropicales $\mathscr{E}_i^X$ sur X et $\mathscr{E}_i^Y$ sur W_i tels que le jeu produit $\mathscr{E}_i^X \times \mathscr{E}_i^Y$ raffine $\mathscr{D}$, où le jeu $\mathscr{E}_i^X$ couvre la partie compacte $K_i = p_1(M \cap (X \times W_i))$ et le jeu $\mathscr{E}_i^Y$ couvre W_i.

Soit $\mathscr{E}$ le jeu de cartes tropicales sur Y obtenu par concaténation des jeux $\mathscr{E}_i^Y$; il est couvrant. Prouvons que $\widetilde{S}_*$ applique $\mathscr{A}^{p,q;p',q'}_{\mathscr{D},M}(X \times Y)$ dans $\mathscr{A}^{p',q'}_{\mathscr{E},N}(Y)$. Soit donc $\omega \in \mathscr{A}^{p,q;p',q'}_{\mathscr{D},M}(X \times Y)$. La forme $\widetilde{S}_*(\omega)$ est supportée par N ; démontrons qu'elle est tropicalisée par $\mathscr{E}$.

Soit i un indice, soit g une carte de $\mathscr{E}_i^Y$ et soit V son domaine ; démontrons que $\widetilde{S}_*(\omega)$ est tropicalisée par g. Soit W un domaine compact de V. Reprenons une décomposition de $\omega|_{X\times W}$ comme dans le paragraphe 9.2.5 :

$$\omega = \sum_{\lambda,i} j_!(p_1^*\theta_{\lambda,i}(f_\lambda, g)^*\gamma_{\lambda,i}) p_1^*\widetilde{\alpha}_{\lambda,i} \wedge p_2^* g^*\beta_{\lambda,i}.$$

Ainsi,

$$\widetilde{S}_*(\omega)|_W = \sum_{\lambda,i} S_*(j_! p_1^*\theta_{\lambda,i}(f_\lambda, g)^*\gamma_{\lambda,i}) p_1^*\widetilde{\alpha}_{\lambda,i}) g^*\beta_{\lambda,i}.$$

D'après la proposition 9.3.4, *a*), les fonctions

$$S_*(j_! p_1^*\theta_{\lambda,i}(f_\lambda, g)^*\gamma_{\lambda,i}) p_1^*\widetilde{\alpha}_{\lambda,i})$$

sur W sont lisses, tropicalisées par g. Il en résulte que $\widetilde{S}_*(\omega)|_W$ est tropicalisée par g.

Démontrons que l'application linéaire

$$\widetilde{S}_* \colon \mathscr{A}^{p,q;p',q'}_{\mathscr{D},M}(X \times Y) \to \mathscr{A}^{p',q'}_{\mathscr{E},N}(Y)$$

est continue.

Soit D une cellule compacte de Y qui est contenue dans le domaine d'une carte g de $\mathscr{E}$ et telle que $g|_D$ soit injective. Choisissons une base standard (η_μ) des (p',q')-formes

sur D. Soit r un entier naturel. Choisissons la norme $\mathscr{C}^r$ standard sur $\mathscr{A}_{\mathrm{G}}^{p',q'}(D)$ donnée par la borne supérieure des normes $\mathscr{C}^r$ des coefficients dans la base (η_μ).

On choisit un domaine compact W de Y contenu dans le domaine de g tel que $D \subset W$. Choisissons une décomposition de $\omega|_{X\times W}$ comme ci-dessus :

$$\omega|_{X\times W} = \sum_{\lambda,i} j_!(p_1^*\theta_{\lambda,i}(f_\lambda, g)^*\gamma_{\lambda,i})p_1^*\widetilde{\alpha}_{\lambda,i} \wedge p_2^* g^*\beta_{\lambda,i}.$$

Ainsi,

$$\widetilde{S}_*(\omega)|_W = \sum_{\lambda,i} S_*(j_! p_1^*\theta_{\lambda,i}(f_\lambda, g)^*\gamma_{\lambda,i})p_1^*\widetilde{\alpha}_{\lambda,i})g^*\beta_{\lambda,i}.$$

On peut restreindre ces décompositions sur $X \times D$. Pour tout (λ, i), il existe une unique famille $(b_{\lambda,i,\mu})$ de fonctions lisses sur D telle que

$$g^*\beta_{\lambda,i}|_D = \sum_\mu b_{\lambda,i,\mu}\eta_\mu.$$

Pour tout μ, posons

$$\theta_\mu = \sum_{\lambda,i} j_!(p_1^*\theta_{\lambda,i}(f_\lambda, \mathrm{id}^*)\gamma_{\lambda,i}p_1^*\widetilde{\alpha}_{\lambda,i})p_2^* b_{\lambda,i,\mu}.$$

Ce sont des formes lisses de type $(p, q; 0, 0)$ sur $X \times D$ telles que

$$\omega|_{X\times D} = \sum_\mu \theta_\mu \wedge p_2^*\eta_\mu.$$

Ainsi

$$\widetilde{S}_*(\omega)|_D = \widetilde{S}_*(\omega|_{X\times D}) = \sum_\mu S_*(\theta_\mu)\eta_\mu.$$

Comme S_* est continu (théorème 9.3.6), il résulte de la remarque 5.2.9 qu'il existe une partie squelettique compacte de $X \times D$, qu'on peut prendre de la forme $\Sigma \times D$, où Σ est une partie squelettique compacte de X, un entier s, une norme $\mathscr{C}^s$ standard sur $\Sigma \times D$ et un nombre réel c tels $|S_*(\theta_\mu)|_{D,r} \leqslant c\|\theta_\mu\|_{\Sigma\times D,s}$. On a donc

$$\|\widetilde{S}_*(\omega)\|_{D,r} = \sup_\mu \|S_*(\theta_\mu)\|_{D,r} \leqslant c \sup_\mu \|\theta_\mu\|_{\Sigma\times D,s} = c\|\omega\|_{\Sigma\times D,s}$$

pour une norme standard $\mathscr{C}^s$ sur $\Sigma \times D$.

Compte tenu de la remarque 5.2.9, cela prouve la continuité annoncée.

Ceci entraîne les assertions c) et d) par définition des topologies en jeu.

□

§ 9.4. PRODUIT TENSORIEL DE COURANTS

9.4.1. — Soit X un espace tropical de niveau m, soit Y un espace tropical de niveau n, supposés sans bord. On a défini au paragraphe 9.1 un espace tropical produit $X \times Y$, de niveau $m + n$, tel que les projections $p_1 \colon X \times Y \to X$ et $p_2 \colon X \times Y \to Y$ soient des morphismes d'espaces tropicaux.

9.4.2. — Soit S un courant de bidimension (p,q) sur X et soit T un courant de bidimension (r,s) sur Y. Le but de ce paragraphe est de définir un courant $S\boxtimes T$ de bidimension $(p+r,q+s)$ sur l'espace tropical $X\times Y$ tel que l'on ait $\langle S\boxtimes T, p_1^*\alpha\wedge p_2^*\beta\rangle = \langle S,\alpha\rangle\langle T,\beta\rangle$ lorsque α et β sont des formes lisses à support compact sur X et Y respectivement, de bidegrés (p,q) et (r,s) respectivement. Par construction, ce courant sera nul sur les autres facteurs que $\mathscr{A}_X^{p,q}\boxtimes\mathscr{A}_Y^{r,s}$.

9.4.3. — Dans ce qui suit, il sera pratique d'évaluer un courant de type (p,q) en une forme dont le type est arbitraire ; par convention, sa valeur sera 0 sur l'espace des formes de bidegré (p',q'), pour tout couple (p',q') distinct de (p,q).

Théorème 9.4.4. — *Le courant $S\boxtimes T = T\circ S_*$ sur $X\times Y$ vérifie les relations*

$$\langle S\boxtimes T, p_1^*\alpha\wedge p_2^*\beta\rangle = \langle S,\alpha\rangle\langle T,\beta\rangle$$

pour toute forme lisse α à support compact sur X et toute forme lisse β à support compact sur Y, et c'est le seul.

Démonstration. — Il résulte du corollaire 9.2.4 qu'il existe au plus un courant sur $X\times Y$ qui vérifie ces relations. Il suffit donc de prouver que c'est le cas de $T\circ S_*$.

Puisque les applications continues T et S_* sont continues, l'application $T\circ S_*$ est un courant sur $X\times Y$. Démontrons qu'il vérifie la relation indiquée. Soit γ une fonction lisse à support compact sur $X\times Y$ qui vaut 1 au voisinage du produit des supports de α et de β. On a donc $p_1^*\alpha\wedge p_2^*\beta = \gamma p_1^*\alpha\wedge p_2^*\beta$, si bien que

$$\langle S\boxtimes T, p_1^*\alpha\wedge p_2^*\beta\rangle = \langle S\boxtimes T, \gamma p_1^*\alpha\wedge p_2^*\beta\rangle = \langle T, \langle S,\gamma(\cdot,y)\alpha\rangle\beta\rangle.$$

Pour démontrer l'égalité voulue, il suffit donc de démontrer que

$$\langle S,\gamma(\cdot,y)\alpha\rangle\beta = \langle S,\alpha\rangle\beta.$$

Il suffit de le prouver au voisinage de tout point y de Y. Si $y\notin\operatorname{supp}(\beta)$, la forme β est nulle au voisinage de y, donc les deux membres de l'égalité sont nuls au voisinage de y. Sinon, la fonction $\gamma(\cdot,y)$ sur X vaut 1 au voisinage du support de α, si bien que $\gamma(\cdot,y)\alpha=\alpha$. On a donc $\langle S,\gamma(\cdot,y)\alpha\rangle = \langle S,\alpha\rangle$ dans ce cas, d'où l'égalité voulue. □

Corollaire 9.4.5. — *La construction du courant $S\boxtimes T$ est symétrique : si τ désigne l'échange des facteurs de $X\times Y$, on a $\langle S\boxtimes T,\omega\rangle = \langle T\boxtimes S,\tau^*\omega\rangle$, pour toute forme lisse à support compact sur $X\times Y$.*

Démonstration. — D'après la proposition précédente, si α et β sont des formes lisses à support compact sur X et Y respectivement, on a

$$\langle S\boxtimes T, p_1^*\alpha\wedge p_2^*\beta\rangle = \langle S,\alpha\rangle\langle T,\beta\rangle = \langle T\boxtimes S, p_1^*\beta\wedge p_2^*\alpha\rangle.$$

L'assertion d'unicité de la proposition précédente permet de conclure. □

Exemple 9.4.6. — Soit ω une forme lisse sur X, soit η une forme lisse sur Y. On a

$$[\omega]\boxtimes[\eta] = [p_1^*\omega\wedge p_2^*\eta].$$

Posons $S=[\omega]$. Il suffit de démontrer que si α est une forme lisse à support compact sur X, β une forme lisse à support compact sur Y et γ une fonction lisse à support compact sur $X\times Y$, on a

$$\int_{X\times Y}\gamma p_1^*(\omega\wedge\alpha)\wedge p_2^*(\eta\wedge\beta) = \int_Y S_*(\gamma p_1^*\alpha)\eta\wedge\beta.$$

Soit Σ une partie squelettique compacte de X qui supporte fortement $\omega\wedge\alpha$ et soit T une partie squelettique compacte de Y qui supporte fortement $\eta\wedge\beta$. Alors $\Sigma\times\mathrm{T}$ supporte fortement $p_1^*(\omega\wedge\alpha)\wedge p_2^*(\eta\wedge\beta)$, si bien que

$$\int_{X\times Y}\gamma p_1^*(\omega\wedge\alpha)\wedge p_2^*(\eta\wedge\beta)=\int_{\Sigma\times\mathrm{T}}\gamma p_1^*(\omega\wedge\alpha)\wedge p_2^*(\eta\wedge\beta).$$

En vertu du théorème de Fubini, cette intégrale vaut

$$\int_{\mathrm{T}}\left(\int_{\Sigma}\gamma(\cdot,y)(\omega\wedge\alpha)\right)\eta\wedge\beta,$$

où y désigne la variable de T. Par construction, pour tout $y\in Y$, on a égalemement

$$S_*(\gamma p_1^*\alpha)(y)=\int_X\gamma(\cdot,y)(\omega\wedge\alpha)=\int_\Sigma\gamma(\cdot,y)(\omega\wedge\alpha),$$

car Σ supporte fortement $\omega\wedge\alpha$. D'autre part, T supporte fortement le produit $S_*(\gamma p_1^*\alpha)\eta\wedge\beta$, de sorte que

$$\int_Y S_*(\gamma p_1 p^*\alpha)\eta\wedge\beta=\int_{\mathrm{T}}S_*(\gamma p_1 p^*\alpha)\eta\wedge\beta.$$

Le résultat en découle.

Proposition 9.4.7. — *Si S et T sont des courants squelettiques, alors $S\boxtimes T$ est un courant squelettique.*

Démonstration. — Soit W un ouvert de X et soit h une carte tropicale sur X. Il s'agit de démontrer que $S\boxtimes T$ est localement descriptible sur W. Par définition de la structure d'espace tropical sur $X\times Y$, on peut ainsi supposer qu'il existe des parties ouvertes U de X et V de Y telles que $W=U\times V$, une carte tropicale f sur U et une carte tropicale g sur V, telles que $h=p\circ(f,g)$ où p est une application affine. On peut également supposer que $S|_U$ est descriptible par une partie squelettique P_f munie d'un calibrage G-localement constant, et que $T|_V$ est descriptible par une partie squelettique Q_g munie d'un calibrage G-localement constant.

Vérifions que $S\boxtimes T|_{U\times V}$ est descriptible relativement au moment (f,g) (et donc relativement au moment h) par la partie squelettique $P_f\times Q_g$ munie du calibrage produit. Soit ω une forme lisse sur $U\times V$, tropicalisée par (f,g) et soit ρ une fonction lisse à support compact sur $U\times V$. Il s'agit de démontrer que

$$\langle S\boxtimes T,\rho\omega\rangle=\int_{P_f\times Q_f}\rho\omega|_{P_f\times Q_g}.$$

En appliquant le paragraphe 9.2.2 au jeux réduits aux cartes (U,f) et (V,g), on voit que ω est somme finie de formes du type $\gamma p_1^*\alpha\wedge p_2^*\beta$, où α est tropicalisée par f sur un ouvert U' de U, β est tropicalisée par g sur un ouvert V' de V et γ est à support compact dans $U'\times V'$. On peut donc supposer que $\rho\omega$ est de ce type ; compte tenu du lemme 7.5.4, on peut supposer que $U'=U$ et $V'=V$. La fonction $S_*(\gamma p_1^*\alpha)$ est à support compact dans U (lemme 9.3.3) et la forme β est tropicalisée par g. On a donc

$$\langle S\boxtimes T,\rho\omega\rangle=\langle T,S_*(\gamma p_1^*\alpha)\rangle=\int_{Q_g}S_*(\gamma p_1^*\alpha)\beta.$$

Par ailleurs, pour tout $y \in Y$, on a

$$S_*(\gamma p_1^*\alpha)(y) = \langle S, \gamma(\cdot, y)\alpha\rangle = \int_{P_f} \gamma(\cdot, y)\alpha|_{P_f}$$

puisque α est tropicalisée par f sur U et $\gamma(\cdot, y)$ est à support compact sur U. Ainsi,

$$\langle S \boxtimes T, \rho\omega\rangle = \int_{Q_g} \left(\int_{P_f} \gamma(\cdot, y)\alpha|_{P_f} \right) \beta|_{Q_g} = \int_{P_f \times Q_g} \gamma p_1^*\alpha \wedge p_2^*\beta|_{P_f \times Q_g}$$

en vertu du théorème de Fubini. Cela conclut la démonstration. □

Proposition 9.4.8. — *Soit S et T des courants sur X et Y.*

On a $\mathrm{d}'_X(S \boxtimes T) = (\mathrm{d}'_X S) \boxtimes T$ et $\mathrm{d}'_Y(S \boxtimes T) = S \boxtimes \mathrm{d}'_Y(T)$. En particulier, si S et T sont d'-fermés, $S \boxtimes T$ est d'-fermé.

Les assertions analogues valent pour les opérateurs d''.

Démonstration. — Il suffit de vérifier les relations demandées contre une forme-test du type $p_1^*\alpha \wedge p_2^*\beta$, où α et β sont des formes lisses à support compact sur X et Y. En utilisant la proposition 9.4.4 à plusieurs reprises, il vient

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{d}'_X(S \boxtimes T), p_1^*\alpha \wedge p_2^*\beta\rangle &= \pm\langle S \boxtimes T, \mathrm{d}'_X(p_1^*\alpha \wedge p_2^*\beta)\rangle \\
&= \pm\langle S \boxtimes T, p_1^*(\mathrm{d}'\,\alpha) \wedge p_2^*\beta\rangle \\
&= \pm\langle S, \mathrm{d}'\,\alpha\rangle\langle T, \beta\rangle \\
&= \langle \mathrm{d}'\,S, \alpha\rangle\langle T, \beta\rangle \\
&= \langle (\mathrm{d}'_X\,S) \boxtimes T, p_1^*\alpha \wedge p_2^*\beta\rangle.
\end{aligned}$$

Les autres formules se prouvent de même.

Si S et T sont d'-fermés, alors $\mathrm{d}'(S \boxtimes T) = \mathrm{d}'_X(S \boxtimes T) + \mathrm{d}'_Y(S \boxtimes T) = (\mathrm{d}'\,S) \boxtimes T + S \boxtimes (\mathrm{d}'\,T) = 0$. □

Proposition 9.4.9. — *Si S et T sont des courants positifs (*resp. *faiblement positifs,* resp. *fortement positifs), il en est de même du courant $S \boxtimes T$.*

Démonstration. — Notons (p, p) et (q, q) les bidimensions de S et T. Soit ω une forme lisse positive à support compact sur $X \times Y$, de bidegré $(p, p; q, q)$; il s'agit de prouver que $\langle S \boxtimes T, \omega\rangle$ est positif. Il suffit pour cela de démontrer que la forme $\widetilde{S}_*(\omega)$ sur Y est positive. Puisque Y est très riche, il s'agit alors de démontrer que le courant $[\widetilde{S}_*(\omega)]$ est positif. Soit donc η une forme positive à support compact, de bidegré $(n-q, n-q)$; prouvons que $\int_Y \widetilde{S}_*(\omega) \wedge \eta \geqslant 0$. Il suffit pour cela de démontrer que la forme $\widetilde{S}_*(\omega) \wedge \eta$ est positive. Or, par construction, on a $\widetilde{S}_*(\omega) \wedge \eta = \widetilde{S}_*(\omega \wedge p_2^*\eta)$. Autrement dit, on peut supposer que ω est de type $(p, q; n, n)$; posons $\varpi = \widetilde{S}_*(\omega)$. Soit C une partie squelettique compacte de Y qui est une n-cellule ; démontrons que $\varpi|_C$ est positive ; La construction de ϖ écrit $\omega|_{X\times C} = \theta p_2^*\nu$, où ν est une (n, n)-forme standard sur C et θ une $(p, p; 0, 0)$-forme lisse à support compact sur $X \times C$, et l'on a $\varpi|_C = S_*(\theta)\nu$. La positivité de ω entraîne que pour tout $y \in C$, la restriction de θ à $X \times \{y\}$ est une (p, p)-forme positive ; comme S est un courant positif, on a

$$S_*(\theta)(y) = \langle S, \theta(\cdot; y)\rangle \geqslant 0.$$

Ainsi, $\varpi|_C$ est positive, et cela conclut la démonstration que $S \boxtimes T$ est un courant positif si S et T le sont.

Les deux autres assertions se prouvent de même. □

Proposition 9.4.10. — a) *Soit $\mathscr{S}$ un filtre de courants sur X qui converge vers un courant S et soit T un courant sur Y. Alors le filtre de courants sur $X \times Y$ engendré par $\mathscr{S} \boxtimes T$ converge vers $S \boxtimes T$.*

b) *Soit S un courant sur X et soit $\mathscr{T}$ un filtre de courants sur Y qui converge vers un courant T. Alors le filtre de courants sur $X \times Y$ engendré par $S \boxtimes \mathscr{T}$ converge vers $S \boxtimes T$.*

Démonstration. — Les deux assertions étant symétriques, le corollaire 9.4.5 nous permet de n'établir que la seconde. Il s'agit de démontrer que le filtre sur $\mathbf{R}$ engendré par $\langle S \boxtimes \mathscr{T}, \omega\rangle$ converge vers $\langle S \boxtimes T, \omega\rangle$, pour toute forme lisse à support compact ω sur $X \times Y$. D'après le corollaire 9.2.3, on peut se limiter au cas où $\omega = \gamma p_1^*\alpha \wedge p_2^*\beta$, où γ est une fonction lisse à support compact sur $X \times Y$, α est une forme lisse à support compact sur X et β est une forme lisse à support compact sur Y. Pour tout courant U sur Y, on a

$$\langle S \boxtimes U, \omega\rangle = \langle U, S_*(\gamma p_1^*\alpha)\beta\rangle.$$

La forme sur Y à laquelle le courant U est appliqué est constante, d'où l'assertion. □

§ 9.5. MORPHISME DE GYSIN

9.5.1. — Soit X un espace tropical de niveau m, soit $f\colon X \to \mathbf{R}^n$ une application paralinéaire. Soit $p\colon X \times \mathbf{R}^n \to X$ la première projection et soit $j\colon X \to X \times \mathbf{R}^n$ l'application $x \mapsto (x, f(x))$; l'image de j est le graphe Γ_f de f.

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on définit une fonction paralinéaire u_i sur $X \times \mathbf{R}^n$ par $u_i(x, y) = \max(f_i(x), y_i)$. Si f_i est psh, il en est de même de u_i (proposition 8.2.1) ; c'est en particulier le cas si f_i est affine. Dans le cas général, f_i est localement différence de deux fonctions tropicalement convexes, et est en particulier dpsh (proposition 8.8.2).

Soit S un courant positif fermé sur $X \times \mathbf{R}^n$. On pose alors

$$S \cap \Gamma_f = \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_2 \dots \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_n S)));$$

c'est un courant sur $X \times \mathbf{R}^n$, qu'on a noté plus simplement

$$S \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_i)$$

lorsque S est un courant de Bedford-Taylor.

Proposition 9.5.2. — *On suppose que les f_i sont harmoniques. Alors, le courant $S \cap \Gamma_f$ est positif fermé.*

Démonstration. — Par construction, on a $u_i = g_i^* v$, où $g_i\colon X \times \mathbf{R}^n$ est la carte harmonique $(x, y) \mapsto (f_i(x), y_i)$ et v la fonction convexe $(x, y) \mapsto \max(x, y)$. Par récurrence sur n, le corollaire 8.11.3 entraîne que $S \cap \Gamma_f$ est positif. Il est fermé par construction. □

Remarque 9.5.3. — Par construction de l'intersection de Bedford–Taylor, le courant $S \cap \Gamma_f$ est positif fermé dès que les fonctions u_i sont psh. Comme elles sont paralinéaires, elles sont dpsh, si bien que ce courant est localement différence de deux courants positifs fermés.

Par ailleurs, nous démontrerons dans le cas des espaces analytiques qu'une application $\mathbf{Q}$-PL harmonique est psh (corollaire 18.8.9), mais il est peu probable que cette coïncidence soit vraie dans le cadre général des espaces tropicaux. Il serait cependant possible d'étendre la notion de fonction psh de sorte à y adjoindre les fonctions harmoniques.

Si S est un courant squelettique, le courant $S \cap \Gamma_f$ est squelettique (théorème 8.10.3).

Si S est un courant de Bedford-Taylor, le courant $S \cap \Gamma_f$ est de Bedford-Taylor (§8.7.1).

Cette construction est continue en S (pour la convergence faible des courants) et en f (pour la convergence localement uniforme des applications paralinéaires).

Lemme 9.5.4. — *Soit S un courant positif fermé sur $X \times \mathbf{R}^n$. Si f est harmonique, alors le support du courant $S \cap \Gamma_f$ est contenu dans le graphe de f.*

Démonstration. — Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, soit V_k l'ensemble des $(x, y) \in X \times \mathbf{R}^n$ tels que $f_k(x) \neq y_k$; c'est une partie ouverte de $X \times \mathbf{R}^n$. La réunion des V_k est le complémentaire du graphe de f. Il suffit donc de démontrer que pour tout k, la restriction à V_k de $S \cap \Gamma_f$ est nulle.

Soit $k \in \{1, \dots, n\}$ et soit $(x, y) \in V_k$. Si $f_k(x) < y_k$, alors u_k coïncide avec la k-ième fonction coordonnée du second facteur au voisinage de (x, y), qui est une application affine ; sinon, u_k coïncide avec la fonction f_k au voisinage de (x, y).

Si f_k est affine, cela prouve que la fonction u_k est affine, donc lisse, sur V_k, et vérifie $\mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_k = 0$. En restriction à V_k, on a donc

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_k \, \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_{k+1} \dots \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_n S))) = \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_k \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_{k+1} \dots \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_n S)) = 0.$$

A fortiori, $S \cap \Gamma_f$ est nulle sur V_k.

Dans le cas où f_k est harmonique, cela montre que $u_k|_{V_k}$ est paralinéaire, harmonique, et que la restriction à V_k du courant $\mathrm{d}'\mathrm{d}''[u_k]$ est nulle. Comme le courant $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_{k+1} \dots \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_n S))$ est de Bedford–Taylor (car S l'est, §8.7.1), on a donc $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_k \, \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_{k+1} \dots \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_n S))) = 0$ sur V_k, puis $S \cap [\Gamma_f] = 0$ sur V_k. □

Définition 9.5.5. — *Soit X un espace tropical de niveau m, soit $f \colon X \to \mathbf{R}^n$ une application harmonique, soit $p \colon X \times \mathbf{R}^n \to X$ la première projection et soit $j \colon X \to X \times \mathbf{R}^n$ l'application $x \mapsto (x, f(x))$. Si S est un courant positif fermé S sur $X \times \mathbf{R}^n$, on pose*

$$j^! S = p_*(S \cap \Gamma_f).$$

Cette définition est légitime. En effet, d'après la proposition précédente, le support du courant $S \cap \Gamma_f$ est contenu dans le graphe Γ_f de f ; il est donc compact au-dessus de X.

Proposition 9.5.6. — *Soit $f \colon X \to \mathbf{R}^n$ une carte harmonique et soit S un courant positif fermé sur $X \times \mathbf{R}^n$. Si le courant S est squelettique, il en est de même du courant $j^! S$.*

Démonstration. — Il découle d'abord du corollaire 8.10.5 que le courant $S \cap \Gamma_f$ est squelettique. Son support est contenue dans la partie squelettique Γ_f de $X \times \mathbf{R}^n$ (lemme 9.5.4).

Soit U un ouvert de X, soit g une carte tropicale sur U. L'application $g \circ p$ est une carte tropicale sur $p^{-1}(U)$. Soit P la partie squelettique calibrée $P_{g\circ p}^{S\cap\Gamma_f}$ de $X \times \mathbf{R}^n$, minimale, qui décrit $S \cap \Gamma_f$ relativement à cette carte tropicale. Elle est contenue dans le support de $S \cap \Gamma_f$, donc dans Γ_f. Soit $Q = p(P)$ son image dans X par l'isomorphisme $p|_{\Gamma_f}$; c'est une partie squelettique calibrée de X. Vérifions qu'elle décrit le courant $j^!S$ relativement à la carte g. Soit ω une forme lisse g-tropicale sur U et soit ρ une fonction lisse sur U telles que $\rho\omega$ soit à support compact. Soit θ une fonction lisse sur $p^{-1}(U)$ telle que $\theta \cdot p^*(\rho\omega)$ soit à support compact et qui vaut 1 au voisinage de $\mathrm{supp}(p^*\rho\omega) \cap \Gamma_f$. On a alors

$$\begin{aligned}\langle j^!S, \rho\omega\rangle &= \langle p_*(S \cap \Gamma_f), \rho\omega\rangle = \langle S \cap \Gamma_f, \theta p^*(\rho\omega)\rangle = \langle S \cap \Gamma_f, (\theta p^*\rho)p^*\omega\rangle \\ &= \int_P (\theta p^*\rho)p^*\omega = \int_Q \rho\omega,\end{aligned}$$

d'où l'assertion. □

Proposition 9.5.7. — *Soit $f\colon X \to \mathbf{R}^n$ une application paralinéaire harmonique. L'application j est un morphisme compact d'espaces G-tropicaux. Pour tout courant positif fermé S sur $X \times \mathbf{R}^n$ et toute G-forme lisse ω sur $X \times \mathbf{R}^n$, à support compact, on a $\langle S \cap \Gamma_f, \omega\rangle = \langle j^!S, j^*\omega\rangle$.*

Corollaire 9.5.8. — *Si f est affine, l'application j est un morphisme compact d'espaces tropicaux et l'on a l'égalité $j_*(j^!S) = S \cap \Gamma_f$.*

Démonstration de la proposition. — Comme f est paralinéaire, l'application j est un morphisme d'espaces G-tropicaux. Il induit un homéomorphisme de X sur le graphe de f ; il est en particulier compact. Notons p et q les projections de $X \times \mathbf{R}^n$ sur X et $\mathbf{R}^n$.

Soit d l'entier tel que S est de bidimension (d, d) et soit ω une G-forme G-lisse à support compact sur $X \times \mathbf{R}^n$ de bidegré (d, d). On a

$$\langle j^!S, j^*\omega\rangle = \langle S \cap \Gamma_f, p^*j^*\omega\rangle,$$

où cette dernière expression a un sens car l'intersection de Γ_f et du support de $p^*j^*\omega$ est compacte. Il s'agit de vérifier qu'elle est égale à $\langle S \cap \Gamma_f, \omega\rangle$.

L'application $(x, y) \mapsto (x, y - f(x))$ est un automorphisme paralinéaire de $X \times \mathbf{R}^n$ qui transforme f en l'application affine nulle et $S \cap \Gamma_f$ en $S \cap \Gamma_0$. On peut ainsi supposer que $f \equiv 0$ et $\Gamma_f = X \times \{0\}$.

Il suffit alors de démontrer l'égalité lorsque ω est une *forme* lisse ; en effet, cette égalité pour toute forme lisse entraînera l'égalité de courants $j_*(j^!S) = S \cap \Gamma_f$ sur $X \times \mathbf{R}^n$; comme il s'agit ce courants positifs, on en déduira l'égalité voulue pour toute G-forme.

D'après le corollaire 9.2.3, ω est somme finie de formes du type $\gamma p^*\alpha \wedge q^*\beta$, où α est une forme lisse à support compact sur X, β est une forme lisse à support compact sur Y et γ est une fonction lisse à support compact sur $X \times Y$. Par additivité, il suffit de prouver l'égalité voulue lorsque la forme ω est de ce type. On peut aussi supposer que les formes β sont homogènes.

Traitons d'abord le cas où β n'est pas de bidegré $(0, 0)$. Dans cas, $j^*\beta = 0$, car $f \equiv 0$, de sorte que $p^*j^*\beta = 0$. Démontrons donc que $\langle S \cap \Gamma_f, \gamma p^*\alpha \wedge p^*\beta\rangle = 0$. Par définition, $\langle S \cap \Gamma_f, \omega\rangle$ est une limite de nombres réels de la forme $\langle S, p^*(\mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_n) \wedge \omega\rangle$ où $u_1, \ldots, u_n$ sont des fonctions lisses convexes de $y_1, \ldots, y_n$ respectivement qui convergent

vers $\max(y_1, 0), \ldots, \max(y_n, 0)$. Puisque β n'est pas de bidegré $(0,0)$, on a

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_n \wedge \beta = 0$$

donc $\langle S \cap \Gamma_f, \omega \rangle = 0$.

Traitons maintenant le cas où β est bidegré $(0,0)$; on peut supposer $\beta = 1$. L'application qui à une fonction u sur $X \times \mathbf{R}^n$, lisse et à support compact, associe $\langle S \cap \Gamma_f, up^*\alpha \rangle$ se prolonge en une mesure signée sur $X \times \mathbf{R}^n$, à support dans Γ_f, car le courant $S \cap \Gamma_f$ est positif et son support est contenu dans Γ_f. Sa valeur ne dépend donc que de la restriction de u à Γ_f. On remarque alors que

$$p^*j^*(\gamma p^*\alpha) = p^*j^*\gamma p^*j^*p^*\alpha = p^*j^*\gamma p^*\alpha,$$

car $p \circ j = \mathrm{id}_X$, et que les fonctions γ et $p^*j^*\gamma$ coïncident sur Γ_f. Cela entraîne l'égalité $\langle S \cap \Gamma_f, \gamma p^*\alpha \rangle = \langle S \cap \Gamma_f, p * j^*(\gamma p^*\alpha) \rangle$ qu'il fallait démontrer. □

§ 9.6. INTERSECTION TROPICALE

Soit X un espace tropical de niveau m et soit $f\colon X \to \mathbf{R}^n$ une application $\mathbf{R}$-paralinéaire harmonique. Soit j l'immersion du graphe Γ_f de f dans $X \times \mathbf{R}^n$.

Définition 9.6.1. — *Pour tout courant positif fermé S sur X et tout courant positif fermé T sur $\mathbf{R}^n$, on pose*

$$S \cap_f T = j^!(S \boxtimes T).$$

La définition fait sens car si S est un courant positif fermé sur X et T est un courant positif fermé sur $\mathbf{R}^n$, le courant $S \boxtimes T$ est encore positif et fermé (propositions 9.4.9 et 9.4.8), de sorte qu'on peut appliquer la construction $j^!$. Revenant aux définitions, on a donc

$$S \cap_f T = p_*((S \boxtimes T) \cap \Gamma_f).$$

Si S est de bidegré (p,q) et T est de bidegré (q,q), alors le courant $S \boxtimes T$ sur $X \times \mathbf{R}^n$ est de bidegré $(p,p;q,q)$, donc de bidegré $(p+q, p+q)$, et le courant $(S \boxtimes T) \cap \Gamma_f$ est de bidegré $(p+q+n, p+q+n)$. Par suite, le courant $S \cap_f T$ sur X est de bidegré $(p+q, p+q)$.

Proposition 9.6.2. — *Si les courants S et T sont squelettiques, le courant $S \cap_f T$ est squelettique.*

Démonstration. — Le courant $S \boxtimes T$ est squelettique d'après la proposition 9.4.7. Il découle alors de la proposition 9.5.6 que $S \cap_f T = j^!(S \boxtimes T)$ est squelettique. □

Remarque 9.6.3. — Lorsque $X = \mathbf{R}^n$ et f est l'application identique, la construction $S \cap_f T$ fournit une définition analytique de l'intersection tropicale. Elle est bilinéaire. La proposition 9.6.6 ci-dessous démontre qu'elle est associative, et la proposition 9.6.7 prouve qu'elle est commutative.

Cela a été démontré indépendemment par **[102]**. La construction donnée dans le texte copie l'approche de **[2]**, elle-même inspirée de l'approche de **[69]**.

Proposition 9.6.4. — *Soit $f\colon X \to \mathbf{R}^n$ une carte harmonique, soit S un courant positif fermé de bidegré (p,p) sur X et soit β une forme lisse positive fermée de bidegré (q,q) sur $\mathbf{R}^n$. On a*

$$S \cap_f [\beta] = S \wedge f^*\beta.$$

Démonstration. — Notons p et q les projections de $X \times \mathbf{R}^n$ vers X et $\mathbf{R}^n$; posons aussi $f = (f_1, \dots, f_n)$ et $q = (q_1, \dots, q_n)$. Soit ω une forme lisse de bidegré $(p+q-m, p+q-m)$ à support compact sur X. Soit θ une fonction lisse à support compact sur $\mathbf{R}^n$ telle que $\theta \equiv 1$ au voisinage de $f(\mathrm{supp}(\omega))$. Alors $q^*\theta \equiv 1$ au voisinage de $(\mathrm{supp}(\omega) \times \mathbf{R}^n) \cap \Gamma_f$ et $p^*\omega \wedge q^*\theta$ est à support compact. Par définition d'un courant image directe, on a donc

$$\langle S \cap_f [\beta], \omega\rangle = \langle p_*(S \boxtimes [\beta] \cap \Gamma_f, \omega\rangle = \langle S \boxtimes [\beta] \cap \Gamma_f, p^*\omega \wedge q^*\theta\rangle.$$

Soit (μ_ε) une famille de fonctions lisses psh sur $\mathbf{R}$, indexée par $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, qui converge uniformément vers $\mu\colon t \mapsto \sup(t,0)$ quand $\varepsilon \to 0$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, posons $u_i = \sup(f_i \circ p, q_i) = q_i + \sup(f_i \circ p - q_i, 0)$ et $u_i^\varepsilon = q_i + \mu_\varepsilon \circ (f_i \circ p - q_i)$; les u_i sont des fonctions continues sur X, les u_i^ε sont des fonctions G-lisses sur $X \times \mathbf{R}^n$, harmoniquement tropicalisées, et l'on a $\lim_{\varepsilon\to 0} u_i^\varepsilon = u_i$, uniformément. Plus précisément, l'application $\varphi_i = f_i \circ p - q_i\colon X \to \mathbf{R}$ est une carte harmonique, et l'on a $u_i^\varepsilon = q_i + \varphi_i^*\mu_\varepsilon$, ainsi que $u_i = q_i + \varphi_i^*\mu$. (Les fonctions μ_ε et μ sont convexes.) Par définition, on a

$$S \boxtimes [\beta] \cap \Gamma_f = S \boxtimes [\beta] \wedge \bigwedge_{i=1}^n \mathrm{d}'\mathrm{d}''(q_i + \varphi_i^*\mu) = S \boxtimes [\beta] \wedge \bigwedge_{i=1}^n \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\varphi_i^*\mu,$$

car les q_i sont affines. Compte tenu de la proposition 8.7.3, on a ainsi

$$S \boxtimes [\beta] \cap \Gamma_f = \lim_{\varepsilon\to 0} S \boxtimes [\beta] \wedge \bigwedge_{i=1}^n \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u_i^\varepsilon.$$

Par suite,

$$\langle S \cap_f [\beta], \omega\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \langle S \boxtimes [\beta] \wedge \bigwedge_{i=1}^n \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u_i^\varepsilon, p^*\omega \wedge q^*\theta\rangle.$$

Posons

$$\Omega_\varepsilon = \bigwedge_{i=1}^n \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u_i^\varepsilon \wedge p^*\omega \wedge q^*\theta\rangle.$$

C'est une G-forme sur $X \times \mathbf{R}^n$ qui est tropicalisée par $f \times \mathrm{id}$ sur tout domaine de la forme $V \times \mathbf{R}^n$, où V est un domaine analytique de X telle que $f|_V$ est affine et $\omega|_V$ est tropicale. On a

$$\langle S \boxtimes [\beta] \wedge \bigwedge_{i=1}^n \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u_i^\varepsilon, p^*\omega \wedge q^*\theta\rangle = \langle S \boxtimes [\beta], \Omega_\varepsilon\rangle.$$

Reprenons l'application linéaire

$$p_*\colon \mathscr{A}_{\mathrm{c}}^{(p,p;n,n)}(X \times \mathbf{R}^n) \to \mathscr{A}^{(p,p)}(X)$$

d'intégration dans les fibres de p définie par le théorème 9.3.8. Pour tout domaine analytique V de X sur lequel f est affine et ω est tropicale, on dispose d'une forme lisse

$p_*((\Omega_\varepsilon)|_{V\times\mathbf{R}^n})$ sur V, qui est tropicalisée par f puis, par recollement d'une G-forme G-lisse $p_*(\Omega_\varepsilon)$ sur X. Compte tenu de la construction du courant $S\boxtimes[\beta]$, on a

$$\langle S\boxtimes[\beta]\wedge\bigwedge_{i=1}^n \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u_i^\varepsilon, p^*\omega\wedge q^*\theta_\varepsilon\rangle = \langle S, p_*(\Omega_\varepsilon\wedge q^*\beta)\rangle.$$

Observons que

$$p_*(\Omega_\varepsilon\wedge q^*\beta) = p_*(\bigwedge_{i=1}^n \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u_i^\varepsilon\wedge q^*(\theta\beta))\wedge\omega.$$

Par continuité de l'extension de S aux G-formes, il suffit donc, pour établir la proposition, de démontrer que les G-formes

$$p_*\big(\bigwedge_{i=1}^n \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u_i^\varepsilon\wedge q^*(\theta\beta)\big)$$

sur X convergent vers $f^*(\theta\beta)$ lorsque $\varepsilon\to 0$.

Pour simplifier les notations, on remplace β par $\theta\beta$. Il suffit d'établir cette convergence sur tout domaine sur lequel f est affine, ce qui ramène au cas où X est compact et f est affine.

Puisque $u_i^\varepsilon = q_i+\mu_\varepsilon\circ(f_i\circ p-q_i)$, que q_i est affine et que $f_i\circ p-q_i$ est affine, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u_i^\varepsilon &= \mathrm{d}'\mathrm{d}''((f_i\circ p-q_i)^*\mu_\varepsilon)\\ &= (f_i\circ p-q_i)^*\mu_\varepsilon''(t)\,\mathrm{d}'\,t\wedge\mathrm{d}''\,t\\ &= (f_i\circ p-q_i)^*\mu_\varepsilon''\cdot(p^*f^*\,\mathrm{d}'\,y_i-q^*\,\mathrm{d}'\,y_i)\wedge(p^*f^*\,\mathrm{d}''\,y_i-q^*\,\mathrm{d}''\,y_i),\end{aligned}$$

où $(y_1,\dots,y_n)$ sont les fonctions coordonnées de $\mathbf{R}^n$. Pour toute partie I de $\{1,\dots,n\}$, on note $\mathrm{d}'\,y_I$ le produit des facteurs $\mathrm{d}'\,y_i$, pour $i\in I$, et $\mathrm{d}'\,y^I$ le produit des facteurs $\mathrm{d}'\,y_i$, pour $i\notin I$, écrits dans l'ordre croissant des indices ; on définit de même $\mathrm{d}''\,y_I$ et $\mathrm{d}''\,y^I$. Si I et J sont des parties de $\{1,\dots,n\}$, notons ε_{IJ} l'unique élément de $\{\pm1\}$ tel que

$$\mathrm{d}'\,y_1\wedge\mathrm{d}''\,y_1\wedge\cdots = \varepsilon_{IJ}\,\mathrm{d}'\,y_I\wedge\mathrm{d}''\,y_J\wedge\mathrm{d}'\,y^I\wedge\mathrm{d}''\,y^J.$$

En développant le produit $\bigwedge_{i=1}^n \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u_i^\varepsilon$, on obtient

$$\begin{aligned}\bigwedge_{i=1}^n \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u_i^\varepsilon &= \bigwedge_{i=1}^n (f_i\circ p-q_i)^*\mu_\varepsilon''\cdot(p^*f^*\,\mathrm{d}'\,y_i-q^*\,\mathrm{d}'\,y_i)\wedge(p^*f^*\,\mathrm{d}''\,y_i-q^*\,\mathrm{d}''\,y_i)\\ &= \prod_{i=1}^n (f_i\circ p-q_i)^*\mu_\varepsilon''\\ &\qquad\sum_{I,J\subset\{1,\dots,n\}}\varepsilon_{IJ}(-1)^{\mathrm{Card}(I)+\mathrm{Card}(J)}p^*f^*(\mathrm{d}'\,y^I\wedge\mathrm{d}''\,y^J)\wedge q^*(\mathrm{d}'\,y_I\wedge\mathrm{d}''\,y_J).\end{aligned}$$

De là, on déduit que

$$\begin{aligned}&p_*\big(\bigwedge_{i=1}^n \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u_i^\varepsilon\wedge q^*\beta\big)\\ &\quad= \sum_{I,J}\varepsilon_{IJ}(-1)^{\mathrm{Card}(I)+\mathrm{Card}(J)}p_*\big(q^*(\mathrm{d}'\,y_I\wedge\mathrm{d}''\,y_J\wedge\beta)\wedge p^*f^*(\mathrm{d}'\,y^I\wedge\mathrm{d}''\,y^J)\big)\\ &\quad= \sum_{I,J}\varepsilon_{IJ}(-1)^{\mathrm{Card}(I)+\mathrm{Card}(J)}p_*\big(q^*(\mathrm{d}'\,y_I\wedge\mathrm{d}''\,y_J\wedge\beta)\big)\wedge f^*(\mathrm{d}'\,y^I\wedge\mathrm{d}''\,y^J).\end{aligned}$$

La forme β est de type (q,q) ; la forme $q^*(\mathrm{d}'\, y_I \wedge \mathrm{d}''\, y_J \wedge \beta)$ sur $X \times \mathbf{R}^n$ à laquelle est appliquée p_* est donc de type $(0,0; q+\mathrm{Card}(I), q+\mathrm{Card}(J))$. Seules les parties I et J telles que $\mathrm{Card}(I) = \mathrm{Card}(J) = n-q$ interviennent. Comme β est de type (q,q), elle se décompose en

$$\beta = \sum_{I,J} \beta_{IJ}\, \mathrm{d}'\, y^I \wedge \mathrm{d}''\, y^J,$$

où la somme est précisément sur ces couples de parties (I,J) telles que $\mathrm{Card}(I) = \mathrm{Card}(J) = n-q$. En posant $\eta = \mathrm{d}'\, y_1 \wedge \mathrm{d}''\, y_1 \wedge \ldots$, l'expression précédente vaut donc

$$\sum_{I,J} p_*\Big(\prod_{i=1}^n (q_i - f_i\circ p)^*\mu''_\varepsilon) q^*(\beta_{IJ}\eta) \wedge p^* f^*(\mathrm{d}'\, y^I \wedge \mathrm{d}''\, y^J)\Big)$$
$$= \sum_{I,J} p_*\Big(\prod_i (q_i - f_i\circ p)^*\mu''_\varepsilon \cdot q^*(\beta_{IJ}\eta)\Big) \wedge f^*(\mathrm{d}'\, y^I \wedge \mathrm{d}''\, y^J)\Big).$$

Observons alors que $p_*\big(\prod_{i=1}^n (q_i - f_i\circ p)^*\mu''_\varepsilon q^*(\beta_{IJ}\eta)\big)$ est la fonction lisse sur X qui applique $x \in X$ sur

$$\int_{\mathbf{R}^n} \prod_{i=1}^n \mu''_\varepsilon(y_i - f_i(x))\beta_{IJ}\eta.$$

Comme $\mu''_\varepsilon \to \delta_0$ lorsque $\varepsilon \to 0$, on en déduit que cette expression converge uniformément, avec toutes ses dérivées, vers $\beta_{IJ}(f(x))$, c'est-à-dire vers la fonction lisse $f^*(\beta_{IJ})$ sur X. Par suite, l'expression qui nous intéresse converge pour la topologie $\mathscr{C}^\infty$ des formes sur X vers

$$\sum_{IJ} f^*(\beta_{IJ}\, \mathrm{d}'\, y^I \wedge \mathrm{d}''\, y^J) = f^*(\beta).$$

Cela conclut la démonstration. □

Corollaire 9.6.5. — *La proposition précédente vaut si β est une G-forme G-lisse positive de bidegré (q,q) sur $\mathbf{R}^n$ telle que le courant $[\beta]$ soit fermé.*

Démonstration. — En effet, par convolution, la G-forme β est limite d'une suite (β_k) de formes lisses positives fermées. Pour tout k, on a $S \cap_f [\beta_k] = S \wedge f^*\beta_k$ et l'assertion voulue s'en déduit par passage à la limite, compte tenu de la continuité de l'intersection tropicale et du produit d'un courant positif fermé par une G-forme. □

Proposition 9.6.6. — *Soit $f\colon X \to \mathbf{R}^n$ une carte harmonique et soit $p\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ une application affine ; soit S un courant positif fermé sur X, soit T un courant positif fermé sur $\mathbf{R}^n$ et soit U un courant positif fermé sur $\mathbf{R}^m$. On a*

$$S \cap_f (T \cap_p U) = (S \cap_f T) \cap_{p\circ f} U.$$

Démonstration. — Soit ω une forme lisse à support compact sur X ; démontrons que

$$\langle S \cap_f (T \cap_p U), \omega\rangle = \langle (S \cap_f T) \cap_{p\circ f} U, \omega\rangle.$$

Par passage à la limite (§1.6.6), on peut supposer que U est le courant $[\gamma]$ associé à une forme lisse γ. Alors $T \cap U = T \wedge f^*\gamma$ et $(S \cap_f T) \cap_{p\circ f} U = (S \cap_f T) \wedge (p\circ f)^*\gamma$. Il s'agit donc de démontrer l'égalité

$$\langle S \cap_f (T \wedge p^*\gamma), \omega\rangle = \langle (S \cap_f T) \wedge (p\circ f)^*\gamma, \omega\rangle.$$

De nouveau par passage à la limite (§1.6.6), on peut alors supposer que T est le courant $[\beta]$ associé à une forme lisse β ; on a alors $T \wedge p^*\gamma = [\beta \wedge p^*\gamma]$ et $S \cap_f T = S \wedge f^*\beta$, de sorte qu'il s'agit de prouver l'égalité

$$\langle S \wedge f^*(\beta \wedge p^*\gamma), \omega\rangle = \langle (S \wedge f^*\beta) \wedge (p \circ f)^*\gamma, \omega\rangle,$$

laquelle est évidente. □

Proposition 9.6.7. — *Soit S et T des courants positifs fermés sur $\mathbf{R}^n$ et soit $f = \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}$. On a $S \cap_f T = T \cap_f S$.*

Démonstration. — Soit ω une forme lisse à support compact sur $\mathbf{R}^n$; démontrons que $\langle S \cap_f T, \omega\rangle = \langle T \cap_f S, \omega\rangle$. Par passage à la limite (§1.6.6), il suffit de traiter le cas où il existe une forme lisse β telle que $T = [\beta]$, puis celui où il existe une forme lisse α telle que $S = [\alpha]$. Alors,

$$\langle S \cap_f T, \omega\rangle = \langle [\alpha] \wedge \beta, \omega\rangle = \int \alpha \wedge \beta \wedge \omega$$

tandis que

$$\langle T \cap_f S, \omega\rangle = \int \beta \wedge \alpha \wedge \omega.$$

Puisque les degrés de α et β sont pairs, ces deux expressions coïncident. □

Définition 9.6.8. — *Soit $f\colon X \to \mathbf{R}^n$ une carte harmonique et soit T un courant positif fermé de bidegré (q,q) sur $\mathbf{R}^n$. On pose $f^!T = \delta_X \cap_f T$; c'est un courant positif fermé de bidegré (q,q).*

Proposition 9.6.9. — *Soit $f\colon X \to \mathbf{R}^n$ une carte harmonique et soit T un courant positif fermé de bidegré (q,q) sur $\mathbf{R}^n$.*

a) *Si $T = [\alpha]$ est le courant associé à une G-forme G-lisse α, alors $f^!T = [f^*\alpha]$.*

b) *Si $\mathscr{T}$ est un filtre de courants positifs fermés sur $\mathbf{R}^n$ qui converge vers T, alors le filtre de courants $f^!\mathscr{T}$ sur X converge vers $f^!T$.*

c) *Si $f\colon \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est la seconde projection, et si le calibrage de $\mathbf{R}^m$ est le calibrage constant évident, alors $f^!T = \delta_{\mathbf{R}^m} \boxtimes T$.*

d) *Si $g\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ est une application affine, on a $(g \circ f)^!T = f^!(g^!T)$.*

Démonstration. — a) C'est la proposition 9.6.4.

b) D'après la proposition 9.4.10, la filtre $\delta_X \boxtimes \mathscr{T}$ converge vers $\delta_X \boxtimes T$. L'assertion découle alors de la proposition 8.7.2.

c) Par approximation, on peut supposer que T est le courant $[\omega]$ associé à une forme lisse, positive, fermée ω (§1.6.6). On a donc $f^!T = f^![\omega] = [f^*\omega]$. Si α et β sont des formes lisses à support compact sur $\mathbf{R}^m$ et $\mathbf{R}^n$, on a donc, notant $e\colon \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ la première projection,

$$\langle f^![\omega], e^*\alpha \wedge f^*\beta\rangle = \int_{\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n} e^*\alpha f^*(\omega \wedge \beta) = \int_{\mathbf{R}^m} \alpha \int_{\mathbf{R}^n} \omega \wedge \beta = \langle \delta_{\mathbf{R}^m}, \alpha\rangle\langle [\omega], \beta\rangle.$$

Compte tenu de la définition de $\delta_{\mathbf{R}^m} \boxtimes [\omega]$ (théorème 9.4.4), on a donc $f^![\omega] = \delta_{\mathbf{R}^m} \boxtimes [\omega]$.

d) Par approximation, on peut supposer que T est le courant $[\omega]$ associé à une forme lisse positive fermée. Dans ce cas, on a

$$(g \circ f)^![\omega] = [(g \circ f)^*\omega] = [f^*(g^*\omega)] = f^![g^*\omega] = f^!(g^![\omega]).$$

Cela conclut la démonstration. □

§ 9.7. EXEMPLES

Les exemples ci-dessous sont des variantes de ceux donnés par Mihatsch dans **[102]**. On note plus simplement $S \cap T$ l'intersection tropicale $S \cap_{\mathrm{id}} T$ de deux courants positifs fermés S et T sur $\mathbf{R}^n$.

9.7.1. — Soit V et W deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$ tels que $V + W = \mathbf{R}^n$; on dit qu'ils sont transverses. Cela revient à dire que l'on a $\mathrm{codim}(V \cap W) = \mathrm{codim}(V) + \mathrm{codim}(W)$. Soit μ_V un vecteur-volume sur V, soit μ_W un vecteur-volume sur W. Il existe un unique vecteur-volume $\mu_V \cap \mu_W$ sur $V \cap W$ telle que la suite exacte usuelle d'espaces vectoriels

$$0 \to V \cap W \to V \oplus W \to \mathbf{R}^n \to 0$$

soit compatible avec les vecteurs-volume $\mu_V \cap \mu_W$, $\mu_V \otimes \mu_W$ et le vecteur-volume standard de $\mathbf{R}^n$.

Proposition 9.7.2. — *Soit V et W deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$, transverses, munis de vecteurs-volume μ_V et μ_W. On a l'égalité*

$$[V, \mu_V] \cap [W, \mu_W] = [V \cap W, \mu_V \cap \mu_W]$$

de courants sur $\mathbf{R}^n$.

Démonstration. — Revenons à la définition. Le graphe de $f = \mathrm{id}$ est la diagonale de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$; notons j l'immersion diagonale de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^{2n}$ et p la première projection de $\mathbf{R}^{2n}$ vers $\mathbf{R}^n$. On a

$$[V, \mu_V] \cap [W, \mu_W] = j^!([V, \mu_V] \boxtimes [W, \mu_W]) = p_*(([V, \mu_V] \boxtimes [W, \mu_W]) \cap \Gamma_f).$$

Le courant $[V, \mu_V] \boxtimes [W, \mu_W]$ sur $\mathbf{R}^{2n}$ est le courant d'intégration sur $V \times W$ muni du calibrage $\mu_V \otimes \mu_W$. Il s'agit donc calculer $[V \times W, \mu_V \otimes \mu_W] \cap \Gamma_f$. Appliqué par récurrence, le lemme suivant entraîne l'égalité

$$[V \times W, \mu_V \otimes \mu_W] \cap \Gamma_f = [V \times W \cap \Delta, \mu_V \otimes \mu_W \cap \mu_\Delta],$$

où $\mu_V \otimes \mu_W \cap \mu_\Delta$ est le calibrage de $V \times W \cap \Delta$ qui est compatible avec la suite exacte

$$0 \to V \times W \cap \Delta \to V \times W \xrightarrow{(y_i - x_i)} \mathbf{R}^n \to 0.$$

La première projection identifie $V \times W \cap \Delta$ avec $V \cap W$ et le calibrage $\mu_V \otimes \mu_W \cap \mu_\Delta$ avec le calibrage $\mu_V \cap \mu_W$. Cela conclut la démonstration. □

Lemme 9.7.3. — *Soit V un sous-espace vectoriel de R^n et soit $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une forme linéaire non nulle. Soit $W = V \cap \ker(f)$. Si $V = W$, alors $[V, \mu_V] \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' \max(f, 0) = 0$. Sinon, W est un hyperplan de V, il existe un unique calibrage μ_W de W tel que la suite exacte $0 \to W \to V \xrightarrow{f} \mathbf{R} \to 0$ soit compatible avec les calibrages μ_W, μ_V et le calibrage standard de $\mathbf{R}$, et l'on a $[V, \mu_V] \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' \max(f, 0) = [W, \mu_W]$.*

Démonstration. — Supposons d'abord que $V = W$. Lorsque $t \to 0$ par valeurs positives, la fonction convexe $\max(f - t, 0)$ converge uniformément vers $\max(f, 0)$, de sorte que $[V, \mu_V] \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' \max(f, 0) = \lim [V, \mu_V] \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' \max(f - t, 0)$. Puisque $\max(f - t, 0) \equiv 0$ au voisinage du support V du courant $[V, \mu_V]$, le courant $[V, \mu_V] \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' \max(f - t, 0)$ est nul, pour tout $t > 0$. Ainsi, $[V, \mu_V] \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' \max(f, 0) = 0$, comme il fallait démontrer.

Traitons maintenant le cas où $f|_V \neq 0$, de sorte que W est un hyperplan de V. On choisit une base de $\mathbf{R}^n$ de sorte que $V = \mathbf{R}p + 1 \times \{0\}$ et $f = x_{p+1}$, si bien que $W = \mathbf{R}^p \times \{0\}$. Il existe un unique nombre réel a tel que $\mu_V = a|e_1 \wedge \cdots \wedge e_{p+1}|$. Soit alors ω une forme lisse de bidegré (p, p) sur $\mathbf{R}^n$, à support compact. Par définition, on a

$$\langle [V, \mu_V] \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' \max(f, 0), \omega \rangle = \langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''(\max(f, 0)[V, \mu_V]), \omega \rangle = \int_V \langle x_{p+1}^+ \, \mathrm{d}'\mathrm{d}'' \, \omega, \mu_V \rangle.$$

Notant V_+ le demi-espace $f^{-1}(\mathbf{R}_+)$, muni du calibrage μ_V, de bord W, on a donc

$$\begin{aligned} \langle [V, \mu_V] \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' \max(f, 0), \omega \rangle &= \int_{V^+} x_{p+1} \, \mathrm{d}'\mathrm{d}'' \, \omega \\ &= \int_{V^+}^{\partial} (x_{p+1} \wedge \mathrm{d}'' \, \omega - \mathrm{d}'' \, x_{p+1} \wedge \omega), \end{aligned}$$

compte tenu de la formule de Green et de ce que $\mathrm{d}'\mathrm{d}'' \, x_{p+1} = 0$. Puisque $x_{p+1} \equiv 0$ sur W, on obtient

$$\langle [V, \mu_V] \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' \max(f, 0), \omega \rangle = -\int_{V^+}^{\partial} \mathrm{d}'' \, x_{p+1} \wedge \omega.$$

Par définition de l'intégrale de bord et du calibrage μ_W, cette expression vaut $\int_W \omega$, comme il fallait démontrer. □

9.7.4. — Soit P un sous-espace paralinéaire de $\mathbf{R}^n$, purement de dimension p, muni d'un p-calibrage μ_P. Alors, (P, μ_P) définit un courant squelettique de bidimension (p, p) sur $\mathbf{R}^n$ que l'on note $[P, \mu_P]$. Si ce calibrage est positif, le courant $[P, \mu_P]$ est positif ; si ce calibrage est harmonieux, ce courant est fermé.

9.7.5. — Soit P et Q des sous-espaces paralinéaires de $\mathbf{R}^n$, purement de dimensions p et q respectivement, et respectivement munis d'un p-calibrage μ_P et d'un q-calibrage μ_Q que l'on suppose positifs et harmonieux.

On dispose ainsi de l'intersection tropicale des deux courants $[P, \mu_P]$ et $[Q, \mu_Q]$. C'est un courant positif fermé de bidimension $p + q - n$; il est squelettique, c'est-à-dire qu'il correspond à un sous-espace paralinéaire R de $\mathbf{R}^n$, purement de dimension $r = p + q - n$, muni d'un r-calibrage positif et harmonieux.

Plusieurs constructions de cette intersection tropicale ont été données dans la littérature. Expliquons pourquoi notre construction la retrouve.

Par construction, l'intersection tropicale se calcule localement. Au voisinage d'un point $x \in P \cap Q$ appartenant aux intérieurs de deux cellules de P et Q qui s'intersectent transversalement, le calcul est celui de l'intersection tropicale de deux espaces linéaires.

Dans le cas général, on calculer l'intersection tropicale transverse de $[P, \mu_P]$ avec un translaté « générique » $y + [Q, \mu_Q]$, et faire tendre y vers 0 : par continuité, le résultat convergera vers $[P, \mu_P] \cap [Q, \mu_Q]$. C'est la règle de déplacement des éventails.

PARTIE II

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

CHAPITRE 10

ALGÈBRE GRADUÉE ET RÉDUCTION DES ANNEAUX NORMÉS

---

§ 10.1. ALGÈBRE GRADUÉE

10.1.1. — Sauf mention expresse du contraire, *anneau gradué* signifiera dans ce texte *anneau* $\mathbf{R}_+^\times$*-gradué*, la graduation étant notée multiplicativement et en exposant. Nous mettrons parfois l'exposant entre crochets pour éviter une éventuelle confusion avec les puissances.

Un morphisme d'anneaux gradués est un morphisme d'anneaux préservant les graduations. Si A est un anneau gradué nous noterons $A^\times$ l'ensemble des éléments inversibles *homogènes* de A. La catégorie des anneaux ordinaires s'identifie à celle des anneaux A trivialement gradués, c'est-à-dire tels que $A^{[1]} = A$.

Une part importante de l'algèbre commutative classique s'étend au cas gradué, la plupart du temps sans difficulté aucune : il suffit de rajouter un peu partout des hypothèses d'homogénéité. Nous allons en donner quelques exemples ici, le plus souvent sans démonstration. Pour un exposé plus complet, on pourra se référer au texte fondateur de Temkin **[127]** ainsi par exemple qu'aux paragraphes de rappels et compléments sur le sujet dans **[51]**, **[54]** ou encore **[56]**.

10.1.2. — Suivant Temkin, nous appellerons (improprement) *corps gradué* tout anneau gradué non nul dans lequel tout élément homogène non nul est inversible. Par exemple si k est un corps (usuel) et r un réel strictement positif, l'anneau des polynômes de Laurent $k[t, t^{-1}]$ muni de la graduation pour laquelle at^i est homogène de degré r^i pour tout $a \in k^\times$ et tout $i \in \mathbf{Z}$ est un corps gradué. Une extension d'un corps gradué K est un corps gradué F muni d'un morphisme d'anneaux gradués de K dans F, nécessairement injectif.

10.1.3. — Si $A = \bigoplus_{r>0} A^r$ est un anneau gradué et si a est un élément homogène de A, nous poserons $\|a\| = 0$ si $a = 0$ et désignerons sinon par $\|a\|$ l'unique réel strictement positif r tel que $a \in A^r$. Si K est un corps gradué, nous utiliserons de préférence la notation $|a|$ plutôt que $\|a\|$. (Nous noterons donc le degré comme une norme ou une valeur absolue ; l'intérêt de ce choix apparaîtra plus loin lorsque nous manipulerons des réductions graduées).

10.1.4. — Si A est un anneau gradué, un A-module gradué est un A-module M muni en tant que groupe abélien d'une décomposition en somme directe $M = \bigoplus_{r>0} M^r$ telle que $A^s M^r \subset M^{rs}$ pour tout (r, s). Nous rencontrerons essentiellement cette notion lorsque A est un corps gradué, auquel cas nous parlerons de A-espace vectoriel gradué.

Si M et N sont deux A-modules gradués, nous considérerons toujours $M \otimes_A N$ comme muni de la graduation pour laquelle $(M \otimes_A N)^r$ est le sous-groupe de $M \otimes_A N$ engendré par les éléments de la forme $m \otimes n$ avec $m \in M^s$, $n \in N^t$ et $st = r$. Ce produit tensoriel gradué représente le foncteur qui envoie un A-module gradué P sur l'ensemble des applications bilinéaires b de $M \times N$ vers P telles que $b(M^s, N^t) \subset P^{st}$ pour tout (s, t).

Une famille (m_i) d'éléments homogènes d'un A-module gradué M est libre (resp. génératrice, resp. une base) si l'application qui à une famille (a_i) d'éléments homogènes de A à support fini associe $\sum a_i m_i$ est injective (resp. surjective, resp. bijective).

On démontre comme en algèbre linéaire standard que tout espace vectoriel gradué possède une base et que toutes ses bases ont même cardinal, que l'on appelle ici aussi la dimension.

On prendra garde qu'un A-module gradué admettant une base n'est pas en général isomorphe à $A^{(I)}$ pour un certain ensemble I, mais à une somme directe $\bigoplus_{i\in I} A[r_i]$ où les r_i sont des réels strictement positifs et où $A[r_i]$ désigne le A-module gradué de A-module sous-jacent A et dont la graduation est donnée par la formule $(A[r_i])^s = A^{r_i^{-1}s}$ (la notation du décalage est choisie de sorte que 1 soit de degré r_i). Si r désigne la famille (r_i) on écrira $A[r]$ au lieu de $\bigoplus_i A[r_i]$.

On peut développer un calcul matriciel dans ce contexte. La donnée d'un morphisme de A-modules gradués, c'est-à-dire d'une application A-linéaire préservant les graduations, de $\bigoplus_j A[s] \to \bigoplus_i A[r]$, où $r = (r_i)$ et $s = (s_j)$, est équivalente à la donnée d'une matrice (a_{ij}) où les a_{ij} sont des éléments homogènes de A, où les a_{ij} à j fixé sont presque tous nuls, et où $\|a_{ij}\|s_i \in \{r_j, 0\}$ pour tout i ; nous noterons $\mathrm{M}_{r,s}(A)$ le A^1-module constitué des matrices (a_{ij}) comme ci-dessus ; si t est un troisième polyrayon, la formule usuelle du produit matriciel définit une application bilinéaire de $\mathrm{M}_{r,s} \times \mathrm{M}_{s,t}$ vers $\mathrm{M}_{r,t}$, qui correspond à la composition des morphismes de A-modules gradués. nous désignerons par $\mathrm{GL}_{s,r}(A)$ l'ensemble de ses éléments possédant un inverse bilatère dans $\mathrm{M}_{r,s}(A)$. Si $r = s$ nous écrirons simplement $\mathrm{M}_s(A)$ et $\mathrm{GL}_s(A)$.

10.1.5. — La catégorie des A-modules gradués admet un foncteur Hom interne : si M et N sont deux A-modules gradués, on note $\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}(M, N)$ la somme directe $\bigoplus_{\rho>} \mathrm{Hom}(M, N[\rho^{-1}])$; c'est de manière naturelle un A-module gradué (par ρ). Si $r = (r_1, \ldots, r_n)$ et $(s = (s_1, \ldots, s_m)$ sont deux polyrayons,

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}(A[s], A[r]) \simeq \bigoplus_{i,j} A[r_j^{-1} s_i]$$

(considérer les coefficients matriciels). On notera $M^\vee$ le A-module gradué $\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}(M, A)$; on l'appelle le dual de M.

10.1.6. — Soit A un anneau gradué. On dit que A est intègre s'il l'est en tant qu'anneau standard ; cela revient à demander que tout produit fini d'éléments *homogènes* non nuls de A soit un corps.

On peut définir le localisé de A relatif à une partie multiplicative constituée d'éléments homogènes, et en particulier son corps gradué des fractions si A est intègre.

Le nilradical de A (au sens standard) est un idéal homogène de A. On dit que l'anneau gradué A est réduit s'il l'est au sens classique, c'est-à-dire si son nilradical est nul. Cela revient à demander que tout élément nilpotent homogène de A soit nul.

Un idéal homogène I de A sera dit premier (resp. maximal) si et seulement si l'anneau gradué A/I est intègre (resp. est un corps gradué).

On dit que A est local s'il possède un et un seul idéal homogène maximal. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal homogène premier de A, le localisé $A_{\mathfrak{p}}$ de A relatif à la partie multiplicative de A constitué des éléments homogènes de $A - \mathfrak{p}$ est un anneau gradué local, que nous appellerons le localisé de A en $\mathfrak{p}$.

On dit que A est noethérien (resp. artinien) si et seulement si toute famille non vide d'idéaux *homogènes* de A admet un élément maximal (resp. un élément minimal). On démontre comme dans le cas classique que si A est noethérien il possède un nombre fini d'idéaux homogènes premiers minimaux, que tout idéal homogène premier de A contient l'un de ces idéaux premiers homogènes minimaux, et que le localisé de A en un idéal homogène premier minimal est artinien.

On démontre également que A est artinien si et seulement s'il est noethérien et si tous ses idéaux premiers homogènes sont maximaux. Si A est artinien il s'écrit comme produit d'un nombre fini d'anneaux gradués locaux artiniens. Si A est un anneau gradué local artinien de corps gradué résiduel K, il existe une suite finie $A = I_0 \supseteq I_1 \ldots \supseteq I_m = (0)$ d'idéaux homogènes de A tels que I_j/I_{j+1} soit isomorphe à K comme A-module pour tout $j \leqslant m-1$. L'entier m ne dépend pas de la suite d'idéaux choisie et est appelé la longueur de A. On définit la longueur d'un anneau gradué artinien non nécessairement local comme la somme des longueurs de ses facteurs locaux.

10.1.7. — Soit A un anneau gradué et soit $r = (r_i)_{i\in I}$ une famille de réels strictement positifs. On note $A[T_i/r_i]$ ou plus brièvement $A[T/r]$ la A-algèbre graduée d'anneau sous-jacent $A[T_i]_{i\in I}$ et dont la graduation est telle que $A[T_i/r_i]^s$ soit l'ensemble des polynômes de la forme $\sum a_I T^I$ avec $a_I \in A^{r^{-I}s}$ pour tout I. Informellement, chaque T_i est une indéterminée homogène telle que $\|T_i\| = r_i$; rigoureusement, ce slogan se traduit par le fait que pour toute A-algèbre graduée B et toute famille (b_i) d'éléments de B tels que $b_i \in B_{r_i}$ quel que soit i, il existe un unique morphisme de A-algèbres graduées envoyant T_i sur b_i pour tout i (à savoir l'évaluation en (b_i)).

On démontre comme dans le cas classique que si l'ensemble d'indices I est fini et si A est noethérien alors $A[T/r]$ est noethérien.

Ces algèbres de polynômes permettent en particulier de développer dans le contexte des corps gradués une théorie de l'indépendance algébrique, des extensions algébriques, des bases et du degré de transcendance, analogue à celle bien connue dans le cadre classique (les bases de transcendance seront toujours par définition constituée d'éléments homogènes).

Soit K un corps gradué et soit $(r_i)_{i\in I}$ une famille de réels strictement positifs. Nous noterons $K(T_i/r_i)_i$, ou souvent plus simplement $k(T/r)$ le corps des fractions gradué de $K[T_i/r_i]_i$. Le sous-groupe $|K(T/r)^\times|$ de $\mathbf{R}_+^\times$ est engendré par $|K^\times|$ et les r_i, et la composante $K(T/r)^1$ est l'ensemble des fractions de la forme $\sum a_I T^I / \sum b_I T^I$ où les b_I sont non tous nuls et où les $|a_I| r^I$ et $|b_I| r^I$ non nuls sont tous égaux à un même réel strictement positif. La famille (T_i) est une base de transcendance de $K(T_i/r_i)_i$ sur K.

Soit L une extension quelconque de K et soit (t_i) une famille d'éléments de $L^\times$. La famille (t_i) est algébriquement indépendante sur k si et seulement s'il existe un K-isomorphisme de $K(T_i/|t_i|)_i$ sur $K(t_i)_i$ envoyant T_i sur t_i pour tout i.

10.1.8. — Soit K un corps gradué et soit A une K-algèbre graduée. Soit $r \in |K^\times|$ et soit λ un élément non nul de K^r. L'application naturelle de $A^1 \otimes_{K^1} K^r$ vers A^r est bijective, de réciproque $a \mapsto (a/\lambda) \otimes \lambda$. Autrement dit, le morphisme de K-algèbres de $A^1 \otimes_{K^1} K$ vers A est une injection d'image $\bigoplus_{r \in |K^\times|} A^r$.

10.1.9. — Soit K un corps gradué. Soit L une extension de K ; c'est en particulier un K-espace vectoriel, dont la dimension sera appelée le degré de L sur K. On sait par 10.1.8 que le morphisme naturel de $L^1 \otimes_{K^1} K$ vers L est injectif et identifie $L^1 \otimes_{K^1} K$ au sous-corps gradué $M = \bigoplus_{r \in |K^\times|} L^r$ de L. Notons qu'on a par construction $|M^\times| = |K^\times|$ et $L^1 = M^1$. Nous nous proposons maintenant décrire le degré et le degré de transcendance de l'extension graduée $K \hookrightarrow L$ en termes d'invariants plus traditionnels.

Traitons d'abord le cas du degré. Soit (a_i) une base de L^1 sur K_1 (au sens classique) Puisque $M = L^1 \otimes_{K^1} K$, la famille (a_i) est encore une base de M sur K. Soit (b_j) une famille d'éléments de $L^\times$ telle que les $|b_j|$ forment un système de représentants de $|F^\times|/|K^\times|$. Si j_1 et j_2 sont deux indices distincts et si μ_1 et μ_2 sont deux éléments de $M^\times$ alors $|\mu_1 b_{j_1}| \neq |\mu_2 b_{j_2}|$ par choix des b_j et parce que $|M^\times| = |K^\times|$. La famille (b_j) est donc libre sur M. Par ailleurs si λ est un élément de $L^\times$ il existe par choix de (b_j) un élément a de $K^\times$ et un indice j tel que $|\lambda| = |ab_j|$. Le produit $(\lambda/ab_j)a$ appartient alors à $(L^1)^\times \cdot K^\times \subset M^\times$, et l'on a $\lambda = (\lambda/ab_j)ab_j$, ce qui montre que (b_j) est une famille génératrice de L sur M. C'en est donc une base (et l'on a par conséquent $[L = M] = (|L^\times| : |K^\times|)$. Par conséquent $(a_i b_j)_{i,j}$ est une base de L sur K si bien que

$$[L : K] = [L^1 : K^1](|L^\times| : |K^\times|.)$$

Traitons maintenant le cas du degré de transcendance. Soit (α_i) une base de transcendance (au sens classique) de L^1 sur K^1. Il est immédiat que les α_i sont encore algébriquement indépendants sur K. Et comme L^1 est algébrique sur $K^1(\alpha_i)_i$ et que $M = L^1 \otimes_{K^1} K$, le corps gradué M est algébrique sur $K(\alpha_i)_i$; la famille (α_i) est donc une base de transcendance de M sur K. Soit (β_j) une famille d'éléments de $L^\times$ tels que les $|\beta_j|$ forment une base de $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} (|F^\times|/|K^\times|)$ comme $\mathbf{Q}$-espace vectoriel. La liberté de la famille $(|\beta_j|)$ et le fait que $|L^\times| = |K^\times|$ entraînent que pour tout couple (J_1, J_2) de multi-indices distincts et toute famille (μ_1, μ_2) d'éléments de $L^\times$ on a $|\mu_1 \beta^{J_1}| \neq |\mu_2 \beta^{J_2}|$; il en résulte que les β_j sont algébriquement indépendants sur M. Par ailleurs si λ est un élément de $L^\times$ le caractère générateur de (β_j) entraîne l'existence d'un entier non nul N, d'un élément a de $K^\times$ et d'un multi-indice J tels que $|\lambda^N| = |a\beta^J|$. Le produit $(\lambda^N/a\beta^J)a$ appartient alors à $(L^1)^\times \cdot K^\times \subset M^\times$, et l'on a $\lambda^N = (\lambda^N/a\beta^J)a\beta^J$, ce qui montre que λ est algébrique sur $M(\beta_j)_j$. Il en résulte que (β_j) est une base de transcendance de L sur M. La concaténation de (α_i) et (β_j) est alors une base de transcendance de L sur K, si bien que

$$\mathrm{degtr}(L/K) = \mathrm{degtr}(L^1/K^1) + \dim_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} (|L^\times|/|K^\times|).$$

Lemme 10.1.10. — *Soit K un corps gradué et soit $(r_i)_{i \in I}$ une famille de réels strictement positifs. Il existe un sous-ensemble J de I et une famille $(S_j)_{j \in J}$ de monômes en les T_i à coefficients dans $K^\times$ vérifiant $|S_j| = 1$ pour tout j telle que pour toute extension graduée L de K vérifiant l'égalité $|L^\times| = |K^\times|$ les S_i soient algébriquement indépendants sur L^1 et engendrent $L(T/r)^1$ comme extension de L^1.*

Démonstration. — On munit l'ensemble d'indices I d'un bon ordre. Nous allons construire par récurrence sur l'élément ℓ de I un ensemble B_ℓ de monômes en les T_i pour $i \leqslant \ell$ tels que les conditions suivantes soient satisfaites :

a) pour tout $m \leqslant \ell$ l'ensemble B_m est égal au sous-ensemble de B_ℓ constitué des monômes ne faisant intervenir que les T_i pour $i \leqslant m$, et $B_\ell - \bigcup_{m<\ell} B_m$ a au plus un élément ;

b) pour tout ℓ et toute extension graduée L de K vérifiant l'égalité $|L^\times| = |K^\times|$ les éléments de B_ℓ sont algébriquement indépendants sur L^1 et engendrent $[L(T_i/r_i)_{i\leqslant\ell}]^1$ comme extension de L^1.

La réunion des B_ℓ tels que $B_\ell - \bigcup_{m<\ell} B_m$ soit non vide (et donc un singleton) fournira alors une famille (S_j) comme requise dans l'énoncé.

Il suffit de fabriquer B_ℓ en supposant que les B_i pour $i < \ell$ ont été construits. Posons $B = \bigcup_{i<\ell} B_i$. Soit L une extension de K telle que $|F^\times| = |K^\times|$. Posons $\breve{K} = K(T_i/r_i)_{i<\ell}$ et $\breve{L} = L(T_i/r_i)_{i<\ell}$; on a alors $|\breve{L}^\times| = |\breve{K}^\times|$. Par construction, les éléments de B appartiennent à $\breve{L}^1$, sont algébriquement indépendants sur L^1 et engendrent $\breve{L}^1$ comme extension de L^1. Supposons tout d'abord que r_ℓ n'est pas de torsion modulo $|\breve{K}^\times|$. Il ne l'est alors pas modulo $|\breve{L}^\times|$, ce qui entraîne que les composantes homogènes de $\breve{L}[T_\ell/r_\ell]$ sont les $\breve{L}^r \cdot T_\ell^n$ où r parcourt $|\breve{L}^\times|$ et où n parcourt $\mathbf{N}$, et celles de $\breve{L}(T_\ell/r_\ell)$ sont par conséquent les $\breve{L}^r \cdot T_\ell^n$ où r parcourt $|\breve{L}^\times|$ et où n parcourt $\mathbf{Z}$. En particulier $\breve{L}(T_\ell/r_\ell)^1$ est égal à $\breve{L}^1$, ce qui montre que $L(T_\ell/r_\ell)^1$ est engendré par B sur son sous-corps L^1. On peut donc poser $B_\ell = B$. Supposons maintenant que r_ℓ est de torsion modulo $|\breve{K}^\times|$, et soit n son ordre modulo $|\breve{K}^\times|$. Le groupe $|\breve{K}^\times|$ étant engendré par $|K^\times|$ et les r_i pour $i < \ell$ il existe un monôme a dont le coefficient appartient à $K^\times$ et qui ne met en jeu que des T_i avec $i < \ell$ tel que $r_\ell^n = |a|$. L'élément T_ℓ^n/a de $\breve{K}(T_\ell/r_\ell)$ appartient alors à $\breve{K}(T_\ell/r_\ell)^1 \subset \breve{L}(T_\ell/r_\ell)^1$. Il est transcendant sur $\breve{L}^1$ puisque T_ℓ est transcendant sur $\breve{L}$ par construction. Il suffit maintenant de vérifier que $\breve{L}(T_\ell/r_\ell)^1 = \breve{L}^1(T_\ell^n/a)$; cela assurera qu'on peut prendre $B_\ell = B \cup \{T_\ell^n/a\}$ et terminera la démonstration.

Donnons-nous un élément $\lambda = (\sum_p a_p T_\ell^p)(\sum b_p T_\ell^p)$ de $\breve{L}(T_\ell/r_\ell)^1$, où les a_m et les b_p sont des éléments homogènes de $\breve{L}$, où les b_p sont non tous nuls, et où les $|a_p|r_\ell^p$ et les $|b_p|r_\ell^p$ non nuls sont tous égaux. Puisque r_ℓ est d'ordre n modulo $|\breve{L}^\times|$, les entiers p tels que $a_p \neq 0$ et les entiers p tels que $b_p \neq 0$ appartiennent tous à la même classe modulo n. Il existe donc un entier $d \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que λ puisse s'écrire $(T^d \sum \alpha_p T^{np})/(T^d \sum \beta_p T^{np})$, où les α_p et les β_p sont des éléments homogènes de $\breve{L}$, où les β_p sont non tous nuls, et où les $|a_p|r_\ell^{n^p}$ et les $|b_p|r_\ell^{np}$ non nuls sont tous égaux. On a ainsi

$$\lambda = \frac{\sum(\alpha_p a^p)(T^n/a)^p}{\sum(\beta_p a^p)(T^n/a)^p},$$

et les $|\alpha_p a^p|$ et $|\beta_p a^p|$ non nuls sont tous égaux à un même $|c|$ pour un certain $c \in \breve{L}^\times$. L'égalité

$$\lambda = \frac{\sum(\alpha_p a^p/c)(T^n/a)^p}{\sum(\beta_p a^p/c)(T^n/a)^p}$$

montre alors que λ appartient à $\breve{L}^1(T_\ell^n/a)$, ce qu'on souhaitait établir. □

Corollaire 10.1.11. — *Soit K un corps gradué et soit L une extension graduée de type fini de K. L'extension L^1 de K^1 et le groupe abélien $|L^\times|/|K^\times|$ sont de type fini.*

Démonstration. — Par hypothèse, L s'identifie à une extension finie de $K(T/r)$ pour un certain polyrayon $r = (r_1, \dots, r_n)$ de longueur finie. Le groupe $|K(T/r)^\times|/|K^\times|$ est

engendré par les r_i et est donc de type fini, et $K(T/r)^1$ est de type fini (et de plus transcendant pur) sur K^1 par le lemme précédent. Comme $[L^1 : K(T/r)^1]\,(|L^\times|/|K(T/r)^\times|) = [L : K(T/r)]$ en vertu de 10.1.9, L^1 est de type fini sur K^1 et $|L^\times|/|K^\times|$ est de type fini. □

10.1.12. — Soit K un corps gradué. Une valuation (graduée) sur K est une application $v\colon K^\times \to G$, où G est un groupe abélien ordonné noté multiplicativement, que l'on prolonge systématiquement en adjoignant un plus petit élément absorbant 0 à G et en posant $v(0) = 0$, et qui satisfait les axiomes suivants :

– pour tout couple (λ, μ) d'éléments de $K^\times \cup \{0\}$ on a $v(\lambda\mu) = v(\lambda)v(\mu)$;

– pour tout $r > 0$ et tout couple (λ, μ) d'éléments de K^r, on a $v(\lambda + \mu) \leqslant \max(v(\lambda, v(\mu))$.

On dit que deux valuations v et v' sur K, à valeurs respectives dans les groupes abéliens ordonnés G et G', sont équivalentes s'il existe un groupe abélien ordonné G'', une valuation v'' sur K à valeurs dans G'', et deux morphismes injectifs croissants $i\colon G'' \to G$ et $j\colon G'' \to G'$ tels que $v = i \circ v''$ et $v' = j \circ v''$.

À une valuation v sur K est associé un sous-anneau gradué $\mathscr{O}_v$ de K, caractérisé par le fait que $(\mathscr{O}_v)^r = \{\lambda \in K^r, v(\lambda) \leqslant 1\}$ pour tout $r > 0$. Pour tout $\lambda \in K^\times$ on a $\lambda \in \mathscr{O}_v$ ou $\lambda^{-1} \in \mathscr{O}_v$ (en particulier, K est le corps gradué des fractions de $\mathscr{O}_v$). L'anneau gradué $\mathscr{O}_v$ est local, au sens où il possède un et un seul idéal homogène maximal $\mathfrak{m}$, caractérisé par le fait que $\mathfrak{m}^{[r]} = \{\lambda \in K^r, v(\lambda) < 1\}$ pour tout $r > 0$. Réciproquement si A est un sous-anneau gradué de K tel que $\lambda \in A$ ou $\lambda^{-1} \in A$ pour tout $\lambda \in K^\times$ alors $K^\times/A^\times$ possède un ordre compatible avec sa structure de groupe dont l'ensemble des éléments $\leqslant 1$ est l'image de $A \cap K^\times$, et l'application quotient v de $K^\times$ vers $K^\times/A^\times$ est, relativement à l'ordre en question, une valuation sur K telle que $\mathscr{O}_v = A$. On vérifie comme dans le cas classique que ces constructions mettent en bijection l'ensemble des classes d'équivalence de valuations sur K et celui des sous-anneaux gradués A de k tels que $\lambda \in A$ ou $\lambda^{-1} \in A$ pour tout $\lambda \in K^\times$. Un tel sous-anneau gradué de K est appelé un anneau gradué de valuation (de K).

Si F est une extension graduée de K, toute valuation v sur K admet un prolongement w à F : comme dans le cas classique, on peut par exemple construire $\mathscr{O}_w$ comme un sous-anneau gradué de F dominant $\mathscr{O}_v$ et maximal pour la relation de domination.

§ 10.2. SCHÉMAS ET FIBRÉS VECTORIELS GRADUÉS

10.2.1. — Soit A un anneau gradué. Nous nous permettrons (lorsqu'il sera clair que l'on travaille dans le contexte gradué) de noter $\operatorname{Spec} A$ l'ensemble des idéaux premiers *homogènes* de A, équipé de la topologie de Zariski, dont les fermés sont les parties de la forme $\{\mathfrak{p}, I \subset \mathfrak{p}\}$ où I est un certain idéal homogène de A ; cet espace est muni d'un faisceau en anneaux gradués qui envoie tout ouvert $D(f) := \{\mathfrak{p}, f \notin \mathfrak{p}\}$ (où f est un élément homogène de A) sur le localisé gradué A_f ; les fibres de ce faisceau sont des anneaux gradués locaux, ce qui fait de $\operatorname{Spec} A$ un *espace localement annelé gradué*. Nous appellerons schéma gradué tout espace localement annelé gradué localement isomorphe à un spectre d'anneau gradué. Topologiquement, tout schéma gradué est un espace spectral. Tout point x d'un schéma gradué possède un corps gradué résiduel $\kappa(x)$. Un

schéma gradué est dit réduit si ses anneaux gradués locaux sont réduits, et noethérien s'il possède un recouvrement ouvert fini par des spectres d'anneaux gradués noethériens. Un schéma gradué noethérien X possède un ensemble fini de composantes irréductibles X_i. Chacune d'elle a un unique point générique η_i, l'anneau local gradué $\mathscr{O}_{X_i,\eta_i}$ est artinien, et sa longueur est appelée la multiplicité générique de X le long de X_i.

Un morphisme de schémas gradués est un morphisme d'espaces localement annelés gradués. On peut définir dans ce contexte, en décalquant ce qui se fait dans le cas classique, les notions de morphisme fini, d'immersions (ouvertes, fermées, puis générales), de produits fibrés, de changement de base, etc.

Lorsque A est trivialement gradué, son spectre au sens ci-dessus coïncide avec son spectre au sens usuel (son faisceau structural est donc également trivialement gradué). Les schémas usuels sont donc des cas particuliers de schémas gradués.

Si X est un schéma gradué sur un corps gradué K et si L est une extension graduée de K, nous noterons souvent X_L le L-schéma gradué $X \times_K L$. Le morphisme naturel de X_L vers X est surjectif : en effet, sa fibre en un point x de X est le spectre de l'anneau gradué non nul $\kappa(x) \otimes_K L$.

10.2.2. Espaces affines et projectifs gradués. — Soit A un anneau gradué. Soit $r = (r_1, \dots, r_n)$ un polyrayon. On lui associe un schéma gradué affine de type fini sur A, l'espace affine relatif de polyrayon r, noté $\mathbf{A}^r_A$ et défini comme étant le spectre de $\operatorname{Spec} A[T/r]$.

Soit $\rho = (\rho_0, \dots, \rho_n)$ un polyrayon. On lui associe un A-schéma gradué de type fini sur A, l'espace projectif de relatif de polyrayon ρ, noté $\mathbf{P}^\rho_A$ et qu'on peut définir de deux façons différentes :

– par une variante graduée de la construction Proj, appliquée à $A[T_0/s_0, \dots, T_n/s_n]$ (dont on doit alors considérer non seulement la $\mathbf{R}_+^\times$-graduation mais aussi la graduation monomiale) ;

– par recollement des $U_j := \operatorname{Spec} A[\tau_{ij}/(s_i/s_j)]_{i\neq j}$ le long des isomorphismes $D(\tau_{kj}) \simeq D(\tau_{jk}), \tau_{ij} \mapsto \tau_{ik}\tau_{jk}^{-1}$.

L'ouvert U_j de la seconde construction correspond à l'ouvert $D(T_j)$ de la première, avec $\tau_{ij} = T_i/T_j$.

10.2.3. Propreté et projectivité. — On peut définir un morphisme propre entre schémas gradués exactement comme dans le cas classique : un morphisme f est propre s'il est de type fini et satisfait le critère valuatif (il faut bien sûr prendre ici ce critère au sens des valuations graduées) ; cela revient à demander que f soit de type fini, séparé et universellement fermé. La preuve est analogue à celle du cas classique, les deux points clef étant les suivants :

– tout anneau local gradué est dominé par un anneau gradué de valuation (on en déduit que toute spécialisation $y \to x$ sur un schéma gradué X est induite par un moorphisme $\operatorname{Spec} A \to X$ où A est un anneau de valuation gradué) ;

– l'image d'un morphisme quasi-compact $f\colon Y \to X$ est fermée si et seulement si elle est stable par spécialisation.

La première assertion se démontre aisément avec le lemme de Zorn. Pour la seconde, l'implication directe est claire. Pour l'implication réciproque, on se ramène au cas d'un morphisme $f\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$; en quotientant A par le noyau de f^*, on peut supposer que A s'injecte dans B. Dans ce cas pour tout idéal homogène premier minimal $\mathfrak{p}$ de A le produit tensoriel $B \otimes_A A_\mathfrak{p}$ est non nul, ce qui entraîne que $\mathfrak{p}$ appartient à l'image de f ;

comme celle-ci est stable par spécialisation, et comme tout idéal premier homogène de A contient par le lemme de Zorn un idéal premier homogène minimal, f est surjective.

Si $r = (r_0, \dots, r_n)$ est un polyrayon et si A est un anneau gradué, le A-schéma gradué $\mathbf{P}^r_A$ est propre – on montre en chassant les dénominateurs qu'il satisfait au critère valuatif. En conséquence tout A-schéma gradué projectif (c'est-à-dire se factorisant par une immersion fermée dans $\mathbf{P}^r_A$ pour un certain r) est propre

10.2.4. — Soit $(X, \mathscr{O}_X)$ un espace localement annelé gradué. Un fibré vectoriel (gradué) sur X est un $\mathscr{O}_X$-module gradué E tel que pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert U de x, un polyrayon $r = (r_1, \dots, r_n)$ et un isomorphisme $E|_U \simeq \mathscr{O}_X[r]$. L'entier n est alors uniquement déterminé par x et est appelé rang de E en x ; ce rang est une fonction localement constante sur X. Un fibré en droites sur X est un fibré vectoriel de rang partout égal à 1.

Soit E et F deux fibrés vectoriels sur X. Le faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{gr}}(E, F)$ est défini comme la somme directe des faisceaux en $\mathscr{O}_X^{[1]}$-modules $\underline{\mathrm{Hom}}(E, F[\rho^{-1}])$, pour $\rho \in \mathbf{R}_+^\times$. C'est de manière naturelle un faisceau en $\mathscr{O}_X$-modules gradués. C'est même un fibré vectoriel : en effet, si U est un ouvert de X tel que $E|_U \simeq \mathscr{O}_U[s]$ et $F|_U \simeq \mathscr{O}_U[r]$ avec $r = (r_1, \dots, r_n)$ et $s = (s_1, \dots, s_m)$ alors $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{gr}}(E, F)|U$ est isomorphe à $\bigoplus_{i,j} \mathscr{O}_U[r_j^{-1} s_i]$ (considérer les coefficients matriciels).

Le fibré vectoriel $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{gr}}(E, \mathscr{O}_X)$ sera noté $E^\vee$ et est appelé le dual de E.

On dit qu'un fibré en droites E sur X est engendré par ses sections globales si pour tout $x \in X$ il existe une section globale homogène de E constituant une base de E au-dessus d'un voisinage de x.

Supposons que X est un schéma gradué sur un corps gradué K, que L est une extension graduée de K et que D est un fibré en droites sur X. Si l'image réciproque D_L de D sur X_L est engendrée par ses sections globales, alors D est engendré par ses sections globales. Il suffit en effet de remarquer (en raisonnant sur un recouvrement affine) que $D_L(X_L) = D(X) \otimes_k L$, et que si $(\sum_j s_{ij} \otimes \ell_{ij})_i$ est une famille de sections globales (homogènes) de D_L engendrant ce dernier, alors les s_{ij} engendrent D (cela vaudrait plus généralement si K était un anneau gradué et L une K-algèbre graduée fidèlement plate).

10.2.5. — Soit A un anneau gradué et soit $\rho = (\rho_0, \dots, \rho_n)$ un polyrayon. Le schéma projectif gradué $\mathbf{P}^\rho_A$ possède un fibré en droites naturel noté $\mathscr{O}(1)$. En reprenant les notations de 10.2.2, le A-module gradué $\mathscr{O}(1)(\mathbf{P}^\rho_A)$ est le sous-A-module gradué de $A[T_0, \dots, T_n]$ engendré par les T_j. Pour tout j, la restriction de $\mathscr{O}(1)$ à U_j est libre de base T_j, si bien que $\mathscr{O}(1)|_{U_j} \simeq \mathscr{O}_{U_j}[r_j]$; sur $U_j \cap U_k$ on a l'égalité $T_j = \tau_{jk} T_k$ entre sections homogènes de $\mathscr{O}(1)$.

Soit X un A-schéma gradué et soit $\rho = (\rho_0, \dots, \rho_n)$ un polyrayon. Se donner un A-morphisme f de X vers $\mathbf{P}^\rho_A$ revient à se donner un fibré en droites D sur X et des sections globales $s_0, \dots, s_n$ de D, chaque s_i étant homogène de degré ρ_i, qui ne s'annulent pas simultanément sur X (le morphisme f étant donné, prendre $D = f^*\mathscr{O}(1)$ et $s_i = f^*T_i$; le fibré D et les s_i étant données, f est caractérisé par les conditions $f^{-1}(U_j) = D(s_j)$ et $f^*(T_i/T_j) = s_i/s_j$).

On dit qu'un fibré en droites D sur X est très ample s'il existe $\rho = (\rho_0, \dots, \rho_n)$ et une immersion $f\colon X \to \mathbf{P}^\rho_A$ telle que $D \simeq f^*\mathscr{O}(1)$, et qu'il est ample s'il existe $m \geqslant 0$ tel que $D^{\otimes m}$ soit très ample.

§ 10.3. SCHÉMAS ET FIBRÉS VECTORIELS GRADUÉS STRICTS

Lemme 10.3.1. — *Soit K un corps gradué et soit A une K^1-algèbre au sens classique.*

a) *L'application $I \mapsto I \cap A$ établit un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre l'ensemble des idéaux homogènes de $A \otimes_{K^1} K$ et celui des idéaux de A, de réciproque $J \mapsto J \otimes_{Kq} K$.*

b) *L'anneau A est local (resp. noethérien, resp. artinien) si et seulement si l'anneau gradué $A \otimes_{K_1} K$ est local (resp. noethérien, resp. artinien).*

c) *L'anneau A est intègre (resp. réduit, resp. est un corps) si et seulement si l'anneau gradué $A \otimes_{K^1} K$ est intègre (resp. réduit, resp. est un corps gradué).*

d) *Un idéal J de A est premier (resp. maximal) si et seulement si $J \otimes_{K^1} K$ est premier (resp. maximal).*

e) *Supposons A noethérien et soient $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ ses idéaux premiers minimaux. Les $\mathfrak{p}_i \otimes_{K_1} K$ sont les idéaux homogènes premiers minimaux de $A \otimes_{K^1} K$. Pour tout i le localisé de $A \otimes_{K^1} K$ en $\mathfrak{p}_i \otimes_{K^1} K$ s'identifie à $A_{\mathfrak{p}_i} \otimes_{K^1} K$, a pour corps gradué résiduel* $\mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p}_i) \otimes_{K^1} K$ *et a même longueur que $A_{\mathfrak{p}_i}$.*

f) *Soit d un entier et soit M un A-module. Le A^1-module M est libre de rang d si et seulement si le A-module $M \otimes_{A^1} A$ est libre de rang d.*

Démonstration. — Commençons par remarquer que $A \otimes_{Kq} K = \bigoplus_{r \in |K^\times|} A \otimes_{K^1} K^r$. Si x est un élément homogène non nul de A il existe donc $y \in K^\times$ tel que $|y| = |x|$; on a alors $x = y(y^{-1}x)$, et l'on remarque que $|y^{-1}x| = 1$, c'est-à-dire que $xy^{-1}x \in A$.

Si J est un idéal de A alors $J \otimes_{K^1} K$ est l'idéal homogène $\bigoplus_{r \in |K^\times|} J \otimes_{K^1} K^r$ de l'anneau gradué $A \otimes_{K^1} K = \bigoplus_{r \in |K^\times|} A \otimes_{K^1} K^r$. On a donc $(J \otimes_{K^1} K) \cap A = J$. Soit maintenant I un idéal homogène de $A \otimes_{K^1} K$. L'injection naturelle de $(I \cap A) \otimes_{K^1} K$ vers A prend ses valeurs dans I, et a pour image I tout entier. Il suffit en effet de vérifier que si x est un élément homogène non nul de I, il appartient à $(I \cap A) \otimes_{K^1} K$, ce que l'on voit en écrivant $x = y(y^{-1}x)$ comme en début de preuve. Ceci achève de démontrer (a), et (b) s'en déduit puisque les trois assertions en jeu peuvent s'exprimer en termes des ensembles ordonnés des idéaux de A et des idéaux homogènes de $A \otimes_{K^1} K$.

Il est clair que si $A \otimes_{K^1} K$ est intègre (resp. réduit, resp. intègre) il en va de même de A qui est sa composante homogène de degré 1. Pour la réciproque, donnons-nous deux éléments homogènes non nuls x et x' de $A \otimes_{K^1} K$. Par la remarque faite en début de preuve, on peut écrire $x = yz$ et $x' = y'z'$ où z et z' sont des éléments non nuls de A et où y et y' appartiennent à $K^\times$. Si A est intègre le produit $xx' = yy'zz'$ est alors non nul, si bien que $A \otimes_{K^1} K$ est intègre. Et si A est réduit (resp. un corps) alors $x = yz$ n'est pas nilpotent (resp. est inversible) si bien que $A \otimes_{K^1} K$ est réduit (resp. est un corps gradué).

L'assertion (d) se montre en appliquant (c) à A/J.

Montrons (e). Il résulte de (a) et (d) que les $\mathfrak{p}_i \otimes_{K^1} K$ sont les idéaux homogènes premiers minimaux de $A \otimes_{K^1} K$. Fixons l'indice i et notons ℓ la longueur de $A_{\mathfrak{p}_i}$. La commutation du produit tensoriel aux quotients et localisations (tout ceci dans le contexte gradué) assure que le localisé de $A \otimes_{K^1} K$ en $\mathfrak{p}_i \otimes_{K^1} K$ s'identifie à $A_{\mathfrak{p}_i} \otimes_{K^1} K$ et a pour corps gradué résiduel $\mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p}_i) \otimes_{K^1} K$. Il reste à vérifier que la longueur de $A_{\mathfrak{p}_i} \otimes_{K^1} K$ est égale à ℓ. Choisissons une suite d'idéaux $A_{\mathfrak{p}_i} = I_0 \supseteq \ldots \supseteq I_\ell = (0)$ d'idéaux de $A_{\mathfrak{p}_i}$ telle que I_j/I_{j+1} soit isomorphe à $\mathrm{Frac}(A_{\mathfrak{p}_i})$ comme $A_{\mathfrak{p}_i}$-module pour tout $j < \ell$. Alors $(I_j \otimes_{K^1} K)/(I_{j+1} \otimes_{K^1} K)$ est isomorphe à $\mathrm{Frac}(A_{\mathfrak{p}_i}) \otimes_{K^1} K$ comme $A_{\mathfrak{p}_i} \otimes_{K^1} K$-module

pour tout $j < \ell$, et la suite d'idéaux homogènes

$$A_{\mathfrak{p}_i} \otimes_{K^1} K = I_0 \otimes_{K^1} K \supseteq \dots I_j \otimes_{K^1} K \supseteq \dots \supseteq I_\ell \otimes_{K^1} K = (0)$$

atteste ainsi que l'anneau gradué local artinien $A_{\mathfrak{p}_i} \otimes_{K^1} K$ est de longueur ℓ.

Prouvons enfin f). L'implication directe est évidente. Pour la réciproque on peut invoquer la descente fidèlement plate graduée (qui se démontre comme sa variante traditionnelle), mais on peut aussi le voir beaucoup plus directement comme suit. Soit $(m_1, \dots, m_d)$ une base de $M \otimes_{A^1} A$. Pour tout i, l'élément m_i de $M \otimes_{A^1} A$ est homogène de degré $|\lambda_i|$ pour un certain $\lambda_i \in K^\times$. Les $\lambda_i^{-1} m_i$ forment encore une base de $M \otimes_{A^1} A$ sur A et comme ils sont de degré 1, ils forment une base de M sur A^1. □

10.3.2. — Soit K un corps gradué. Soit A une K-algèbre graduée. Le morphisme naturel de $A^1 \otimes_{K^1} K$ vers A identifie $A^1 \otimes_{K^1} K$ à la sous-algèbre $\bigoplus_{r \in |K^\times|} A^r$ de A. Nous dirons que la K-algèbre graduée A est stricte si $A = A^1 \otimes_{K^1} K$, c'est-à-dire donc si $|a| \in |K^\times|$ pour tout élément homogène non nul a de A.

Supposons que ce soit le cas. Le morphisme naturel de $\operatorname{Spec} A$ vers $\operatorname{Spec} A^1$ est alors topologiquement un homéomorphisme (lemme 10.3.1, (a) et (d)), et il résulte des constructions que $\mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A} = \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} A^1} \otimes_{K^1} K$.

Nous dirons qu'un K-schéma est strict s'il est recouvert par des ouverts affines de la forme $\operatorname{Spec} A$, où A est une A-algèbre stricte. Tout ouvert affine d'un tel schéma est alors de cette forme.

Si Y est un K^1-schéma nous noterons Y_K le K-schéma gradué $Y \times_{K^1} K$, qui s'identifie à l'espace localement annelé gradué $(|Y|, \mathscr{O}_Y \otimes_{K^1} K)$ (où $|Y|$ désigne l'espace topologique sous-jacent à Y) ; si X est un K-schéma gradué nous noterons X^1 l'espace localement annelé $(|X|, \mathscr{O}_X^1)$. Les foncteurs $Y \mapsto Y_K$ et $X \mapsto X^1$ établissent une équivalence entre la catégorie des K^1-schémas et celle des K-schémas gradués stricts. Ces foncteurs préservent le caractère noethérien, irréductible, réduit, de type fini ; ils préservent plus généralement les composantes irréductibles et leurs multiplicités génériques (dans le cas noethérien) ; ces affirmations se déduisent du lemme 10.3.1.

Soit X un K-schéma gradué strict. Il est propre si et seulement si X^1 est un K^1-schéma propre. En effet, si X^1 est propre sur K^1 alors X est propre sur K cas $X = X \times_{K^1} K$. Et si X est propre sur K, alors X^1 satisfait le critère valuatif de propreté usuel sur K^1, donc est propre : en effet, si L est une extension de K^1 et R un anneau de valuation de L contenant K^1 alors $R \otimes_{K^1} K$ est un anneau gradué de valuation de $L \otimes_{K^1} K$ contenant K. Par conséquent tout $(L \otimes_K K^1)$-point de X, c'est-à-dire tout L-point de X^1, s'étend en un unique $(R \otimes_{K^1} K)$-point de X, c'est-à-dire en un unique R-point de X^1, ce qui conclut.

Soit E un fibré vectoriel sur X. Nous dirons que E est strict s'il existe un recouvrement ouvert (V_i) de X tel que pour tout i, le fibré restreint $E|_{V_i}$ soit isomorphe à $\mathscr{O}_{V_i}^{n_i}$ pour un certain n_i (sans décalage de la graduation). Il suffit pour que ce soit le cas que $\mathscr{E}|_{V_i}$ soit isomorphe à $\mathscr{O}_i[\rho_i]$ pour un certain polyrayon de longueur finie $\rho_i = (\rho_{ij})_j$ où les ρ_{ij} appartiennent à $K^\times$.

Les foncteurs $F \mapsto F \otimes_{\mathscr{O}_{X^1}} \mathscr{O}_X$ et $E \mapsto E^1$ établissent une équivalence entre la catégorie des fibrés vectoriels sur X^1 et celle des fibrés vectoriels stricts sur X. Cette équivalence préserve le rang. Elle préserve aussi, dans le cas des fibrés en droites, le fait d'être ample, d'être très ample, et d'être engendré par ses sections globales : c'est une conséquence du fait que si D est un fibré en droites strict sur X, pour toute section homogène s de D il

existe $a \in K^\times$ tel que as soit de degré 1 (et donc soit une section du fibré en droites D^1 sur X^1).

Exemple 10.3.3. — Soit $r = (r_1, \dots, r_n)$ un polyrayon. Si les r_i appartiennent tous à $|K|^\times$, le schéma gradué $X = \mathbf{A}^r_K$ est strict, et $X^1 = \mathbf{A}^n_K$. En effet, on choisit pour tout i un élément a_i de $K^\times$ tel que $|a_i| = r_i$, et l'on remarque que

$$K[T_1/r_1, \dots, T_n/r_n] = K[\tau_1, \dots \tau_n] = K^1[\tau_1, \dots, \tau_n] \otimes_{K^1} K$$

où $\tau_i = T_i/a_i$.

Soit $\rho = (\rho_0, \dots, \rho_n)$. un polyrayon. Si les ρ_i appartiennent tous à $|K|^\times$, le schéma gradué $Y = \mathbf{P}^\rho_K$ est strict, et $Y^1 = \mathbf{P}^n_K$. De plus, le fibré $\mathscr{O}(1)$ sur Y est lui aussi strict, le fibré en droites correspondant sur Y^1 étant le fibré $\mathscr{O}(1)$ traditionnel. Cela découle en effet par exemple du cas de l'espace affine traité ci-dessus et de la description de $\mathbf{P}^\rho_A$ et de $\mathscr{O}(1)$ via les cartes affines standard.

10.3.4. — Soit X un K-schéma gradué et soit L une extension complète de K. Soit E un fibré vectoriel sur X. Nous dirons que L déploie X (resp. déploie X et E) si X_L est strict (resp. si X_L est strict et si l'image réciproque de E sur X_L est stricte). Nous dirons qu'un polyrayon ρ déploie X (resp. X et E) si $K(T/\rho)$ déploie X (resp. X et E).

Notons qu'il existe toujours un polyrayon $\rho = (\rho_i)_i$ déployant X et tous les fibrés vectoriels sur X : il suffit que le groupe engendré par $|K^\times|$ et les ρ_i soit égal à $\mathbf{R}^\times_+$ tout entier.

Supposons X de type fini et soit (E_i) une famille finie de fibrés vectoriels sur X. Choisissons un recouvrement fini (V_j) de X par des ouverts affines tels que $E_i|_{V_j}$ soit pour tout j isomorphe à $\mathscr{O}_{V_j}[\rho_{ij}]$ pour un certain polyrayon de longueur finie ρ_{ij}. Soit $r = (r_a)$ un polyrayon de longueur finie tel que le groupe engendré par $|K^\times|$ et les r_a contienne toutes les composantes des ρ_{ij} ainsi que tous les degrés des éléments homogènes non nuls des $\mathscr{O}_X(V_j)$. Le polyrayon r déploie alors X et les X_i.

Lemme 10.3.5. — *Soit X un K-schéma gradué. Soit ρ un polyrayon déployant X. Posons $X_\rho = X \times_K K(T/\rho)$.*

a) *Le schéma gradué X est irréductible (resp. réduit) si et seulement si c'est le cas du schéma X^1_ρ.*

b) *Si X est noethérien et si (X_i) désigne la famille des composantes irréductibles de X, les $X^1_{i\rho}$ sont les composantes irréductibles de X^1_ρ et pour tout i la multiplicité générique de X le long de X_i est égale à celle de X^1_ρ le long de $X^1_{i\rho}$.*

Démonstration. — Commençons par a). Un espace topologique possédant un recouvrement par des ouverts non vides étant irréductible si et seulement si c'est le cas de chacun des ouverts en question, on se ramène au cas où $X = \operatorname{Spec} A$ pour une certaine K-algèbre graduée A. Le morphisme naturel de A dans $A_\rho := A \otimes_K K(T/\rho)$ est injectif. En conséquence, si A_ρ est réduit (resp. intègre) il en va de même de A. Par ailleurs, A_ρ est un localisé de $A \otimes_K K[T/\rho] = A[T/\rho]$ par une partie multiplicative qui ne contient pas 0 si A est non nulle, puisque $K[T/\rho]$ s'injecte alors dans $A[T/\rho]$. Il s'ensuit que si A est réduit (resp. intègre), il en va de même de A_ρ. On conclut alors la preuve de a) en remarquant que comme ρ déploie A, il résulte du lemme 10.3.1 que A^1_ρ est réduite (resp. intègre) si et seulement s'il en va de même de A_ρ.

Montrons maintenant b). Il résulte de a) que les $X_{i\rho}$ sont des fermés irréductibles de X_ρ, dont la réunion est évidemment égale à X_ρ. De plus, comme le morphisme naturel

de X_ρ vers X est surjectif, les $X_{i\rho}$ sont deux à deux non comparables pour l'inclusion, et ce sont donc les composantes irréductibles de X_ρ. Or puisque ρ déploie X, il déploie aussi chacun des X_i, si bien que topologiquement $X^1_\rho = X_\rho$ et $X^1_{i\rho} = X_{i\rho}$ pour tout i ; les $X^1_{i\rho}$ sont donc bien les composantes irréductibles de X^1_ρ.

Montrons enfin l'assertion relative aux multiplicités génériques. Celle-ci est locale au voisinage du point générique de chacune des X_i. Cela permet de supposer que X est irréductible et affine ; posons $A = \mathscr{O}_X(X)$ et notons N le nilradical de A. Soit η son point générique et soit m la multiplicité générique de X, c'est-à-dire la longueur de $\mathscr{O}_{X,\eta}$. Quitte à retreindre encore X, on peut supposer qu'il existe une suite décroissante d'idéaux homogènes $A = I_0 \supset I_1 \supset \ldots \supset I_m = \{0\}$ telle que I_p/I_{p+1} soit isomorphe comme A-module gradué à A/N. La suite (p) induit par extension du corps de base une suite décroissantes d'idéaux homogènes $A_\rho = I_{0\rho} \supset I_{1\rho} \supset \ldots \supset I_{m\rho} = \{0\}$ dont les quotients successifs sont isomorphes à $A_\rho/N_\rho = (A/N)_\rho$. Or $(A/N)_\rho$ est réduit d'après la preuve de a), si bien que N_ρ est le nilradical de A_ρ. En conséquence, m coïncide avec la longueur de $\mathscr{O}_{X_\rho,\xi}$ où ξ est le point générique de X_ρ (qui est irréductible d'après a), et donc avec la longueur de $\mathscr{O}_{X^1_\rho,\xi}$ au vu du lemme 10.3.1 (d), c'est-à-dire à la multiplicité générique de X^1_ρ.

□

Lemme 10.3.6. — *Soit X un K-schéma gradué. Soit L une extension graduée de K déployant X. Soit M une extension graduée de L.*

a) *L'extension M de K déploie alors X (resp. X et E) et l'on a $X^1_M = (X^1_L)_{M^1}$.*

b) *Soit E un fibré vectoriel sur X déployé par L. Le fibré E est alors déployé par M et E^1_M est l'image réciproque de E^1_L par le morphisme de schémas $X^1_M \to X^1_L$.*

Démonstration. — Les deux assertions sont locales sur X, ce qui permet de supposer que X est affine. Posons $A = \mathscr{O}_X(X)$ et, pour b), $F = E(X)$. On a alors

$$A_M = (A_L) \otimes_L M = A^1_L \otimes_{L^1} L \otimes_L M = A^1_L \otimes_{L^1} M = A^1_L \otimes_{L^1} M_1 \otimes_{M^1} M,$$

où la seconde égalité provient du fait que A_L est strict. Ceci achève la preuve de a). Sous les hypothèses de b) on a de même

$$F_M = (F_L) \otimes_L M = F^1_L \otimes_{L^1} L \otimes_L M = F^1_L \otimes_{L^1} M = F^1_L \otimes_{L^1} M_1 \otimes_{M^1} M,$$

ce qui montre b).

□

10.3.7. — Soit X un K-schéma gradué quasi-projectif, ce qui veut dire qu'il existe une immersion $i\colon X \hookrightarrow \mathbf{P}^r_K$ pour un certain polyrayon $r = (r_0, \ldots, r_n)$. Il existe alors un fibré très ample D sur X, à savoir $i^*\mathscr{O}(1)$. Soit E un fibré en droites quelconque sur X. Soit L une extension graduée de K déployant X et E et telle que $r_i \in |L^\times|$ pour tout i. Cette dernière condition assure que $\mathbf{P}^r_L \simeq \mathbf{P}^{(1,\ldots,1)}_L$, puis que D_L est strict, le fibré D^1_L étant l'image réciproque de $\mathscr{O}(1)$ par l'immersion $X^1 \hookrightarrow \mathbf{P}^n_{K^1}$ induite par i ; notons que D^1_L est très ample.

Appliquons ceci lorsque $L = K(T/r)$, en notant par un r en indice le changemnbt de base correspondant. Le fibré D^1_r est ample. Il existe donc $m > 0$ tel que $(D^1_r)^{\otimes m}$ et $(D^r_1)^{\otimes m}) \otimes (E^1_r)^\vee$ soient tous deux amples, et en particulier engendrés par leurs sections globales. Les fibrés $D^{\otimes m}_r$ et $D^{\otimes m}_r \otimes E^\vee_r$ sont alors engendrés par leurs sections globales,

et il en va dès lors de même de $D^{\otimes m}$ et $D^{\otimes m} \otimes E^\vee$. On a ainsi écrit E comme différence de deux fibrés en droites engendrés par leurs sections globales.

§ 10.4. DESCENTE DE LA DIMENSION ET DES DEGRÉS D'INTERSECTION

Il existe une bonne théorie de la dimension pour les schémas gradués de type fini sur un corps gradué. Elle était brièvement présentée sans démonstration dans [**54**] ; nous allons donner un peu plus de détails ici.

Lemme 10.4.1. — *Soit X un K-schéma gradué de type fini et soit L une extension graduée de K déployant X. La dimension du schéma X_L^1 ne dépend pas de L, et est égale à* $\sup_{x\in X} \deg.\,\mathrm{tr}.\,(\kappa(x)/K)$.

Démonstration. — Il suffit de montrer la formule

$$\dim X_L^1 = \sup_{x\in X} \deg.\,\mathrm{tr}.\,(\kappa(x)/K),$$

puisque le terme de droite de l'égalité est indépendant de L. Soit π le morphisme de changement de base de X_L vers X. Soit $x \in X$ et doit d le degré de transcendance de $\kappa(x)$ sur K. Soit $(\tau_1, \dots, \tau_d)$ une base de transcendance de $\kappa(x)$ sur K ; posons $r_i = |\tau_i|$. La fibre $\pi^{-1}(x)$ s'identifie à $\operatorname{Spec} \kappa(x) \otimes_K L$, qui est non nul. Elle est donc non vide. On peut par ailleurs écrire

$$\kappa(x) \otimes_K L = \kappa(x) \otimes_{K(\tau)} (K(\tau) \otimes_K L).$$

Posons $A = K(\tau) \otimes_K L$. La fibre $\pi^{-1}(x)$ est muni par ce qui précède d'un morphisme fini surjectif sur $\operatorname{Spec} A$. Soit $y \in \operatorname{Spec} A$. Son corps résiduel gradué est engendré en tant qu'extension de L par les images des τ_i, donc est de degré de transcendance au plus d sur L. De plus, A est intègre (c'est un localisé non nul de l'anneau gradué de polynômes $K[\tau] \otimes_K L \simeq L[T_i/r_i]$) et le corps résiduel gradué du point générique de $\operatorname{Spec} A$ est le corps gradué des fractions de A, qui s'identifie à $L(T_i/r_i)$ et est donc de degré de transcendance d sur L. Par conséquent $\sup_{y\in\operatorname{Spec} A} \deg.\,\mathrm{tr}.\,(\kappa(y)/L) = d$, ce qui entraîne que $\sup_{z\in\pi^{-1}(x)} \deg.\,\mathrm{tr}.\,(\kappa(z)/L) = d$. Ceci valant pour tout $x \in X$ il vient

$$\sup_{x\in X} \deg.\,\mathrm{tr}.\,(\kappa(x)/K) = \sup_{z\in X_L} \deg.\,\mathrm{tr}.\,(\kappa(z)/L).$$

Il reste à montrer que ce dernier terme est égal à $\dim X_L^1$. Soit $z \in X_L^1$ (rappelons que topologiquement $X_L^1 = X_L$). Le corps gradué résiduel $\kappa(z)$ est alors égal à $\kappa(z)^1 \otimes_{L^1} L$, et son degré de transcendance sur L est dès lors égal à $\deg.\,\mathrm{tr}.\,(\kappa(z)^1/L^1)$. Mais $\kappa(z)^1$ est le corps résiduel classique du point z du L^1-schéma de type fini X_L^1, si bien que

$$\sup_{z\in X_L} \deg.\,\mathrm{tr}.\,(\kappa(z)/L) = \sup_{z\in X_L^1} \deg.\,\mathrm{tr}.\,(\kappa(z)^1/L^1) = \dim X_L^1,$$

ce qui achève la démonstration. □

Définition 10.4.2. — *Soit K un corps gradué et soit X un K-schéma gradué de type fini. La dimension de X (au-dessus de K) est le supremum des* $\deg.\,\mathrm{tr}.\,(\kappa(x)/K)$ *pour x parcourant X.*

Il résulte du lemme 10.4.1 que la dimension de X est finie dès que X est non vide (elle vaut $-\infty$ si X est vide). Elle est invariante par changement de corps de base : cela résulte du fait que si L est une extension graduée quelconque de K, toute extension graduée M de L déployant X_L est une extension graduée de K déployant X.

Soit Y une composante irréductible de X, soit η son point générique et soit ζ un point de Y distinct de η. Soit Z l'adhérence de ζ dans Y. Soit ρ un polyrayon déployant Y. Le lemme 10.3.5 assure que Y_ρ est irréductible, et Z_ρ en est un fermé strict par surjectivité de $Y_\rho \to Y$. En conséquence $Z^1_\rho = Z_\rho$ est un fermé strict du schéma irréductible $Y^1_\rho = Y_\rho$ (les égalités écrites étant purement topologiques) si bien que $\dim Z^1_\rho < \dim Y^1_\rho$, et donc que $\dim Z < \dim Y$. Ceci valant pour tout ζ on voit que $\sup_{y\in Y} \deg.\,\mathrm{tr}.\,(\kappa(y)/K)$ n'est atteint qu'en η, et $\dim Y$ est en conséquence égal au degré de transcendance de $k(\eta)$ sur K. Il s'ensuit que $\dim X$ est le supremum des $\deg.\,\mathrm{tr}.\,(\kappa(x)/K)$ où x parcourt l'ensemble des points génériques des composantes irréductibles de X.

Exemple 10.4.3. — Soit r un réel strictement positif qui n'est pas de torsion modulo $K^\times$. Posons $L = K(T/r)$. C'est une extension de K, mais aussi une K-algèbre de type fini (isomorphe à $K[T/r, rS]/(ST-1)$). Posons $X = \operatorname{Spec} L$. La dimension de Krull de X est nulle et sa dimension comme schéma gradué ce type fini sur L est dès lors nulle puisque c'est un L-schéma strict, mais sa dimension comme K-schéma gradué de type fini vaut 1. On peut le déduire du fait que L est de degré de transcendance 1 sur K, ou le voir comme suit. On choisit une extension graduée F de K possédant un élément non nul a homogène de degré r. Le schéma gradué X_F est alors égal à $\operatorname{Spec} F[T/r, rS]/(TS-1)$ et est donc isomorphe à $\operatorname{Spec} F[U,V]/(UV-1)$ (poser $U = T/a$ et $V = aS$). Par conséquent X_F est strict et $X^1_F = \mathbf{G}_{\mathrm{m},F^1}$, si bien que $\dim X = 1$.

Lemme 10.4.4. — *Soit X un K-schéma gradué intègre de type fini sur un corps gradué K et soit n sa dimension. Soit Y un fermé de Zariski irréductible de X et soit m sa dimension. Il existe un ouvert U de X rencontrant Y et $n-m$ éléments homogènes $f_1, \dots, f_{n-m}$ de $\mathscr{O}_X(U)$ tels que $U \cap Y$ soit égal au lieu des zéros des f_i.*

Démonstration. — Posons $d = n - m$ et raisonnons par récurrence sur d. On suppose donc le résultat vrai en codimension $< d$. Si $d = 0$ la famille vide des f_i convient. Supposons $d > 0$. Le fermé Y est alors strict. Soit U un ouvert affine de X rencontrant Y. L'intersection $U \cap Y$ est un fermé strict de U, si bien qu'il existe un élément homogène $f \in \mathscr{O}_X(U)$ non nul et s'annulant sur Y. Soit Z une composante irréductible du lieu des zéros de f contenant $U \cap Y$; quitte à restreindre U, on peut supposer que Z est exactement le lieu des zéros de f. La dimension de Z est égale à $n-1$: le lemme 10.3.5 permet en effet de se ramener au cas non gradué, et c'est alors une conséquence du Hauptidealsatz. L'hypothèse de récurrence assure l'existence d'un ouvert V de Z rencontrant Y et d'éléments homogènes $g_2, \dots, g_d$ de $\mathscr{O}_Z(V)$ telles que $V \cap Y$ soit le lieu des zéros des g_i. Quitte à restreindre U et V on peut supposer que $V = U \cap Y$. Chacune des g_i se relève alors en un élément f_i de $\mathscr{O}_X(U)$, et la famille $(f, f_2, \dots, f_d)$ répond aux exigences de l'énoncé. □

10.4.5. — Soit K un corps (classique) et soit X une K-variété algébrique propre, purement de dimension n. Si D est un fibré en droites sur X, la théorie de l'intersection fournit un opérateur $c_1(D) \cap (\cdot)$ de degré (-1) sur $\mathrm{CH}^\bullet(X)$; lorsque D varie, les opérateurs ainsi obtenus commutent deux à deux. Si $D_1, \dots, D_n$ sont n fibrés en droites sur X, on obtient en particulier une classe $\alpha = (c_1(D_1) \cap \dots \cap c_1(D_n) \cap [X]$ dans $\mathrm{CH}^n(X) = \mathrm{CH}_0(X)$; si p

désigne le morphisme propre structural de X vers $\operatorname{Spec} K$, la classe $p_*\alpha$ est un élément de $\mathrm{CH}_0(\operatorname{Spec} K)$, que l'on identifie à $\mathbf{Z}$ en prenant $[\operatorname{Spec} K]$ comme générateur. L'entier relatif $p_*\alpha$ est appelé le degré de la classe α, ou encore le degré d'intersection des L_i, et nous le noterons $\int_X c_1(D_1)\cdots c_1(D_n)$.

Nous nous proposons maintenant de définir les nombres d'intersection dans le cas gradué, sans y construire toute la théorie de l'intersection (ce qui serait selon toute vraisemblance possible mais très fastidieux) ; nous allons procéder par descente à partir du cas non gradué.

Proposition 10.4.6. — *Soit K un corps gradué, soit X un K-schéma gradué propre et de type fini purement de dimension n, et soit $D_1,\dots,D_n$ des fibrés en droites gradués sur X. Soit L une extension graduée de K déployant X et les D_i. Le nombre d'intersection $\int_{X^1_L} c_1(D^1_{1,L})\cdots c_1(D^1_{n,L})$ ne dépend alors pas de L.*

Démonstration. — Supposons donnée une seconde extension graduée F de K déployant X et les D_i et montrons que l'entier obtenu en utilisant F est le même que celui obtenu en utilisant L. Il suffit pour ce faire de montrer que les deux coïncident avec l'entier obtenu en utilisant une extension composée M de F et L (qu'on fabrique en considérant le quotient de l'anneau gradué non nul $F\otimes_K L$ par un idéal homogène maximal). Par symétrie, il suffit de montrer que l'entier obtenu en utilisant L est le même que celui obtenu en utilisant M. Mais cela découle alors du lemme 10.3.6 et de l'invariance du degré d'intersection schématique par changement du corps de base. □

Définition 10.4.7. — *Soit $K, X, (D_i)$, et L comme dans la proposition ci-dessus. L'entier $\int_{X^1_L} c_1(D^1_{1,L})\cdots c_1(D^1_{n,L})$ (qui ne dépend pas du choix de L) sera noté $\int_X C_1(D_1)\cdots c_1(D_n)$.*

Proposition 10.4.8. — *Soit X un K-schéma gradué propre et purement de dimension n.*

a) *L'application*

$$\operatorname{Pic}(X)^n \to \mathbf{Z}, \quad (D_1,\dots,D_n) \mapsto \int_X c_1(D_1)\cdots c_1(D_n)$$

est symétrique et multi-linéaire.

b) *Soit L une extension graduée de K. On a*

$$\int_{X_L} c_1(D_{1,L})\cdots c_1(D_{n,L}) = \int_X c_1(D_1)\cdots c_1(D_n).$$

c) *Soit $X_1,\dots,X_m$ les composantes irréductibles réduites de X et pour tout j, soit m_j la multiplicité générique de X le long de X_j. Soit $D_1,\dots,D_n$ des fibrés en droites sur X. On a*

$$\int_X c_1(D_1)\cdots c_1(D_n) = \sum_j m_j \int_{X_j} c_1(D_1|_{X_j})\cdots c_1(D_n|_{X_j}).$$

d) *Supposons X intègre et soit $Y\to X$ un morphisme propre et génériquement fini, de degré générique d. Pour tout i, soit E_i l'image réciproque de D_i sur Y. On a alors*

$$\int_Y c_1(E_1)\cdots c_1(E_n) = d\int_X c_1(D_1)\cdots c_1(D_n).$$

Démonstration. — Soit j un indice entre 1 et n, soit $D_1, \dots, D_n$ et E_j des fibrés en droites sur X, et soit σ une permutation de $\{1, \dots, n\}$. Soit L une extension graduée de K déployant X, les D_i et E_j. On a

$$\begin{aligned}\int_X c_1(D_{\sigma(1)}) \cdots c_1(D_{\sigma(n)}) &= \int_{X_L^1} c_1(D^1_{\sigma(1),L}) \cdots c_1(D^1_{\sigma(n),L}) \\ &= \int_{X_L^1} c_1(D^1_{1,L} \cdots c_1(D^1_{n,L}) \\ &= \int_X c_1(D_1) \cdots c_1(D_n)\end{aligned}$$

et

$$\int_X c_1(D_1) \cdots c_1(D_j \otimes E_j) \cdots c_1(D_n)$$

$$\begin{aligned}&= \int_{X_L^1} c_1(D^{1,L}) \cdots c_1(D^1_{j,L} \otimes E^1_{j,L}) \cdots c_1(D^1_{n,L}) \\ &= \int_{X_L^1} c_1(D^{1,L}) \cdots c_1(D^1_{j,L}) \cdots c_1(D^1_{n,L}) + \int_{X_L^1} c_1(D^{1,L}) \cdots c_1(E^1_{j,L}) \cdots c_1(D^1_{n,L}) \\ &= \int_X c_1(D_1) \cdots c_1(D_j) \cdots c_1(D_n) + \int_X c_1(D_1) \cdots c_1(E_j) \cdots c_1(D_n),\end{aligned}$$

ce qui achève de montrer a). L'assertion b) provient du fait que si M est une extension graduée de L déployant X et les D_i, les membres de l'identité à établir sont tous deux égaux à

$$\int_{X_M^1} c_1(D^1_{1,M}) \cdots c_1(D^1_{n,M}).$$

Pour montrer c), choisissons un polyrayon r déployant X et les D_i, et notons par un r en indice l'extension des scalaires à $k(T/r)$. On a alors

$$\begin{aligned}\int_X c_1(D_1) \cdots c_1(D_n) &= \int_{X_r^1} c_1(D^1_{1,r}) \cdots c_1(D^1_{n,r}) \\ &= \sum_j m_j \int_{X^1_{j,r}} c_1(D^1_{1,r}|_{X^1_{j,r}}) \cdots c_1(D^1_{n,r}|_{X^1_{j,r}}) \\ &= \sum_j m_j \int_{X_j} c_1(D_1|_{X_j}) \cdots c_1(D_n|_{X_j}),\end{aligned}$$

où la troisième égalité provient de la formule à montrer dans le cas classique (où elle est connue) et du lemme 10.3.5 ; ceci achève de prouver c).

Pour montrer d), choisissons un polyrayon r déployant X, Y et les D_i. Le schéma gradué X_r^1 est intègre et $Y_r^1 \to X_r^1$ est propre, et il est génériquement fini de degré

générique d d'après le lemme 10.3.1 f). Il vient

$$\begin{aligned}\int_Y c_1(E_1)\cdots c_1(E_n) &= \int_{Y_1^r} c_1(E_{1,r}^1)\cdots c_1(E_{n,r}^1)\\ &= d\int_{X_1^r} c_1(D_{1,r}^1)\cdots c_1(D_{n,r}^1)\\ &= d\int_X c_1(D_1)\cdots c_1(D_n),\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

□

Remarque 10.4.9. — Soit X un K-schéma gradué purement de dimension n, soit (D_i) une famille de n fibrés en droites gradués sur X, et soit (r_i) un polyrayon. Alors $\int_X c_1(D_1)\cdots c_1(D_n) = \int_X c_1(D_1[r_1])\cdots c_1(D_n[r_n]))$. En effet, il suffit pour le voir de considérer une extension graduée L de K telle que $r_i \in |L^\times|$ pour tout i. Sur le schéma gradué X_L on a alors $D_i[r_i] \simeq D_i$ pour tout i (via une homothétie de rapport $\lambda_i \in K^\times$ avec $|\lambda_i| = r_i$). Compte-tenu de l'invariance du nombre d'intersection par extension des scalaires, on en déduit que $\int_X c_1(D_1[r_1])\cdots c_1(D_n[r_n]) = \int_X c_1(D_1)\cdots c_1(D_n)$.

Exemple 10.4.10. — Soit $r = (r_0, \dots, r_n)$ un polyrayon et soit L une extension graduée de K telle que les r_i appartiennent à $K^\times$. Il résulte de l'exemple 10.3.3 que $\int_{\mathbf{P}_K^r} c_1(\mathscr{O}(1))^n = \int_{\mathbf{P}_{L_1}^n} c_1(\mathscr{O}(1))^n$, si bien que $\int_{\mathbf{P}_K^r} c_1(\mathscr{O}(1))^n = 1$.

10.4.11. — Soit $(D_1, \dots, D_d)$ une famille de fibrés en droites sur un K-schéma gradué propre X. On dit que $c_1(D_1)\dots c_1(D_d)$ est numériquement effectif si pour tout sous-schéma gradué fermé intègre Y de X purement de dimension d le nombre $\int_Y c_1(D_1|_Y)\dots c_1(D_d|_Y)$ est positif ou nul. On dit qu'un fibré en droites D est numériquement effectif si $c_1(D)$ est numériquement effectif.

Supposons que $c_1(D_1)\dots c_1(D_d)$ soit numériquement effectif. Soit L une extension graduée de K, soit Z un L-schéma gradué propre et soit $f\colon Y \to X$ un Kmorphisme. Le produit $c_1(f^*D_1)\dots c_1(f^*D_d)$ est alors numériquement effectif. En effet si $L = K$ cela se démontre exactement comme dans le cas classique ; il reste donc à traiter le cas où $Z = X_L$, et par passage à la limite on peut supposer L de type fini. Si L est une extension finie de K la démonstration classique s'adapte encore. Il reste finalement par récurrence sur le degré de transcendance à traiter le cas où $L = K(T/r)$ pour un certain $r > 0$. Soit Y un sous-schéma gradué fermé intègre purement de dimension d de X_L et soit p la projection de $X \times_K \mathbf{A}_K^r$ vers $\mathbf{A}_K^r$. Le L-schéma Y s'identifie à la fibre générique de p. Soit Y' son adhérence réduite dans $X \times_K \mathbf{A}_K^r$. C'est un K-schéma propre sur $\mathbf{A}_K^r$. Pour tout $t \in \mathbf{A}_K^r$, la fibre Y'_t est propre et purement de dimension d, et $\int_{Y'_t} c_1(D_1|_{Y'_t})\dots c_1(D_d|_{Y'_t})$ ne dépend pas de t : on le vérifie en se ramenant au cas classique par extension des scalaires à $K(S/\rho)$ pour un certain polyrayon ρ déployant la situation, dans lequel l'assertion découle simplement de la « conservation du nombre » (**[69]**, théorème 10.2). En particulier $\int_Y c_1(D_1|Y)\dots c_1(D_d|_Y) = \int_{Y'_0} c_1(D_1|_{Y'_0})\dots c_1(D_d|'_{Y_0})$ et ce dernier est positif ou nul puisque $c_1(D_1)\dots c_1(D_d)$ est numériquement effectif, ce qui conclut.

§ 10.5. ESPACES DE ZARISKI-RIEMANN SUR LES CORPS GRADUÉS

10.5.1. — Soit L un corps gradué. Notons $\mathbf{P}_L$ l'ensemble des classes d'équivalences de valuations sur L. En associant à tout élément v de $\mathbf{P}_L$ la restriction à $L^\times$ de l'indicatrice de l'anneau $\mathscr{O}_v$ on identifie $\mathbf{P}_L$ à un sous-ensemble $\{0,1\}^{L^\times}$. Les axiomes définissant une valuation sont des conditions fermées, qui font donc de $\mathbf{P}_L$ un espace compact et totalement discontinu lorsqu'on le munit de la topologie induite par la topologie produit (qui est dite *constructible*).

En pratique on utilisera une topologie plus grossière que la topologie constructible, davantage adaptée aux applications à la géométrie algébrique et à la géométrie analytique non archimédienne. Pour ce faire, introduisons la notation suivante. Si S est une partie de $L^\times$, on notera $\mathbf{P}_L\{S\}$ l'ensemble des valuations v telles que $S \subset \mathscr{O}_v$, c'est-à-dire encore telles que $v(\lambda) \leqslant 1$ pour tout $\lambda \in S$; remarquons que $\mathbf{P}_L\{S\} \cap \mathbf{P}_L\{T\} = \mathbf{P}_L\{S \cup T\}$ et que $\mathbf{P}_L\{\varnothing\} = \mathbf{P}_L$. On munira alors $\mathbf{P}_L$ de la topologie engendrée par les parties de la forme $\mathbf{P}_L\{S\}$ où S est un sous-ensemble *fini* de $L^\times$, qui seront appelés *ouverts affines* de $\mathbf{P}_L$. Remarquons que la topologie constructible de $\mathbf{P}_L$ est engendrée par les ouverts affines et leurs complémentaires. Les éléments de l'algèbre de Boole engendrée par les ouverts affines de $\mathbf{P}_L$ sont précisément les parties à la fois ouvertes et fermées de $\mathbf{P}_L$ pour la topologie constructible, qu'on qualifiera plus brièvement de parties constructibles.

Soit K un corps gradué muni d'un plongement dans L. Soit v une valuation sur K. Nous noterons $\mathbf{P}_{L/(K,v)}$ le sous-ensemble de $\mathbf{P}_L$ formé des valuations dont la restriction à K est égale à v, et nous le munirons de la topologie induite par celle de $\mathbf{P}_L$. Si S est une partie de $L^\times$ nous noterons $\mathbf{P}_{L/(K,v)}\{S\}$ l'intersection de $\mathbf{P}_{L/(K,v)}$ et $\mathbf{P}_L\{S\}$; la topologie de $\mathbf{P}_{L/(K,v)}$ est donc engendrée par les parties de la forme $\mathbf{P}_{L/(K,v)}\{S\}$ où S est un sous-ensemble *fini* de $L^\times$; les ouverts de $\mathbf{P}_{L/(K,v)}$ qui sont précisément de cette forme seront qualifiés d'affines, et ce sont les traces d'ouverts affines de $\mathbf{P}_L$. La topologie de $\mathbf{P}_{L/(K,v)}$ induite par la topologie constructible de $\mathbf{P}_L$ sera appelée la topologie constructible de $\mathbf{P}_{L/(K,v)}$. les éléments de l'algèbre de Boole engendrée par les ouverts affines de $\mathbf{P}_{L/(K,v)}$ sont précisément les parties à la fois ouvertes et fermées de $\mathbf{P}_{L/(K,v)}$ pour la topologie constructible, qu'on qualifiera plus brièvement de parties constructibles.

Remarquons que $\mathbf{P}_{L/(K,v)}$ est, en tant sous-ensemble de $\mathbf{P}_L$, défini par une conjonction (en général infinie) de conditions fermées pour la topologie constructible. Il est donc compact pour la topologie constructible. Chacun de ses ouverts affines étant un ouvert fermé pour la topologie constructible, il est compact pour cette dernière, et donc quasi-compact pour la topologie plus grossière dont on a muni $\mathbf{P}_{L/(K,v)}$.

Soit (K', v') une extension de corps gradués valués de (K, v). Soit L' une extension de K munie de deux K-plongements $K' \hookrightarrow L'$ et $L \hookrightarrow L'$. La restriction des valuations induit une application de $\mathbf{P}_{L'/(K',v')}$ vers $\mathbf{P}_{L/(K,v)}$, qui est surjective lorsque $K' = K$. Si S est une partie finie de $L^\times$, l'image réciproque de $\mathbf{P}_{L/(K,v)}\{S\}$ sur $\mathbf{P}_{L/K'}(K', v')$ est égale à $\mathbf{P}_{L'/(K',v')}\{S\}$. L'application de $\mathbf{P}_{L'/(K',v')}$ vers $\mathbf{P}_{L/(K,v)}$ est donc continue et quasi-compacte.

Lorsque v est la valuation triviale, on écrira simplement $\mathbf{P}_{L/K}$ au lieu de $\mathbf{P}_{L/(K,v)}$. C'est essentiellement avec ce type d'espaces de Zariski-Riemann que nous allons travailler, mais nous avons introduit le cas d'un corps gradué de base arbitraire parce que nous en aurons tout de même besoin plus bas.

Remarquons que $\mathbf{P}_{L/K}$ possède un unique point générique, à savoir la valuation triviale.

Exemple 10.5.2. — Soit k un corps classique, et soit $r > 0$. Notons K le corps gradué égal à $k[t, t^{-1}]$ de la graduation pour laquelle at^i est homogène de degré r^i pour tout $a \in k^\times$ et tout $i \in \mathbf{Z}$. Il résulte des définitions que $\mathbf{P}_{K/k}$ contient exactement trois valuations : la valuation triviale v, la valuation v^- qui prend une valeur strictement inférieure à 1 sur t, et la valuation v^+ qui prend une valeur strictement supérieure à 1 sur t. La valuation v est dense et ouverte, et les valuations v^- et v^+ sont fermées : le singleton $\{v\}$ est égal à $\mathbf{P}_{K/k}\{t, t^{-1}\}$, le singleton $\{v^+\}$ est le complémentaire de $\mathbf{P}_{K/k}\{t\}$, et le singleton $\{v^-\}$ est le complémentaire de $\mathbf{P}_{K/k}\{t^{-1}\}$.

10.5.3. — On munit l'espace topologique $\mathbf{P}_{L/K}$ d'un faisceau d'anneaux gradués $\mathscr{O}_{\mathbf{P}_{L/K}}$ défini par la formule

$$\mathscr{O}_{\mathbf{P}_{L/K}}(U) = \bigcap_{v \in U} \mathscr{O}_v.$$

Sa fibre en un élément v de $\mathbf{P}_{L/K}$ est précisément l'anneau gradué local $\mathscr{O}_v$; Il est en effet clair que $\mathscr{O}_{\mathbf{P}_{L/K},v} \subset \mathscr{O}_v$; pour l'inclusion réciproque, il suffit de noter que si λ est un élément de $L^\times \cap \mathscr{O}_v$ alors λ appartient à $\mathscr{O}(\mathbf{P}_{L/K}\{\lambda\})$ tautologiquement, et comme $v \in \mathbf{P}_{L/K}\{\lambda\}$ puisque $\lambda \in \mathscr{O}_v$, on voit que λ appartient $\mathscr{O}_{\mathbf{P}_{L/K},v}$. Si U est un ouvert de $\mathbf{P}_{L/K}$, nous désignerons par $\mathscr{O}_U$ la restriction de $\mathscr{O}$ à U.

Soit K' une extension de K et soit L' une extension de K munie de deux K-plongements $K' \hookrightarrow L'$ et $L \hookrightarrow L'$. Soit π l'application continue de $\mathbf{P}_{L'/K'}$ vers $\mathbf{P}_{L/K}$. L'inclusion de L dans L' induit alors un morphisme de faisceaux en anneaux gradués de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}_{L/K}}$ vers $\pi_*\mathscr{O}_{\mathbf{P}_{L'/K'}}$.

10.5.4. — Supposons que $|L^\times|/|K^\times|$ est de torsion ; c'est en particulier le cas dès que $|L^\times| = |K^\times|$, c'est-à-dire dès que le morphisme naturel de $L^1 \otimes_{K^1} K$ vers L est un isomorphisme. Pour tout $\lambda \in L^\times$ et tout entier $N > 0$ tel que $|\lambda|^N \in |K^\times|$, il existe un couple $(a, b) \in (L^1)^\times \times K^\times$ tel que $\lambda^N = ab$; le couple (a, b) est unique à multiplication près par un élément de la forme (c, c^{-1}) où $c \in (K^1)^\times$. Toute valuation u appartenant à $\mathbf{P}_{L^1/K^1}$ s'étend alors uniquement en une valuation v appartenant à $\mathbf{P}_{L/K}$, définie comme suit : si pour un élément λ de $L^\times$ on a $\lambda^N = ab$ avec $N > 0$, $a \in (L^1)^\times$ et $b \in K^\times$, on pose $v(\lambda) = u(a)^{1/N}$; c'est la seule valeur possible pour $v(\lambda)$ puisqu'on doit avoir $v(b) = 1$, et l'on vérifie que $u(a)^{1/N}$ ne dépend bien que de λ et que cette construction définit bien une valuation sur L dont l'anneau contient K, et dont la restriction à L^1 est égale à u. Par ailleurs, si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est une famille finie d'éléments de $L^\times$, et si l'on se donne pour tout i une écriture $\lambda_i^{N_i} = a_i b_i$ avec $N_i > 0, a_i \in (L^1)\times$ et $b_i \in K^\times$, on a $\mathbf{P}_{L/K}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} = \mathbf{P}_{L/K}\{a_1, \ldots, a_n\}$. Il s'ensuit que l'application continue naturelle π de $\mathbf{P}_{L/K}$ vers $\mathbf{P}_{L^1/K^1}$ est un homéomorphisme. La composante homogène $\mathscr{O}^1_{\mathbf{P}_{L/K}}$ de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}_{L/K}}$ s'identifie alors à $\pi^{-1}\mathscr{O}_{\mathbf{P}_{L^1/K^1}}$ (qui est un faisceau d'anneaux classiques puisque L^1 et K^1 sont trivialement gradués), et l'on a $\mathscr{O}_{\mathbf{P}_{L/K}} = \mathscr{O}^1_{\mathbf{P}_{L/K}} \otimes_{K^1} K$.

10.5.5. — On ne suppose plus que $|L^\times|$ est de torsion modulo $|K^\times|$. Il résulte du paragraphe précédent que l'application continue naturelle de $\mathbf{P}_{L^1 \otimes_{K^1} K/K}$ vers $\mathbf{P}_{L^1/K^1}$ est bijective. Puisque l'application continue de $\mathbf{P}_{L/K}$ vers $\mathbf{P}_{L^1 \otimes_{K^1} K/K}$ est surjective, l'application continue de $\mathbf{P}_{L/K}$ vers $\mathbf{P}_{L^1/K^1}$ est surjective.

Nous dirons qu'un ouvert U de $\mathbf{P}_{L/K}$ est *strict* s'il est égal à l'image réciproque d'un ouvert de $\mathbf{P}_{L^1/K^1}$ (qui est alors uniquement déterminé : par surjectivité, c'est nécessairement l'image de U). Cela revient à demander que U soit une réunion d'ouverts de la forme $\mathbf{P}_{L/K}\{S\}$ où S est un sous-ensemble fini de $(L^1)^\times$. Il suffit pour que ce soit le

cas que U soit une réunion d'ouverts de la forme $\mathbf{P}_{L/K}\{S\}$ où S est un sous-ensemble fini de $L^\times$ tel que $|s| \in |K^\times|^{\mathbf{Q}}$ pour tout $\lambda \in S$. En effet dans ce cas il existe pour tout $s \in S$ un entier $N(s) > 0$ et un élément $\mu(s)$ de $K^\times$ tel que $|s^{N(s)}/\mu(s)| = 1$, et $\mathbf{P}_{L/K}\{S\} = \mathbf{P}_{L/K}\{s^{N(s)}/\mu(s)\}_s$,

Soit $\lambda \in L^\times$ tel que $|\lambda| \notin |K^\times|^{\mathbf{Q}}$. Dans ce cas λ est transcendant sur $L^1 \otimes_{K^1} K$ (10.1.9), si bien que tout valuation appartenant à $\mathbf{P}_{L^1\otimes_{K^1}K/K}$ admet un prolongement à L prenant une valeur strictement supérieure à 1 en λ. Il en résulte que si U est un ouvert strict et non vide de $\mathbf{P}_{L/K}$, il n'est pas contenu dans $\mathbf{P}_{L/K}\{\lambda\}$.

On en déduit que si S est un sous-ensemble de $L^\times$ tel que $U := \mathbf{P}_{L/K}\{S\}$ contienne un ouvert strict et non vide de $\mathbf{P}_{L/K}$ alors $|s| \in |K^\times|^{\mathbf{Q}}$ pour tout $s \in S$. C'est en particulier le cas si S est fini et si l'ouvert affine U est lui-même strict. On peut alors écrire $U = \mathbf{P}_{L/K}\{S\} = \mathbf{P}_{L/K}\{s^{N(s)}/\mu(s)\}_s$ en définissant $N(s)$ et $\mu(s)$ comme au paragraphe précédent, si bien que U est l'image réciproque d'un ouvert affine de $\mathbf{P}_{L^1/K^1}$.

10.5.6. — Notre but est maintenant de généraliser le théorème 1.3 de [**50**] en en donnant une version lorsque le corps gradué de K de base est muni d'une valuation v, puis en établissant un résultat d'uniformité en v. Nous allons commencer par un peu de vocabulaire. Si G est un groupe abélien ordonné quelconque (noté multiplicativement) on note D_G la catégorie des groupes abéliens divisibles ordonnés non triviaux H munis d'un morphisme injectif croissant de G vers H, les flèches étant les G-morphismes injectifs croissants. On note Γ_G le foncteur d'oubli de D_G vers Ens. Soit n un entier. Un sous-foncteur D de Γ_G^n est dit *définissable* s'il est définissable dans le langage des groupes ordonnés à paramètres dans G, c'est-à-dire s'il peut être décrit par conjonction et disjonction finies d'inégalités de la forme $\varphi \leqslant 1$ ou $\varphi < 1$, où φ est une transformation naturelle de la forme $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto a\prod x_i^{r_i}$ où $a \in G$ et où les r_i sont rationnels. Un sous-foncteur D de Γ_G^n de Γ_G^n est dit *polyédral* s'il peut être défini par conjonction et disjonction finies d'inégalités de la forme $\varphi \leqslant 1$ avec φ comme ci-dessus. Soit H un objet de D_G. Par modèle-complétude de DOAG, $D \mapsto D(H)$ établit une bijection entre l'ensemble des sous-foncteurs définissables (resp. polyédraux) de Γ_G^n et l'ensemble des parties de H^n que l'on peut décrire par conjonction et disjonction finies d'inégalités de la forme $\varphi \leqslant 1$ ou $\varphi < 1$ (resp. $\varphi \leqslant 1$) où φ est comme ci-dessus.

Soit d un entier entre 0 et n. Un d-pavé de Γ_G^n est un sous-foncteur de Γ_G^n de la forme

$$H \mapsto M(\{(h_1, \ldots, h_n), a_i < h_i < b_i \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant d \text{ et } h_i = c_i \text{ pour } d < i \leqslant n\})$$

où les a_i, les b_i et les c_i appartiennent à G, où $ai < b_i$ pour tout i entre 1 et d et où M est une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Q})$. C'est un sous-foncteur définissable de Γ_G^n. La dimension d'un sous-foncteur définissable non vide D de Γ_G^n est le plus grand entier d tel que D contienne un d-pavé, et elle peut être calculée sur un objet H de D_G. Elle est égale à

$$\max_{H\in\mathsf{D}_G,(h_1,\ldots,h_n)\in\mathscr{D}(H)} \dim_{\mathbf{Q}}\langle G, h_1, \ldots, h_n\rangle^{\mathbf{Q}}/G^{\mathbf{Q}}.$$

Si $H \in \mathsf{D}_G$ et si $h \in D(H)$, la dimension de D en h est le minimum des dimensions des $P \cap D$ où P est un n-pavé tel que $h \in P(H)$. Lorsque D est non vide, sa dimension est égale à $\sup_{H\in\mathsf{D}_\Gamma, h\in D(H)} \dim_h D$, et l'on étend cette définition au cas vide en posant $\dim \varnothing = -\infty$. On dit que D est purement de dimension d si $\dim_h D = d$ pour tout $H \in \mathsf{D}_G$ et tout $h \in D(H)$; cela peut se vérifier sur un objet H donné de D_G.

Théorème 10.5.7. — *Soit K un corps gradué valué, soit L une extension graduée de K et soit $\mathscr{V}$ un ouvert quasi-compact de $\mathbf{P}_L$. Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une famille d'éléments de $L^\times$ et soit d le degré de transcendance gradué de $K(f_1, \dots, f_n)$ sur K.*

a) *Soit v une valuation sur K. Soit $D_{(K,v),L,\mathscr{V},(f_i)}$ le sous-foncteur de $\mathbf{G}^n_{v(K^\times)}$ qui associe à tout $H \in \mathsf{D}_{v(K^\times)}$ l'ensemble des n-uplets $(h_1, \dots, h_n) \in H^n$ tels qu'il existe $H' \in \mathsf{D}_H$ et une valuation $w \in \mathscr{V} \cap \mathbf{P}_{L/(K,v)}$ à valeurs dans H satisfaisant les conditions $w(f_i) = h_i$ pour tout i.*

(a) *Le sous-foncteur $D_{(K,v),L,\mathscr{V},(f_i)}$ de $\Gamma^n_{v(K^\times)}$ est polyédral et de dimension majorée par d.*

(b) *Si $\mathscr{V} = \mathbf{P}_L$ alors $D_{(K,v),L,\mathscr{V},(f_i)}$ est purement de dimension d, et si de plus $n = d$ alors $D_{(K,v),L,\mathscr{V},(f_i)} = \Gamma_{v(K^\times)^n}$.*

b) *Il existe un recouvrement fini $(\mathscr{U}_j)$ de $\mathbf{P}_K$ par des parties constructibles et, pour tout j, une famille finie $(\varphi_{jk\ell})_{k,\ell}$ de monômes de la forme $\prod_i x_i^{r_i}$ où les r_i sont rationnels, et une famille $(a_{jk\ell})_{k,\ell}$ d'éléments de $K^\times$ tels que pour tout $v \in \mathscr{U}_j$ le sous-foncteur polyédral $D_{(K,v),L,\mathscr{V},(f_i)}$ de $\Gamma_{v(K^\times)^n}$ soit décrit par la condition*

$$\bigvee_k \bigwedge_\ell v(a_{jk\ell})\varphi_{jk\ell} \leqslant 1.$$

Démonstration. — Nous allons en gros reprendre *mutatis mutandis* la preuve du théorème 1.3 de [**50**], qui établissait essentiellement (1) lorsque v est la valuation triviale. Il résulte des définitions que $D_{(K,v),L,\mathscr{V}_1\cup\mathscr{V}_2,(f_i)}$ est égal à $D_{(K,v),L,\mathscr{V}_1,(f_i)} \cup D_{(K,v),L,\mathscr{V}_2,(f_i)}$ pour tout couple $(\mathscr{V}_1, \mathscr{V}_2)$ d'ouverts quasi-compacts de $\mathbf{P}_L$. Il suffit donc de démontrer le théorème pour chacun des termes d'un recouvrement fini de $\mathscr{V}$ par des ouverts affines, ce qui permet de supposer $\mathscr{V}$ affine. Choisissons une partie finie S de $L^\times$ telle que $\mathscr{V} = \mathbf{P}_L\{S\}$, que l'on prend égale à l'ensemble vide si $\mathscr{V} = \mathbf{P}_L$.

La première étape consiste à se réduire au cas non gradué. Pour ce faire, choisissons un polyrayon r dont les composantes engendrent $|L^\times|$. Posons $K' = K(T/r)$ et $L' = L(T/r)$. Pour toute valuation v de K, notons v' l'extension de Gauss de v à K', caractérisée par la formule $v'(\sum a_I T^I) = \max v(a_I)$ pour tout élément homogène $\sum a_I T^I$ de l'anneau gradué $K[T/r]$ (dont K' est le corps gradué des fractions). On a alors par construction $v'((K')^\times) = v(K^\times)$. Nous noterons de même w' l'extension de Gauss de w à L' pour toute valuation w de L. La restriction de v' à K'_1 sera notée v'_1 et celle de w' à L'_1 sera notée w'_1.

Par choix de r, il existe pour tout λ dans $(L')^\times$ un multi-exposant $e(\lambda)$ tel que $|T^{e(\lambda)}\lambda| = 1$. Si v est une valuation sur K on a $v'(T^e) = 1$ pour tout e et donc $v'(\lambda) = v'(T^{e(\lambda)}\lambda)$ pour tout $\lambda \in K^\times$; il vient $v((K'_1)^\times) = v((K')^\times) = v(K^\times)$.

Posons $S' = \{T^{e(\lambda)}\lambda\}_{\lambda\in S}$, $\mathscr{V}' = \mathbf{P}_L\{S'\}$ et $\mathscr{V}'_1 = \mathbf{P}_{L'_1}\{S'\}$; et pour tout i, posons $g_i = T^{e(f_i)} f_i$ pour tout i.

Supposons avoir démontré le théorème pour $(K'_1, L'_1, \mathscr{V}'_1, (g_i))$ et montrons qu'il vaut pour $(K, L, \mathscr{V}, (f_i))$.

Soit $v \in \mathbf{P}_K$. Nous allons tout d'abord démontrer que les deux sous-foncteurs $D_{(K,v),L,\mathscr{V},(f_i)}$ et $D_{(K'_1,v'_1),L'_1,\mathscr{V}'_1,(g_i)}$ de $\Gamma^n_{v(K^\times)}$ sont égaux. Soit H un objet de $\mathsf{D}_{v(K^\times)}$ et soit $h = (h_1, \dots, h_n)$ un élément de H^n. Supposons que $h \in D_{(K,v),L,\mathscr{V},(f_i)}(H)$. Il existe alors $H' \in \mathsf{D}_H$ et une valuation w appartenant à $\mathbf{P}_{L/(K,v)}$ à valeurs dans H' telle que $w(f_i) = h_i$ pour tout i. Pour tout $\lambda \in S$ on a $w'(\lambda) = w(\lambda) \leqslant 1$, et donc $w'(T^{e(\lambda)}\lambda) \leqslant 1$. Par conséquent $w' \in \mathscr{V}' \cap \mathbf{P}_{L'/(K',v')}$, si bien que $w'_1 \in \mathscr{V}'_1 \cap \mathbf{P}_{L'_1/(K'_1,v'_1)}$. Et l'on a pour tout

i les égalités $w_1'(g_i) = w'(T^{(e(f_i)}f_i) = w'(f_i) = w(f_i) = h_i$. Par conséquent, h appartient à $D_{(K_1',v_1'),L_1',\mathscr{V}_1',(g_i)}(H)$. Réciproquement, supposons que h appartient à $D_{(K_1',v_1'),L_1',\mathscr{V}_1',(g_i)}(H)$. Il existe alors une valuation ω appartenant à $\mathscr{V}_1' \cap \mathbf{P}_{L_1'/(K_1',v_1')}$, à valeurs dans un groupe $H' \in \mathsf{D}_H$, telle que $\omega(g_i) = h_i$ pour tout i. Le morphisme naturel de $L_1' \otimes_{K_1'} K'$ vers L est injectif (c'est même un isomorphisme puisque $|(L')^\times| = |(K')^\times|$ par construction), et les restrictions à K_1' de ω et v' coïncident. Il résulte alors de **[52]**, Lemma 7.2.1 qu'il existe une valuation θ sur L' telle que $\theta|_{L_1'} = \omega$ et $\theta|_{K'} = v'$. Soit $\lambda \in S$. On a $\theta(\lambda) = \theta(T^{e(\lambda)}\lambda)$ car $\theta(T^{e(\lambda)}) = v'(T^{e(\lambda)}) = 1$, et $\theta(T^{e(\lambda)}\lambda) \leqslant 1$ car $T^{e(\lambda)}\lambda$ est un élément de S', et que $\theta|_{L_1'}$ est égale à ω qui appartient à $\mathscr{V}_1'$. Par conséquent $\theta|_L$ appartient à $\mathscr{V} \cap \mathbf{P}_{L/(K,v)}$. On a également pour tout i les égalités $\theta(f_i) = \theta(T^{-e(f_i)}g_i) = \theta(g_i) = h_i$, où la seconde égalité provient du fait que $\theta(T^{-e(f_i)}) = v'(T^{-e(f_i)}) = 1$. Il s'ensuit que $h \in D_{(K,v),L,\mathscr{V},(f_i)}(H)$.

Puisque le théorème est supposé valoir pour $(K_1', L_1', \mathscr{V}_1', (g_i))$ le sous-foncteur $D_{(K_1',v_1'),L_1',\mathscr{V}_1',(g_i)}$ de $\mathbf{G}_{v(K^\times)}$ est polyédral ; puisqu'il coïncide avec $D_{(K,v),L,\mathscr{V},(f_i)}$ par ce qu'on vient de voir, ce dernier est également polyédral.

Supposons maintenant que $\mathscr{V} = \mathbf{P}_L$. On a dans ce cas $S = \varnothing$ si bien que $\mathscr{V}_1'$ est égal à $\mathbf{P}_{L_1'}$. Puisque le théorème est supposé valoir pour $(K_1', L_1', \mathscr{V}_1', (g_i))$, le sous-foncteur $D_{(K_1',v_1'),L_1',\mathscr{V}_1',(g_i)}$ de $\Gamma^n_{v(K^\times)}$ est purement de dimension d, et égal à $\Gamma^n_{v(K^\times)}$ tout entier si $d = n$; puisqu'il coïncide avec $D_{(K,v),L,\mathscr{V},(f_i)}$ par ce qu'on vient de voir, ce dernier est également purement de dimension d, et égal à $\Gamma^n_{v(K^\times)}$ tout entier si $d = n$.

Le théorème valant pour $(K_1', L_1', \mathscr{V}_1', (g_i))$, il existe un recouvrement fini (Υ_j) de $\mathbf{P}_{K_1'}$ par des parties constructibles, et une famille finie $(\psi_{jk\ell})_{k,\ell}$ de monômes de la forme $\prod_i x_i^{r_i}$ où les r_i sont rationnels et une famille $(b_{jk\ell})_{k,\ell}$ d'éléments de $(K_1')^\times$ tels que pour tout $\theta \in \Upsilon_j$ le sous-foncteur polyédral $D_{(K_1',\theta),L_1',\mathscr{V}_1',(g_i)}$ de $\Gamma^n_{\theta((K_1')^\times)}$ soit décrit par la condition

$$\bigvee_k \bigwedge_\ell \theta(b_{jk\ell})\psi_{jk\ell} \leqslant 1.$$

Soit $f \in K_1'$. Elle s'écrit $\sum a_I T^I / \sum b_I T^I$; si $v \in \mathbf{P}_K$, on a alors $v_1'(f) \leqslant 1$ si et seulement si $\max v(a_I) \leqslant \max v(b_I)$. Il s'ensuit que l'image réciproque par $v \mapsto v_1'$ de toute partie constructible de $\mathbf{P}_{K_1'}$ est une partie constructible de $\mathbf{P}_K$. Pour tout j, notons alors $\mathscr{U}_j$ l'image réciproque de Υ_j sous $v \mapsto v_1'$; les $\mathscr{U}_j$ constituent un recouvrement fini de $\mathbf{P}_K$ par des parties constructibles.

Fixons j. Soit $v \in \mathscr{U}_j$. On sait que $D_{(K,v),L,\mathscr{V},(f_i)}$ est égal à $D_{(K_1',v_1'),L_1',\mathscr{V}_1',(g_i)}$. Puisque v_1' appartient à Υ_j par choix de v, on en déduit que $D_{(K,v),L,\mathscr{V},(f_i)}$ est décrit par la condition

$$\bigvee_k \bigwedge_\ell v_1'(b_{jk\ell})\psi_{jk\ell} \leqslant 1.$$

Chacune des $b_{jk\ell}$ s'écrit sous la forme $\sum c_{jk\ell,I}T^I / \sum d_{jk\ell,I}T^I$ et l'on a alors

$$v_1'(b_{jk\ell}) = \frac{\max_I v(c_{jk\ell,I})}{\max_I v(d_{jk\ell,I})}.$$

Pour tout J, J' tels que $c_{jk\ell,J}$ et $d_{jk\ell,J'}$ soient non nuls notons $\mathscr{U}_{j,J,J'}$ l'ensemble des v appartenant à telles que $\max_I v(c_{jk\ell,I}) = v(c_{jk\ell,J'})$ et $\max_I v(d_{jk\ell,I}) = v(d_{jk\ell,J''})$. Alors $\mathbf{P}_K$ est recouvert par les $\mathscr{U}_{j,J,J'}$ qui sont constructibles, et pour tout $v \in \mathscr{U}_{j,J,J'}$ le foncteur $D_{(K,v),L,\mathscr{V},(f_i)}$ est décrit par la condition

$$\bigvee_k \bigwedge_\ell v(c_{jk\ell,J}/d_{jk\ell,J'})\psi_{jk\ell} \leqslant 1,$$

ce qui montre (2).

Il suffit donc bien de démontrer le théorème pour $(K_1', L_1', \mathscr{V}_1', (g_i))$. Autrement dit, on peut supposer que K et L sont trivialement gradués, ce que nous faisons désormais.

Soit F le sous-corps de L engendré par K, les f_i et S et soit $\mathscr{W}$ l'ouvert quasi-compact $\mathbf{P}_F\{S\}$ de $\mathbf{P}_F$; notons que si $S = \varnothing$; c'est-à-dire si $\mathscr{V} = \mathbf{P}_L$, alors $\mathscr{W} = \mathbf{P}_F$. L'ouvert $\mathscr{V}$ est égal à l'image réciproque de $\mathscr{W}$ sur $\mathbf{P}_L$. Soit $v \in \mathbf{P}_K$ et soit H un objet de $\mathsf{D}_{v(K^\times)}$. Comme toute valuation sur F s'étend en une valuation sur L, les foncteurs $D_{(K,v),L,\mathscr{V},(f_i)}$ et $D_{(K,v),F,\mathscr{W},(f_i)}$. sont égaux. Il suffit donc de savoir démontrer le théorème pour $(K, F, \mathscr{W}, (f_i))$. Autrement dit on s'est ramené au cas où L est de type fini sur K.

Il existe alors un K-schéma intègre et de type fini $\mathscr{X}$ dont le corps des fonctions est isomorphe à L, sur lequel les éléments de S et les f_i sont définies, et sur lequel les f_i sont inversibles.

Soit v une valuation sur K. Soit X_v le foncteur qui associe à une extension non trivialement valuée et algébriquement close (F, w) de (K, v) le sous-ensemble de $\mathscr{X}(F)$ formé des points P tels que $w(\lambda(P)) \leqslant 1$ pour tout $\lambda \in S$. L'assertion A) du théorème du théorème 1.2 de [**50**] assure l'existence d'un sous-foncteur polyédral Δ_v de $\Gamma^n_{v(K^\times)}$, de dimension $\leqslant d$, tel que $(w \circ f_1, \dots, w \circ f_n)(X_v(F)) = \Delta_v(w(F^\times))$ pour tout (F, w), et son assertion (C2) assure que si $S = \varnothing$ (auquel cas $X_v = \mathscr{X}$) le foncteur polyédral Δ_v est purement de dimension d, et égal à $\Gamma^n_{v(K^\times)}$ tout entier si l'on a de surcroît $d = n$. L'assertion (B) de *loc. cit.* assure par ailleurs que $\Delta_v = D_{(K,v),L,\mathscr{V},(f_i)}$, ce qui achève de prouver (1).

Il reste à démontrer (2). Soit E l'ensemble des familles finies $(a_{k\ell}, \varphi_{k\ell})_{k,\ell}$ où les $\varphi_{k,\ell}$ sont des monômes de la forme $\prod x_i^{r_i}$ avec les r_i rationnels, et où les $a_{k\ell}$ appartiennent à $K^\times$. Pour toute $\Phi = (a_{k\ell}, \varphi_{k\ell})_{k,\ell}$ appartenant à E, notons $\mathscr{U}_\Phi$ l'ensemble des valuations v appartenant à $\mathbf{P}_K$ telles que $D_{(K,v),L,\mathscr{V},(f_i)}$ puisse être décrit par la condition

$$\bigvee_k \bigwedge_\ell v(a_{k\ell})\varphi_{k\ell} \leqslant 1.$$

Il résulte de l'élimination des quantificateurs dans la théorie ACVF que $\mathscr{U}_\Phi$ est une partie constructible de $\mathbf{P}_K$. L'énoncé (1) que nous avons établi assure que les $\mathscr{U}_\Phi$ recouvrent $\mathbf{P}_K$; par compacité constructible, c'est déjà le cas d'un nombre fini d'entre eux, ce qui achève de montrer (2). □

§ 10.6. FIBRÉS VECTORIELS SUR UN ESPACE DE ZARISKI-RIEMANN

On désigne toujours par K un corps gradué et par F une extension graduée de K.

10.6.1. — En associant à un ouvert U de $\mathbf{P}_{L/K}$ le sous-anneau gradué $\mathscr{O}(U)$ de L dont la composante $\mathscr{O}(U)^r$ est constituée des $f \in L_r$ telles que $v(f) \leqslant 1$ pour toute $v \in U$, on fait de $\mathbf{P}_{L/K}$ un espace localement annelé gradué ; la fibre $\mathscr{O}_v$ de son faisceau structural en une valuation v est précisément l'anneau gradué de v. La notion de fibré vectoriel (gradué) sur un ouvert U de $\mathbf{P}_{L/K}$ a donc un sens (10.2.4). Si U est non vide, il est connexe et non vide (puisqu'il contient le point générique η de l'espace irréductible

$\mathbf{P}_{L/K}$), donc le rang d'un fibré vectoriel E sur U est bien défini. C'est en particulier la dimension du L-espace vectoriel gradué E_η.

10.6.2. — Supposons que l'ouvert U est strict. Nous dirons qu'un fibré vectoriel E sur U de rang n est strict s'il existe un recouvrement ouvert (U_i) de U par des ouverts stricts et pour tout i un isomorphisme entre $E|_{U_i}$ et $\mathscr{O}_{U_i}^n$.

Soit π l'application continue naturelle de $\mathbf{P}_{L/K}$ vers $\mathbf{P}_{L^1/K^1}$. Posons $U^1 = \pi(U)$. On a $U = \pi^{-1}(U^1)$ et $\mathscr{O}_{U^1} \simeq (\pi_*\mathscr{O}_U)^1$. Les foncteurs $E \mapsto (\pi_*E)^1$ et $F \mapsto \pi^{-1}(F) \otimes_{\pi^{-1}(\mathscr{O}_{U^1})} \mathscr{O}_U$ établissent alors une équivalence entre la catégorie des fibrés vectoriels stricts de rang n sur U et celle des fibrés vectoriels de rang n au sens classique sur U^1, c'est-à-dire celle des $\mathscr{O}_{U^1}$-modules localement libres de rang n.

Remarque 10.6.3. — Supposons que U est strict, et soit E un fibré vectoriel de rang n sur U. Supposons qu'il existe un recouvrement (U_i) de U par des ouverts stricts et, pour tout i, un isomorphisme $E|_{U_i} \simeq \mathscr{O}_{U_i}[r_i]$ où chacun des r_i est de la forme $(r_{ij})_j$ avec les r_{ij} appartenant à $K^\times$. Le fibré vectoriel E est alors strict. Pour le voir, on choisit pour tout (i,j) un élément a_{ij} de $K^\times$ tel que $|a_{ij}| = r_{ij}$, et l'on remarque que $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (a_{i1}x_1, \dots, a_{in}x_n)$ établit un isomorphisme de $\mathscr{O}_U[r_i]$ sur $\mathscr{O}_U^n$ pour tout i.

10.6.4. — Soit K un corps gradué, soit n un entier, soit L une extension graduée de K et soit U un ouvert de $\mathbf{P}_{L/K}$. Soit F un L-espace vectoriel gradué. On appelle métrique sur F au-dessus de U la donnée, pour tout élément homogène s de F, d'une application $v \mapsto v(s)$ de source U et possédant les propriétés suivantes :

– $v(s)$ appartient à $v(L^\times)$ si s est non nulle, et vaut 0 sinon ;

– on a $v(s+t) \leqslant \max(v(s), v(t))$ pour tout v et tout couple (s,t) d'éléments de F homogènes de même degré ;

– on a $v(as) = v(a)v(s)$ pour tout s et tout élément homogène a de L.

Supposons donnée une métrique sur F au-dessus de U. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base du L-espace vectoriel gradué F et soit V un ouvert de U. Nous dirons que $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormée au-dessus de V (relativement à la métrique choisie) si $v(\sum a_i e_i) = \sup_i v(a_i)$ pour toute famille (a_i) d'éléments homogènes de L et tout $v \in V$.

Nous dirons que la métrique considérée admet localement sur U une base orthonormée si pour tout v de U il existe un voisinage ouvert V de v dans U et une base de F qui est orthonormée au-dessus V.

Soit F et F' deux L-espaces vectoriels gradués, chacun étant muni d'une métrique au-dessus de U. On appelle isométrie de F sur F' au-dessus de U (ou simplement isométrie de F sur F' s'il n'y a pas d'ambiguïté sur U) tout isomorphisme u de L-espaces vectoriels gradués tel que $v(u(s)) = v(s)$ pour tout $v \in U$ et tout élément homogène s de F.

10.6.5. — Soit E un fibré vectoriel de rang n sur un ouvert non vide U de $\mathbf{P}_{L/K}$. Soit s un élément homogène du L-espace vectoriel gradué E_η. Soit $v \in U$. Il existe un voisinage ouvert V de v dans U et un polyrayon $r = (r_1, \dots, r_n)$ tels que $E|_V$ soit isomorphe à $\mathscr{O}_V[r]$. Le fibré $E|_V$ possède donc une base $(e_1, \dots, e_n)$ formés d'éléments homogènes de $E(V)$, chaque e_i étant de degré r_i. On peut écrire d'une unique manière $s = \sum a_i e_i$, où chaque a_i est un élément homogène de L. L'élément $\sup_i v(a_i)$ de $v(L^\times) \cup \{0\}$ ne dépend alors que de v et de s, et pas du choix de V, de r ni de (e_i). En effet, il suffit pour le voir de démontrer que l'ensemble des $\lambda \in L^\times$ tels que $\sup_i v(a_i) \leqslant v(\lambda)$ ne dépend que de v et de s. Mais cet ensemble est aussi celui des $\lambda \in v(L^\times)$ tels que $v(\lambda^{-1}a_i) \leqslant 1$ pour

tout i, c'est-à-dire tels que $a\lambda^{-1}a_i \in \mathscr{O}_v$ pour tout i, c'est-à-dire encore tels que $s \in E_v$. Il est dès lors licite de poser $v(s) = \sup_i v(a_i)$.

La collection pour s variable des applications $v \mapsto v(s)$ définit une métrique au-dessus de U sur le L-espace vectoriel gradué E_η ; par construction, cette métrique possède une base orthonormée localement sur U.

10.6.6. — La construction ci-dessus définit un foncteur de la catégorie des fibrés vectoriels gradués de rang n sur U vers celle des L-espaces vectoriels gradués de dimension n munis d'une métrique au-dessus de U admettant localement sur U une base orthonormée.

Ce foncteur est une équivalence de catégories. On en construit un quasi-inverse comme suit. À un L-espace vectoriel gradué M de dimension n muni d'une métrique au-dessus de U admettant localement sur U une base orthonormée, on associe le sous-faisceau F du faisceau constant $\underline{M}$ sur U dont l'ensemble des sections homogènes de degré r sur un ouvert non vide V de U est $\{s \in M_r \text{ tq. } \forall v \in V, v(s) \leqslant 1\}$.

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de M et si V est un ouvert de U, la base $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormée au-dessus de U si et seulement si les $e_i|_V$ constituent une base de $F|_V$.

Remarque 10.6.7. — Soit (U_i) un recouvrement ouvert de U, soit M un L-espace vectoriel gradué de dimension finie et pour tout i, soit $(g_{ij})_j$ une base de M. Il existe alors au plus un fibré vectoriel E sur U tel que $E_\eta = M$ et tel que les (g_{ij}) forment une base de E sur U_i pour tout i. En effet si un tel E existe et si l'on munit M de la métrique correspondante au-dessus de U on a alors $v(s) = \sup_j v(a_j)$ dès que s est une section homogène de M s'écrivant $\sum a_j g_{ij}$ et dès que $v \in U_i$, ce qui suffit à reconstituer entièrement la métrique de M au-dessus de U puisque les U_i recouvrent U.

10.6.8. — Cette construction est compatible au changement de corps, dans le sens suivant. Soit L' un sous-corps gradué de L et soit K' un sous-corps gradué de $L' \cap K'$. Soit π l'application naturelle de $\mathbf{P}_{L/K}$ vers $\mathbf{P}_{L'/K'}$. Supposons qu'il existe un ouvert U' de $\mathbf{P}_{L'/K'}$ et un fibré vectoriel E' sur U' tels que $U = \pi^{-1}(U')$ et $E = \pi^* E'$. On a alors $E_\eta = E'_\eta \otimes_{L'} L$ et en considérant un recouvrement de U' par des ouverts sur lesquels E' possède une base, on voit que si t est une section homogène non nulle de E' et si v est une valuation sur U d'image v' sur U' alors $v(t) = v'(t)$.

Exemple 10.6.9. — Soit E et F deux fibrés vectoriels gradués sur U. Le produit tensoriel $E \otimes F$ se décrit ainsi en termes de L-espace vectoriel gradué et de métrique.

– Le L-espace vectoriel gradué sous-jacent à $E \otimes F$ est $E_\eta \otimes_L F_\eta$.

– La métrique sur $E_\eta \otimes_L F_\eta$ définie par $E \otimes_L F$ se décrit comme suit, à partir des métriques sur E_η et F_η définies par E et F : pour tout $v \in U$ et tout élément homogène s de $E_\eta \otimes_L F_\eta$, on a

$$v(s) = \inf_{s=\sum_i t_i \otimes r_i} \sup_i v(t_i)v(r_i).$$

Exemple 10.6.10. — Soit E un fibré vectoriel gradué sur U. Le dual $E^\vee$ se décrit ainsi en termes L-espace vectoriel gradué et de métrique.

– Le L-espace vectoriel gradué sous-jacent à $E^\vee$ est le dual $E_\eta^\vee$ du L-espace vectoriel gradué E_η.

– La métrique sur $E_\eta^\vee$ définie par $E^\vee$ se décrit comme suit, à partir de la métrique sur E_η définie par E : pour tout $v \in U$ et tout élément homogène s de $E_\eta^\vee$, l'élément $v(s)$ de $v(L^\times) \cup \{0\}$ est caractérisé par le fait que $v(s(t)) = v(s)v(t)$ pour toute section homogène t de E_η.

Lemme 10.6.11. — *Soit M un sous-corps gradué de L contenant K, soit U un ouvert non vide de $\mathbf{P}_{L/K}$ et soit E un fibré vectoriel sur U. Soit $\pi\colon \mathbf{P}_{L/K} \to \mathbf{P}_{M/K}$ l'application canonique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe un ouvert V de $\mathbf{P}_{M/K}$ et un fibré vectoriel F sur V tels que $U = \pi^{-1}(V)$ et $E \simeq \pi^* F$;*

(ii) *il existe un M-espace vectoriel gradué G, un isomorphisme $G \otimes_M L \simeq E_\eta$, et une famille (V_i) d'ouverts de $\mathbf{P}_{M/K}$ tels que :*

1) *l'ouvert U est la réunion des $\pi^{-1}(V_i)$;*

2) *pour tout indice i il existe une famille finie $(g_{ij})_j$ d'éléments de G dont l'image dans $E_\eta = G \otimes_M L$ est une base de E sur $\pi^{-1}(U_i)$.*

De plus si elles sont satisfaites on peut choisir F comme dans (i) de sorte que $F_\eta = G$ et que $(g_{ij})_j$ soit pour tout i une base de F sur V_i.

Démonstration. — Si (i) est vraie alors (ii) est vraie en prenant $G = F_\eta$, en prenant pour (V_i) un recouvrement ouvert de V trivialisant F, et en se donnant pour chaque V_i une base de F sur V_i.

Supposons réciproquement que (ii) soit vrai, et utilisons l'isomorphisme donné entre $G \otimes_M L$ et E_η pour voir G comme contenu dans E_η. Puisque les $\pi^{-1}(V_i)$ recouvrent U et puisque π est surjective, les V_i recouvrent V et $U = \pi^{-1}(V)$. Pour tout i, notons (g_{ij}) une famille d'éléments de G constituant une base de E sur $\pi^{-1}(V_i)$. La métrique sur E_η est telle que, pour tout i et toute famille (a_j) d'éléments homogènes de L tels que les $a_j e_{ij}$ soient tous de même degré, on ait $v(\sum a_j ij) = \max v(a_j) p$ $v \in \pi^{-1}(V_i)$. Si les a_j appartiennent tous à M on voit que cette valeur ne dépend que de la restriction de v à M, c'est-à-dire que de son image sur V, et appartient à $v(M^\times)$. Les $\pi^{-1}(V_i)$ recouvrant U, il en résulte que pour tout $g \in G^\times$ et tout $v \in U$, l'élément $v(g)$ de $v(L^\times)$ ne dépend que de la restriction w de v à M, et appartient à $w(L^\times)$. On a ainsi défini une métrique $g \mapsto (w \mapsto w(g))$ sur G. Par construction, pour tout i la famille (g_{ij}) est orthonormée au-dessus de V_i pour cette métrique. Elle définit donc un fibré vectoriel F au-dessus de V, de fibre générique G, admettant $(g_{ij})_j$ pour base sur chacun des V_i.

Si W est un ouvert de V, une section homogène de F sur W est un élément homogène t de G tel que $w(t) \leqslant 1$ pour tout $w \in W$. Lorsqu'on voit t comme un élément homogène de E_η il vérifie l'inégalité $v(t) \leqslant 1$ pour tout $v \in \pi^{-1}(W)$, et appartient donc à $E(\pi^{-1}(W))$. On vient ainsi de définir un morphisme de F vers $\pi^* E$, soit encore par adjonction un morphisme de $\pi^* F$ vers E. Comme ce morphisme envoie pour tout i la base (g_{ij}) de $F|_{V_i}$ sur la base (g_i) de $E|_{\pi^{-1}(V_i)}$, c'est un isomorphisme. □

Définition 10.6.12. — *Soit M un sous-corps gradué de L contenant K, soit U un ouvert non vide de $\mathbf{P}_{L/K}$ et soit E un fibré vectoriel sur U. Si les conditions équivalentes du lemme ci-dessus sont satisfaites, nous dirons que M est un corps gradué de définition du couple (U, E).*

Lorsque (E_ℓ) est une famille de fibrés vectoriels sur U, nous dirons que M est un corps gradué de définition de $(U, (E_\ell))$, si c'est un corps gradué de définition de chacun des (U, E_ℓ).

Remarque 10.6.13. — Si U est quasi-compact, toute famille finie (E_ℓ) de fibrés vectoriels sur U possède un corps gradué de définition qui est de type fini sur K. En effet,

fixons pour chaque ℓ un isomorphisme entre $E_{\ell,\eta}$ et L^{n_ℓ} (où n_ℓ est le rang de E_ℓ). Choisissons un recouvrement fini (U_i) de U où chaque U_i est un ouvert affine $\mathbf{P}_{L/K}\{S_i\}$ pour un certain sous-ensemble fini S_i de $L^\times$, et où chacun des E_ℓ possède une base $(a_{i,\ell,j})_{1\leqslant j\leqslant n_\ell}$ sur U_i, chacun des $a_{i,\ell,j}$ étant lui-même un n_ℓ-uplet d'éléments homogènes de L. Le sous-corps gradué de L engendré par K, les S_i et les composantes des différents $a_{i,\ell,j}$ est alors de type fini sur K, et est un corps gradué de définition de $(U,(E_\ell)_\ell)$.

Lemme 10.6.14. — *Supposons K de caractéristique $p>0$. Soit E un fibré en droites sur U et soit M un corps gradué de définition de (U,E). Soit N un sous-corps gradué de M contenant K et contenant M^q pour une certaine puissance q de E. Alors N est un corps gradué de définition de $(U,E^{\otimes q})$.*

Démonstration. — Le choix d'un élément homogène arbitraire non nul de E_η permet d'identifier ce dernier à L. Dans ce cas $E^{\otimes}q_\eta$ s'identifie encore à L, mais sa métrique est telle que $v_{E^{\otimes q}}(s^q)=v_E(s)^q$ pour tout élément homogène s de L et tout $v\in U$, en rappelant en indice de la valuation le fibré vectoriel en jeu. Soit π l'application naturelle de $\mathbf{P}_{L/K}$ vers $\mathbf{P}_{M/K}$ et soit ρ celle de $\mathbf{P}_{M/K}$ vers $\mathbf{P}_{N/K}$. Soit V l'image de U sur $\mathbf{P}_{M/K}$. Par hypothèse et en vertu du lemme 10.6.11 il existe un recouvrement ouvert (V_i) de V et pour tout i un élément s_i de $M^\times$ qui est une base de E sur $\pi^{-1}(V_i)$. Quitte à raffine le recouvrement (V_i), on peut supposer que V_i est pour tout i de la forme $\mathbf{P}_{M/K}\{S_i\}$ pour un certain sous-ensemble fini S_i de $M^\times$. Mais on a alors également $V_i=\mathbf{P}_{M/K}\{S_i^q\}$, et $S_i^q\subset N$. Par conséquent, chacun des V_i est égal à $\rho-1(W_i)$ pour un certain ouvert quasi-compact W_i de $\mathbf{P}_{N/K}$. Pour tout i et tout v appartenant à $(\rho\circ\pi)^{-1}(W_i)=U_i$ on a $v_E(s_i)=1$ et donc $v_{E^{\otimes q}})(s_i^q)=1$. Comme les s_i^q appartiennent tous à N par hypothèse, le lemme 10.6.11 assure que N est un corps gradué de définition de $(U,E^{\otimes q})$. □

Lemme 10.6.15. — *Soit U un ouvert quasi-compact de $\mathbf{P}_{L/K}$ et soit E un fibré en droites sur U. Soit s une section homogène non nulle de E_η et soit (a_i) une famille finie non vide d'éléments de $L^\times$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) *Les $a_i s$ sont des sections globales de E qui engendrent ce dernier au-dessus de U.*
b) *On a $v(s)^{-1}=\max_i v(a_i)$ pour tout $v\in U$.*

Démonstration. — Posons $s_i=a_i s$. Supposons que les s_i sont des sections globales de E sur U et qu'elles l'engendrent. Soit $v\in U$. On a $v(s)^{-1}=v(a_i)v(s_i)^{-1}$ pour tout i. Comme les s_i sont des sections de E, on a pour tout i l'inégalité $v(s_i)\leqslant 1$, qui entraîne que $v(s)^{-1}\geqslant v(a_i)$. Et puisque les s_i engendrent E sur U, il existe j tel que $v(s_j)=1$, ce qui entraîne que $v(s)^{-1}=v(a_j)$. Par conséquent $v(s)^{-1}=\max_i v(a_i)$.

Réciproquement supposons que $v(s)^{-1}=\max_i v(a_i)$. Soit $v\in U$. On a alors pour tout j les égalités $v(s_j)=v(a_j)v(s)=v(a_i)/(\max_i v(a_i))\leqslant 1$, et $v(s_j)=1$ pour tout j tel que $v(a_j)=\max_i v(a_i)$. Ceci entraîne que les s_j sont des sections globales de E sur U et qu'elles l'engendrent. □

Corollaire 10.6.16. — *Soit U un ouvert quasi-compact de $\mathbf{P}_{L/K}$ et soit E un fibré en droites sur U. Soit s une section homogène non nulle de E_η. Le fibré E est engendré par ses sections globales si et seulement s'il existe une famille finie non vide $(a_i)\in L^\times$ telle que $v(s)^{-1}=\max_i v(a_i)$ pour tout $v\in U$.*

Remarque 10.6.17. — Supposons qu'il existe un sous-corps gradué L' de L, un sous-corps gradué K' de $L'\cap K$, un ouvert U' de $\mathbf{P}_{L'/K'}$ et un fibré en droites E' sur U' tel que

$U = \pi^{-1}(U')$ et $E = \pi^* E'$ où $\pi\colon \mathbf{P}_{L/K} \to \mathbf{P}_{L'/K'}$ est l'application naturelle. Supposons que E' soit engendré par sections globales et soit t un élément homogène non nul de E'_η. Il existe alors une famille finie (b_i) d'éléments de $(L')^\times$ tels que $v(t)^{-1} = \max_i v(b_i)$ pour toute $v \in U'$. Mais cette égalité reste vraie pour toute $v \in U$ lorsqu'on voit t comme une section homogène non nulle de $E_\eta = E'_\eta \otimes_{L'} L$ (10.6.8). Soit s une section homog !ne non nulle quelconque de E_η. On a alors

$$v(s) = v((s/t)t) = \max_i v((s/t)b_i) = \max_i v(a_i),$$

en posant $a_i = (s/t)b_i$. Et pour tout (i, j), le quotient a_i/a_j est égal à b_i/b_j et appartient donc à $(L')^\times$.

Lemme 10.6.18. — *Soit E une droite vectorielle graduée et soit t un élément homogène non nul de E.*

a) *L'unique métrique sur E telle que $v(t)^{-1} = \max_i v(a_i)$ pour tout $v \in \mathbf{P}_{L/K}$ est induite par un fibré en droites D sur $\mathbf{P}_{L/K}$ de fibre générique E.*

b) *Pour tout j, le sous-corps gradué $K(a_i/a_j)_i$ de L est un corps gradué de définition de D.*

Démonstration. — Montrons tout d'abord a). Pour tout j, notons U_j l'ouvert $\mathbf{P}_{L/K}\{a_i/a_j\}_i$ de $\mathbf{P}_{L/K}$, et t_j l'élément homogène $a_j t$ de E. On a alors pour tout $v \in U_j$ les égalités

$$v(t_j) = v(a_j)v(t) = v(a_j)/(\max_i v(a_i)) = 1$$

par définition de U_j. Ainsi E possède-t-il localement une base orthonormée (ce qui,en dimension 1, signifie simplement un vecteur homogène de norme constante 1) sur $\mathbf{P}_{L/K}$. Par conséquent, la métrique donnée sur E est bien induite par un fibré en droites D sur $\mathbf{P}_{L/K}$ dont E est la fibre générique.

Montrons maintenant b). Soit ρ le degré de t_j. Le choix de t_j comme base induit une isométrie de E sur $L[\rho]$, où ce dernier est muni de l'unique métrique pour laquelle $v(1) = v(a_j)/\max_i(v(a_i))$, soit encore $v(1)^{-1} = \max_i v(a_i/a_j)$. Soit F le sous-corps gradué $K(a_i/a_j)_i$ de L. Par l'assertion a) déjà traitée, la métrique sur $F[\rho]$ au dessus de $\mathbf{P}_{F/K}$ telle que $v(1)^{-1} = \max_i v(a_i/a_j)$ est induite par un fibré en droites Δ sur $\mathbf{P}_{F/K}$ de fibre générique $F[\rho]$. L'image réciproque de Δ sur $\mathbf{P}_{L/K}$ est alors un fibré en droites de fibre générique $L[\rho]$, dont la métrique induite sur $L[\rho]$ est telle que $v(1)^{-1} = \max_i v(a_i/a_j)$. Par conséquent, l'image réciproque de Δ sur $\mathbf{P}_{L/K}$ est isomorphe à D. □

§ 10.7. NOMBRES D'INTERSECTION SUR UN ESPACE DE ZARISKI-RIEMANN

Soit K un corps gradué et soit L une extension de K.

10.7.1. Modèles. — Un *pré-modèle* (resp. un *modèle*) de L sur K est un K-schéma gradué de type fini, séparé et intègre V muni d'un K-plongement $K(V) \hookrightarrow L$ (resp. d'un K-isomorphisme $K(V) \simeq L$). Sauf mention expresse du contraire, un morphisme dominant entre pré-modèles sera toujours supposé compatible avec les plongements de leurs corps des fonctions dans L. Modulo cette convention, il existe au plus un morphisme dominant entre deux pré-modèles de L sur K. Si W et V sont deux pré-modèles de L

sur K, on dira que W domine V (resp. est propre sur V) pour signifier qu'il existe un morphisme dominant (resp. un morphisme propre et surjectif) $W \to V$.

Si V est un pré-modèle de L sur K, on note $\mathbf{P}_{L/K}\{V\}$ le sous-ensemble de $\mathbf{P}_{L/K}$ formé des valuations dont l'anneau domine un anneau local de V. C'est un ouvert quasi-compact de $\mathbf{P}_{L/K}$: pour s'en assurer, on peut supposer que V est affine, auquel cas $\mathbf{P}_{L/K}\{V\} = \mathbf{P}_{L/K}\{f_1, \ldots, f_r\}$ pour n'importe quelle famille génératrice homogène $(f_1, \ldots, f_n)$ de la K-algèbre graduée $\mathscr{O}_V(V)$. L'application naturelle $\mathbf{P}_{L/K}\{V\} \to V$ est surjective (tout anneau local gradué de corps des fractions gradué contenu dans F est dominé par un anneau de valuation gradué de F).

Si W et V sont deux pré-modèles de F sur K et si $W \to V$ est un morphisme dominant, alors $\mathbf{P}_{L/K}\{W\} \subset \mathbf{P}_{L/K}\{V\}$, et $\mathbf{P}_{L/K}\{W\}$ est égal à $\mathbf{P}_{L/K}\{V\}$ si et seulement si $W \to V$ est propre (c'est une simple traduction du critère valuatif) ; en particulier (prendre $V = \operatorname{Spec} K$) on a $\mathbf{P}_{L/K}\{W\} = \mathbf{P}_{L/K}$ si et seulement si W est propre.

Soit V un pré-modèle de L sur K. L'application π de $\mathbf{P}_{L/K}\{V\}$ dans V qui applique une valuation v sur son centre (dans V) est continue ; en effet, l'image réciproque de tout ouvert U de V est l'ouvert $\mathbf{P}_{L/K}\{U\}$ de $\mathbf{P}_{L/K}$. En outre, un élément homogène $f \in \mathscr{O}_V(U)$ induit tautologiquement un élément $\pi^*(f)$ de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}_{L/K}}(\pi^{-1}(U))$; si f s'annule en un point x de U, $\pi^*(f)$ appartient à l'idéal maximal de toute valuation v qui domine x. Ainsi, π est un morphisme d'espaces localement annelés gradués.

Lemme 10.7.2. — *Soit V un K-schéma gradué intègre et séparé muni d'un plongement de $K(V)$ dans L, soit $r > 0$ et soit f un élément homogène de degré r de L. Il existe un sous-schéma intègre et fermé W de $\mathbf{P}_K^{(1,r)} \times_K V$ muni d'un morphisme propre et surjectif sur V, et un $K(V)$-plongement de $K(W)$ dans L qui identifie $K(W)$ à $K(V)(f)$, tels que pour tout $w \in W$ ou bien $f \in \mathscr{O}_{W,w}$ ou bien $f^{-1} \in \mathscr{O}_{W,w}$.*

Démonstration. — Soit U un ouvert affine non vide de V ; posons $A = \mathscr{O}(U)$, et soit B le sous-anneau gradué intègre $A[f]$ de L. Le morphisme surjectif $A[T] \to B, T \mapsto f$ fait de $\operatorname{Spec} B$ un sous-schéma gradué fermé de $U \times_K \mathbf{A}_K^r$, où $\mathbf{A}_K^r = \operatorname{Spec} K[T/r]$; le morphisme de $\operatorname{Spec} B$ vers $\mathbf{A}_K^r$ défini par f est par construction le morphisme induit par la seconde projection de $\mathbf{A}_K^r \times_K U$.

En immergeant $\mathbf{A}_K^r$ dans $\mathbf{P}_K^{(1,r)}$ de manière standard, on fait de B un sous-schéma gradué de $U \times_K \mathbf{P}_K^{1,r}$, puis de $V \times_K \mathbf{P}_K^{(1,r)}$. Soit W l'adhérence réduite de $\operatorname{Spec} B$ dans $V \times_K \mathbf{P}_K^{(1,r)}$. C'est un K-schéma gradué intègre. La première projection définit un morphisme propre de W sur V, qui est dominant puisque W contient $\operatorname{Spec} B$ comme ouvert dense, et qui est donc surjectif. La seconde projection définit un morphisme de W vers $\mathbf{P}^{1,r} - K$ qui prolonge le morphisme f de $\operatorname{Spec} B$ vers $\mathbf{A}_K^r$. L'existence même de ce prolongement signifie précisément que $f \in \mathscr{O}_{W,w}$ ou bien $f^{-1} \in \mathscr{O}_{W,w}$ pour tout $w \in W$.

□

Lemme 10.7.3 **(Variante graduée du lemme de Chow)**

Soit V un pré-modèle de L sur K. Soit W un pré-modèle de L dominant V. Il existe un pré-modèle W' de L propre et birationnel sur W et quasi-projectif sur V.

Démonstration. — Soit p l'unique morphisme dominant de W sur V induisant l'inclusion $K(V) \subset K(W)$ de sous-corps gradués de L. Soit (V_i) et (W_i) deux recouvrements de V et W, respectivement, par des ouverts affines denses tels que $p(W_i) \subset V_i$ pour tout i. On peut écrire pour tout i l'anneau gradué $\mathscr{O}(W_i)$ comme un quotient de $\mathscr{O}_{V_i}[T/r_i]$ pour un

certain polyrayon r_i, ce qui permet de voir W_i comme un sous-schéma gradué fermé de $V_i \times_K \mathbf{A}_K^{r_i}$, puis comme un sous-schéma gradué de $V_i \times_K \mathbf{P}_K^{1,r_i}$, puis de $V \times_K \mathbf{P}_K^{1,r_i}$. Soit Z_i l'adhérence réduite de W_i dans $V \times_K \mathbf{P}_K^{1,r_i}$ et soit U l'intersection de tous les W_i dans W. Pour tout i, on dispose par construction d'une immersion de W_i dans Z_i, d'où un morphisme de U dans $\prod_K Z_i$; soit Z l'adhérence réduite de U dans $\prod_K Z_i$. Pour tout i, notons W_i' l'image réciproque sur Z de W_i par la projection sur Z_i, où W_i est vu comme un ouvert dense de Z_i.

Soit W' la réunion des W_i'. Le schéma gradué intègre W' contient U comme ouvert dense, et a donc $K(W)$ comme corps gradué des fonctions. Il s'immerge par construction dans $V \times_K \prod_i \mathbf{P}_K^{1,r_i}$, puis dans $V \times_K \mathbf{P}_K^s$ pour un certain polyrayon s à l'aide d'une variante graduée du plongement de Segre. Par construction, chacun des W_i' domine (en tant que schéma gradué intègre de corps gradué des fonctions $K(W)$) l'ouvert W_i de W, si bien que W' domine W.

Il suffit pour conclure de montrer que W' est propre sur W. Chacun des W_i' est par construction propre sur W_i, puisque $W_i' \to W_i$ est obtenue par changement de base à partir d'un morphisme entre deux V-schémas gradués propres. Nous allons montrer que l'image réciproque de W_i sur W' par le morphisme $f\colon W' \to W$ est égale à W_i', ce qui terminera la démonstration puisque la propreté est une propriété locale sur le but. La définition même de W_i et de f entraîne que $W_i' \subset f^{-1}(W_i)$. Or comme $W_i' \to W_i$ est propre et $f^{-1}(W_i) \to W_i$ séparé, l'image de W_i' dans $f^{-1}(W_i)$ est un fermé de $f^{-1}(W_i)$. Puisque W_i' est un ouvert dense de W' et a fortiori de $f^{-1}(W_i)$, il vient $W_i' = f^{-1}(W_i)$. □

Corollaire 10.7.4. — *Pour tout pré-modèle W de L sur K, il existe un pré-modèle W' de L sur K propre et birationnel sur V et quasi-projectif sur K.*

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le lemme précédent avec $V = \operatorname{Spec} K$. □

Proposition 10.7.5. — *Soit V un pré-modèle de L sur K. Soit π le morphisme d'espaces localement annelés gradués de $\mathbf{P}_{L/K}\{V\}$ vers la limite de tous les pré-modèles de L sur K propres sur V. Le morphisme π est un isomorphisme.*

Démonstration. — Montrons d'abord que π est ensemblisement bijectif. Soit u et v deux valuations de $\mathbf{P}_{L/K}\{V\}$ telles que $\pi(u) = \pi(v)$. Soit $f \in L^\times$. En vertu du lemme 10.7.2, il exuste un pré-modèle W de L propre sur V tel que pour tout $w \in W$ on ait $f \in \mathscr{O}_{w,W}$ ou $f^{-1} \in \mathscr{O}_{W,w}$. Par hypothèse, u et v ont même image w sur W. Si $f \in \mathscr{O}_{W,w}$ alors $f \in \mathscr{O}_u$ et $f \in \mathscr{O}_v$; dans le cas contraire f^{-1} appartient à l'idéal maximal de $\mathscr{O}_{W,w}$, et donc à l'idéal maximal de $\mathscr{O}_u$ et à celui de $\mathscr{O}_v$, et il n'appartient dès lors ni à $\mathscr{O}_u$ ni à $\mathscr{O}_v$. Il s'ensuit que $\mathscr{O}_u = \mathscr{O}_v$, c'est-à-dire que $u = v$, et π est injective.

Montrons que π est bijective. Supposons donné une famille compatibles $(x_W)_W$ de points sur tous les pré-modèles de L propres sur V. Il résulte du lemme 10.7.2 que la colimite R des anneaux locaux de ces points contient f ou f^{-1} pour tout $f \in L^\times$. Par conséquent, R est l'anneau gradué d'une valuation de L ; par construction, R domine tous les $\mathscr{O}_{W,x_W}$. C'est donc l'anneau gradué d'une valuation u de L qui par construction est centrée sur V (puisque R domine $\mathscr{O}_{V,x_V}$) et est envoyée par π sur le système des x_W.

Montrons que π est un homéomorphisme. Soit E un sous-ensemble fini de $L^\times$. Toujours d'après le lemme 10.7.2 il existe un pré-modèle W de L propre sur V et tel que pour tout $(f, w) \in E \times W$ on ait $f \in \mathscr{O}_{W,w}$ ou $f^{-1} \in \mathscr{O}_{W,w}$. Soit W' l'ouvert de W constitué

des points w tels que $f \in \mathscr{O}_{W,w}$ pour toute $f \in E$. Alors $\mathbf{P}_{L/K}\{V\} \cap \mathbf{P}_{L/K}\{E\}$ est l'image réciproque de W' sur $\mathbf{P}_{L/K}\{V\}$. Comme les ouverts de $\mathbf{P}_{L/K}\{V\}$ de la forme $\mathbf{P}_{L/K}\{V\} \cap \mathbf{P}_{L/K}\{E\}$ (pour E variable) engendrent la topologie de $\mathbf{P}_{L/K}\{V\}$, la bijection continue π est ouverte, et donc est un homéomorphisme.

Enfin, le raisonnement suivi pour établir la surjectivité de π montre que si $u \in \mathbf{P}_{L/K}\{V\}$ et si $(x_W)_W$ désigne l'image $\pi(u)$ alors l'anneau gradué local $\mathscr{O}_u$ est la colimite des anneaux gradués locaux $\mathscr{O}_{W,x_W}$, ce qui montre que π est un isomorphisme d'espaces localement annelés gradués. □

Définition 10.7.6. — *Soit U un ouvert quasi-compact de $\mathbf{P}_{L/K}$, soit d un entier et soit E un fibré vectoriel de rang d sur U. On appellera pré-modèle (resp. modèle) de E tout couple (V, F) où V est un pré-modèle (resp. un modèle) de L sur K tel que $U = \mathbf{P}_{L/K}\{V\}$ et où F un fibré vectoriel sur V dont l'image inverse sur $U = \mathbf{P}_{L/K}\{V\}$ est isomorphe à E.*

Si (V, F) est un pré-modèle d'un fibré vectoriel E sur un ouvert quasi-compact U de $\mathbf{P}_{L/K}$ alors pour tout pré-modèle W de L sur K qui est propre sur V, le couple $(W, F|_V)$ est un pré-modèle de E.

10.7.7. — Soit E un fibré vectoriel de rang d sur U. Choisissons un recouvrement ouvert fini (U_i) de U où $U_i = \mathbf{P}_{L/K}\{S_i\}$ pour un certain sous-ensemble fini S_i de $L^\times$ et pour tout i un isomorphisme $\varphi_i \colon E|_{U_i} \simeq \mathscr{O}_{U_i}[r_i]$ pour un certain polyrayon r_i. Le fibré vectoriel E_i peut alors être reconstitué à isomorphisme près par le « cocycle » $(\varphi_i|_{U_i \cap U_j} \circ \varphi_j^{-1}|_{U_i \cap U_j})_{i,j}$, qu'on peut voir comme un cocyle matriciel. L'ensemble des ces données mettant en jeu un ensemble fini d'éléments de $L^\times$, il existe un pré-modèle (V, F) de (U, E). Plus généralement, on peut construire un pré-modèle $(V, F_i)_i$ pour toute famille finie (E_i) de fibrés vectoriels sur U, en construisant d'abord un pré-modèle pour chacun des E_i, puis en prenant un pré-modèle qui les domine tous.

Si L est de type fini sur K, tout fibré vectoriel sur U, et plus généralement toute famille finie de fibrés vectoriels sur U, admet un modèle.

Si E est in fibré en droites sur U, il est engendré par ses sections globales si et seulement s'il possède un pré-modèle (V, F) où F est engendré par ses sections globales.

Remarque 10.7.8. — Supposons que L soit de type fini et degré de transcendance 1 sur K. C'est alors comme dans le cas non gradué le corps gradué des fonctions d'une K-courbe graduée projective intègre et normale C qui est uniquement déterminée, et la flèche naturelle $\rho \colon \mathbf{P}_{L/K} \to C$ est un isomorphisme d'espaces localement annelés gradués ; tout fibré vectoriel E sur un ouvert quasi-compact U de $\mathbf{P}_{L/K}$ admet dès lors un modèle canonique, à savoir le couple $(\rho(U), \rho_* E)$.

Lemme 10.7.9. — *Soit U un ouvert quasi-compact de $\mathbf{P}_{L/K}$ et soit E un fibré en droites sur U. Il existe deux fibrés en droites D_1 et D_2 sur U engendrés par leurs sections globales et un isomorphisme $E \simeq D_1 \otimes D_2^\vee$.*

Démonstration. — Choisissons un pré-modèle (V, G) de (U, E). D'après le corollaire 10.7.4 on peut supposer V quasi-projectif. Il résulte alors de 10.3.7 qu'il existe deux fibrés en droites F_1 et F_2 sur V, engendré par leurs sections globales, et tels que $G \simeq F_1 \otimes F_2^\vee$. Il suffit pour conclure de prendre pour D_1 et D_2 les images réciproques respectives de F_1 et F_2 sur U. □

Exemple 10.7.10. — Soit D une droite vectorielle graduée sur L et soit t un élément homogène non nul de D, de degré r. Soit $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie d'éléments de $L^\times$ algébriquement indépendants sur K et soit E le fibré en droites sur $\mathbf{P}_{L/K}$ dont la fibre générique est D et dont la métrique est telle que $v(t^{-1}) = \max(1, v(a_1), \dots, v(a_n))$ (lemme 10.6.18).

Identifions $\mathbf{P}_K^{(1,|a_1|,\dots,|a_n|)}$ à un prémodèle de L sur K via le plongement $K(T_i/T_0)_{1\leqslant i\leqslant n} \hookrightarrow L, (T_i/T_0) \mapsto a_i$ dont nous notons F l'image. Soit Δ l'image réciproque sur $\mathbf{P}_{F/K}$ du fibré en droites $\mathscr{O}(1)[r]$ de $\mathbf{P}_K^{1,|a_1|,\dots,|a_n|}$. La fibre générique de Δ est égale à $F \cdot T_0$ où T_0 est considéré comme homogène de degré r. Les éléments T_0 et $T_i = a_i T_0$ constituent une famille de sections globales de Δ qui engendrent ce dernier. Il résulte alors du lemme 10.6.15 que la métrique sur $F \cdot T_0$ au-dessus de $\mathbf{P}_{F/K}$ induite par Δ est telle que $v(T_0)^{-1} = \max(1, v(a_1), \dots v(a_n))$ pour tout v. Il s'ensuit que l'image réciproque de Δ sur $\mathbf{P}_{L/K}$ est isomorphe à E, c'est-à-dire encore que $(\mathbf{P}_K^{(1,|a_1|,\dots,|a_n|)}, \mathscr{O}(1)[r])$ est un pré-modèle de $(\mathbf{P}_{L/K}, E)$. C'en est un modèle si $L = K(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

10.7.11. — Soit $K \hookrightarrow L$ une extension de corps classiques gradués ; soit n un entier supérieur ou égal au degré de transcendance de L sur K. Soit $(E_1, \dots, E_n)$ une famille de fibrés en droites sur $\mathbf{P}_{L/K}$. Il existe un pré-modèle propre $(V, (F_i))$ de $(\mathbf{P}_{L/K}, (E_i))$ (on peut même si on le souhaite prendre pour V un modèle propre de L sur K, mais ce n'est pas nécessaire pour ce qui suit). La formule de projection (lemme 10.4.8 *d*)) entraîne que l'entier défini par

$$\begin{cases} [L : K(V)] \int_V c_1(L_1) \cdots c_1(L_n) & \text{si } \dim(V) = n\,; \\ 0 & \text{si } \dim(V) < n \end{cases}$$

ne dépend pas du choix de V et des F_i. On le notera

$$\int_{\mathbf{P}_{L/K}} c_1(E_1) \dots c_1(E_n).$$

10.7.12. — Soit L' une extension finie de L et soit π le morphisme naturel de $\mathbf{P}_{L'/K}$ vers $\mathbf{P}_{L/K}$. Pour tout i, notons E_i' le fibré en droites $\pi^* E_i$ sur $\mathbf{P}_{L'/K}$. Soit $(V, (F_i))$ un modèle propre de la famille des L_i. C'est alors également un pré-modèle propre de la famille des E_i', si bien qu'on a les égalités

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{P}_{L'/K}} c_1(E_1') \dots c_1(E_n') &= [L' : L] \int_V c_1(F_1) \cdots c_1(F_n) \\ &= [L' : L] \int_{\mathbf{P}_{L/K}} c_1(E_1) \dots c_1(E_n). \end{aligned}$$

10.7.13. — Soit K' une extension de K. Choisissons un modèle propre $(V, (F_i))$ de la famille des E_i. Le K'-schéma $V' = K' \otimes_k L$ possède alors r composantes irréductibles $V_1, \dots, V_r$ (considérées comme munies de la structure réduite), qui sont toutes de dimension n (on se ramène à l'énoncé non gradué analogue grâce au lemme 10.3.5). Notons $\mathscr{O}_j$ local de V' au point générique de V_j, notons m_j sa longueur et L_j son corps gradué résiduel, c'est-à-dire le corps gradué des fonctions de V_j. Remarquons que $K' \otimes_K L$ est noethérien (en écrivant L comme corps gradué des fractions de $\mathscr{O}_V(U)$ où U est un ouvert affine non vide de V, on voit en effet que $K' \otimes_K L$ est un localisé d'un anneau gradué noethérien) et que les $\mathscr{O}_j$ sont ses localisés en ses différents idéaux premiers gradués

minimaux. Les $\mathscr{O}_j$, les m_j et les L_j ne dépendent donc que de K' et pas du choix du modèle V. Pour tout (i,j), notons E_{ij} l'image réciproque de E_i sur $\mathbf{P}_{L_j/K'}$.

Pour tout i et tout j notons F_i' l'image réciproque de F_i sur V' et F_{ij} son image réciproque sur V_j. Pour tout indice j la famille $(V_j, (F_{ij})_i)$ est alors un modèle propre de la famille $(E_{ij})_i$. Il vient

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{P}_{L/K}} c_1(E_1)\dots c_1(E_n) &= \int_V c_1(F_1)\cdots c_1(F_n)\\ &= \int_{V'} c_1(F_1')\cdots c_1(F_n')\\ &= \sum_j m_j \int_{V_j} c_1(F_{1j})\cdots c_1(F_{nj})\\ &= \sum_j m_j \int_{\mathbf{P}_{L_j/K'}} c_1(E_{1j})\dots c_1(E_{nj}).,\end{aligned}$$

où la troisième égalité résulte du lemme 10.4.8 *c*).

Mentionnons un cas particulier important : si $K'\otimes_K L$ est intègre, si l'on désigne par L' son corps gradué des fractions et par E_i' l'image réciproque de E_i sur $\mathbf{P}_{L'/K'}$ on a alors

$$\int_{\mathbf{P}_{L/K}} c_1(E_1)\dots c_1(E_n) = \int_{\mathbf{P}_{L'/K'}} c_1(E_1')\dots c_1(E_n').$$

10.7.14. — Soit $(E_1,\dots,E_m)$ une famille finie de fibrés en droites sur $\mathbf{P}_{L/K}$ et soit $(V,F_1,\dots,F_m)$ un pré-modèle de $(\mathbf{P}_{L/K},E_1,\dots,E_m)$; remarquons que V est propre. Nous dirons que $c_1(E_1)\dots c_1(E_m)$ est numériquement effectif si $c_1(F_1)\dots,c_1(F_m)$ est numériquement effectif (10.4.11), ce qui ne dépend pas du choix du pré-modèle V. Nous dirons qu'un fibré en droites E sur $\mathbf{P}_{L/K}$ est numériquement effectif si $c_1(E)$ est numériquement effectif. Tout fibré en droites sur $\mathbf{P}_{L/K}$ engendré par ses sections globales est numériquement effectif.

Soit L' une extension de L et soit K' un sous-corps gradué de L' contenant K. Pour tout i notons E_i' l'image réciproque de E_i sur $\mathbf{P}_{L'/K'}$. Si $c_1(E_1)\dots c_1(E_m)$ est numériquement effectif il en va de même de $c_1(E_1')\dots c_1(E_m')$: cela résulte de la préservation du caractère numériquement effectif par morphismes propres et extension des scalaires (voir 10.4.11).

Exemple 10.7.15. — Soit D une droite vectorielle graduée sur L et soit t un élément homogène non nul de D. Soit $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie d'éléments de $L^\times$ algébriquement indépendants sur K telle que $K=K(a_i)_i$ et soit E le fibré en droites sur $\mathbf{P}_{L/K}$ dont la fibre générique est D et dont la métrique est telle que $v(t^{-1})=\max(1,v(a_1),\dots,v(a_n))$ (lemme 10.6.18). L'exemples 10.7.10 exhibe un modèle de $(\mathbf{P}_{L/K},E)$ de la forme $(\mathbf{P}^r_K,\mathscr{O}(1)[s])$ (pour un certain polyrayon s et un certain $s>0$). On déduit alors de l'exemple 10.4.10 et de la remarque 10.4.9 on voit que $\int_{\mathbf{P}_{L/K}} c_1(E)^n=1$.

§ 10.8. RÉDUCTION GRADUÉE DES ANNEAUX ET MODULES NORMÉS

Nous allons ici présenter la théorie de la réduction graduée des anneaux et modules normés telle qu'introduite par Temkin dans [**127**], en insistant sur le cas particulier majeur des corps ultramétriques.

10.8.1. Réduction graduée. — Soit M un groupe abélien muni d'une semi-norme ultramétrique $\|\cdot\|$, c'est-à-dire d'une application $\|\cdot\|\colon M \to \mathbf{R}_+$ telle que

$$\|0\| = 0, \quad \|(-m)\| = \|m\| \quad \text{et} \quad \|m+n\| \leqslant \max(\|m\|, \|n\|)$$

pour tout (m,n). On pose

$$\widetilde{M} = \bigoplus_{r>0} \{m \in M, \|m\| \leqslant r\}/\{m \in M, \|m\| < r\}.$$

La loi interne de M induit une loi interne sur $\widetilde{M}$ qui en fait un groupe abélien gradué. Dans ce contexte, si μ est un élément homogène de $\widetilde{M}$ nous poserons $\|\mu\| = 0$ si μ est nul, et nous désignerons sinon par $\|\mu\|$ le degré de l'unique composante homogène contenant μ (si la semi-norme de M est notée $|\cdot|$, nous écrirons $|\mu|$ plutôt que $\|\mu\|$). Si m est un élément de M et si r est un réel strictement positif tel que $r \geqslant m$, on notera $\widetilde{m}_r$ l'image de a dans $\widetilde{A}_r$. Nous désignerons par $\widetilde{m}$ (sans indice) l'élément homogène de $\widetilde{M}$ égal à $\widetilde{m}_{\|m\|}$ si $\|m\|$ est non nul, et à 0 sinon. Si N est un sous-groupe dense de M pour la topologie définie par $\|\cdot\|$ il résulte des définitions que $\widetilde{N} = \widetilde{M}$. .

Soit A un anneau muni d'une semi-norme ultramétrique et sous-multiplicative $\|\cdot\|$. (nous incluons dans la définition le fait que $\|1\| \leqslant 1$, ce qui entraîne que $\|1\| = 1$ ou $\|1\| = 0$, ce dernier cas n'étant possible que si $\|\cdot\|$ est identiquement nulle). La multiplication de A induit alors une loi interne sur le groupe abélien gradué $\widetilde{A}$ qui en fait un anneau gradué ; nous l'appellerons *l'anneau gradué résiduel* de A.

L'anneau gradué $\widetilde{A}$ est intègre si et seulement si $\|\cdot\|$ est multiplicative (nous incluons dans la définition le fait que $\|1\| = 1$).

Remarquons que $\widetilde{A}^1$ est l'anneau résiduel classique $\{a \in A, \|a\| \leqslant 1\}/\{a \in A, \|a\| < 1\}$ de A, et que l'application $a \mapsto \widetilde{a}^1$ de A vers $\widetilde{A}^1$ est l'application de réduction classique.

Si k est un corps ultramétrique complet, son anneau gradué résiduel $\widetilde{k}$ est un corps gradué, que nous appellerons le corps gradué résiduel de k.

Soit M un A-module muni d'une semi-norme $\|\cdot\|$ telle que $\|am\| \leqslant \|a\| \cdot \|m\|$ pour tout (a,m). La loi externe de M induit alors une loi de $\widetilde{A} \times \widetilde{M}$ vers $\widetilde{M}$ qui fait de ce dernier un $\widetilde{A}$-module gradué.

10.8.2. — Soit A un anneau muni une semi-norme sous-multiplicative $\|\cdot\|$, et soit M un A-module muni d'une semi-norme $\|\cdot\|$ telle que $\|am\| \leqslant \|a\| \cdot \|m\|$ pour tout (a,m). Soit $m = (m_i)$ une famille d'éléments de A tels que $\|m_i\| \neq 0$ pour tout i.

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments presque tous nuls de A. Supposons que les $\|a_i\|$ sont non toutes nulles, soit r le maximum des $\|a_i\| \cdot \|m_i\|$, et soit I' l'ensemble des indices i tels que $\|a_i\| \cdot \|m_i\| = r$. Posons $n = \sum_{i\in I} a_i m_i$. On a alors $\|n\| \leqslant r$ et $\widetilde{n}_r = \sum_{i\in I'} \widetilde{a}_i \widetilde{m_i}$. On a $\|n\| < r$ si et seulement si $\sum_{i\in I'} \widetilde{a}_i \widetilde{m}_i = 0$, et si $\|n\| = r$ alors $\widetilde{n} = \sum_{i\in I'} \widetilde{a}_i \widetilde{m_i}$.

Il en résulte que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) On a $\|\sum a_i m_i\| = \sup_i \|a_i\| \cdot \|m_i\|$ pour toute famille (a_i) de scalaires presque tous nuls (notons que $\sup_i \|a_i\| \cdot \|m_i\| = \max_i \|a_i\| \cdot \|m_i\|$ dès que I est non vide) ;

(ii) La famille $(\widetilde{m_i})_i$ d'éléments homogènes de $\widetilde{M}$ est libre sur $\widetilde{A}$.

Et si elles sont satisfaites alors pour toute famille (a_i) d'éléments de A presque tous nuls, la réduction $\widetilde{\sum a_i m_i}$ est égale à $\sum_{i\in I'} \widetilde{a}_i \widetilde{m_i}$ où I' désigne l'ensemble des indices i tels que $\|a_i\| \cdot \|m_i\| = \sup_j \|a_j\| \cdot \|m_j\|$.

10.8.3. — Soit k un corps ultramétrique complet et soit A une k-algèbre munie d'une semi-norme multiplicative $\|\cdot\|$. Soit (a_i) une famille d'éléments de A tels que les $\|a_i\|$ soient tous non nuls. On a $\|a^J\| = \|a\|^J$ et donc $\widetilde{a^J} = \widetilde{a}^J$ pour tout multi-exposant J. Il résulte alors de 10.8.2 appliqué à la famille $(a^J)_J$ du k-espace vectoriel semi-normé A que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) On a $\|\sum \lambda_J a^J\| = \max|\lambda_J| \cdot \|a^J\|$ pour toute famille (λ_J) de scalaires presque tous nuls ;

(ii) La famille $(\widetilde{a_i})_i$ d'éléments homogènes de $\widetilde{A}$ est algébriquement indépendante sur $\widetilde{k}$.

Et si elles sont satisfaites alors pour toute famille (λ_J) de scalaires presque tous nuls, la réduction $\widetilde{\sum \lambda_J a^J}$ est égale à $\sum_{J\in E} \widetilde{\lambda}_J \widetilde{a}^J$ où E désigne l'ensemble des multi-indices J tels que $|\lambda_J| \cdot \|a\|^J = \max_N |\lambda_N| \cdot \|a\|^N$.

Exemple 10.8.4. — Soit k un corps ultramétrique et soit $r = (r_1, \dots, r_n)$ un polyrayon de longueur finie. Posons $T = (T_1, \dots, T_n)$ et notons A la k-algèbre $k[T]$ munie de la norme multiplicative $\sum a_I T^I \mapsto \max|a_I| r^I$. On déduit de l'équivalence (i) $\iff$ (ii) de 10.8.3, appliquée à la famille $(T_1, \dots, T_n)$ de A, que le morphisme de $\widetilde{k}$-algèbres graduées de $\widetilde{k}[\tau/r]$ vers $\widetilde{A}$ envoyant τ_i sur $\widetilde{T}_i$ est un isomorphisme.

Soit K le corps des fractions de A, muni de la valeur absolue induite par la norme de A. Par ce qui précède, il existe un isomorphisme de $\widetilde{k}$-extensions graduées entre $\widetilde{k}(\tau/r)$ et $\widetilde{K}$, qui envoie τ_i sur T_i.

10.8.5. — Soit $k \hookrightarrow L$ une extension de corps ultramétriques. Nous allons voir que quelques invariants classiques se décrivent en un sens plus simplement en termes de réductions graduées.

Posons $e = (|L^\times| : |k^\times|)$ et $f = [\widetilde{L}^1 : \widetilde{k}^1]$ (autrement dit, e et f sont les indices de ramification et d'inertie de L sur k). Par construction des corps gradués résiduel, $|\widetilde{k}^\times| = |k^\times|$ et $|\widetilde{L}^\times| = |L^\times|$. Il vient

$$ef = (|\widetilde{L}^\times| : |\widetilde{k}^\times|)[\widetilde{L}^1 : \widetilde{k}^1] = [\widetilde{L} : \widetilde{k}],$$

où la seconde égalité provient de 10.1.9.

Soit (α_i) une base de $\widetilde{L}$ sur $\widetilde{k}$. Pour tout i, choisissons un élément a_i de $L^\times$ tel que $\widetilde{a_i} = \alpha_i$. Pour toute famille (λ_i) d'éléments de k presque tous nuls on a en vertu de 10.8.2 l'égalité $|\sum \lambda_i a_i| = \max_i |\lambda_i| \cdot |a_i|$. En particulier, la famille (a_i) est libre, si bien que $[\widetilde{L} : \widetilde{k}] \leqslant [L : k]$.

Supposons que k est hensélien (ce sera toujours le cas en pratique dans ce travail, où nous travaillerons avec des corps ultramétriques complets) et que L est une extension finie de k. On appelle *défaut* de L sur k le quotient $\frac{[L:k]}{[\widetilde{L}:\widetilde{k}]}$, et on dit que l'extension est sans défaut si ce défaut vaut 1. Le défaut est toujours une puissance de l'exposant caractéristique résiduel, et il vaut donc automatiquement 1 lorsque la caractéristique

résiduelle est nulle. Le corps hensélien k est dit *stable* si toutes ses extensions finies sont sans défaut. Si k est complet et de valuation discrète ou s'il est de caractéristique résiduelle nulle, il est stable.

Ne supposons plus nécessairement k hensélien, ni L fini sur k. Soit (β_j) une base de transcendance de $\widetilde{L}$ sur $\widetilde{k}$. Pour tout j, choisissons un élément b_j de $L^\times$ tel que $\widetilde{b_j} = \alpha_i$. Posons $b = (b_j)$. Si $(\lambda_J)_J$ est une famille d'éléments de k presque tous nuls paramétrée par les multi-exposants J on a en vertu de 10.8.3 l'égalité $|\sum \lambda_J b^J| = \max_i |\lambda_J| \cdot |b|^J$. En particulier, la famille (b_j) est algébriquement indépendante, si bien que le degré de transcendance de $\widetilde{L}$ sur $\widetilde{k}$ est inférieur ou égal à celui de L sur k. Rappelons par ailleurs que l'on a

$$\begin{aligned}\operatorname{degtr}(\widetilde{L}/\widetilde{k}) &= \operatorname{degtr}(\widetilde{L}^1/\widetilde{k}^1) + \dim_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} |\widetilde{L}^\times|/|\widetilde{k}^\times|) \\ &= \operatorname{degtr}(\widetilde{L}^1/\widetilde{k}^1) + \dim_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} |L^\times|/|k^\times|)\end{aligned}$$

où la première égalité provient de 10.1.9. On obtient ainsi l'inégalité d'Abhyankar

$$\operatorname{degtr}(\widetilde{L}^1/\widetilde{k}^1) + \dim_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} |L^\times|/|k^\times|) \leqslant \operatorname{degtr}(L/k).$$

Lorsque L est de type fini sur k, on dit que L est une extension d'Abhyankar de k si l'inégalité d'Abhyankar est une égalité.

CHAPITRE 11

RAPPELS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

---

§ 11.1. GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE : CONVENTIONS, NOTATIONS, PREMIERS RAPPELS

On fixe pour toute la suite de l'article un corps ultramétrique complet k ; *sa valeur absolue peut être triviale.* On note k° son anneau de valuation. Nous désignerons par $\widetilde{k}$ le corps *gradué* résiduel de k (10.8.1). Sa composante $\widetilde{k}^1$ de degré 1 est le corps résiduel standard de k, c'est-à-dire le corps résiduel de l'anneau local k°.

Dans ce texte, la notion d'espace k-analytique sera à prendre *au sens de Berkovich*, et plus précisément de [**9**]. Rappelons qu'un polyrayon est une famille (le plus souvent finie) de nombres réels strictement positifs ; la *longueur* d'un polyrayon est le cardinal de son ensemble d'indices. Faisons quelques rappels pour la commodité du lecteur.

11.1.1. — La construction fondamentale sur laquelle repose la géométrie de Berkovich est la suivante. Soit A un anneau de Banach, c'est-à-dire un anneau A muni d'une norme sous-multiplicative $\|\cdot\|$ (on inclut dans la définition le fait que $\|1\| \leqslant 1$, ce qui entraîne que $\|1\| = 1$ dès que A est non nul) pour laquelle il est complet. À un tel anneau A on associe son spectre analytique $\mathscr{M}(A)$, qui est défini comme l'ensemble des semi-normes multiplicatives bornées sur A, c'est-à-dire des applications $\varphi\colon A \to \mathbf{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :

– on a $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(f+g) \leqslant \varphi(f) + \varphi(g)$ pour tous $f, g \in \mathscr{A}$ (propriété de semi-norme) ;
– on a $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$ pour tout $f, g \in A$ (multiplicativité) ;
– il existe un nombre réel c tel que $\varphi(f) \leqslant c\|f\|$ pour tout $f \in A$ (caractère borné de φ).

Notons qu'on impose que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 1$: si A est nul, $\mathscr{M}(A)$ est donc vide. Cet ensemble $\mathscr{M}(A)$ est muni de la topologie la moins fine pour laquelle les applications $\varphi \mapsto \varphi(f)$ sont continues pour tout $f \in A$. L'application $\varphi \mapsto (\varphi(a))_{a\in A}$ identifie topologiquement $\mathscr{M}(A)$ à un fermé de l'espace produit $\prod_{a\in A}[0, \|a\|]$, si bien que $\mathscr{M}(A)$ est compact. Si φ appartient à $\mathscr{M}(A)$, son noyau est un idéal premier de A, et l'application

$\varphi \mapsto \ker\varphi$ de $\mathscr{M}(A)$ vers $\operatorname{Spec} A$ est continue. Son image contient tous les idéaux maximaux de A (c'est ce qui est réellement démontré dans la preuve du théorème 1.2.1 de [**8**]) ; en particulier $\mathscr{M}(A)$ est non vide dès que A est non nul.

En général, on note typiquement plutôt x que φ un élément de $\mathscr{M}(A)$, en y pensant comme à un point. Soit $x \in \mathscr{M}(A)$. La semi-norme multiplicative x induit une valeur absolue sur le corps des fractions de l'anneau intègre $\mathscr{A}/\ker x$, corps des fractions dont le complété est noté $\mathscr{H}(x)$. L'application composée $\mathscr{A} \to \mathscr{A}/\ker x \to \mathscr{H}(x)$ sera notée $f \mapsto f(x)$, et la valeur absolue du corps complet $\mathscr{H}(x)$ sera notée $|\cdot|$; avec ces conventions on a $x(f) = |f(x)|$ pour toute $f \in A$ et nous utiliserons sauf exception la notation de droite. Cette construction est fonctorielle : tout morphisme borné $A \to B$ d'anneaux de Banach induit par composition une application continue de $\mathscr{M}(B)$ vers $\mathscr{M}(A)$.

La semi-norme spectrale de A est la semi-norme ρ commutant aux puissances définie par les formules

$$\rho(f) = \sup_{x\in\mathscr{M}(A)} |f(x)| = \liminf_{n\to\infty} \|f^n\|^{1/n} = \inf_{n\to\infty} \|f^n\|^{1/n}$$

(voir [**8**], 1.3, pour les deux dernières égalités). Nous désignerons par A° (resp. $A^{\circ\circ}$) l'ensemble des éléments f de A tels que $\rho(f) \leqslant 1$ (resp. $\rho(f) < 1$), et par $\widetilde{A}$ l'anneau gradué résiduel de A (10.8.1) relativement à ρ. Sa composante $\widetilde{A}^1$ est l'anneau résiduel standard $A^\circ/A^{\circ\circ}$.

Supposons maintenant que A est une k-algèbre et que sa norme est une norme de k-espace vectoriel. Dans ce cas $\lambda \mapsto |\lambda(x)|$ définit pour tout $x \in \mathscr{M}(A)$ une valeur absolue sur k bornée relativement à la valeur absolue structurale de k, ce qui entraîne que $|\lambda(x)| = |\lambda|$ pour tout λ : la semi-norme x induit donc la valeur absolue structurale de k, et $(\mathscr{H}(x), |\cdot|)$ est une extension de $(k, \cdot)$. Comme la valeur absolue de k est ultramétrique, celle de $\mathscr{H}(x)$ l'est aussi (une valeur absolue $|\cdot|$ étant ultramétrique si et seulement si $|n| \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$). On a donc dans ce cas $|(f+g)(x)| \leqslant \max(|f(x)|, |g(x)|)$ pour tout f, g dans A, puis $\rho(f+g) \leqslant \max(\rho(f), \rho(g))$ (comme on le voit en faisant varier x).

11.1.2. — Soit n un entier. Pour tout polyrayon $r = (r_1, \dots, r_n)$, nous désignerons par $k\{r_1^{-1}T_1, \dots, r_n^{-1}T_n\}$ la sous-algèbre de $k[[T_1, \dots, T_n]]$ formée des séries formelles $f = \sum_{\nu\in\mathbf{N}^n} a_\nu T^\nu$ telles que $a_\nu r^\nu = a_\nu r_1^{\nu_1} \dots r_n^{\nu_n}$ converge vers 0 lorsque $|\nu| = \sum|\nu_j|$ tend vers $+\infty$. On la munit de la norme multiplicative ultramétrique définie par $\|f\| = \max|a_\nu| r^\nu$. Pour abréger les notations, on notera aussi $k\{r^{-1}T\}$ cette algèbre. C'est une algèbre de Banach dont tous les idéaux sont fermés et de type fini.

Soit maintenant A une k-algèbre de Banach commutative (par convention, dans cet ouvrage, les normes de k-algèbres seront toujours ultramétriques). On dit que A est une algèbre k-affinoïde s'il existe un entier n, un polyrayon $(r_1, \dots, r_n)$ et une surjection de $k\{r^{-1}T\}$ vers A telle que la norme de A soit équivalente à la norme quotient correspondante. On dit que A est *strictement* k-affinoïde si l'on peut de plus prendre $r_j = 1$ pour tout j. Pour que A soit strictement k-affinoïde, il suffit en fait que l'on puisse prendre les r_j de torsion modulo $|k^\times|$ ([**20**] 6.1.5/4).

Une k-algèbre de Banach A est dite affinoïde s'il existe une extension valuée complète K de k telle que A soit une algèbre K-affinoïde.

Si A est une k-algèbre affinoïde l'application continue naturelle de $\mathscr{M}(A)$ vers $\operatorname{Spec} A$ est surjective ([**9**], Proposition 2.1.1).

Soit A une k-algèbre affinoïde et soit ρ sa semi-norme spectrale. L'algèbre A est noethérienne, et ses idéaux sont fermés. Pour tout $f \in A$ on a $\rho(f) = 0$ si et seulement

si f est nilpotent. En particulier, ρ est une norme si et seulement si A est réduite et si c'est le cas, ρ est équivalente à la norme structurale de A.

Exemple 11.1.3. — Soit $r = (r_i)$ un polyrayon de longueur finie. Soit $T = (T_i)$ une famille d'indéterminées et soit k_r la k-algèbre constituée des séries formelles $\sum_{I\in\mathbf{Z}^n} a_I T^I$ à coefficients dans k, où $|a_I|\cdot r^I$ tend vers zéro quand $|I|$ tend vers l'infini, munie de la norme $\sum a_I T^I \mapsto \max|a_I|\cdot r^I$. La k-algèbre normée k_r est une k-algèbre affinoïde : elle est en effet isomorphe à $k\{r^{-1}T, rS\}/(ST-1)$. Sa norme est multiplicative ([**48**], 1.2.1). Supposons de plus que r soit *k-libre*, c'est-à-dire que les r_i soient $\mathbf{Q}$-linéairement indépendants dans $\mathbf{Q}\otimes_{\mathbf{Z}}(\mathbf{R}_+^\times/|k^\times|)$. Dans ce cas k_r est un corps ([**48**], 1.2.2), et c'est donc à la fois une extension complète de k et une algèbre k-affinoïde.

Remarque 11.1.4. — Soit $A = k\{r^{-1}T\}$ une algèbre k-affinoïde, où $r = (r_i)$ est un polyrayon de longueur finie. Choisissons un ensemble J d'indices tel que le polyrayon $s := (r_j)_{j\in J}$ soit k-libre et qui soit maximal pour cette propriété. Chacun des r_i est alors de torsion modulo $|k^\times|\cdot\prod_{j\in J} r_i^{\mathbf{Z}}$, si bien que la k_s-algèbre de Banach $A\widehat{\otimes}_k k_s$ est strictement k_s-affinoïde.

11.1.5. — Soit $\mathscr{A}$ une algèbre k-affinoïde ; posons $X = \mathscr{M}(\mathscr{A})$. Une partie V de X est appelée un *domaine affinoïde* de X si le foncteur qui envoie une k-algèbre de Banach affinoïde $\mathscr{B}$ sur l'ensemble des morphismes bornés de $\mathscr{A}$ vers $\mathscr{B}$ tels que l'image de $\mathscr{M}(\mathscr{B})$ soit contenue dans V est représentable par une algèbre k-affinoïde A_V. Si c'est le cas, $\mathscr{M}(A_V)\simeq V$.

Un *système rationnel d'inéquations* sur X est une combinaison booléenne d'inégalités qui est de la forme

$$|f_1|\leqslant\lambda_1|g| \text{ et } |f_2|\leqslant\lambda_2|g| \text{ et } \ldots \text{ et } |f_n|\leqslant\lambda_n|g|$$

où g et les f_i sont des fonctions analytiques sur X sans zéro commun, et où les λ_i sont des réels.

Si β est un système rationnel d'inéquations sur X, on notera $\mathring{\beta}$ le système défini à partir de β en remplaçant toutes inégalités larges par les inégalités strictes correspondantes.

Soit

$$\beta : |f_1|\leqslant\lambda_1|g| \text{ et } |f_2|\leqslant\lambda_2|g| \text{ et } \ldots \text{ et } |f_n|\leqslant\lambda_n|g|$$

un système rationnel d'inéquations sur X.

On qualifiera de *rationnel* le lieu de X défini par un tel système d'inéquations. C'est un domaine affinoïde de X, avec

$$A_V\simeq k\{T_1/\lambda_1,\ldots,T_n/\lambda_n\}/(f_i-T_ig)_i.$$

Notons que si g s'annulait en un point de V, il en irait de même de chacune des f_i ; en conséquence, $g|_V$ est inversible.

Tout point de X possède une base de voisinages rationnels, en particulier une base de voisinages affinoïdes. Plus précisément, pour tout $x\in X$ et tout voisinage ouvert U de x, il existe un système rationnel d'inéquations β dont le lieu de validité est contenu dans U, et tel que x satisfasse $\mathring{\beta}$.

11.1.6. — Le théorème de Gerritzen-Grauert affirme que tout domaine affinoïde de X est réunion finie de domaines rationnels (pour le cas non strict, voir [**47**], lemme 2.4 ; pour une preuve directe, voir aussi [**128**], théorème 3.1). Il en résulte que si x est un point de X situé sur un domaine affinoïde V de X, le corps résiduel complété $\mathscr{H}(x)$ ne dépend pas du fait que l'on voie x comme appartenant à $V=\mathscr{M}(A_V)$ ou à $X=\mathscr{M}(A)$.

11.1.7. — À partir des espaces affinoïdes, Berkovich définit dans [**9**] la catégorie des espaces k-analytiques par un procédé de recollement un peu délicat qu'il serait trop long de décrire ici en détail ; nous allons tout de même rappeler quelques faits. Suivant Berkovich, si X est un espace topologique et si (X_i) est une famille de parties de X, nous dirons que les X_i constituent un *G-recouvrement* de X si tout point x de X possède un voisinage de la forme $\bigcup_{i\in J} X_i$ où J est fini et où $x \in X_i$ pour tout $i \in J$. Si l'on ne s'astreint à recoller que des espaces strictement affinoïdes, on obtient la classe des espaces strictement k-analytiques.

Soit X un espace k-analytique. C'est en particulier un espace topologique dont tout point possède une base de voisinages compacts (mais X n'est pas nécessairement localement compact puisqu'un espace topologique localement compact est *par définition* séparé, et que ce n'est pas forcément le cas de X). L'espace X possède par ailleurs une classe distinguée de partie compactes, ses *domaines affinoïdes* (si $X = \mathscr{M}(\mathscr{A})$, les domaines affinoïdes de X sont précisément ceux décrits au 11.1.5 ci-dessus). Un *domaine analytique* de X est une partie de X qui est G-recouverte par les domaines affinoïdes qu'elle contient. Tout domaine affinoïde de X est un domaine analytique de X ; plus généralement, tout compact de X qui est une union finie de domaines analytiques de X est un domaine analytique. Et tout ouvert de X (et notamment X lui-même) est un domaine analytique. En particulier, tout point x de X possède un voisinage compact qui est une réunion finie de domaines affinoïdes contenant x. Les espaces définis dans [**8**] sont ceux qui sont qualifiés de *bons* dans [**9**], c'est-à-dire ceux dont tout point admet un voisinage affinoïde (et donc une base de voisinages affinoïdes.) Tout domaine analytique de X est une partie localement fermée de X : l'intersection d'une famille finie de domaines analytiques est un domaine analytique ; la réunion d'une famille localement finie de domaines analytiques fermés est un domaine analytique.

Tout domaine analytique V de X hérite d'une structure canonique d'espace analytique, et d'un morphisme $V \hookrightarrow X$ dont l'application sous-jacente est l'inclusion. Tout morphisme $f\colon Y \to X$ se factorisant ensemblistement par V se factorise en fait uniquement par la structure analytique de V.

11.1.8. La G-topologie. — Soit X un espace k-analytique. En plus du site topologique sur X on définit un second site plus fin, noté X_{G}. Ses objets sont les domaines analytiques de X, ses flèches sont les inclusions, et ses familles couvrantes sont les G-recouvrements. La topologie de ce site est appelée la G-topologie de X.

Comme tout ouvert de X est un domaine analytique et comme tout recouvrement ouvert est un G-recouvrement, on dispose d'un morphisme de site canonique $\pi\colon X_{\mathrm{G}} \to X$. L'unité d'adjonction $\mathrm{id} \to \pi_*\pi^*$ est un isomorphisme ([**9**], p. 26).

Le site X_{G} est annelé. Nous noterons $\mathscr{O}_X$ le faisceau structural de X_{G}. Sauf mention du contraire, lorsque nous parlerons de faisceaux cohérents sur X, il s'agira plus précisément de $\mathscr{O}_X$-module cohérents sur X_{G}. Précisons que le faisceau $\mathscr{O}_X$ ainsi que sa restriction au site topologique usuel de X sont cohérents ([**49**], lemme 0.1 ; pour la correction d'une petite erreur dans la preuve, signalée par Jérôme Poineau, voir [**52**], 1.1.1). Si $X = \mathscr{M}(A)$ alors $\mathscr{O}_X(X) = A$.

Tout morphisme $f\colon Y \to X$ entre espaces analytiques est en particulier un morphisme de sites annelés : si V est un domaine analytique de Y alors $f^{-1}(V)$ est un domaine analytique de X et l'on dispose d'un morphisme $f^*\colon \mathscr{O}_X(V) \to \mathscr{O}_Y(f^{-1}(V))$. Si X est un espace k-affinoïde $\mathscr{M}(A)$ et si Y est un espace affinoïde $\mathscr{M}(B)$ sur une extension de

k, l'application $f \mapsto f^*$ établit une bijection entre l'ensemble des k-morphismes de Y vers X et l'ensemble des morphismes bornés de k-algèbres de A vers B.

Si $X = \mathscr{M}(A)$ est un espace k-affinoïde et si M est un A-module de type fini, le faisceau $\widetilde{M}$ sur X_{G} associé au préfaisceau $V \mapsto M \otimes_A \mathscr{O}_X(V)$ est cohérent. Le foncteur $M \mapsto \widetilde{M}$ établit une équivalence entre la catégorie des A-modules de type fini et celle des faisceaux cohérents sur X, de quasi-inverse $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}(X)$ (*cf.* [**9**] ; ce résultat est dû à Kiehl dans le cas strictement affinoïde).

Lorsque X est bon, le foncteur π_* induit une équivalence de catégories entre faisceaux cohérents sur X_{G} et faisceaux cohérents sur X, et qu'un faisceau cohérent $\mathscr{F}$ sur X_{G} est localement libre si et seulement si c'est le cas de $\pi_*\mathscr{F}$ ([**9**], 1.3.4 ; notons que la définition de faisceau cohérent qu'il utilise dans cette proposition est *ad hoc*, mais qu'elle coïncide bien en fait avec la notion usuelle au vu de la cohérence des faisceaux structuraux sur les deux sites annelés en jeu).

11.1.9. Produits fibrés, extension des scalaires. — La catégorie des espaces k-analytiques admet des produits fibrés. Si $A \to B$ et $A \to C$ sont deux morphismes d'algèbres k-affinoïdes, $\mathscr{M}(B) \times_{\mathscr{M}(A)} \mathscr{M}(C) = \mathscr{M}(B \widehat{\otimes}_A C)$.

Si L est un extension complète de k on dispose d'un foncteur d'extension des scalaires $X \mapsto X_L$ de la catégorie des espaces k-analytiques vers celle des espaces L-analytiques. Si $X = \mathscr{M}(A)$ alors $X_L = \mathscr{M}(A \widehat{\otimes}_k L)$. En général on dispose d'un morphisme naturel de sites annelés de X_L vers X, qui est surjectif (*cf.* [**48**], 0.5).

Supposons X bon, soit y un point de X_L et soit x son image sur X. Le morphisme naturel de $\operatorname{Spec} \mathscr{O}_{X_L,y}$ vers $\operatorname{Spec} \mathscr{O}_{X,x}$ est plat à fibres localement d'intersection complète, et à fibres géométriquement régulières si L est *analytiquement séparable* sur k ; c'est le théorème [**52**], th. 2.6.5. La notion d'extension analytiquement séparable est définie dans [**49**] (définition 1.6). Une extension finie de k est analytiquement séparable si et seulement si elle est séparable ; si r est un polyrayon de longueur finie et k-libre, k_r est une extension analytiquement séparable de k ; si k est parfait, toute extension complète de k est analytiquement séparable.

On définit la catégorie des espaces analytiques au-dessus de k comme la catégorie dont les objets sout les couples (X, L) où L est une extension complète de k et X un espace L-analytique. Un mrophisme de (X, L) vers (Y, M) est un couple formé d'un k-morphisme de M vers L et d'un morphisme d'espaces L-analytiques de X vers Y_L.

Cette catégorie n'admet pas tous les produits fibrés (par exemple $\mathscr{M}(\mathbf{C}_p) \times_{\mathscr{M}(\mathbf{Q}_p)} \mathscr{M}(C_p)$ n'existe pas en tant qu'espace analytique au-dessus de $\mathbf{Q}_p$) mais si $Y \to X$ est un morphisme d'espaces k-analytiques et $X' \to X$ un morphisme d'espaces analytiques au-dessus de k alors $Y \times_k X'$ existe : si L est le corps de définition fourni avec X', le produit fibté $Y \times_k X'$ est simplement le produit fibré $Y_L \times_{X_L} X'$, calculé dans la catégorie des espaces L-analytiques.

11.1.10. — Soit X un espace k-analytique, et soit $x \in X$.

On note $\mathscr{O}_{X,x}$ la fibre en x de la restriction de $\mathscr{O}_X$ à la catégorie des ouverts de X, c'est-à-dire la colimite des $\mathscr{O}_X(U)$ où U parcourt l'ensemble des voisinages ouverts de X. C'est un anneau local dont nous noterons $\kappa(x)$ le corps résiduel.

Lorsque X est bon, cet anneau est noethérien ([**9**], th. 2.1.4), hensélien ([**9**], th. 2.1.5) et excellent ([**49**], th. 2.13).

Au point x est également associé une extension ultramétrique complète $\mathscr{H}(x)$ de k, qu'on appelle le *corps résiduel complété* de x ; pour tout domaine analytique V de X

contenant x, on dispose d'un morphisme d'évaluation $f \mapsto f(x)$ de $\mathscr{O}_X(V)$ dans $\mathscr{H}(x)$. Si $X = \mathscr{M}(A)$, le corps $\mathscr{H}(x)$ et l'application $f \mapsto f(x)$ de A vers $\mathscr{H}(x)$ coïncident avec ceux définis en 11.1.1. Le corps résiduel $\kappa(x)$ de l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ se plonge naturellement dans $\mathscr{H}(x)$. On dira que X est *presque bon en* x si $\kappa(x)$ est dense dans $\mathscr{H}(x)$ et si le germe (X, x) est séparé, et qu'il est *presque bon* s'il est presque bon en tout point. Si X est presque bon en x, tout domaine analytique de X contenant x est encore presque bon en x. Un espace bon est presque bon. Le point x est traditionnellement dit *rigide* si $\mathscr{H}(x)$ est une extension finie de k (la terminologie provient du fait que ces points sont ceux considérés par Tate dans sa théorie des espaces analytiques rigides).

Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme entre espaces k-analytiques et soit $x \in X$. La fibre $f^{-1}(x)$ possède une structure naturelle d'espace $\mathscr{H}(x)$-analytique, et sera toujours implicitement considérée comme munie de cette structure. Nous la noterons souvent Y_x.

11.1.11. — Berkovich a construit ([**9**], 2.6) un foncteur d'analytification $\mathscr{X} \mapsto \mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ qui va de la catégorie des A-schémas localement de type fini vers celle des bons espaces k-analytiques. L'espace $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ est muni d'un morphisme d'espaces localement annelés $\mathscr{X}^{\mathrm{an}} \to \mathscr{X}$ qui est fidèlement plat ([**9**], Prop. 2.6.2). L'application π induit une bijection entre l'ensemble $\mathscr{X}_0^{\mathrm{an}}$ des points rigides de $\mathscr{X}$an et l'ensemble $\mathscr{X}_0$ des points fermés de $\mathscr{X}$, qui préserve les corps résiduels ; on en tire en particulier une bijection entre $\{x \in \mathscr{X}^{\mathrm{an}}, \mathscr{H}(x) = k$ et $\mathscr{X}(k)$, qui est un homéomorphisme (la source étant munie de la topologie induite par celle de $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$, et le but de la topologie déduite de celle de k). Si $|k^\times| \neq \{1\}$, l'ensemble $\mathscr{X}_0^{\mathrm{an}}$ est dense dans $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$.

Si x est un point de $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ d'image ξ sur $\mathscr{X}$, le morphisme local $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\xi} \to \mathscr{O}_{\mathscr{X}^{\mathrm{an}},x}$ est régulier ([**49**], théorème 3.3).

Donnons quelques détails sur la construction de $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ lorsque $\mathscr{X}$ est affine. Écrivons $\mathscr{X} = \operatorname{Spec} A$ où A est une k-algèbre de type fini. Topologiquement, $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ est l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur A qui induisent la valeur absolue structurale sur k, muni de la topologie induite par la topologie produit sur $\mathbf{R}^A$; le morphisme de $\mathscr{X}$an vers $\mathscr{X}$ envoie une semi-norme sur son noyau. Fixons un système fini de générateurs $a_1, \ldots, a_m$ de A, et soit I le noyau de la surjection $T_i \mapsto a_i$ de $k[T_1, \ldots, T_m]$ sur A. Pour tout $R > 0$ le sous-ensemble V_R de $\mathscr{X}$an constitué des points x tels que $|a_i(x)| \leqslant R$ pour tout i est un domaine affinoïde de $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$, d'algèbre affinoïde associée $k\{T_1/R, \ldots, T_n/R\}/I$. L'espace $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ est la réunion croissante des V_R, qui en constituent un G-recouvrement.

On dispose d'un théorème GAGA dans ce contexte : si $\mathscr{X}$ est propre et si π désigne le morphisme structural de $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ vers $\mathscr{X}$ alors $\mathscr{F} \mapsto \pi^*\mathscr{F}$ établit une équivalence entre la catégorie des faisceaux cohérents sur $\mathscr{X}$ et celle des faisceaux cohérents sur $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$, qui préserve les groupes de cohomologie ([**109**], annexe A).

Le foncteur d'analytification commute à la formation des produits fibrés.

Pour tout espace analytique X et tout entier n, l'application $f \mapsto (f^*T_1, \ldots, f^*T_n)$ met en bijection $\mathrm{Hom}(X, \mathbf{A}_k^{n,\mathrm{an}})$ et $\mathscr{O}_X(X)^n$.

Exemple 11.1.12. — Soit $r = (r_1, \ldots, r_n)$ un polyrayon. L'application $\sum a_I T^I \mapsto \max|a_I| \cdot r^I$ de $k[T_1, \ldots, T_n]$ vers $\mathbf{R}_+$ est une norme multiplicative prolongeant la valeur absolue de k. C'est donc un point η_r de $\mathbf{A}_k^{n,\mathrm{an}}$, situé au-dessus du point générique de $\mathbf{A}_k^n$. Le corps $\mathscr{H}(\eta_r)$ est le complété de $k(T_1, \ldots, T_n)$ pour la valeur absolue induite par η_r.

Lorsque r est k-libre le corps $\mathscr{H}(\eta_r)$ s'identifie au corps k-affinoïde k_r décrit en 11.1.3 (ce dernier contient en effet $k(T_1, \ldots, T_n)$ comme sous-corps dense), le singleton $\{\eta_r\}$ est

alors le domaine affinoïde de $\mathbf{A}_k^{n,\mathrm{an}}$ défini par les égalités $|T_i| = r_i$ pour tout i, et l'on a $\mathscr{O}_{\mathbf{A}_k^{n,\mathrm{an}}}(\{\eta_r\}) = k_r$.

***Exemple 11.1.13* (La droite affine).** — Pour tout $a \in k$ et tout réel r, notons $\eta_{a,r}$ l'application $\sum a_i(T-a) \mapsto \max|a_i|r^i$ de $k[T]$ vers $\mathbf{R}_+$. C'est une semi-norme multiplicative, et donc un point de $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$; si $r = 0$ c'est l'application $P \mapsto |P(a)|$ de noyau $(T-a)$, et $\eta_{a,0}$ est donc le k-point standard d'équation $T = a$; si $r > 0$ alors $\eta_{a,r}$ est une norme, ce qui revient à dire que $\eta_{a,r}$ est situé au-dessus du point générique de $\mathbf{A}_k^1$. On a $\eta_{a,r} = \eta_{b,s}$ si et seulement si $r = s \geqslant |b-a|$. Si $|k^\times|$ est dense dans $\mathbf{R}_+^\times$ on a $|P(\eta_{a,r})| = \sup_{b\in k,|b-a|\leqslant r}|P(b)|$.

On a $\mathscr{H}(\eta_{a,0}) = k$. Supposons $r > 0$ et posons $\tau = \widetilde{(T-a)}(\eta_{a,r})$.Il résulte de l'exemple 10.8.4 que τ est transcendant sur $\widetilde{k}$ et que $\widetilde{\mathscr{H}(\eta_{a,r})} = \widetilde{k}(\tau)$.

Donnons quelques précisions supplémentaires dans deux cas extrêmes. Si $r = |\lambda|$ avec $\lambda \in k^\times$ alors $\widetilde{\mathscr{H}(\eta_{a,r})} = \widetilde{k}(\tau/\widetilde{\lambda})$. Comme $|\tau/\widetilde{\lambda}| = 1$ on voit que $\widetilde{\mathscr{H}(\eta_{a,r})}^1$ est égal à $\widetilde{k}^1(\tau/\widetilde{\lambda})$, et est donc une extension rationnelle de degré de transcendance 1 de $\widetilde{k}^1$; de même, on a $|\mathscr{H}(\eta_{a,r})^\times| = |k^\times|$. Si $r \notin |k^\times|^{\mathbf{Q}}$ alors $\widetilde{\mathscr{H}(\eta_{a,r})}^1 = \widetilde{k}^1$ et $|\mathscr{H}(\eta_{a,r})^\times| = |k^\times|\cdot r^{\mathbf{Z}}$.

Supposons maintenant que k est algébriquement clos (auquel cas $|k^\times|$ est divisible). On démontre alors (voir **[8]**, 1.4.4) que tout point de $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ est de l'un des quatre types suivants.

– Les points de type I sont les points rigides, c'est-à-dire ceux pour lesquels $\mathscr{H}(x) = k$, ou encore les points de la forme $\eta_{a,0}$ pour $a \in k$.

– Les points de type II sont les points de la forme $\eta_{a,r}$ où $a \in k$ et où $r \in |k^\times|$. Si x est de type II le corps $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1$ est une extension rationnelle de degré de transcendance 1 de $\widetilde{k}^1$ et $|\mathscr{H}(x)^\times| = |k^\times|$. En particulier $d_k(x) = 1$.

– Les points de type III sont les points de la forme $\eta_{a,r}$ où $a \in k$ et où $r \notin |k^\times|$. Si x est de type III le corps $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1$ est égale à $\widetilde{k}^1$ et $|\mathscr{H}(x)^\times| = |k^\times| \cdot r^{\mathbf{Z}}$. En particulier $d_k(x) = 1$.

– Les points de type IV n'existent que si le corps k n'est pas maximalement complet, c'est-à-dire s'il existe des familles totalement ordonnées de boules fermées de k d'intersection vide (c'est par exemple le cas si $k = \mathbf{C}_p$, ou si k est le complété du corps des séries de Puiseux sur $\mathbf{C}$). Si $(B(a_i, r_i))_i$ est une telle famille de boules, le point x de type IV qu'on lui associe est la semi-norme $\inf_i \eta_{a_i,r_i}$, qui est en fait une norme. Le point x est donc situé au-dessus du point générique de $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$. Le corps complet $\mathscr{H}(x)$ est une extension immédiate de k, c'est-à-dire que $\widetilde{\mathscr{H}(x)} = \widetilde{k}$, ou encore que $\mathscr{H}(x)$ a même groupe des valeurs et même corps résiduel (au sens classique) que k ; et cette extension est stricte. On a $d_k(x) = 0$.

11.1.14. — Rappelons (**[36]**, chap. 1, §9, n° 10, définition 6, p. 69) qu'un espace topologique X est dit *paracompact* s'il est séparé et si tout recouvrement ouvert possède un raffinement qui est localement fini. Un espace compact est paracompact. Une partie fermée d'un espace paracompact est paracompacte.

Un espace localement compact est dit dénombrable à l'infini s'il est réunion dénombrable d'ensembles compacts ; un espace localement compact dénombrable à l'infini est

paracompact. Plus généralement, un espace topologique localement compact est paracompact si et seulement si c'est l'espace somme d'une famille d'espaces localement compacts dénombrables à l'infini (*loc. cit.*, théorème 5, p. 70).

***Lemme 11.1.15* (cf. [9], remarque 1.2.4 (iii)).** — *Un espace analytique possède une base de voisinages ouverts dénombrables à l'infini (et donc paracompacts).*

Cet énoncé figure dans [**8**, 2.2.8 et 3.2.1] pour les espaces affinoïdes ; nous détaillons ci-dessous les arguments de la remarque 1.2.4, (iii), de [**9**] qui l'en déduit.

Démonstration. — Soit x un point de X. Nous allons montrer que tout voisinage de x dans X contient un voisinage ouvert de x qui est dénombrable à l'infini. On peut pour ce faire restreindre X et donc le supposer topologiquement séparé. Le point x possède alors une base de voisinages compacts dans X qui sont des réunions finies de domaines affinoïdes contenant x. On peut donc supposer que X est compact et est une union finie $V_1 \cup V_2 \ldots \cup V_n$ de domaines affinoïdes contenant x ; on se donne un voisinage ouvert U de x dans X et on veut montrer qu'il contient un voisinage ouvert de x qui est dénombrable à l'infini. Raisonnons par récurrence sur n. Si $n = 1$ alors X est affinoïde et le résultat est connu dans ce cas comme on l'a rappelé. Supposons $n > 1$ et le résultat vrai pour $n - 1$. Posons $W = V_1 \cup \cdots \cup V_{n-1}$. Par récurrence, x possède un voisinage ouvert et dénombrable à l'infini Ω dans $W \cap U$, dont l'intersection ω avec V_n est un voisinage ouvert et dénombrable à l'infini de x dans $W \cap V_n \cap U$. Soit $(K_i)_{i \geqslant 0}$ une suite de parties compactes de $W \cap V_n$ telles que $\omega = \bigcup_{i \geqslant 0} K_i$ et $K_i \subset \overset{\circ}{K}_{i+1}$ pour tout i. Soit $i \geqslant 0$. Soit $y \in K_i$; il existe un voisinage Ω_y de y dans V_n tel que $\Omega_y \cap W \cap V_n \subset \overset{\circ}{K}_{i+1}$; par le cas affinoïde on peut supposer, quitte à le restreindre, que Ω_y est un ouvert dénombrable à l'infini de $V_n \cap U$. L'espace K_i étant compact, il est recouvert par un nombre fini de ces ouverts Ω_y de V_n ; leur réunion est un voisinage Ω_i de K_i dans $V_n \cap U$, ouvert et dénombrable à l'infini, tel que $\Omega_i \cap W \cap V_n \subset \overset{\circ}{K}_{i+1}$. La réunion Ω' des Ω_i est un voisinage ouvert de x dans $V_n \cap U$, ouvert et dénombrable à l'infini, et $\Omega' \cap W \cap V_n = \omega$. La réunion $\Omega \cup \Omega'$ est dénombrable à l'infini et contient x. On peut écrire $\Omega = \Upsilon \cap W$ et $\Omega' = \Upsilon' \cap V_n$ où Υ et Υ' sont deux ouverts de X contenus dans U. Quitte à remplacer Υ par son intersection avec le complémentaire dans X du compact $V_n - \omega$, on peut supposer que $\Upsilon \cap V_n = \omega$; et quitte à remplacer Υ' par son intersection avec le complémentaire dans X du compact $W - \omega$, on peut supposer que $\Upsilon' \cap W = \omega$. Mais on a alors $\Omega \cup \Omega' = \Upsilon \cup \Upsilon'$, si bien que $\Omega \cup \Omega'$ est un voisinage ouvert de x dans U. □

§ 11.2. TOPOLOGIE DE ZARISKI, THÉORIE DE LA DIMENSION

11.2.1. Topologie de Zariski. — Soit X un espace k-analytique. Pour tout faisceau cohérent d'idéaux $\mathscr{I}$ sur X on note $V(\mathscr{I})$ son lieu des zéros, c'est-à-dire l'ensemble des point x de X tel que $f(x) = 0$ pour toute section f de $\mathscr{I}$ définie sur un domaine analytique de X contenant x. Les parties de X de la forme $V(\mathscr{I})$ sont les fermés d'une topologie appelée *topologie de Zariski* de X.

Supposons que X est affinoïde, et écrivons $X = \mathscr{M}(A)$. Se donner un faisceau cohérent d'idéaux $\mathscr{I}$ sur X revient alors à se donner un idéal I de A (on a $\mathscr{I} = \widetilde{I}$ et $I = \mathscr{I}(X)$), et $V(\mathscr{I})$ est alors l'image réciproque de $V(I)$ par la surjection continue de $\mathscr{M}(A)$ vers

Spec A (il est en particulier compact). On dispose donc dans ce cas d'une bijection croissante entre l'ensemble des fermés de Zariski de $\mathscr{M}(A)$ et l'ensemble des fermés de Zariski de Spec A. En particulier la topologie de X est noethérienne.

On ne suppose plus X affinoïde. Les fermés de Zariski de X sont fermés dans X (cela se vérifie G-localement, ce qui perrmet de se ramener au cas affinoïde). Si X est compact, sa topologie de Zariski est noethérienne (on le déduit du cas affinoïde en écrivant X comme une union finie de domaines affinoïde).

11.2.2. Sous-espaces analytiques fermés. — Soit X un espace k-analytique et soit $\mathscr{I}$ un faisceau cohérent d'idéaux sur X. Supposons d'abord que X est affinoïde, et écrivons $X = \mathscr{M}(A)$. Posons $I = \mathscr{I}(X)$. Le fermé $V(\mathscr{I})$ coïncide avec l'ensemble des x dans $\mathscr{M}(A)$ tel que $f(x) = 0$ pour tout $x \in I$, qui est homéomorphe à $\mathscr{M}(A/I)$ *via* le morphisme induit par la surjection canonique de A vers A/I. Ainsi, $V(\mathscr{I})$ peut être muni d'une structure d'espace k-analytique, dépendant du choix de l'idéal $\mathscr{I}$, et d'un morphisme de $V(\mathscr{I})$ dans X dont l'application continue sous-jacente est l'inclusion.

On ne suppose plus X affinoïde. En procédant G-localement à la construction précédente puis en recollant on obtient une structure d'espace k-analytique au-dessus de X sur $V(\mathscr{I})$, l'application continue sous-jacente au morphisme de $V(\mathscr{I})$ dans X étant l'inclusion $i\colon V(\mathscr{I}) \hookrightarrow X$, et $i_*\mathscr{O}_{V(\mathscr{I})} = \mathscr{O}_X/\mathscr{I}$.

Un *sous-espace analytique fermé* de X est un fermé de Zariski Y de X muni d'une structure d'espace k-analytique au-dessus de X induite selon le procédé décrit ci-dessus par un faisceau cohérent d'idéaux $\mathscr{I}$ tel que $Y = V(\mathscr{I})$; notons que $\mathscr{I}$ se reconstitue alors à partir de cette structure comme le noyau de $\mathscr{O}_X \to i_*\mathscr{O}_Y$, où $i\colon Y \to X$ est le morphisme structural, qui est topologiquement l'inclusion.

Tout fermé de Zariski Y possède au moins une structure de sous-espace analytique fermé : celle donnée par le faisceau

$$\mathscr{J} := V \mapsto \{f \in \mathscr{O}(V), f(x) = 0 \text{ pour tout } \in Y \cap V$$

qui est bien cohérent ([**49**], Prop. 4.2.1). C'est la plus petite structure de sous-espace analytique fermé sur Y, au sens où $\mathscr{J}$ est le plus grand faisceau cohérent d'idéaux sur X définissant le fermé Y ; c'est aussi la seule structure de sous-espace analytique fermée sur Y dont le faisceau structural n'a pas de sections nilpotentes non nulles ; on l'appelle la structure réduite sur Y. Si $Y = X$ la structure réduite est associée au faisceau d'idéaux dont les sections sont les fonctions localement nilpotentes ; le sous-espace analytique fermé correspondant est noté X_{red}. Le morphisme $X_{\mathrm{red}} \hookrightarrow X$ induit un homéomorphisme entre X_{red} et X pour leur topologies usuelles, mais aussi pour leurs topologies de Zariski.

Si Y est un sous-espace analytique fermé de X, il résulte du théorème de Gerritzen-Grauert dans sa version due à Temkin ([**128**], Th. 3.1) que les domaines analytiques de Y sont les sous-ensembles de Y qui admettent un G-recouvrement par des parties de la forme $V \cap Y$ où V est un domaine affinoïde de X.

Si V est un domaine analytique de X la topologie de Zariski de V est plus fine que la topologie de V induite par la topologie de Zariski de X, et en général strictement plus fine.

Si E est une partie de X et si (X_i) est un G-recouvrement de X par des domaines analytiques, alors E est un fermé (resp. un ouvert) de Zariski de X si et seulement si $E \cap X_i$ est un fermé (resp. un ouvert) de Zariski de X_i pour tout i ([**49**], Prop. 4.2.1).

Une *immersion fermée*[(1)] est un morphisme d'espaces k-analytiques $f\colon Y \to X$ se factorisant par un isomorphisme entre Y et un sous-espace analytique fermé de X. Une immersion fermée préserve les corps résiduels complétés.

Un morphisme d'espaces k-analytiques $f\colon Y \to X$ est dit séparé si sa diagonale $\delta\colon Y \to Y \times_X Y$ est une immersion fermée, et X est dit séparé si le morphisme structural de X vers $\mathscr{M}(k)$ est séparé. La séparation dans ce sens entraîne la séparation topologique, mais la réciproque est fausse : le recollement de deux copies du disque unité le long du domaine affinoïde décrit par l'égalité $|T| = 1$ est topologiquement séparé car le domaine de recollement est fermé, mais n'est pas séparé.

11.2.3. Dimension. — On dispose d'une théorie de la dimension en géométrie analytique, due à Berkovich, au sujet de laquelle on pourra consulter le chapitre 2 de [**8**], la fin du paragraphe 1.2 de [**9**] ou encore l'article [**48**].

Soit X un espace k-analytique. Sa dimension (k-analytique) est définie comme suit. Commençons par le cas affinoïde. Écrivons $X = \mathscr{M}(A)$ et choisissons une extension complète L de k telle que $A_L := A\widehat{\otimes}_k L$ soit strictement L-affinoïde. La dimension de Krull de $\mathscr{A}_L$ ne dépend alors pas de L ([**48**], 1.5) et est appelée dimension de X. (Si X est strictement k-affinoïde sa dimension est donc simplement sa dimension de Krull relative à sa topologie de Zariski.) On a par construction $\dim X_{\mathrm{red}} = \dim X$ et $\dim X_L = \dim X$ pour toute extension complète L de k.

Si Y est un fermé de Zariski de X, le choix d'une structure de sous-espace analytique fermé sur Y, c'est-à-dire d'un idéal I de A définissant Y, fait de Y un espace affinoïde (identifié à $\mathscr{M}(A/I)$). Sa dimension ne dépend pas du choix de I, et nous parlerons donc de la dimension de Y sans spécifier I.

Soit $X_1, \dots, X_n$ les fermés de Zariski de X correspondant aux idéaux premiers minimaux de A. Si V est un domaine affinoïde de X on a alors $\dim V = \sup_{i, V\cap X_i \neq \varnothing} \dim X_i$. En particulier $\dim V \leqslant \dim X = \sup_i \dim X_i$. Si x est un point de X on définit $\dim_x X$ comme le minimum des $\dim V$ où V est un domaine affinoïde de X contenant x ; c'est aussi $\sup_{i, x\in X_i} \dim X_i$. Il vient $\dim X = \sup_i \dim X_i = \sup_{x\in X} \dim_x X$.

Ne supposons plus X affinoïde. Si x est un point de X, on définit la dimension locale $\dim_x X$ de X en x comme le minimum des $\dim V$ où V parcourt l'ensemble des domaines affinoïdes de X contenant x, et l'on pose alors $\dim X = \sup_{x\in X} \dim_x X$. Cette définition est compatible avec la précédente lorsque X est affinoïde. Si V est un domaine analytique de X on a $\dim_x V = \dim_x X$ pour tout $x \in V$, si bien que $\dim V \leqslant \dim X$. Si d est un entier on dit que X est *purement de dimension* d si $\dim_x X = d$ pour tout $x \in X$. Si c'est le cas X est ou bien vide, ou bien de dimension d.

Pour tout point x de X on pose

(11.2.3.1)

$$d_k(x) = \mathrm{degtr}(\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\tilde{k}) = \mathrm{degtr}(\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1/\tilde{k}^1) + \dim_{\mathbf{Q}}\left(\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} (|\mathscr{H}(x)^\times|/|k^\times|)\right),$$

où la seconde égalité provient de 10.1.9 ; Berkovich le note $d(\kappa(x)/k)$ ou $d(\mathscr{H}(x)/k)$ L'intérêt majeur de cet invariant est l'égalité $\dim(X) = \sup_{x\in X} d_k(x)$ ([**9**], Lemma 2.5.2).

Soit Y un fermé de Zariski de X. Munissons-le d'une structure de sous-espace analytique fermé. La dimension de l'espace analytique correspondant ne dépend que de Y, et

(1) Dans l'expression « immersion fermée » ou dans l'expression « sous-espace analytique fermé », l'adjectif « fermé » fait implicitement référence à la topologie de Zariski. Ainsi, en général, un domaine analytique fermé V de X n'est pas un sous-espace analytique fermé de X, et le morphisme canonique $V \hookrightarrow X$ n'est pas une immersion fermée.

pas de la structure en question (par exemple au vu de l'égalité ci-dessus, ou par réduction au cas affinoïde *via* la description des domaines analytiques de Y). On pourra donc parler de la dimension de Y sans spécifier la structure dont on le munit.

Remarque 11.2.4. — Insistons sur le fait que la dimension considérée ici est en fait une dimension relative au corps de base k, même si nous ne rappelons pas cette dépendance. Considérons par exemple l'algèbre de Banach k_r associée à un polyrayon k-libre $(r_1, \ldots, r_n)$ (exemple 11.1.3). C'est une extension complète de k. En tant qu'algèbre k_r-affinoïde elle est stricte, et sa dimension de Krull est nulle. Par conséquent la dimension k_r-analytique de $\mathscr{M}(k_r)$ est nulle. Par ailleurs on a $k_r \widehat{\otimes} k_r = (k_r)_r \simeq k_r\{T, S\}/(ST - 1)$, qui est strictement k_r-affinoïde de dimension de Krull n. La dimension k-analytique de $\mathscr{M}(k_r)$ est donc égale à n.

11.2.5. Les composantes irréductibles. — Lorsque nous parlerons d'un espace k-analytique irréductible, ce sera toujours en référence à sa topologie de Zariski. Un espace k-analytique est noethérien pour la topologie de Zariski dès qu'il est compact, mais ce n'est pas le cas en général : par exemple si k est non trivialement valué et si $f \in k[\![t]\!]$ est une série de rayon infini qui n'est pas un polynôme, le lieu des zéros de f sur $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ est un ensemble infini de points rigides tendant vers l'infini. C'est donc un fermé de Zariski de $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}$ possédant une infinité de composantes connexes.

On peut néanmoins développer une théorie des composantes irréductibles en géométrie analytique sur k. Brian Conrad l'a fait dans [**43**] (dans le cas strictement k-analytique) en procédant comme en géométrie complexe, c'est-à-dire en construisant d'abord le normalisé $\widetilde{X}$ d'un espace k-analytique, puis en définissant les composantes irréductibles de X comme les images des composantes connexes de $\widetilde{X}$. Dans ce texte, nous nous appuierons sur une approche différente présentée dans [**49**], que nous allons brièvement rappeler.

On y démontre tout d'abord que si X est un espace k-analytique irréductible, il est purement de dimension d pour un certain entier d, et tout fermé de Zariski strict de X est alors de dimension $< d$ ([**49**], cor. 4.14) puis que si X s'écrit comme une union localement finie $\bigcup_i X_i$ de fermés de Zariski irréductibles alors X est égal à l'un des X_i.

Si $X = \mathscr{M}(A)$ est un espace affinoïde, sa topologie de Zariski est noethérienne et il possède donc un ensemble fini de composantes irréductibles pour cette topologie, que l'on appelle simplement les composantes irréductibles de X. Ce sont les images réciproques des composantes irréductibles de $\operatorname{Spec} A$.

Si X est un espace k-analytique quelconque, on appelle composante irréductible de X toute partie de X qui est l'adhérence pour la topologie de Zariski de X d'une composante irréductible d'un domaine affinoïde de X. On démontre ([**49**], Th. 4.20) que les composantes irréductibles de X constituent un ensemble localement fini de fermés de Zariski irréductibles de X qui recouvrent X, sont deux à deux non comparables pour l'inclusion et sont maximaux ; plus précisément, tout fermé irréductible de X est contenu dans une composante irréductible de X. Si E est un ensemble de composantes irréductibles de X, la réunion $\bigcup_{Z \in E} Z$ est un fermé de Zariski de X dont les éléments de E sont les composantes irréductibles.

Si x est un point de X l'entier $\dim_x X$ est le maximum des dimensions des composantes irréductibles de X contenant x ([**49**], Lemme 4.21).

Soit V un domaine analytique de X. Pour toute composante irréductible Y de X, l'intersection $Y \cap V$ est une union (éventuellement vide, éventuellement infinie) de composantes irréductibles de V de même dimension que Y ; pour toute composante irréductible T de V, l'adhérence de Zariski Z de T dans X est une composante irréductible de X de dimension $\dim T$, et T est une composante irréductible de $Z \cap V$ ([**49**], prop. 4.22).

Si U est un ouvert de Zariski de X les assertions suivantes sont équivalentes ([**49**], Lemme 4.24)

(i) U est Zariski-dense ;
(ii) U est dense pour la topologie usuelle de X ;
(iii) U rencontre toutes les composantes irréductibles de X.

Et si elles sont satisfaites, $U \cap V$ est dense dans V pour tout domaine analytique V de X ([**52**], Cor. 1.5.13).

Soit L une extension complète de k. Soit (X_i) la famille des composantes irréductibles de X. Pour tout i l'image réciproque $X_{i,L}$ de X_i sur X_L a une famille finie $(Y_{ij})_j$ de composantes irréductibles. Chacune des Y_{ij} a même dimension que X_i et se surjecte sur X_i ; de plus $(Y_{ij})_{i,j}$ est la famille des composantes irréductibles de X_L ([**49**], Lemme 4.25 et théorème 7.1.16 (i), (ii) et (iii)).

Mentionnons qu'on dispose d'un principe GAGA pour les composantes irréductibles : si $\mathscr{X}$ est un schéma localement de type fini sur une algèbre affinoïde A, et si les $\mathscr{X}_i$ sont les composantes irréductibles de $\mathscr{X}$, les $\mathscr{X}_i^{\mathrm{an}}$ sont les composantes irréductibles de $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ ([**52**], Prop. 2.7.16). Si $\mathscr{X}$ est irréductible et si $\mathscr{Y}$ est un fermé irréductible de $\mathscr{X}$ on a alors

$$\dim \mathscr{X}^{\mathrm{an}} = \dim \mathscr{Y}^{\mathrm{an}} + \operatorname{codim}(\mathscr{Y}, \mathscr{X})$$

([**52**], Lemma 2.7.10 ; la preuve est un peu plus simple lorsque $\mathscr{X} = \operatorname{Spec} A$, voir [**48**], Prop. 1.11).

Lemme 11.2.6. — *Soit X un espace k-analytique et soit $x \in X$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *l'adhérence de Zariski $\overline{\{x\}}^{X_{\mathrm{Zar}}}$ est une composante irréductible de X ;*
(ii) *la dimension de $\overline{\{x\}}^{X_{\mathrm{Zar}}}$ est égale à $\dim_x X$.*

Si elles sont satisfaites, $\overline{\{x\}}^{X_{\mathrm{Zar}}}$ est l'unique composante irréductible de X contenant x.

Démonstration. — Choisissons une composante irréductible Z de X contenant x et de dimension $\dim_x X$. Le fermé de Zariski $\overline{\{x\}}^{X_{\mathrm{Zar}}}$ est alors contenu dans la composante irréductible Z, et les assertions (i) et (ii) sont donc toutes deux équivalentes à l'égalité $\overline{\{x\}}^{X_{\mathrm{Zar}}} = Z$. Si elles sont satisfaites et si T est une composante irréductible de X distincte de Z alors $T \cap Z$ est un fermé de Zariski strict de $Z = \overline{\{x\}}^{X_{\mathrm{Zar}}}$, si bien que T ne peut contenir x. □

§ 11.3. PROPRIÉTÉS LOCALES DES ESPACES ANALYTIQUES ET DES FAISCEAUX COHÉRENTS

11.3.1. — Soit P une des propriétés suivantes des anneaux locaux noethériens : vérifier la condition R_m, être régulier, être Gorenstein, être intersection complète. Soit Q une des propriétés suivantes d'un module de type fini sur un anneau local noethérien : être libre de rang r, vérifier la condition S_n, être de Cohen-Macaulay

Soit X un espace k-analytique et soit x un point de X. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur X. Pour tout bon domaine analytique V de X contenant x, nous noterons $\mathscr{F}_{V,x}$ la fibre en x de $\mathscr{F}|_V$ vu comme faisceau sur le site topologique de V, c'est-à-dire encore la colimite des $\mathscr{F}(U)$ où U parcourt l'ensemble des voisinage ouverts de x dans V. S'il existe un bon domaine analytique V de X contenant x tel que l'anneau local noethérien $\mathscr{O}_{V,x}$ (resp. tel que le $\mathscr{O}_{V,x}$-module de type fini $\mathscr{F}_{V,x}$) satisfasse P (resp. Q) ceci reste vrai pour tout bon domaine analytique de X qui contient x (théorème 3.4 de [**49**]). On dit alors que X (resp. $\mathscr{F}$) satisfait la propriété P (resp. Q) en x.

Le lieu des point en lesquels la propriété X (resp. $\mathscr{F}$) satisfait P (resp. Q) est un ouvert de Zariski de X ([**49**], théorème 4.4).

On dit que X (resp. $\mathscr{F}$) satisfait la propriété P (resp. Q) s'il la satisfait en chacun de ses points. Si U est un domaine analytique de X contenant x alors X (resp. $\mathscr{F}$) satisfait P (resp. Q) en x si et seulement si c'est le cas de U (resp. $\mathscr{F}|_U$).

Mentionnons une entorse à ces principes généraux : si $\mathscr{F}$ est libre de rang r en tout point de X nous ne dirons évidemment pas que $\mathscr{F}$ est libre de rang r, mais qu'il est localement libre de rang r – et d'après un résultat de Berkovich ([**9**], 1.3.4) déjà rappelé et discuté en 11.1.8, cela équivaut à dire que $\mathscr{F}$ est localement libre en tant que $\mathscr{O}_X$-module sur le site annelé X_{G}.

Lorsque $\mathscr{F} = \mathscr{O}_X$ nous dirons souvent « X satisfait Q en x » plutôt que « $\mathscr{O}_X$ satisfait Q en x ».

Nous étendrons les conventions ci-dessus à la conjonction de différentes propriétés d'algèbre commutative ; nous parlerons ainsi d'espace réduit (c'est-à-dire satisfaisant (R_0) et (S_1)) ou normal (c'est-à-dire satisfaisant (R_1) et (S_2)) en un point x, ou globalement. Tout espace X possède un normalisé $\widetilde{X}$, muni d'un morphisme fini surjectif $\widetilde{X} \to X$ qui induit une bijection entre $\pi_0(\widetilde{X})$ et l'ensemble des composantes irréductibles de X ([**49**], Déf. 5.10, Thm. 5.13, Thm. 5.17) ; la normalisation commute à l'analytification ([**52**], Lemma 2.7.15).

Soit L une extension complète de k et soit π le morphisme structural de X_L vers X. Le faisceau cohérent $\mathscr{F}$ satisfait Q en x si et seulement si $\pi^*\mathscr{F}$ satisfait Q en y ; si si P est la propriété d'être Gorenstein ou d'intersection complète, X satisfait P en x si et seulement si X_L la satisfait en y ; si P est la propriété d'être régulier ou de vérifier (R_n) alors X satisfait P en x dès que X_L satisfait P en y, et la réciproque est vraie si L est analytiquement séparable sur k ([**52**], Prop. 2.6.7), mais elle ne l'est pas en général.

Si P est la propriété d'être régulier ou de vérifier (R_m), ou une propriété impliquant d'une façon ou d'une autre la régularité (comme le fait d'être réduit, ou normal), on est dès lors conduit à introduire la notion de validité *géométrique* de P : on dit que X satisfait la propriété P *géométriquement* en x si pour toute extension complète L de k et tout antécédent y de x sur X_L, l'espace X_L satisfait P en y. Pour que ce soit le cas, il suffit qu'il existe une extension parfaite L de k et un antécédent y de x sur X_L tel que X_L satisfasse P en y ([**52**], 2.6.9).

Soit $\mathscr{X}$ un schéma localement de type fini sur une algèbre affinoïde A et soit $\mathscr{G}$ un faisceau cohérent sur $\mathscr{X}$. Soit x un point de $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ d'image ξ sur $\mathscr{X}$. Le schéma $\mathscr{X}$ (resp. le faisceau $\mathscr{G}$) satisfait P (resp. Q) en ξ si et seulement si $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ (resp. $\mathscr{G}^{\mathrm{an}}$) la satisfait en x ([**52**], Lemma 2.4.6). En étendant les scalaires au complété d'une clôture algébrique de k, on obtient un principe GAGA analogue pour les propriétés géométriques.

§ 11.4. PROPRIÉTÉS DES MORPHISMES

11.4.1. Bord et intérieur. — Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces k-analytiques. On note $\mathrm{Int}(Y/X)$ l'intérieur relatif de f et $\partial(Y/X)$ son complémentaire, le bord relatif de f ([**9**], Definition 1.5.4). Par construction, $\mathrm{Int}(Y/X)$ est un ouvert de Y. Si $\partial(Y/X) = 0$, nous dirons que f est *sans bord* (la terminologie de [**9**] est *closed*). Lorsque f est l'inclusion d'un domaine analytique, $\mathrm{Int}(Y/X)$ coïncide avec l'intérieur $\overset{\circ}{Y}$ de Y dans X au sens de la topologie générale et $\partial(Y/X)$ coïncide donc avec le bord topologique de Y dans X ([**9**], Prop. 1.5.4).

Si $\mathscr{X}$ est un schéma localement de type fini sur une algèbre affinoïde A, le morphisme structural de $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ vers $\mathscr{M}(A)$ est sans bord.

Si $g\colon Z \to Y$ et $f\colon Y \to X$ sont deux morphismes d'espaces k-analytiques alors ([**9**], Prop. 1.5.5)

$$\mathrm{Int}(Z/Y) \cap g^{-1}(Y/X) \subseteq \mathrm{Int}(Z/X), \tag{11.4.1.1}$$

et l'on a

$$\mathrm{Int}(Z/Y) \cap g^{-1}(Y/X) = \mathrm{Int}(Z/X), \tag{11.4.1.2}$$

si f est localement séparé ([**127**], Corollary 5.7), ce qui est notamment le cas dès que Y est séparé.

Lorsque $X = \mathscr{M}(k)$, on note $\mathrm{Int}(Y) = \mathrm{Int}(Y/k)$ et $\partial(Y) = \partial(Y/k)$, qu'on appelle l'intérieur et le bord de Y respectivement. Nous dirons que Yest sans bord si $\partial(Y) = \varnothing$. Si Y est sans bord, ou plus généralement si $f\colon Y \to X$ est sans bord et si X est bon, l'espace Y est bon. Si $f\colon Y \to X$ est un morphisme d'espaces k-analytiques et que X est séparé, le cas 11.4.1.2 entraîne les égalités

$$\mathrm{Int}(Y/X) \cap f^{-1}(\mathrm{Int}(X)) = \mathrm{Int}(Y) \quad \text{et} \quad \partial(Y) = \partial(Y/X) \cup f^{-1}(\partial(X)). \tag{11.4.1.3}$$

Si $Y \to X$ est un morphisme d'espaces k-analytiques et si si X' est un espace analytique sur une extension complète de k muni d'un k-morphisme vers X, on a l'inclusion $\mathrm{Int}(Y/X) \times_X X' \subset \mathrm{Int}(Y \times_X X'/X')$ (cela découle de la proposition 3.13 de [**8**]). La classes des morphismes sans bord est en particulier stable par changement de base analytique sur k. Elle est stable par composition d'après 11.4.1.2 et est G-locale au but ([**127**], Cor. 5.6).

Exemple 11.4.2. — 1) Soit r un nombre réel $s > 0$. Soit D le domaine affinoïde de $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_k$ défini par l'inégalité $|T| \leqslant r$; c'est le disque fermé de rayon r au sens de Berkovich, isomorphe à $\mathscr{M}(k\{T/r\})$. Son bord topologique dans $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_k$ est le singleton $\{\eta_r\}$ (défini à l'exemple 11.1.12). On a donc aussi $\{\eta_r\} = \partial(D/\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_k) = \partial(D)$, la seconde égalité provenant du fait que $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_k$ est sans bord.

Si E désigne le domaine analytique fermé (mais non compact) de $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ défini par l'inégalité $|T| \geqslant r$, le bord topologique de E dans $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ est encore $\{\eta_r\}$, si bien que $\{\eta_r\} = \partial(E/\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}) = \partial(E)$.

2) Soit X un espace k-analytique, soit $f \in \mathscr{O}(X)$ et soit W le domaine analytique de X défini par l'inégalité $|f| \leqslant r$. La fonction f induit un morphisme de X vers $\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$, encore noté f ; avec cette convention, on a $W = f^{-1}(D)$. Comme $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}$ est sans bord, $\partial(W) = \partial(W/\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}})$. La formule (11.4.1.3) appliquée au diagramme $W \to D \to \mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}$, couplée au fait que $\partial(D/\mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}) = \{\eta_r\}$, assure que $\partial(W) = f^{-1}(\eta_r) \cup (\partial(W/D))$. Et la même formule appliquée à $W \to X \to \mathscr{M}(k)$ entraîne que $\partial(W) = \partial(W/X) \cup (\partial(X) \cap W)$. Cela démontre que $\partial(W)$ contient $(\partial(X) \cap W) \cup f^{-1}(\eta_r)$. Par ailleurs, la propriété pour un morphisme d'être sans bord étant stable par changement de base, le morphisme $W - f^{-1}(\eta_r) \to X$ est sans bord ; autrement dit, $\partial(W/X) \subset f^{-1}(\eta_r)$. On en déduit

$$\partial(W) = (\partial(X) \cap W) \cup f^{-1}(\eta_r). \tag{11.4.2.1}$$

Si W' est le domaine analytique de X défini par l'inégalité $|f| \geqslant r$, on démontre de même que

$$\partial(W') = (\partial(X) \cap W') \cup f^{-1}(\eta_r). \tag{11.4.2.2}$$

11.4.3. — Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces k-analytiques. On dit que f est *compact* si l'image réciproque de toute partie compacte est compacte. Comme tout point possède un voisinage compact, cela revient à dire que f est topologiquement propre et topologiquement séparé.

Suivant [**9**] (1.5.3), un morphisme est dit *propre* s'il est compact et sans bord.

11.4.4. Morphismes finis. — Soit A une algèbre k-affinoïde. Une A-algèbre de Banach finie est une A-algèbre de Banach B qui est finie comme A-algèbre, et dont la norme est équivalente à la norme quotient induite par une présentation finie $A^n \to B$ du A-module B. Dans ce cas la norme de B est en fait équivalente à la norme quotient associée à n'importe quelle présentation finie du A-module B (c'est une conséquence de [**8**], Prop. 2.1.9). Toute A-algèbre de Banach finie est k-affinoïde (combiner [**20**], Prop. 6.1.3/4 et [**8**], Cor. 2.1.8). Le foncteur d'oubli de la norme induit une équivalence de catégories entre A-algèbres de Banach finies et A-algèbres finies[(2)] ([**8**], Prop. 2.1.12).

Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme entre espaces k-analytiques. Si X et Y sont affinoïdes, on dit que f est fini si f^* fait de $\mathscr{O}(Y)$ une $\mathscr{O}(X)$-algèbre de Banach finie ; cela revient à demander que f soit sans bord ([**8**], Cor. 2.5.13). En général (si l'on ne suppose plus X et Y affinoïdes) les assertions suivantes sont équivalentes : ([**9**], Cor. 1.3.7).

(i) Il existe un G-recouvrement (X_i) de X par des domaines affinoïdes tels que pour tout i, l'image réciproque $f^{-1}(X_i)$ soit affinoïde et que le morphisme induit de $f^{-1}(X_i)$ vers X_i soit fini

(ii) Pour tout domaine affinoïde V de X l'image réciproque $f^{-1}(V)$ est affinoïde et le morphisme induit de $f^{-1}(V)$ vers V est fini.

[(2)] Si $|k^\times| \neq \{1\}$ et si A est strictement k-affinoïde, on déduit de [**8**], Prop. 2.1.1 et [**20**], Thm. 6.1.3/1 que toute A-algèbre de Banach qui est finie comme A-algèbre est une A-algèbre de Banach finie. Par contre si k est trivialement valué et si $0 < r < s < 1$, le morphisme continu naturel de $k\{T/s\}$ vers $k\{T/r\}$ est bijectif (sa source et son but s'identifient tous deux à $k[[T]]$) mais sa réciproque n'est pas bornée, si bien que $k\{T/s\}$ n'est pas une $k\{T/r\}$-algèbre de Banach finie).

On dit que f est fini si elles sont satisfaites ; cette définition est compatible avec la précédente si X et Y sont affinoïdes. Un morphisme fini est sans bord.

La classe des morphismes finis est stable par composition et changement de base analytique sur k, et la propriété d'être fini est G-locale au but.

Soit y un point de Y. On dit que f est fini en y s'il existe un voisinage analytique U de $f(y)$ dans X et un voisinage analytique V de y dans $f^{-1}(U)$ tel que f induise un morphisme fini de V vers U. Si c'est le cas le point y appartient à $\mathrm{Int}(Y/X)$, et si de plus X et Y sont bons $\mathscr{O}_{Y,y}$ est un $\mathscr{O}_{X,x}$-module de type fini. La finitude en un point est stable par composition et changement de base analytique sur k.

11.4.5. Dimension relative. — Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces k-analytiques et soit y un point de Y ; posons $x = f(y)$. On appelle dimension (relative) de f en y, ou encore dimension relative de Y sur X en y, et l'on note $\dim_y f$, la dimension de l'espace $\mathscr{H}(x)$-analytique $f^{-1}(x)$ en y. Nous dirons que f est *quasi-fini* en y (resp. que f est quasi-fini) si $\dim_y f = 0$ (resp. si f est partout de dimension relative nulle).

L'application $y \mapsto \dim_y f$ est semi-continue supérieurement pour la topologie de Zariski ([**48**], Théorème 4.9).

Le morphisme f est fini en un point y de Y si et seulement si f est quasi-fini en y et $y \in \mathrm{Int}(Y/X)$ ([**9**], Cor. 3.1.10).

11.4.6. Morphismes plats. — Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces k-analytiques. Soit y un point de Y et soit x son image sur X.

Supposons tout d'abord que X et Y sont bons. On dit que f est plat en y, ou que Y est plat sur X en y, si pour tout morphisme $X' \to X$ dont la source X' est un bon espace analytique sur k, et tout point y' de $Y \times_X X'$ situé au-dessus de y et dont on note x' l'image sur X', le $\mathscr{O}_{X',x'}$-module $\mathscr{O}_{Y\times_X X',y'}$ est plat.

Ne supposons plus que X et Y sont bons. On dit alors que f est plat en y s'il existe un bon domaine analytique U de X contenant x et un bon domaine analytique V de $f^{-1}(U)$ contenant y tels que $f|_V\colon V \to U$ soit plat en y ; et c'est alors le cas pour tout tel couple (U, V) ([**52**], 4.1.7).

Soit maintenant U un domaine analytique quelconque (non nécessairement bon) de X contenant x, et soit V un domaine analytique quelconque de $f^{-1}(U)$ contenant y. Il résulte aussitôt de la définition que f est plat en y si et seulement si $f|_V\colon V \to U$ est plat en y.

On dit que f est plat s'il est plat en tout point de Y. La platitude est préservée par composition et changement de base (la définition est conçue pour garantir cette dernière propriété).

Le morphisme structural d'un espace k-analytique vers $\mathscr{M}(k)$ est plat ([**52**], Lemma 4.1.13).

L'ensemble des points de Y en lesquels f est plat est un ouvert de Zariski de Y ([**52**], Thm. 10.3.2).

Soit $\varphi\colon \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$ un morphisme entre schémas de type fini sur une algèbre affinoïde et soit y un point de $\mathscr{Y}^{\mathrm{an}}$ d'image η sur $\mathscr{Y}$. Le morphisme φ^{an} est plat en y si et seulement si φ est plat en η ([**52**], Lemma 4.2.1 et Prop. 4.2.4).

Remarque 11.4.7. — Supposons que X et Y sont bons. Si f est plat en y, l'anneau local $\mathscr{O}_{Y,y}$ est plat sur $\mathscr{O}_{X,x}$. La réciproque est fausse en général, le problème étant que la platitude de $\mathscr{O}_{Y,y}$ est plat sur $\mathscr{O}_{X,x}$ n'est pas en général préservée par changement

de base bon (un contre-exemple dû à Temkin est étudié en détail au paragraphe 4.4 de [**52**]).

La platitude de $\mathscr{O}_{Y,y}$ sur $\mathscr{O}_{X,x}$ entraîne toutefois la platitude de f en y lorsque y est un point rigide (*cf.* [**52**], 4.2.3) ou plus généralement lorsque y appartient à $\mathrm{Int}(Y/X)$ ([**52**], Thm. 8.3.4).

11.4.8. Morphismes quasi-lisses. — Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme entre espaces k-analytiques. On définit comme en géométrie algébrique le $\mathscr{O}_Y$-module des différentielles de Kähler relatives $\Omega_{Y/X}$ ([**8**], §3.3) ; c'est un faisceau cohérent sur Y. On dispose en particulier sur tout espace k-analytique X du faisceau cohérent $\Omega_{X/k}$. Si x est un point de X, la tige $\Omega_{X/k} \otimes \mathscr{H}(x)$ est de dimension $\geqslant \dim_x X$ ([**49**], Lemma 6.2 (i)) et l'on dit que X est quasi-lisse en x si cette dimension vaut exactement $\dim_x X$. L'espace X est quasi-lisse en x si et seulement s'il est géométriquement régulier en x ([**49**], Prop. 6.3) et si x est un k-point, il suffit pour que ce soit le cas que X soit régulier en x ([**49**], Lemma 6.2 (iii) ; l'hypothèse que $|k^\times| \neq \{1\}$ figurant dans son énoncé est inutile, et n'est pas utilisée dans la preuve).

Cette notion admet une variante relative : dans [**52**] (déf. 5.2.4) on définit la notion de morphisme quasi-lisse en un point au moyen d'un critère jacobien (et un morphisme est dit quasi-lisse s'il l'est en tout point de sa source). On démontre ([**52**], Thm. 5.3.4) que $f\colon Y \to X$ est quasi-lisse en y si et seulement si f est plat en y et la fibre $f^{-1}(f(y))$ est quasi-lisse en y. Si d est un entier le lieu U_d des points de Y en lesquels f est quasi-lisse et de dimension relative d est un ouvert de Zariski de Y ([**52**], Thm. 10.7.2 (2)) et $\Omega_{U_d/X}$ est G-localement libre de rang d ([**52**], Cor. 5.3.2 ; la preuve dans le cas absolu où $X = \mathscr{M}(k)$ est beaucoup plus simple, *cf.* [**49**], Prop. 6.6).

On dit que f est quasi-étale en y s'il est quasi-lisse et quasi-fini en y, et que f est quasi-étale s'il est quasi-étale en tout point de Y.

Remarque 11.4.9. — Berkovich a introduit au paragraphe 3 de [**10**] une notion de morphisme quasi-étale ; même si sa définition diffère en apparence de celle que nous donnons ici, les deux sont en fait équivalentes ([**52**], Lemma 5.4.11).

Berkovich a par ailleurs défini aux paragraphes 3.3 et 3.5 de [**9**] des notions de morphisme étale et lisse. Si Y et X sont bons, le morphisme f est lisse en y si et seulement s'il est quasi-lisse et intérieur en y ([**52**], Cor. 5.4.8). Il est vraisemblable que l'hypothèse de bonté est nécessaire pour que cette équivalence soit valable ; on peut toutefois s'en passer en dimension relative nulle : même si l'on ne suppose plus X et Y bons, f est étale en y si et seulement si f est quasi-étale et intérieur en y ([**52**], Remark 5.4.9).

Lemme 11.4.10. — *Soit X un espace k-analytique, soit V un domaine analytique et soit Y un fermé de Zariski de X qui est contenu dans V. Alors, V est un voisinage de Y dans X.*

Démonstration. — Commençons par traiter le cas où V est séparé. L'injection de Y dans X est sans bord ; comme V est supposé séparé, Y est contenu dans $\mathrm{Int}(V/X)$ (formule (11.4.1.3)), lequel est égal à l'intérieur topologique de V dans X.

Traitons maintenant le cas général. Soit y un point de Y et soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une famille finie de domaines affinoïdes de X contenant y et dont la réunion est un voisinage de y dans X. Pour tout i, $X_i \cap V$ est séparé, de sorte qu'il existe un ouvert U_i de X tel que $U_i \cap Y$ soit contenu dans $X_i \cap V$. Soit U l'intersection de $U_1 \cap \cdots \cap U_n$ et de

l'intérieur de $X_1 \cup \cdots \cup X_n$; c'est un ouvert de X qui contient y. Il est aussi contenu dans la réunion des $U_i \cap X_i$, donc dans V. □

11.4.11. — Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces k-analytiques. On dit que f est *compact* si l'image réciproque de toute partie compacte est compacte. Comme tout point possède un voisinage compact, cela revient à dire que f est topologiquement propre et topologiquement séparée.

Suivant [**9**] (1.5.3), un morphisme est dit *propre* s'il est compact et sans bord.

11.4.12. — Rappelons que les propriétés pour f d'être *fini* (resp. *fini et plat*, resp. *compact*, resp. *propre*) sont locales sur le but (voir [**9**], proposition 3.1.8 et corollary 3.2.3 ; [**127**], corollary 5.6).

§ 11.5. UTILISATION DE L'INVARIANT $d_k(x)$

Nous nous proposons ici d'établir un certain nombre de résultats techniques en géométrie analytique qui nous seront utiles par la suite et mettent en jeu de façon essentielle l'invariant $d_k(x)$ introduit en 11.2.3.1.

Lemme 11.5.1. — *Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces analytiques. Pour tout $x \in X$ on a*

$$\dim Y \geqslant \dim Y_x + d_k(x).$$

En particulier si Y_x est non vide et si $\dim Y \leqslant d_k(x)$ on a $\dim Y = d_k(x)$ et $\dim Y_x = 0$.

Démonstration. — On a pour tout $y \in Y_x$ la minoration

$$\dim Y \geqslant d_k(y) = d_{\mathscr{H}(x)}(y) + d_k(x).$$

Il vient

$$\dim Y \geqslant \sup_{y \in Y_x} d_{\mathscr{H}(x)}(y) + d_k(x) = \dim Y_x + d_k(x).$$

□

Lemme 11.5.2. — *Soit Y un espace k-analytique purement de dimension n, soit d un entier et soit $f\colon Y \to \mathbf{A}^d_k$ un morphisme. Soit x un point de $\mathbf{A}^d_k$. Pour tout point y de Y_x, on a $\dim_y Y_x \geqslant n - d$. Si de plus $d_k(x) = d$, on a égalité.*

Démonstration. — Pour démontrer que $\dim_y Y_x \geqslant n - d$ on peut remplacer Y par n'importe quel domaine analytique de Y contenant y. Et si L est une extension complète de k et y' un antécédent de y sur Y_L dont non note x' l'image sur X_L, il suffit de démontrer que $\dim_{y'} Y'_{x'} \geqslant n - d$. On peut donc supposer que Y est affinoïde et que $x \in \mathbf{A}^d_k(k)$; en composant f avec une translation, on peut même supposer que $y = 0$. Notons $f_1, \ldots, f_d$ les composantes du morphisme f, et posons $\mathscr{B} = \mathscr{O}_Y(Y)$. La fibre Y_x est l'espace affinoïde $\mathscr{M}(\mathscr{B}/(f_1, \ldots, f_d))$. D'après le Hauptidealsatz de Krull, les composantes irréductibles de $\mathrm{Spec}(\mathscr{B}/(f_1, \ldots, f_d))$ sont de codimension au plus d dans $\mathrm{Spec}(\mathscr{B})$. Par conséquent, les composantes irréductibles de Y_x sont de dimension au moins $n - d$, si bien que $\dim_y Y_x \geqslant n - d$.

Supposons que $d_k(x) = d$. On a alors

$$\dim_y Y_x \leqslant \dim Y_x \leqslant \dim Y - d = n - d,$$

où la seconde inégalité provient du lemme 11.5.1. Il vient $\dim_y Y_x = n - d$. □

11.5.3. — Soit X un espace k-analytique. Nous noterons $X^{\#}$ l'ensemble des points x de X tels que $d_k(x) = \dim_x X$. Si x est un point de X et si V est un domaine analytique de X contenant x on a $\dim_x V = \dim_x X$, si bien que $V^{\#} = X^{\#} \cap V$.

Soit $x \in X^{\#}$. Soit V un domaine analytique de X et soit Y un fermé de Zariski de V contenant x. Comme $d_k(x) = \dim_x X$ on a $\dim_x Y \geqslant \dim_x X$ et donc $\dim_x Y = \dim_x X = \dim_x V$. Ainsi l'adhérence de Zariski $\overline{\{x\}}^{V_{\mathrm{Zar}}}$ est de dimension $\dim_x V$, ce qui entraîne que $\overline{\{x\}}^{V_{\mathrm{Zar}}}$ est une composante irréductible de V de dimension $\dim_x X$, et c'est alors nécessairement la seule composante irréductible de V contenant x.

Lemme 11.5.4. — *Soit x un point de $X^{\sharp}$.*

a) *L'extension graduée $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ de $\widetilde{k}$ est de type fini.*

b) *L'extension $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1$ de $\widetilde{k}^1$ et le groupe abélien $|\mathscr{H}(x)^\times|/|k^\times|$ sont de type fini.*

c) *Supposons k stable. Le corps valué complet $\mathscr{H}(x)$ est alors également stable.*

Démonstration. — On peut supposer X affinoïde de dimension $n = \dim_x(X)$. Soit $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{O}(X)$ telles que les $f_i(x)$ soient non nulles et que $(\widetilde{f_1(x)}, \ldots, \widetilde{f_n(x)})$ soit une base de transcendance graduée de $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ sur $\widetilde{k}$. Soit $f = (f_1, \ldots, f_n) \colon X \to \mathbf{A}^n_k$ le morphisme induit par cette famille. Par construction, $f(x) = \eta_r$, où $r = |f(x)|$. D'après l'exemple 10.8.4, et au vu de la densité de $k(T_1, \ldots, T_n)$ dans $\mathscr{H}(\eta_r)$, le corps gradué $\widetilde{\mathscr{H}(\eta_r)}$ est une extension gradué transcendante pure de degré de transcendance n sur $\widetilde{k}$. Il s'ensuit que $d_k(\eta_r) = n$. On déduit alors du lemme 11.5.1 que $\dim f^{-1}(\eta_r) = 0$. En particulier, $\mathscr{H}(x)$ est fini sur $\mathscr{H}(\eta_r)$. En conséquence $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ est fini sur $\widetilde{\mathscr{H}(\eta_r)}$, et $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ est dès lors une extension de type fini de $\widetilde{k}$, puisque c'est le cas de $\widetilde{\mathscr{H}(\eta_r)}$ par sa description explicite que nous venons de rappeler. Ceci montre (a), et (b) s'en déduit par le corollaire 10.1.11.

Montrons maintenant (c). On suppose que k est stable. Comme $\mathscr{H}(x)$ est fini sur $\mathscr{H}(\eta_r)$ il suffit, pour prouver que $\mathscr{H}(x)$ est stable, de démontrer que $\mathscr{H}(\eta_r)$ est stable. Par récurrence sur la longueur de r on se ramène au cas où celle-ci vaut 1, et cela découle alors de **[129]**, Thm. 6.3.1 (iii). □

11.5.5. Dimension centrale d'un germe d'espace k-analytique. — Soit (X, x) un germe d'espace k-analytique. La *dimension centrale* $\dim_{\mathrm{cent}}(X, x)$ de (X, x) est le minimum, lorsque V parcourt l'ensemble des voisinages analytiques de x dans X, de la dimension de l'adhérence de Zariski de x dans V. Elle est minorée par $d_k(x)$ et majorée par $\dim_x X$, et est dès lors égale à $\dim_x X$ si $x \in X^{\sharp}$.

Supposons que le germe (X, x) soit bon. D'après le corollaire 3.2.9 de **[52]**, on a alors l'égalité

$$\dim_{\mathrm{cent}}(X, x) + \dim_{\mathrm{Krull}}(\mathscr{O}_{X,x}) = \dim_x(X). \tag{11.5.5.1}$$

11.5.6. — Soit X un espace k-analytique et soit $x \in X^{\sharp}$. Soit V un bon domaine analytique de x. Le point x appartient alors à $V^{\sharp}$, ce qui entraîne que $\dim_{\mathrm{cent}}(V, x) = \dim_x V$, puis que $\mathscr{O}_{V,x}$ est de dimension de Krull nulle, ce qui veut dire que c'est un anneau local artinien, et donc un corps si X est réduit. Il s'ensuit que x appartient au lieu de Cohen-Macaulay de X, et à son lieu régulier si X est réduit.

Lemme 11.5.7. — *Soit X un espace k-analytique et soit x un point de $X^\sharp$. Il existe une base de voisinages de x formée de domaines analytiques irréductibles. Lorsque x possède un voisinage affinoïde, il existe une base de voisinages de x formée de domaines analytiques irréductibles.*

Démonstration. — Quitte à restreindre X, il suffit de prouver qu'il existe un tel voisinage. Soit U le lieu de normalité de X_{red} ; c'est un ouvert de Zariski dense de X contenant x. On peut donc supposer que X_{red} est normal. Tout voisinage analytique (resp. voisinage affinoïde) connexe de X est alors irréductible. □

Lemme 11.5.8. — *Soit n et d des entiers. Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme fini entre espaces k-analytiques purement de dimension n. Supposons que X est régulier et que Y vérifie la propriété (S_d). Soit x un point de X tel que $d_k(x) \geqslant n - d$. Le morphisme f est plat au dessus d'un voisinage de x.*

Démonstration. — Le morphisme f étant fini, il est topologiquement propre. Il suffit donc pur prouver l'assertion de montrer que le lieu de platitude de f contient tous les antécédents de x. Pour établir ce fait, on peut remplacer X par n'importe quel de ses domaines affinoïdes contenant x, et donc supposer X affinoïde ; dans ce cas, Y l'est également puisque f est fini. Soit y un antécédent de x. La finitude de f entraîne que les les dimensions centrales de (X, x) et (Y, y) sont égales ([**52**], 3.2.4) ; par ailleurs, l'hypothèse faite sur x assure que la dimension centrale de (X, x) vaut au moins $n - d$. Comme on a d'autre part supposé que $\dim_x(X) = \dim_y(Y) = n$, la formule (11.5.5.1) ci-dessus implique que

$$\dim_{\mathrm{Krull}}(\mathscr{O}_{X,x}) = \dim_{\mathrm{Krull}}(\mathscr{O}_{Y,y}) \leqslant d.$$

Puisque $\mathscr{O}_{Y,y}$ satisfait la propriété (S_d), il est de Cohen-Macaulay. La $\mathscr{O}_{X,x}$-algèbre finie locale $\mathscr{O}_{Y,y}$ est de Cohen-Macaulay, et de même dimension de Krull que l'anneau local régulier $\mathscr{O}_{X,x}$. En conséquence $\mathscr{O}_{Y,y}$ est une $\mathscr{O}_{X,x}$-algèbre plate ([**71**], EGA IV_2, Proposition 6.1.5), et le morphisme sans bord f est dès lors plat en y. □

Corollaire 11.5.9. — *Soit n un entier, soit $f\colon Y \to X$ un morphisme fini entre bons espaces k-analytiques purement de dimension n. Supposons que X est régulier et que Y est de Cohen-Macaulay. Le morphisme f est alors plat.*

Lemme 11.5.10. — *Soit X un espace k-analytique, soit U un ouvert de Zariski de X et soit K une partie compacte de Xcontenue dans $X^\sharp$. Alors $K \cap U$ est compact.*

Démonstration. — Soit $(X_i)_{i\in I}$ la famille des composantes irréductibles de X ; pour tout i, soit X_i' le complémentaire dans X_i de la réunion des autres composantes.

Soit F un fermé de Zariski strict de X_i. Pour tout $x \in F$, on a $d_k(x) \leqslant \dim(F) < \dim(X_i) \leqslant \dim_x(X)$; par conséquent, K ne rencontre pas F.

On en déduit d'abord que si i et j des indices distincts dans I, le compact K ne rencontre pas $X_i \cap X_j$. Autrement dit, K est la réunion disjointe de ses parties ouvertes $K \cap X_i'$; il en résulte que $X_i' \cap K$ est compact pour tout i, et vide pour presque tout i.

On écrit alors $K \cap U = \bigcup_{i\in I} K \cap U \cap X_i'$. Soit $i \in I$. Si $U \cap X_i = \varnothing$, alors $K \cap U \cap X_i' = \varnothing$. Sinon, $U \cap X_i$ est un ouvert de Zariski dense de X_i et son complémentaire dans X_i ne rencontre pas K, si bien que $K \cap U \cap X_i' = K \cap X_i'$.

Cela prouve que $K \cap U$ est compact. □

§ 11.6. MORPHISMES FINIS ET PLATS

11.6.1. Morphismes finis et plats : le cas global. — Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme fini d'espaces k-analytiques. Le morphisme f est plat si et seulement le faisceau cohérent $f_*\mathscr{O}_Y$ est un $\mathscr{O}_X$-module G-localement libre, et localement libre si X est bon : c'est une conséquence de la proposition 4.3.1 de [**52**], du fait que la platitude de f peut se tester G-localement sur X, et du fait que dans le cas bon, un faisceau cohérent est G-localement libre si et seulement s'il est localement libre.

Supposons f plat. Le faisceau G-localement libre $\mathscr{F} := f_*\mathscr{O}_Y$ possède alors un rang sur $\mathscr{O}_X$, qui est une fonction localement constante sur X à valeurs entières, que l'on note $x \mapsto \deg_x(f)$. On dit que $\deg_x(f)$ est le degré de f au-dessus de x. Un point x appartient à $f(Y)$ si et seulement si $\deg^x(f) \neq 0$; il en résulte que f est ouvert.

Soit $x \in X$ et soit $y_1, \dots, y_r$ les antécédents de x sur Y. Soit U un bon domaine analytique de X contenant x, et soit V l'image réciproque $f^{-1}(U)$; c'est un bon domaine analytique de Y contenant y. Notons $\mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_{U,x}$ la fibre en x de $\mathscr{F}|_U$ vu comme faisceau sur l'espace topologique U. On a par propreté topologique $\mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_{U,x} = \prod \mathscr{O}_{V,y_i}$. Chacun des facteurs $\mathscr{O}_{V,y_i}$ est libre de rang fini r_i sur$\mathscr{O}_{U,x}$, et $\deg_x f = \sum_i r_i$.

11.6.2. — Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces k-analytiques.

Soit Σ une partie connexe et non vide de X telle que f soit fini et plat au-dessus d'un voisinage de Σ. Le degré de f au-dessus d'un point x de Σ ne dépend alors pas de x et sera appelé le degré de f au-dessus de Σ. Ce degré est nul si et seulement s'il existe un point de Σ qui n'appartient pas à $f(Y)$; et si c'est le cas, Σ possède un voisinage ouvert ne rencontrant pas $f(Y)$.

11.6.3. Morphismes finis et plats : le cas local. — Soit $f\colon Y \to X$ un espace k-analytique et soit y un point de Y ; posons $x = f(y)$. Supposons f fini et plat en y. Le lieu de platitude de f étant un ouvert (de Zariski) de Y, il existe un voisinage analytique compact U de x dans X et un voisinage analytique compact V de y dans $f^{-1}(U)$ tels que f induise un morphisme fini et plat de V sur U. Par propreté topologique et parce que y est isolé dans $f^{-1}(x)$, on peut restreindre V et U de sorte que y soit le seul antécédent de x sur V. Dans ce cas le degré de $f|_V$ au-dessus de x ne dépend plus du choix de V et U. Il est appelé le degré de f en y et est noté $\deg^y(f)$. Si U' est un bon domaine analytique de U contenant x et si l'on pose $V' = f^{-1}(U') \cap V$ alors V' est un bon domaine analytique de V contenant y et $\mathscr{O}_{V',y}$ est libre de rang $\deg^y(f)$ sur $\mathscr{O}_{U',x}$.

Si f est fini et plat globalement et si $y_1, \dots, y_r$ sont les antécédents de x sur Y on a $\deg_x(f) = \sum_i \deg^{y_i}(f)$.

Lemme 11.6.4. — *Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces k-analytiques, que l'on suppose fini et plat en tout point de Y. La fonction $y \mapsto \deg^y(f)$ est semi-continue supérieurement.*

Démonstration. — Soit $y \in Y$ et soit x son image sur X. Puisque f est fini et plat en y, il existe un voisinage analytique compact U de x et un voisinage analytique compact V de y dans $f^{-1}(U)$ tel que $f^{-1}(x) \cap V = \{y\}$ ensemblistement, et tel que f induise un morphisme fini et plat de degré constant $\deg^y(f)$ de V sur U. Soit η un point de V et soit ξ son image sur U. On a alors $\deg^y(f) = \deg_\xi(f) = \sum_{\zeta \in f^{-1}(\xi) \cap V} \deg^\zeta(f)$. Il s'ensuit que $\deg^\zeta(f) \leqslant \deg^y(f)$ pour tout $\zeta \in f^{-1}(\xi) \cap V$; en particulier $\deg^\eta(f) \leqslant \deg^y(f)$. □

Lemme 11.6.5. — *Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces k-analytiques de dimensions $\leqslant n$. Soit y un point de* $\mathrm{Int}(Y/X)$.

a) *Si f est de dimension relative nulle en x, alors le morphisme f est fini en y.*

b) *Si $d_k(f(y)) = n$, alors le morphisme f est fini en y.*

c) *Si $d_k(f(y)) = n$ et si X est réduit en $f(y)$, alors f est fini et plat en y.*

Démonstration. — a) C'est le corollaire 3.1.10 de [**9**].

b) D'après le lemme 11.5.1, la fibre $f^{-1}(x)$ est de dimension nulle. L'assertion découle donc du a).

c) Compte tenu de ce qui précède, il suffit de vérifier que f est plat en y. Posons $x = f(y)$. Fixons un domaine affinoïde V de X contenant x et soit W son image réciproque dans Y. Comme $d_k(x) = n$, l'anneau $\mathscr{O}_{V,x}$ est artinien ; comme X est réduit en x, cet anneau est réduit ; c'est donc un corps si bien que $\mathscr{O}_{W,y}$ est plat sur $\mathscr{O}_{V,x}$. Par suite, f est plat en y.

□

Lemme 11.6.6. — *Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces k-analytiques de dimensions $\leqslant n$. Soit x un point de X. On suppose que $f^{-1}(x)$ ne rencontre pas $\partial(Y/X)$ et que f est compact au-dessus d'un voisinage de x.*

a) *Si $f^{-1}(x)$ est de dimension nulle , alors le morphisme f est fini au-dessus d'un voisinage de x.*

b) *Si $d_k(x) = n$, alors le morphisme f est fini au-dessus d'un voisinage de x.*

c) *Si $d_k(x) = n$ et si X est réduit en x, alors f est fini et plat au-dessus d'un voisinage de x.*

Démonstration. — a) La fibre $f^{-1}(x)$ est discrète et compacte, elle est donc finie. Notons $f^{-1}(x) = \{y_1, \ldots, y_r\}$.

Soit $i \in \{1, \ldots, r\}$. D'après le lemme 11.6.5, a), le morphisme f est en fini en chaque y_i. Il existe donc un voisinage V_i de y_i et un voisinage U_i de x tels que f induise un morphisme fini de V_i sur U_i. La compacité de f permet de supposer ces voisinages V_i deux à deux disjoints, et elle assure également l'existence d'un voisinage ouvert U de x contenu dans l'intersection des U_i tel que $f^{-1}(U)$ soit contenu dans la réunion des V_i. Le morphisme de $f^{-1}(U)$ sur U induit par f est alors fini, d'où l'assertion.

b) D'après le lemme 11.5.1, la fibre $f^{-1}(x)$ est de dimension nulle. L'assertion découle donc du a).

c) Avec les notations précédentes, il reste à vérifier que f est plat en tout point $y \in f^{-1}(x)$, ce qui est l'assertion c) du lemme 11.6.5.

□

§ 11.7. RÉDUCTION GRADUÉE DES GERMES D'ESPACES ANALYTIQUES

Nous nous proposons ici de rappeler les points essentiels de la théorie de la réduction graduée des germes d'espaces analytiques que Temkin a développée dans [**127**], et qui généralisait et simplifiait sa théorie de la réduction classique des germes d'espaces strictement k-analytiques mise au point dans [**126**].

11.7.1. Réduction à la Temkin : le cas d'un espace affinoïde. — Soit A une algèbre k-affinoïde. Nous désignerons toujours par $\widetilde{A}$ la réduction graduée de A relative à la semi-norme spectrale ρ de A (10.8.1). C'est une $\widetilde{k}$-algèbre graduée, et elle est de type fini. Pour le voir, choisissons un morphisme surjectif admissible $f\colon k\{T/r\} \to A$. La proposition 3.1 de [**127**] assure que f induit un morphisme fini entre les réductions graduées de ses source et but. Par ailleurs, la réduction graduée de $k\{T/r\}$ s'identifie à l'algèbre de polynômes $\widetilde{k}[T/r]$, en vertu de l'exemple 10.8.4 et de la densité de $k[T]$ dans $k\{T/r\}$, d'où notre assertion.

Posons $X = \mathscr{M}(A)$. Notons $\widetilde{X}$ le spectre homogène de $\widetilde{A}$, c'est-à-dire l'ensemble de ses idéaux premiers homogènes. Si ξ est un élément de $\widetilde{X}$ nous noterons $\kappa(\xi)$ le corps gradué des fractions de $\widetilde{A}/\xi$, et $f \mapsto f(\xi)$ l'application naturelle de A vers $\kappa(\xi)$. On munit $\widetilde{X}$ de la topologie de Zariski, dont une base d'ouverts est formée des $D(a) := \{\xi \in \widetilde{X}, a(\xi) \neq 0\}$ où a parcourt l'ensemble des éléments homogènes de $\widetilde{A}$. Puisque $\widetilde{A}$ est un anneau gradué noethérien, l'espace topologique $\widetilde{X}$ est noethérien.

On dispose d'une application dite de réduction ou spécialisation $\pi\colon X \to \widetilde{X}$, qui envoie un point x sur le noyau du morphisme de $\widetilde{A}$ vers $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ induit par l'évaluation en x. Cette application est anti-continue, c'est-à-dire que l'image réciproque de tout ouvert est fermée. En effet, il suffit par quasi-compacité de vérifier que $\pi^{-1}(D(\widetilde{f}))$ est fermé pour toute $f \in A$. Or si $\rho(f) = 0$ alors $\widetilde{f} = 0$ et $\pi^{-1}(D(\widetilde{f})) = \varnothing$, et sinon $\pi^{-1}(D(\widetilde{f}))$ est le lieu de validité de l'égalité $|f| = \rho(f)$. L'application π est surjective, et chaque point générique d'une composante irréductible de $\widetilde{X}$ a un unique antécédent sur X ([**127**], Prop. 3.3).

L'inclusion $\widetilde{A}^1 \hookrightarrow \widetilde{A}$ induit une application continue de $\widetilde{X}$ vers $\widetilde{X}^1 := \operatorname{Spec} \widetilde{A}^1$, qui composée avec π donne lieu à l'application de spécialisation classique de X vers $\widetilde{X}^1$ (qui n'est en pratique utilisée que dans le cas strictement k-affinoïde). Le morphisme naturel de $\widetilde{A}^1 \otimes_{\widetilde{k}_1} \widetilde{k}$ dans $\widetilde{A}$ est injectif et a pour image $\bigoplus_{r \in |\widetilde{k}^\times|} \widetilde{A}^r$ (10.1.8). Il est donc bijectif si et seulement si l'ensemble des degrés des éléments homogènes non nuls de $\widetilde{A}$ est égal à $|k^\times|$, ce qui revient à demander que $\rho(A) = |k|$. Supposons que ce soit le cas (ce qui entraîne que A est strictement k-affinoïde). L'application continue $\widetilde{X} \to \widetilde{X}^1$ est alors un homéomorphisme, et modulo cette identification π est la réduction classique.

Le lemme suivant est bien connu, mais nous en donnons la preuve faute de référence explicite dans la littérature.

Lemme 11.7.2. — *Soit X un espace k-affinoïde et soit $\pi\colon X \to \widetilde{X}$ l'application de spécialisation. Soit $\xi \in \widetilde{X}$. L'adhérence de $\pi^{-1}(\xi)$ dans X est la réunion des $\pi^{-1}(\eta)$ où η parcourt l'ensemble des générisations de ξ dans $\widetilde{X}$.*

Démonstration. — Soit E la réunion des $\pi^{-1}(\eta)$ où η parcourt l'ensemble des générisations de ξ dans $\widetilde{X}$.On peut également décrire E comme l'intersection des $\pi^{-1}(U)$ où U parcourt l'ensemble des ouverts de Zariski de $\widetilde{X}$ contenant ξ. Par conséquent E est un fermé de X contenant $\pi^{-1}(\xi)$ et donc $\overline{\pi^{-1}(\xi)}$. Réciproquement, considérons un point y de E et montrons que $y \in \overline{\pi^{-1}(\xi)}$. Posons $\eta = \pi(y)$; par définition de E, le point ξ est une spécialisation de η. Soit V un voisinage affinoïde de y dans X et soit ζ la spécialisation de y sur $\widetilde{V}$. L'inclusion f de V dans X est intérieure en y. En vertu de la proposition 3.4 de [**127**], cela signifie que le morphisme $\widetilde{f}\colon \widetilde{V} \to \widetilde{X}$ induit un morphisme fini du

sous-schéma fermé réduit $\overline{\{\zeta\}}$ de V sur $\widetilde{X}$. L'image $\widetilde{f}(\overline{\{\zeta\}})$ est donc fermée dans $\widetilde{X}$ (par la variante gradué du lemme de *going-up*, qui se démontre par réduction au cas classique via un changement de base de $\widetilde{k}$ à $\widetilde{k}(T/\rho)$ pour un polyrayon ρ déployant la situation). Or l'image de ζ sur $\widetilde{X}$ est égale à η ; ce dernier est donc dense dans le fermé $\widetilde{f}(\overline{\{\zeta\}})$ de $\widetilde{X}$, qui est dès lors égal à $\overline{\{\eta\}}$ et contient en particulier ξ. Ainsi ce dernier possède un antécédent ω par $\widetilde{f}$. Par surjectivité de la spécialisation il existe un élément v de V se spécialisant sur ω ; mais l'image de v sur $\widetilde{X}$ est alors égale à $\widetilde{f}(\omega)$, c'est-à-dire à ξ. Par conséquent V rencontre $\pi^{-1}(\xi)$ et x appartient à $\overline{\pi^{-1}(\xi)}$. □

11.7.3. Réduction à la Temkin : le cas des germes. — Soit X un espace k-analytique séparé[3] et soit $x \in X$. Temkin a défini dans [**127**], la *réduction* $\widetilde{(X,x)}$ de X ; c'est un ouvert quasi-compact et non vide de l'espace de Zariski-Riemann $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}$ de $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ sur $\widetilde{k}$.

Rappelons rapidement sa définition. Supposons tout d'abord que X est affinoïde, d'algèbre associée A. Soit R l'image de $\widetilde{A}$ dans $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$, par le morphisme induit par l'évaluation, et soit R^{hom} l'ensemble des éléments homogènes de R ; l'anneau gradué R est une sous-$\widetilde{k}$-algèbre graduée de type fini de $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$. Temkin définit alors $\widetilde{(X,x)}$ comme le sous-ensemble $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}\{R^{\mathrm{hom}}\}$ de $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}$. Ce sous-ensemble est égal à $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}\{E\}$ pour n'importe quel ensemble fini E de générateurs homogènes de R sur $\widetilde{k}$; c'est donc un ouvert quasi-compact et non vide de $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}$ qui ne dépend que du germe affinoïde (X,x) (voir le début de la section 4 de [**127**]) et qu'on note $\widetilde{(X,x)}$.

Si l'on ne suppose plus que X est affinoïde, on choisit une famille finie (V_i) de domaines affinoïdes de X contenant x et dont la réunion est un voisinage de x dans X. On démontre ([**127**], Prop. 4.1) que la réunion des $\widetilde{(V_i,x)}$ ne dépend que du germe (X,x), et c'est elle que l'on note $\widetilde{(X,x)}$. Il résulte de *loc. cit.* et du théorème 4.5 de [**127**] que $(V,x) \mapsto \widetilde{(V,x)}$ est une application croissante, commutant aux unions et intersections finies, qui établit une bijection entre l'ensemble des (germes de) domaines analytiques de (X,x) et celui des ouverts quasi-compacts et non vides de $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}$.

Soient $f_1, \ldots, f_n$ des éléments de $\mathscr{O}_{X,x}^{\times}$; pour tout i, posons $r_i = |f_i(x)|$. Soit V le domaine analytique de (X,x) défini par les inégalités $|f_i| \leqslant r_i$. Alors $\widetilde{(V,x)}$ est égal à $\widetilde{(X,x)} \cap \mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}\{\widetilde{f_i(x)}\}_i$; en effet, on se ramène aussitôt au cas affinoïde, auquel cas c'est le lemme 4.4 de [**127**].

Le germe (X,x) est bon si et seulement si $\widetilde{(X,x)}$ est affine ([**127**], Thm. 5.1 ; pour la définition d'un ouvert affine dans ce contexte, voir 10.5.1) ; il est sans bord si et seulement si $\widetilde{(X,x)} = \mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}$ ([**127**], Thm. 5.2).

Remarque 11.7.4. — Soit (X,x) un germe d'espace k-analytique, soit f une fonction sur (X,x) et soit (Y,x) un domaine analytique de (X,x) tel que $|f|$ soit identiquement

[3] La réduction de Temkin existe aussi dans le cas non séparé, mais est alors plus délicate à définir et à manipuler, et nous ne nous en servirons que dans le cas séparé ; aussi avons-nous choisi de ne la présenter que dans ce cadre.

égale à $|f(x)|$ sur (Y,x) ; comme (Y,x) est contenu dans le domaine de (X,x) défini par l'égalité $|f|=|f(x)|$, on a

$$\widetilde{(Y,y)} \subset \widetilde{(X,x)} \cap \mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\tilde{k}}\{\widetilde{f(x)}, \widetilde{f(x)}^{-1}\}.$$

Par conséquent, $\widetilde{f(x)}$ est une section inversible de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\tilde{k}}}(\widetilde{Y,y})$.

11.7.5. Le cas strictement affinoïde. — Soit X un espace strictement k-affinoïde d'algèbre des fonctions A et soit x un point de X. Soit f un élément de A inversible en x. La semi-norme spectrale $\rho(f)$ appartient à $|k^\times|^{\mathbf{Q}}$; par conséquent, si $|f(x)| \notin |k^\times|^{\mathbf{Q}}$ on a $|f(x)|<\rho(f)$ et l'image de $\widetilde{f}$ dans $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ est nulle. Il s'ensuit que $\widetilde{(X,x)}$ est de la forme $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\tilde{k}}\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$ où les λ_i sont des éléments de $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^\times$ tels que $|\lambda_i| \in |\tilde{k}^\times|^{\mathbf{Q}}$ pour tout i. Par conséquent $\widetilde{(X,x)}$ est l'image réciproque d'un ouvert affine de $\mathbf{P}^1_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\tilde{k}^1}$ (10.5.5).

11.7.6. Le cas où $\widetilde{(X,x)}$ est affine et strict. — Si X un espace k-analytique séparé et soit $x \in X$. Il résulte de 11.7.6 que si (X,x) possède un représentant strictement k-affinoïde, $\widetilde{(X,x)}$ est l'image réciproque d'un ouvert affine de $\mathbf{P}^1_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\tilde{k}^1}$.

Supposons réciproquement que $\widetilde{(X,x)}$ soit l'image réciproque d'un ouvert affine de $\mathbf{P}^1_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\tilde{k}^1}$. Il résulte de la preuve du lemme 3.5.1 de **[52]** qu'il existe un entier n, un point y du polydisque unité D de dimension n et un morphisme sans bord de (X,x) vers (D,y). Lorsque la valeur absolue de k n'est pas triviale, y possède une base de voisinages strictement affinoïdes dans D, si bien que (X,x) possède un représentant strictement affinoïde.

11.7.7. — Supposons que la valeur absolue de k n'est pas triviale. On déduit alors des résultats rappelés au 11.7.6 que (X,x) est strictement k-analytique si et seulement si $\widetilde{(X,x)}$ est strict, *cf.* **[52**, Lemma 3.5.2]. Mentionnons incidemment que si (X,x) est à la fois bon et strict, $\widetilde{(X,x)}$ est à la fois affine et strict, donc est l'image réciproque d'un ouvert affine de $\mathbf{P}^1_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\tilde{k}^1}$ (10.5.5) ; il découle alors de 11.7.6 que le germe (X,x) est strictement affinoïde. Autrement dit tout point d'un bon espace strictement k-analytique admet un voisinage strictement affinoïde ce qui, à notre connaissance, ne figurait pas jusqu'ici explicitement dans la littérature.

Notons que l'hypothèse que la valeur absolue de k n'est pas triviale est indispensable à la validité des énoncés ci-dessus. Supposons en effet que $|k^\times|=\{1\}$, et soit X l'ouvert de $\mathbf{A}^1_k$ défini par les inégalités $0<|T|<1$; il est sans bord, si bien que pour tout $x \in X$ la réduction $\widetilde{(X,x)}$ est égale à $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\tilde{k}}$, et est en particulier stricte ; mais comme X n'est constitué que de points de type 3, il ne possède aucun domaine strictement affinoïde non vide.

§ 11.8. ESPACES STRICTS ET RÉDUCTION DE TEMKIN ; LE CAS TRIVIALEMENT VALUÉ

11.8.1. Modification de la terminologie dans le cas trivialement valué. — Nous aurons besoin dans la suite de manipuler des espaces analytiques (séparés) sur un corps trivalement valué dont tous les germes sont à réduction stricte. Pour éviter l'introduction d'un vocabulaire spécifique à cette situation, nous allons nous écarter de la terminologie standard. Nous appellerons désormais espace strictement k-analytique tout espace k-analytique X possédant un G-recouvrement (X_i) par des domaines analytiques séparés tels que $\widetilde{(X_i, x)}$ et $\widetilde{(X_i \cap X_j, x)}$ soient stricts pour tout (i, j) et tout $x \in X_i \cap X_j$; si X est séparé (ce qui sera essentiellement toujours le cas ici) cela revient à demander que $\widetilde{(X, x)}$ soit strict pour tout $x \in X$.

Notre notion d'espace strictement k-analytique coïncide avec la notion usuelle lorsque $|k^\times| \neq \{1\}$, mais en diffère si k est trivialement valué ; sous cette hypothèse les espaces stricts au sens traditionnel le sont dans le nôtre, mais la réciproque est fausse en général : par exemple l'ouvert $0 < |T| < 1$ de $\mathbf{A}^1_k$ est strict dans notre sens, mais pas dans l'acception classique.

Les deux notions sont toutefois équivalentes dans le cas affinoïde, comme en atteste le lemme ci-dessous, pour lequel il n'est pas nécessaire de supposer $|k^\times| \neq \{1\}$.

Lemme 11.8.2. — *Soit A une algèbre k-affinoïde. Elle est strictement k-affinoïde si et seulement si l'espace $\mathscr{M}(A)$ est strict au sens défini ci-dessus.*

Démonstration. — Posons $X = \mathscr{M}(A)$. Si A est strictement k-affinoïde alors X est strictement k-analytique au sens classique, et *a fortiori* au nôtre. Réciproquement, supposons que X soit strict dans notre sens. Pour montrer que X est strict au sens classique il suffit de s'assurer que pour tout $f \in A$ la semi-norme spectrale $\|f\|_\infty$ appartient à $\{0\} \cup |k^\times|^{\mathbf{Q}}$. Soit $f \in A$ un élément tel que $\|f\|_\infty \neq 0$; nous allons montrer que $\|f\|_\infty \in |k^\times|^{\mathbf{Q}}$. Choisissons $x \in X$ tel que $|f(x)| = \|f\|_\infty$. L'image de l'élément $\widetilde{f}$ de $\widetilde{A}$ dans $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ est alors égale à $\widetilde{f(x)}$, et l'ouvert quasi-compact strict $\widetilde{(X, x)}$ de $\mathbf{P}^{}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}$ est alors contenu dans $\mathbf{P}^{}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}\{\widetilde{f(x)}\}$. D'après 10.5.5, ceci entraîne que $|\widetilde{f(x)}|$ appartient à $|\widetilde{k}^\times|^{\mathbf{Q}}$, c'est-à-dire que $|f(x)| \in |k^\times|^{\mathbf{Q}}$. □

Nous n'emploierons désormais l'adjectif « strict » que dans notre sens, sauf mention expresse du contraire. Nous dirons qu'un germe est strict s'il admet un représentant strict.

Lemme 11.8.3. — *Soit (X, x) un germe séparé d'espace k-analytique. Le germe (X, x) est strict si et seulement si sa réduction $\widetilde{(X, x)}$ est stricte.*

Démonstration. — L'implication directe découle des définitions ; montrons maintenant la réciproque (qui est déjà connue dans le cas où la valeur absolue de k n'est pas triviale). Supposons donc que $\widetilde{(X, x)}$ est strict. Il s'écrit alors comme une union finie $\bigcup U_i$ d'ouverts affines et stricts. Chaque U_i est de la forme $\widetilde{(X_i, x)}$ où X_i est un domaine analytique de X contenant x. Il suffit alors de démontrer que chacun des (X_i, x) possède un représentant strict (Y_i, x) : on pourra alors en effet toujours supposé quitte à restreindre les Y_i qu'ils

sont fermés dans X, et la réunion des Y_i constituera alors un représentant strict de (X,x). On s'est ainsi ramené au cas où $\widetilde{(X,x)}$ est affine. On a alors vu au 11.7.6 qu'il existe un entier n, un point y du polydisque unité D de dimension n et un morphisme sans bord f de (X,x) vers (D,y). On peut supposer quitte à remplacer X par un voisinage ouvert convenable de x que ce morphisme est défini sur X tout entier. Soit $z \in X$. Comme f est sans bord, $\widetilde{(X,z)}$ est l'image réciproque de $\widetilde{(D,f(z))}$, mais ce dernier est strict puisque D est strictement k-affinoïde. Par conséquent $\widetilde{(X,z)}$ est strict, et X est strict. □

Remarque 11.8.4. — Si $\widetilde{(X,x)}$ est strict et si la valeur absolue de k n'est pas triviale, on peut trouver un représentant de (X,x) à la fois strict et compact, car tout espace strictement k-analytique admet une base de voisinages stricts et compacts. Mais c'est faux en général lorsque k est trivialement valué : l'ouvert strict de $\mathbf{A}^1_k$ défini par les inégalités $0 < |T| < 1$ ne possède aucun domaine analytique compact strict hormis le vide.

Lemme 11.8.5. — *Soit $X = \mathscr{M}(A)$ un espace k-affinoïde et soit $x \in X$. Le germe (X,x) est strict si et seulement le degré de tout élément homogène non nul de l'image du morphisme canonique de $\widetilde{A}$ vers $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ est de torsion modulo $|k^\times|$.*

Démonstration. — Soit B l'image du morphisme canonique de $\widetilde{A}$ vers $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ et soit S un ensemble fini de générateurs homogènes non nuls de B sur $\widetilde{k}$. La réduction $\widetilde{(X,x)}$ est égale à $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}\{S\}$. Si le degré de tout élément homogène non nul B est de torsion modulo $|k^\times|$, c'est en particulier le cas du degré de tout élément de S, et il s'ensuit que $\widetilde{(X,x)}$ est strict. Réciproquement, supposons que $\widetilde{(X,x)}$ soit strict. Il s'écrit alors $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}\{E\}$ pour une certaine famille finie E d'éléments de $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1$, et l'on a également $\widetilde{(X,x)} = \mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}\{S \cup E\}$. Il résulte de l'égalité $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}\{S \cup E\} = \mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}\{E\}$ que B est finie sur la sous-$\widetilde{k}$-algèbre graduée C de $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ engendrée par E (**[127]**, Lemma 2.2). L'algèbre graduée B est en particulier contenue dans une extension finie du corps gradué des fractions $\mathrm{Frac}(C)$. Le degré de tout élément homogène non nul de B est donc de torsion modulo $|\mathrm{Frac}(C)^\times|$, lequel est égal à $|k^\times|$ par construction. □

11.8.6. — Soit (X,x) un germe séparé et strict d'espace k-analytique. Il existe alors un unique ouvert non vide et quasi-compact de $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1/\widetilde{k}^1}$ dont l'image réciproque sur $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}$ est égale à $\widetilde{(X,x)}$ (c'est l'image directe de $\widetilde{(X,x)}$) ; on le note $\widetilde{(X,x)}^1$. Les faits suivants se déduisent de leur version graduée.

Si X est strictement k-affinoïde et si A désigne l'algèbre des fonctions analytiques sur X, il résulte des définitions que $\widetilde{(X,x)}^1 = \mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1/\widetilde{k}^1}\{E\}$ où E est un ensemble fini de générateurs sur $\widetilde{k}^1$ de l'image de la réduction classique $\widetilde{A}^1$ dans $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1$ ($\widetilde{A}^1$ est de type fini, et son image dans $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1$ l'est donc aussi).

L'application $(V,x) \mapsto \widetilde{(V,x)}^1$ est une application croissante, commutant aux unions et intersections finies, qui établit une bijection entre l'ensemble des (germes de) domaines

strictement k-analytiques de (X,x) et celui des ouverts quasi-compacts et non vides de $\mathbf{P}^1_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}$.

Le germe (X,x) est bon si et seulement si $\widetilde{(X,x)_1}$ est affine ; il est sans bord si et seulement si $\widetilde{(X,x)}^1 = \mathbf{P}^1_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}$.

Soit $(f_1,\dots,f_n)$ une famille d'éléments de $\mathscr{O}_{X,x}^\times$ tels que $|f_i(x)|=1$. Pour tout i, soit V_i le domaine analytique de (X,x) défini par les inégalités $|f_i|\leqslant 1$. Alors $\widetilde{(V,x)}^1 = \widetilde{(X,x)}^1 \cap \mathbf{P}^1_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}\{\widetilde{f_i(x)}\}_i$.

Exemple 11.8.7. — Soit X un espace k-analytique et soit x un point de X tel que $|\mathscr{H}(x)^\times|$ soit de torsion modulo $|k|^\times$. Il résulte alors de 10.5.4 que $\widetilde{(X,x)}$ est strict, et donc que (X,x) est strict, et que l'application continue naturelle de $\widetilde{(X,x)}$ sur $\widetilde{(X,x)}^1$ est un homéomorphisme

§ 11.9. RÉDUCTION DE TEMKIN ET MODÈLES FORMELS

11.9.1. Schémas formels et leurs fibres génériques. — Soit $\mathfrak{X}$ un k°-schéma formel plat possédant un recouvrement localement fini par des ouverts affines topologiquement de présentation finie sur k°. On note $\mathfrak{X}_\mathrm{s}$ sa fibre spéciale $\mathfrak{X}\otimes_{k^\circ}\widetilde{k}^1$; c'est un $\widetilde{k}^1$-schéma possédant un recouvrement ouvert localement fini par des $\widetilde{k}^1$-schémas de type fini. Précisons que nous autorisons toujours le corps k à être trivialement valué ; dans ce cas, on a $k=\widetilde{k}=\widetilde{k}^1$ et $\mathfrak{X}$ est simplement le k-schéma $\mathfrak{X}_s$, mais vu comme schéma formel en munissant pour tout ouvert $\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{X}$ l'anneau $\mathscr{O}_\mathfrak{X}(\mathfrak{U})$ de sa topologie de limite des $\mathscr{O}_\mathfrak{X}(\mathfrak{V})$ où $\mathfrak{V}$ parcourt l'ensemble des ouverts affines de $\mathfrak{U}$ et où chaque $\mathscr{O}_\mathfrak{X}(\mathfrak{V})$ est muni de la topologie discrète.

À un tel schéma formel est associée sa fibre générique $\mathfrak{X}_\eta$. C'est un espace strictement k-analytique (il l'est même au sens classique), paracompact et topologiquement séparé, séparé si $\mathfrak{X}$ est séparé, et compact si $\mathfrak{X}$ est quasi-compact. Si $\mathfrak{X}=\operatorname{Spf} A$ pour une certaine k°-algèbre plate et topologiquement de présentation finie A, on a $\mathfrak{X}_\eta=\mathscr{M}(A\otimes_{k^\circ}k)$, et le cas général s'obtient en recollant ces constructions locales.

Supposons toujours que $\mathfrak{X}=\operatorname{Spf} A$ et posons $A_k=A\otimes_{k^\circ}k$. L'anneau A_k° est alors la fermeture intégrale de A dans A_k, et la réduction classique $\widetilde{A_k}^1$ est une $\widetilde{k}^1$-algèbre de type fini. C'est en effet évident si k est trivialement valué car alors $A=A_k=\widetilde{A_k}$. Supposons maintenant que k n'est pas trivialement valué. Choisissons un morphisme continu et surjectif de k°-algèbres $k^\circ\{T\}\to A$, où T est une famille finie d'indéterminées. Il induit un morphisme surjectif admissible de k-algèbres de $k\{T\}$ vers A_k, et le théorème 6.3.5/1 de **[20]** assure alors que A_k° est entière sur $(k\{T\}^\circ=k^\circ\{T\}$, c'est-à-dire sur son image, qui n'est autre que A ; et il assure aussi que que $\widetilde{A_k}^1$ est fini sur $\widetilde{k\{T\}}^1=\widetilde{k}^1[T]$, et a fortiori de type fini sur $\widetilde{k}^1$. Et comme A_k° est l'ensemble des $f\in A$ telles que $f(x)\in\mathscr{H}(x)^\circ$ pour tout $x\in\mathscr{M}(A_k)$ et que que $\mathscr{H}(x)^\circ$ est normal pour tout tel x, l'anneau A_k° est intégralement clos dans A_k ; étant entier sur A, il est égal à la fermeture intégrale de celui-ci dans A.

Les inclusions de A dans A_k° et de $k^{\circ\circ}A$ dans $A_k^{\circ\circ}$ induisent un morphisme naturel de $A \otimes_k \widetilde{k}^1$ vers $\widetilde{A_k}^1$. Ce morphisme est entier puisque A_k° est entière sur A, et il est même en fait fini, puisque $\widetilde{A_k}^1$ est de type fini sur $\widetilde{k}^1$.

En composant l'application de spécialisation classique de $\mathfrak{X}_\eta = \mathscr{M}(A_k)$ vers $\mathrm{Spec}(\widetilde{A_k}^1)$ avec le morphisme fini de $\mathrm{Spec}(\widetilde{A_k})^1$ vers $\mathrm{Spec}\, A \otimes_k \widetilde{k}^1 = \mathfrak{X}_s$, on obtient une application de spécialisation de $\mathfrak{X}_\eta$ vers $\mathfrak{X}_s$. Elle est anticontinue par construction, et elle est surjective : on se ramène en effet par extension des scalaires à démontrer que tout point fermé de $\mathfrak{X}_s$ appartient à son image, ce qui est assuré par la proposition 8.3/8 de [**19**].

Lorsque $\mathfrak{X}$ n'est plus supposé affine, les constructions ci-dessus fournissent encore par recollement une application de spécialisation π de $\mathfrak{X}_\eta$ vers $\mathfrak{X}_s$ qui est anti-continue et surjective. Par construction, cette application inuit pour tout $x \in X$ un $\widetilde{k}^1$-plongement de $\kappa(\pi(x))$ dans $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1$.

Lemme 11.9.2. — *Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel plat et séparé sur k° admettant un recouvrement localement fini par des ouverts affines topologiquement de présentation finie sur k°, soit $x \in \mathfrak{X}_\eta$ et soit V l'adhérence de $\pi(x)$ dans $\mathfrak{X}_s$ (munie de sa structure réduite).*

a) *Le $\tilde{k}^1$-schéma intègre V est de type fini.*

b) *L'ouvert quasi-compact $\widetilde{(\mathfrak{X}_\eta, x)}^1$ de $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1/\tilde{k}^1}$ est égal à $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1/\tilde{k}^1}\{V\}$.*

c) *Soit $\mathfrak{U}$ un ouvert formel de $\mathfrak{X}$. Alors $\mathfrak{U}_\eta$ est un voisinage de x si et seulement si $\mathfrak{U}_s$ contient V.*

d) *Le point x est un point intérieur de $\mathfrak{X}_\eta$ si et seulement si V est propre.*

Démonstration. — Montrons (a). Soit $(\mathfrak{U}_i)_{i\in I}$ un recouvrement localement fini de $\mathfrak{X}$ par des ouverts affines topologiquement de présentation finie sur k°. Soit J l'ensemble fini des $i \in I$ tels que $\pi(x) \in \mathfrak{U}_i$. La réunion des $\mathfrak{U}_i$, pour $i \notin J$, est un ouvert de $\mathfrak{X}$; son complémentaire est donc fermé, il est contenu dans $\bigcup_{i\in J} \mathfrak{U}_i$, et contient $\pi(x)$. Par suite, V est un sous-schéma fermé du k-schéma de type fini $\bigcup_{i\in J} \mathfrak{U}_{i,s}$, et il est donc de type fini.

Comme $\pi^{-1}(V)$ est un voisinage ouvert de x dans $\mathfrak{X}_\eta$ qui est contenu dans $\bigcup_{i\in J} \mathfrak{U}_{i,\eta}$, on peut remplacer $\mathfrak{X}$ par la réunion des $\mathfrak{U}_i$ pour $i \in J$. Alors, $\widetilde{(\mathfrak{X}_\eta, x)} = \bigcup_{i\in J} \widetilde{(\mathfrak{U}_{i,\eta}, x)}$ et $V = \bigcup_{i\in J} \mathfrak{U}_{i,s} \cap V$, et il suffit de montrer l'assertion requise pour chacun des $\mathfrak{U}_i$, pour $i \in J$. En d'autres termes, pour prouver que $\widetilde{(\mathfrak{X}_\eta, x)}^1$ coïncide avec $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1/\tilde{k}^1}\{V\}$, on peut supposer que $\mathfrak{X}$ est un schéma formel affine plat topologiquement de présentation finie sur k°. Écrivons $\mathscr{X} = \mathrm{Spf}\, A$.

La réduction stricte $\widetilde{(\mathfrak{X}_\eta, x)}^1$ est alors égale à $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1/\tilde{k}^1}\{R\}$, où R désigne l'image du morphisme naturel de $\widetilde{A_k}^1$ dans $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1$. Mais comme $\widetilde{A_k}^1$ est finie sur $A \otimes_k \widetilde{k}^1$, l'anneau R est fini sur l'image S du morphisme naturel de $A \otimes_k \widetilde{k}^1$ dans $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1$, si bien que $\widetilde{(\mathfrak{X}_\eta, x)}^1$ est aussi égal à $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1/\tilde{k}^1}\{S\}$. Mais par construction, le morphisme de $A \otimes_k \widetilde{kq}$ dans $\widetilde{\mathscr{H}(x)}_1$ est composé du morphisme d'évaluation de $A \otimes_k \widetilde{k}^1$ vers $\kappa(\pi(x))$, dont l'image est l'anneau $\mathscr{O}(V)$, et du plongement canonique de $\kappa(\pi(x))$ dans $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1$; il en résulte que $\widetilde{(\mathfrak{X}_\eta, x)}^1$ est égal à $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1/\tilde{k}^1}\{V\}$, ce qu'on souhaitait établir.

Montrons (c). Soit maintenant $\mathfrak{U}$ un ouvert formel de $\mathfrak{X}$. Si $V \subset \mathfrak{U}_s$, alors $\pi^{-1}(V)$ est une partie ouverte de $\mathfrak{X}$ contenue dans $\mathfrak{U}_\eta$ et contenant x, de sorte $\mathfrak{U}_\eta$ est un voisinage de x. Supposons inversement que $\mathfrak{U}_\eta$ soit un voisinage de x ; (en particulier $x \in \mathfrak{U}_\eta$, si bien que $\pi(x) \in \mathfrak{U}_s$). On a alors $\widetilde{(\mathfrak{U}_\eta, x)}^1 = \widetilde{(\mathfrak{X}\eta, x)}_1$; d'après (b), cela signifie que $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1/\tilde{k}^1}\{V\} = \mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1/\tilde{k}^1}\{V \cap \mathfrak{U}_s\}$. Le morphisme dominant de $V \cap \mathfrak{U}_s$ vers V est donc propre par critère valuatif, ce qui entraîne que $V \cap \mathfrak{U}_s = V$, c'est-à-dire que $V \subset \mathfrak{U}_s$.

Montrons enfin (d). Le point x est un point intérieur de $\mathfrak{X}_\eta$ si et seulement si $\widetilde{(\mathfrak{X}_\eta, x)} = \mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1/\tilde{k}^1}$, c'est-à-dire, au vu de (b), si et seulement si $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1/\tilde{k}^1}\{V\} = \mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1/\tilde{k}^1}$. Par le critère valuatif de propreté, c'est le cas si et seulement si V est propre sur $\widetilde{k}^1$. □

§ 11.10. STRUCTURES FAIBLEMENT ANALYTIQUES

Définition 11.10.1. — *Soit X un espace k-analytique, soit A une partie fermée de X et soit d un entier naturel. On dit que A est faiblement analytique (de dimension $\leqslant d$) si pour tout domaine analytique compact V de X, il existe une famille finie $(f_i \colon V_i \to W_i)$ de morphismes d'espaces k-analytiques définis sur des domaines analytiques compacts de V et une famille (w_i), où $w_i \in W_i$ pour tout i, tels que $A \cap V = \bigcup_i f_i^{-1}(w_i)$ (et $\dim_{f_i}(x) \leqslant d$ pour tout $x \in A \cap V_i$).*

C'est une propriété G-locale. Une union localement finie de parties faiblement analytiques est naturellement munie d'une structure faiblement analytique.

Exemple 11.10.2. — Le bord d'un espace affinoïde X est faiblement analytique de dimension $\leqslant \dim(X) - 1$: cela découle du théorème 3.2 de [**50**].

Remarque 11.10.3. — Les notions de dimension d'une partie faiblement analytique dépendent a priori des morphismes choisis pour la présenter. Par exemple, si $r \notin |k^\times|^{\mathbf{Q}}$, l'application identique de $\mathscr{M}(k_r)$ et le morphisme canonique $\mathscr{M}(k_r) \to \mathscr{M}(k)$ fournissent deux présentations de $\mathscr{M}(k_r)$ comme partie faiblement analytique de lui-même, de dimensions respectives 0 et 1.

Proposition 11.10.4. — *Soit $X = \mathscr{M}(\mathscr{A})$ un espace affinoïde, soit $\widetilde{X} = \mathrm{Spec}(\widetilde{\mathscr{A}})$ sa réduction graduée et soit d un entier naturel. L'ensemble des points $x \in X$ tel que $\dim(\overline{\pi(x)}) \geqslant d$ est une partie faiblement analytique de dimension $\leqslant \dim(X) - d$.*

En particulier, si $d = \dim(X)$, on retrouve en particulier que cet ensemble est de dimension nulle ; on sait par ailleurs que c'est le bord de Shilov de X.

Démonstration. — Soit V cette partie. Choisisissons une famille finie $(f_1, \ldots, f_n)$ d'éléments de $\mathscr{A}$, de normes spectrales $(r_1, \ldots, r_n)$ non nulles, telle que les $\widetilde{f_i}$ engendrent l'algèbre graduée $\widetilde{\mathscr{A}}$. Soit $x \in X$ et soit $y = \pi(x)$. Pour que $x \in V$, il faut et il suffit qu'il existe une partie $I \subset \{1, \ldots, n\}$ de cardinal d telle que les $\widetilde{f_i}(y)$, pour $i \in I$, soient algébriquement indépendantes sur $\tilde{k}$. Cette dernière condition équivaut à l'égalité $f_I(x) = r_I$, où $f_I = (f_i)_{i \in I}$ et $r_I = (r_i)_{i \in I}$. D'autre part, pour $x \in f_I^{-1}(\eta_{r_I})$, on a $\dim(X) \geqslant d_k(x) = d_{\mathscr{H}(\eta_{r_I})}(x) + d$, de sorte que $d_{\mathscr{H}(\eta_{r_I})}(x) \leqslant \dim(X) - d$. Comme V est

la réunion (finie) des $f_I^{-1}(\eta_{r_I})$, cela prouve que c'est une partie faiblement analytique de dimension $\leqslant \dim(X) - d$. □

CHAPITRE 12

PARTIES SQUELETTIQUES D'UN ESPACE ANALYTIQUE

---

§ 12.1. TORES ET LEURS SQUELETTES CANONIQUES

12.1.1. Convention. — Dans la suite de ce travail, nous travaillerons très régulièrement avec les analytifiés $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}$ et $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{n,\mathrm{an}}$ des k-schémas $\mathbf{A}^n$ et $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$, et seulement exceptionnellement avec ces schémas eux-mêmes. Aussi écrirons-nous désormais, afin d'alléger l'écriture, $\mathbf{A}^n$ et $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ au lieu de $\mathbf{A}^{n,\mathrm{an}}$ et $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{n,\mathrm{an}}$. Il sera donc considéré par défaut que $\mathbf{A}^n$ et $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ sont des espaces analytiques ; si nous avons besoin de travailler par endroit avec les schémas correspondants, nous le préciserons explicitement.

12.1.2. — Dans ce travail, le groupe multiplicatif et ses puissances jouent un rôle fondamental. Rappelons que l'anneau des fonctions algébriques sur $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ est l'anneau $A = k[T_1^{\pm 1}, \ldots, T_n^{\pm 1}]$ des polynômes de Laurent à coefficients dans k en des indéterminées $T_1, \ldots, T_n$; l'espace analytique $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ est l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur cet anneau qui étendent la valeur absolue de k. L'espace $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ est un ouvert de Zariski dense de $\mathbf{A}^n$: c'est le lieu des points en lesquels aucune fonction coordonnée ne s'annule. Pour tout polyrayon $r = (r_1, \ldots, r_n)$ le point η_r de de $\mathbf{A}^n$(défini à l'exemple 11.1.12) appartient à $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$. Il correspond à la norme multiplicative $\sum a_I T^I \mapsto \max |a_I| r^I$ sur l'anneau des polynômes de Laurent. Si le corps k a besoin d'être rappelé nous écrirons $\eta_{k,r}$ au lieu de η_r.

Pour éviter le recours à un choix explicite de coordonnées, nous adopterons la convention suivante : nous appellerons *tore* (de dimension n) tout groupe analytique isomorphe à une puissance $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ du groupe multiplicatif ; nos tores sont donc implicitement supposés déployés.

12.1.3. — Rappelons que toute fonction *analytique* inversible sur $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ est un monôme, c'est-à-dire de la forme $aT_1^{m_1} \ldots T_n^{m_n}$, où $a \in k^*$ et $(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbf{Z}^n$ est un vecteur appelé exposant. (En dimension 1, cet énoncé est le lemme 9.7.1/1 de **[20]**, le cas général en découle par récurrence.) C'est en particulier une fonction algébrique.

Le morphisme $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ induit par une telle fonction est un homomorphisme de groupes analytiques si et seulement si $a = 1$.

Soit T un tore. L'ensemble $\mathsf{X}(T)$ des *caractères* de T, c'est-à-dire des morphismes de groupes analytiques de T vers $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$, est un groupe abélien.

On déduit de ce qui précède que tout isomorphisme de T avec $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ induit un isomorphisme de $\mathsf{X}(T)$ avec $\mathbf{Z}^n$; on en déduit aussi que si T et T' sont deux tores, tout morphisme d'espaces k-analytiques de T vers T' est affine, *i.e.* composé d'un morphisme de groupes analytiques et d'une translation ; c'est donc un morphisme de groupes si et seulement si il envoie l'origine de T sur l'origine de T'. Pour cette raison, lorsque nous évoquerons un morphisme entre tores qui n'est pas nécessairement un morphisme de groupes analytiques, nous le qualifierons de morphisme affine.

12.1.4. Tropicalisations. — On considère le groupe abélien $\mathbf{R}_+^\times$ comme un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, *via* l'exponentiation. Par ailleurs, le choix d'une base de logarithmes permet de l'identifier à l'espace $\mathbf{R}$. On fixe une fois pour toutes un tel isomorphisme $\log\colon \mathbf{R}_+^\times \to \mathbf{R}$. Dans ce texte, il n'y a pas d'intérêt particulier à choisir le logarithme néperien ; en particulier, nous n'aurons jamais à dériver cet isomorphisme, vu comme fonction d'une variable réelle. L'utilisation de cet isomorphisme log présentera pour nous deux intérêts : elle nous permettra d'utiliser la géométrie paralinéaire sous sa forme standard, plutôt que sa variante multiplicative ; et elle donnera lieu à un formalisme apparenté à celui de la géométrie complexe, dans lequel les logarithmes de fonctions holomorphes inversibles jouent un rôle majeur.

Soit T un tore. Nous noterons T_{trop} le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathrm{Hom}(\mathsf{X}(T), \mathbf{R}_+^\times)$, que l'on peut identifier à $(\mathbf{R}_+^\times)^n$ une fois choisie une trivialisation de T, ou à $\mathbf{R}^n$ via l'isomorphisme log choisi. L'espace vectoriel T_{trop} est appelé *tropicalisation* du tore T.

Étant donné un point t de T, l'application qui applique un caractère $\varphi \in \mathsf{X}(T)$ sur l'élément $|\varphi(t)|$ est un élément de T_{trop} noté $\mathrm{trop}(t)$. L'application $\mathrm{trop}\colon T \to T_{\mathrm{trop}}$ ainsi définie est continue.

La formation de T_{trop} est fonctorielle : tout morphisme affine $f\colon T \to T'$ entre tores induit une application affine $f_{\mathrm{trop}}\colon T_{\mathrm{trop}} \to T'_{\mathrm{trop}}$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f} & T' \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_{\mathrm{trop}} & \xrightarrow{f_{\mathrm{trop}}} & T'_{\mathrm{trop}} \end{array}$$

commute.

12.1.5. Squelette de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$. — L'application de tropicalisation $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n \to (\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)_{\mathrm{trop}}$ possède une section naturelle, notée sq et définie comme suit : pour tout point $r = (r_1, \dots, r_n) \in (\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)_{\mathrm{trop}} = \mathbf{R}^n$, on note $\mathrm{sq}(r)$ le point η_r de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$. L'application sq est continue ; elle induit un homéomorphisme de $(\mathbf{R}_+^\times)^n$ sur un sous-espace fermé $S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)$ de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ que l'on appelle *squelette canonique* de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$.

On munit $S(T)$ de l'unique structure de groupes pour laquelle sq est un isomomorphisme de groupes. Pour tout extension valuée K de k, l'application naturelle $T(K) \to S(T)$ donnée par $t \mapsto \mathrm{sq}(\mathrm{trop}(t))$ est un morphisme de groupes.

Par définition, pour qu'un point $x \in \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ appartienne à $S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)$, il faut et il suffit que pour tout polynôme de Laurent $f = \sum a_m T^m$, on ait

$$|f(x)| = \max_m |a_m| \cdot |T_1(x)|^{m_1} \dots |T_n(x)|^{m_n}.$$

(Si $x = \mathrm{sq}(r)$, la formule est vraie par définition ; dans l'autre sens, cette formule prouve que $x = \eta_r$ avec $r_i = |T_i(x)|$ pour tout i.)

Du point de vue de la réduction graduée, cette dernière condition revient à demander que les éléments $\widetilde{T_i(x)}$ du corps résiduel *gradué* $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ soient algébriquement indépendants sur $\tilde{k}$ (10.8.3).

Lemme 12.1.6. — a) *Le squelette canonique $S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)$ de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ est l'ensemble des points de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ qui sont maximaux pour la relation $\leqslant$ définie comme suit : $x \leqslant y$ si et seulement si $|f(x)| \leqslant |f(y)|$ pour toute fonction analytique f sur $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$.*

b) *Soit $t \in S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)$. Les réductions graduées $\widetilde{T_i(t)}$ sont algébriquement indépendantes et engendrent $\widetilde{\mathscr{H}(t)}$. En particulier, on a $d_k(t) = n$.*

c) *Pour tout ouvert de Zariski non vide U de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$, on a $S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n) \subset U^{\mathrm{an}}$.*

Démonstration. — *a*) Soit $x \in \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$. Pour tout i, on pose $r_i = T_i(x)$, et l'on note r le n-uplet $(r_1, \dots, r_n)$. Soit $f = \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} a_m T_1^{m_1} \dots T_n^{m_n}$ une fonction analytique sur $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$. On a

$$|f(x)| \leqslant \max_{m \in \mathbf{Z}^n} |a_m| r_1^{m_1} \dots r_n^{m_n} = |f(\eta_r)|.$$

En conséquence, $x \leqslant \eta_r$; en particulier, si x est maximal alors $x = \eta_r$. Ainsi, tout point maximal appartient à $S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)$.

Réciproquement, soit $r \in (\mathbf{R}_+^\times)^n$ et soit $x \in \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ tel que $x \geqslant \eta_r$. Pour tout i, on pose $s_i = |T_i(x)|$, et l'on note s le n-uplet $(s_1, \dots, s_n)$. D'après ce qui précède, on a $x \leqslant \eta_s$ et, *a fortiori*, $\eta_r \leqslant \eta_s$. En appliquant cette inégalité à T_i et T_i^{-1} pour tout i, il vient $r = s$. Ainsi, $\eta_r \leqslant x \leqslant \eta_r$ et $x = \eta_r$. Par conséquent, η_r est maximal.

b) C'est une conséquence de l'exemple 10.8.4 et de la densité de $k(T_1, \dots, T_n)$ dans $\mathscr{H}(\eta_r)$.

c) Comme $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ est irréductible algébriquement, donc analytiquement, tout fermé de Zariski strict de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ est de dimension $< n$. Ainsi, tout point de $S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)$ est Zariski dense. L'assertion en résulte. □

Corollaire 12.1.7. — *Soit $f \colon \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ un k-morphisme fini et plat, de degré d. Alors $f^{-1}(S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)) = S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)$ et f induit un homéomorphisme de $S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)$ sur lui-même. De plus, pour tout $x \in S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)$, $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ est degré d sur $\widetilde{\mathscr{H}(f(x))}$ et $f^{-1}(f(x)) = \mathscr{M}(\mathscr{H}(x))$, en particulier, cette fibre est réduite.*

Démonstration. — Le morphisme f est fourni par des monômes $c_1 T^{m_1}, \dots, c_n T^{m_n}$, où les m_i sont des multi-indices. La matrice $\mathrm{A} = (m_1, \dots, m_n)$ est à coefficients entiers ; on a $|\det(A)| = d$. En particulier, cette matrice est inversible dans $\mathrm{GL}(n, \mathbf{Q})$. On en déduit que pour tout $x \in \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$, les $\widetilde{T_i(x)}$ sont algébriquement indépendents si et seulement si il en est de même des $\widetilde{c_i T(x)}^{m_i}$; ce qui prouve que $x \in S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)$ si et seulement si $f(x) \in S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)$. Si c'est le cas, le corps engendré par les $\widetilde{T_i(x)}$ est de degré d sur celui engendré par les $\widetilde{c_i T(x)}^{m_i}$. L'extension $[\mathscr{H}(x) : \mathscr{H}(f(x))]$ est donc de degré au moins d. Comme f est fini et plat de degré d, il en résulte que x est le seul point de la fibre $f^{-1}(f(x))$ et que cette fibre est réduite en x. On a donc $f^{-1}(f(x)) = \mathscr{M}(\mathscr{H}(x))$. □

Corollaire 12.1.8. — a) *Soit $\sigma\colon k \to K$ un morphisme isométrique de corps ultramétriques complets. Le morphisme p d'espaces analytiques $\mathbf{G}^n_{\mathrm{m},K} \to \mathbf{G}^n_{\mathrm{m},k}$ qu'il induit applique $\eta_{K,r}$ sur $\eta_{k,r}$ pour tout r.*

b) *Supposons que $\widetilde{K}$ est algébrique sur $\sigma(\widetilde{k})$. Le point $\eta_{K,r}$ est alors l'unique antécédent de $\eta_{k,r}$ par p et le morphisme naturel de $\mathscr{H}(\eta_{k,r})\widehat{\otimes}_k K$ vers $\mathscr{H}(\eta_{K,r})$ est un isomorphisme d'anneaux normés.*

c) *Pour tout $x \in \mathbf{G}^n_{\mathrm{m}}$, le corps k est séparablement clos dans $\mathscr{H}(x)$.*

Démonstration. — a) Pour tout polynôme de Laurent $f = \sum a_m T^m$ appartenant à $k[T, T^{-1}]$ on a

$$|f(p(\eta_{K,r})| = |\sigma(f)(\eta_{K,r})| = \sup_m |\sigma(a_m)| r^m = \sup_m |a_m| r^m = |f(\eta_{k,r})|,$$

ce qui conclut.

b) Pour alléger les notations, utilisons σ pour identifier k à un sous-corps de K. Soit y un antécédent de $\eta_{k,r}$ sur $\eta_{K,r}$. On a $|T_i(y)| = |T_i(x)| = r_i$ pour tout i, et comme $\widetilde{K}$ est algébrique sur $\widetilde{k}$, les $\widetilde{T_i(y)} = \widetilde{T_i(x)}$ sont encore algébriquement indépendants sur $\widetilde{K}$; par conséquent, $y = \eta_{K,r}$. Ceci entraîne que $\mathscr{M}(\mathscr{H}(\eta_{k,r})\widehat{\otimes}_k K) = \{\eta_{K,r}\}$. Par ailleurs, la norme de $\mathscr{H}(\eta_{k,r})\widehat{\otimes}_k K$ est multiplicative (*cf.* [**49**], lemme 1.8 et exemples 1.9). C'est donc elle qui définit l'unique point $\eta_{K,r}$ de $\mathscr{M}(\mathscr{H}(\eta_{k,r})\widehat{\otimes}_k K)$. Ainsi $\mathscr{H}(\eta_{k,r})\widehat{\otimes}_k K$ s'injecte isométriquement dans $\mathscr{H}(\eta_{K,r})$. Il en résulte que si λ est un un élément non nul de $\mathscr{H}(\eta_{k,r})\widehat{\otimes}_k K$ alors λ ne s'annule pas sur $\mathscr{M}(\mathscr{H}(\eta_{k,r})\widehat{\otimes}_k K) = \{\eta_{K,r}\}$, ce qui entraîne que λ est inversible ([**8**], Corollary 2.1.4). L'injection isométrique de $\mathscr{H}(\eta_{k,r})\widehat{\otimes}_k K$ dans $\mathscr{H}(\eta_{K,r})$ a donc pour image un sous-corps complet de ce dernier. Comme le corps des fractions de cette image est dense dans le corps résiduel complété $\mathscr{H}(\eta_{K,r})$, l'injection isométrique de $\mathscr{H}(\eta_{k,r})\widehat{\otimes}_k K$ dans $\mathscr{H}(\eta_{K,r})$ est finalement bijective.

c) Soit K le complété d'une clôture algébrique de k. Il s'agit de démontrer que tout point $x \in S(\mathbf{G}^n_{\mathrm{m}})$ possède un unique antécédent dans $\mathbf{G}^n_{\mathrm{m},K}$. On peut le déduire de a) qui assure que pour tout $r \in (\mathbf{R}^\times_+)^n$ le point $\eta_{K,r}$ est invariant par l'action de $\mathrm{Aut}_k(K)$ et s'applique sur le point $\eta_{k,r}$ de $\mathbf{G}^n_{\mathrm{m}}$, dont il est dès lors l'unique antécédent. On peut aussi le déduire de b) puisque $\widetilde{K}$ est algébrique sur $\widetilde{k}$. □

12.1.9. Squelette canonique d'un tore. — Soit T un tore et soit $f\colon \mathbf{G}^n_{\mathrm{m}} \to T$ un isomorphisme. En vertu du corollaire précédent, le sous-espace fermé $f(S(\mathbf{G}^n_{\mathrm{m}}))$ de T ne dépend pas de f. On l'appelle le *squelette canonique* de T et on le note $S(T)$.

L'application naturelle $T \to T_{\mathrm{trop}}$ induit un homéomorphisme $S(T) \simeq T_{\mathrm{trop}}$. Elle munit $S(T)$ d'une structure naturelle d'espace vectoriel réel de dimension $\dim(T)$.

Notons $\mathrm{sq}\colon T_{\mathrm{trop}} \to T$ l'homéomorphisme réciproque. Si P est un sous-ensemble de T_{trop}, on notera aussi P_{sq} le sous-ensemble $\mathrm{sq}(P)$ de $S(T)$ qui lui correspond *via* cet homéomorphisme.

Le corollaire 12.1.8 s'étend immédiatement au cas des tores.

Soit t un point de T et soit $\chi_1, \ldots, \chi_n$ une base du groupe des caractères de T. Le degré de transcendance sur $\widetilde{k}$ du sous-corps gradué de $\widetilde{\mathscr{H}(t)}$ engendré par les $\widetilde{k}$ et les $\widetilde{\chi_i(t)}$ ne dépend pas de la base (χ_i) : on le déduit d'une fait qu'on passe d'une base de $\mathsf{X}(T)$ à une autre par une transformation monomiale inversible à exposants entiers. Ce degré sera appelé le degré de transcendance résiduel (gradué) torique de t. Le point t

appartient à $S(T)$ si et seulement si son degré de transcendance résiduel torique est égal à n.

12.1.10. Sections de Shilov. — Soit T un tore et soit X un espace k-analytique. Pour tout $x \in X$, notons sq_x l'application de T_{trop} dans $T \times_k X$ qui applique un point $t \in T_{\mathrm{trop}}$ sur le point qui correspond à t sur le squelette canonique du $\mathscr{H}(x)$-tore $T_{\mathscr{H}(x)}$, fibre au-dessus de x de la projection de $T \times_k X$ sur X. Pour tout $x \in X$, l'application sq_x est continue.

Lemme 12.1.11. — *L'application $T_{\mathrm{trop}} \times X \to T \times_k X$, $(t, x) \mapsto \mathrm{sq}_x(t)$ est continue.*

En particulier, pour tout $t \in T_{\mathrm{trop}}$, l'application $x \mapsto \mathrm{sq}_x(t)$ de X vers $T \times_k X$ est une section *continue* (parfois dite *de Shilov*) de la seconde projection ([**8**], lemma 3.2.2, (i)).

Démonstration. — La preuve est en fait la même que celle de la continuité de sq_x, pour $x \in X$ fixé. On peut supposer que $X = \mathscr{M}(A)$ est affinoïde et que $T = \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$; alors, $T \times_k X$ est l'analytifié du schéma $\mathbf{G}_{\mathrm{m},\mathscr{A}}^n$ et sa topologie est définie par les normes des *polynômes* de Laurent à coefficients dans $\mathscr{A}$. La continuité de l'application étudiée découle alors de ce que pour tout $f = \sum a_I T^I \in A[T_1^{\pm 1}, \ldots, T_n^{\pm 1}]$ et toute partie ouverte J de $\mathbf{R}_+$, l'ensemble des couples $(r, x) \in \mathbf{R}^n \times X$ tels que $\sup(|a_I(x)| r^I) \in J$ est ouvert. □

12.1.12. — Pour toute partie P de T_{trop}, on note $\mathrm{sq}_X(P)$ l'ensemble des points de $T \times_k X$ de la forme $\mathrm{sq}_x(t)$, pour $t \in P$ et $x \in X$.

Supposons que X soit connexe (il est alors connexe par arcs) et soit P une partie connexe (par arcs) de T_{trop} ; démontrons que l'ensemble $\mathrm{sq}_X(P)$ est connexe (par arcs). Donnons-nous deux points t, s de P et deux points x, y de X. Comme P est connexe par arcs et comme $u \mapsto \mathrm{sq}_x(u)$ est continue, les points $\mathrm{sq}_x(t)$ et $\mathrm{sq}_x(s)$ sont dans la même composante connexe (par arcs) de $\mathrm{sq}_X(P)$; comme la section de Shilov $\xi \mapsto s_{\mathrm{sq},\xi}$ est continue, les points $\mathrm{sq}_x(s)$ et $\mathrm{sq}_y(s)$ appartiennent à la même composante connexe (par arcs) de $\mathrm{sq}_X(P)$. Par suite, $\mathrm{sq}_X(P)$ est connexe (par arcs).

12.1.13. Une convention. — Soit T et T' deux tores. Les $\mathbf{R}$-espaces vectoriels T_{trop} et T'_{trop} sont respectivement égaux à $\mathrm{Hom}(\mathsf{X}(T), \mathbf{R}_+^\times)$ et $\mathrm{Hom}(\mathsf{X}(T'), \mathbf{R}_+^\times)$. On dispose par conséquent d'un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}-\mathrm{lin}}(T_{\mathrm{trop}}, T'_{\mathrm{trop}}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathsf{X}(T'), \mathsf{X}(T)) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}.$$

Dans le cas particulier où $T' = \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$, on a $T'_{\mathrm{trop}} = \mathbf{R}_+^\times$ d'où un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}-\mathrm{lin}}(T_{\mathrm{trop}}, \mathbf{R}_+^\times) \simeq \mathsf{X}(T) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}.$$

En particulier, l'espace vectoriel T_{trop} possède une $\mathbf{Q}$-structure canonique, donnant lieu aux notions de cellules, polyèdres, décomposition cellulaires, $\mathbf{Q}$-rationnelles. De même, on dit qu'une application affine $f\colon T_{\mathrm{trop}} \to T'_{\mathrm{trop}}$ est $\mathbf{Q}$-rationnelle si sa partie linéaire appartient à $\mathrm{Hom}(\mathsf{X}(T'), \mathsf{X}(T)) \otimes \mathbf{Q}$.

Désormais, et sauf mention expresse du contraire, nous dirons cellule, polyèdre, décomposition cellulaire pour cellule $\mathbf{Q}$-rationnelle, polyèdre $\mathbf{Q}$-rationnel, décomposition cellulaire $\mathbf{Q}$-rationnelle de T_{trop}. De même, nous dirons simplement qu'une application de T_{trop} dans T'_{trop} est affine si elle est affine et $\mathbf{Q}$-rationnelle, et qu'une application continue f d'un polyèdre P de T_{trop} vers T'_{trop} est paralinéaire s'il existe une décomposition cellulaire $\mathbf{Q}$-rationnelle $\mathscr{C}$ de P telle que la restriction de f à chaque cellule de $\mathscr{C}$ s'étende en une application affine $\mathbf{Q}$-rationnelle de T_{trop} vers T'_{trop}.

Compte tenu des isomorphismes canoniques de $S(T)$ sur T_{trop} et de $S(T')$ sur T'_{trop}, la même convention vaudra pour les cellules, polyèdres, applications affines, etc. de $S(T)$.

12.1.14. Caractérisation de l'image réciproque du squelette canonique par des formules explicites. — Soit X un espace k-analytique et soit $f = (f_1, \dots, f_n)$ une famille de fonctions analytiques inversibles sur X ; on note φ le morphisme $X \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ défini par les f_i.

Soit $x \in X$; pour tout i, posons $r_i = |f_i(x)|$. Le point $\varphi(x)$ appartient à $S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)$ si et seulement si il est égal à η_r ; par définition, cela revient à demander que

$$\left|\sum a_I f(x)^I\right| = \max |a_I| \cdot r^I$$

pour tout polynôme $\sum a_I T^I \in k[T]$. Compte tenu de la description du squelette de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ (§12.1.5), cela revient aussi à dire que les $\widetilde{f_i(x)}$ sont algébriquement indépendants sur $\tilde{k}$.

Ce critère entraîne en particulier les résultats suivants qui nous seront utiles par la suite.

1) Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des éléments de $k^\times$, et soit $\psi\colon X \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ le morphisme induit par les $\alpha_i f_i$. On a $\psi^{-1}(S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)) = \varphi^{-1}(S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n))$.

2) Soit $(g_1, \dots, g_n)$ une famille de fonctions analytiques sur X. Supposons que $|g_i(x)| < r_i$ pour tout i, et soit χ le morphisme de but $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ défini par les fonctions $f_i + g_i$.

Alors $\varphi(x) \in S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)$ si et seulement si $\chi(x) \in S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)$.

3) Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des éléments de $k^\times$, et $u_1, \dots, u_n$ des fonctions analytiques sur X, telles que $|u_i(y)| < |\alpha_i|$ pour tout i et tout y appartenant à X. Soit $\theta\colon X \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ le morphisme induit par les fonctions $(\alpha_i + u_i)f_i$. Posons $s_i = |\alpha_i| r_i$. On a alors les équivalences

$$\varphi(x) \in S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n) \iff \varphi(x) = \eta_r \iff \theta(x) = \eta_s \iff \theta(x) \in S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n).$$

§ 12.2. MOMENTS, TROPICALISATIONS, POLYÈDRES

Définition 12.2.1. — *Soit X un espace k-analytique ; on appelle* moment *sur X un morphisme de X vers un tore.*

Soit $f\colon X \to T$ un moment sur un espace k-analytique X. On désignera par $f_{\mathrm{trop}}\colon X \to T_{\mathrm{trop}}$ l'application composée $X \to T \to T_{\mathrm{trop}}$. On dira que l'application f_{trop} est la *tropicalisation* de f ; c'est une application continue.

Remarque 12.2.2. — Si $f\colon T \to T'$ est un morphisme affine entre tores, la notation f_{trop} désigne donc aussi bien l'application induite $T_{\mathrm{trop}} \to T'_{\mathrm{trop}}$ que sa composée $T \to T' \to T'_{\mathrm{trop}}$ avec l'application de tropicalisation de T. Cette ambiguïté n'aura, en pratique, guère de conséquences.

Lemme 12.2.3. — *Soit X un espace analytique, soit x un point de X et soit V un domaine analytique de X contenant x. Soit $f\colon V \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ une fonction analytique inversible. On suppose que X est presque bon en x. Il existe alors un voisinage ouvert U de x et une fonction analytique inversible g sur U telle que $|f - g| < |f|$ sur $U \cap V$; en particulier, f_{trop} et g_{trop} coïncident sur $U \cap V$.*

Démonstration. — Soit U un voisinage ouvert de x dans X et $g \in \mathscr{O}_X(U)$ tels que $|f(x) - g(x)| < |f(x)|$; il en existe car $\kappa(x)$ est dense dans $\mathscr{H}(x)$ et $|f(x)| > 0$. L'ensemble des points de $U \cap V$ en lesquels $|f - g| < |f|$ est un voisinage de x dans V ; quitte à restreindre U, on peut supposer que cette inégalité vaut dans $U \cap V$ tout entier. Quitte à restreindre encore U, on peut supposer que g est inversible sur U, d'où le lemme. □

Théorème 12.2.4. — *Soit X un espace k-analytique compact et soit $f\colon X \to T$ un moment. Le sous-espace compact $f_{\mathrm{trop}}(X)$ est un polyèdre de T_{trop} de dimension* $\dim(X)$.

L'assertion a été établie par Berkovich dans le cas où X est G-localement algébrisable, *cf.* **[11]**, cor. 6.2.2. Pour le cas général, on pourra se reporter à **[46]**, §3.30, ou à **[50]**, th. 3.2.

Corollaire 12.2.5. — *Soit X un espace k-analytique compact et soit V une partie fermée de X munie d'une structure faiblement analytique de dimension d. Soit $f\colon X \to T$ un moment. Alors, $f_{\mathrm{trop}}(V)$ est une partie paralinéaire de dimension $\leqslant d$ de T_{trop}.*

Démonstration. — On se ramène immédiatement au cas où il existe un morphisme $g\colon X \to Y$ et un point $y \in Y$ tel que $V = g^{-1}(y)$. Alors, le produit fibré $X \times_Y \mathscr{H}(y)$ permet de considérer V comme un espace $\mathscr{H}(y)$-analytique compact, de dimension $\leqslant d$, et $f|_V\colon V \to T_{\mathscr{H}(y)}$ comme un moment sur cet espace. On donc $\dim(f_{\mathrm{trop}}(V)) \leqslant d$. □

Corollaire 12.2.6. — *Soit X un espace k-analytique compact de dimension n. Soit $f\colon X \to T$ un moment. Si X est affinoïde, alors $f_{\mathrm{trop}}(\partial(X))$ est une partie paralinéaire de dimension $\leqslant n-1$ de T_{trop} ; en genéral, $f_{\mathrm{trop}}(\partial(X))$ est contenu dans une telle partie paralinéaire.*

Démonstration. — Compte tenu de l'exemple 11.10.2 selon lequel $\partial(X)$ est une partie faiblement analytique de dimension $\leqslant \dim(X) - 1$, cela résulte du corollaire précédent. Il s'agit en fait du théorème 3.2 de **[50]**, démontré de la même façon, même si la notion de structure faiblement analytique n'avait pas été dégagée. □

12.2.7. — Soit X un espace k-analytique et $f\colon X \to T$ un moment. Soit $x \in X$. On appellera degré de transcendance résiduel (gradué) de f en x le degré de transcendance résiduel torique du point $f(x)$ de T. Si $\chi_1, \ldots, \chi_n$ est une base de $\mathsf{X}(T)$, ce degré est le degré de transcendance sur $\widetilde{k}$ du sous-corps gradué de $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ engendré par $\widetilde{k}$ et les $\widetilde{\chi_i \circ f(x)}$. Si $T = \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ et $f = (f_1, \ldots, f_n)$, c'est donc le degré de transcendance sur $\widetilde{k}$ du sous-corps gradué de $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ engendré par $\widetilde{k}$ et les $\widetilde{f_i(x)}$.

Le degré de transcendance résiduel de f en x est majoré à la fois par $d_k(x)$ et par n. Il vaut n si et seulement si $f(x) \in S(T)$.

Proposition 12.2.8. — *Soit X un espace k-analytique et soit x un point de X. Soit $f = X \to T$ un moment ; posons $\xi = f_{\mathrm{trop}}(x)$. Notons d le degré de transcendance résiduel de f en x.*

Il existe un voisinage analytique compact U de x dans X tel que pour pour tout voisinage analytique compact V de x contenu dans U, on ait les propriétés suivantes :

i) *Les germes de polyèdres $(f_{\mathrm{trop}}(U), \xi)$ et $(f_{\mathrm{trop}}(V), \xi)$ coïncident ;*

ii) *La dimension locale $\dim_\xi(f_{\mathrm{trop}}(V))$ est majorée par d, et a fortiori par $d_k(x)$.*

iii) *Si $x \notin \partial(X)$, alors $f_{\mathrm{trop}}(V)$ est purement de dimension d en ξ. Si, de plus, $d = n$, alors $f_{\mathrm{trop}}(V)$ est un voisinage de ξ dans T_{trop}.*

iv) *Si $\dim_\xi(f_{\mathrm{trop}}(V)) = n$, alors $f(x) \in S(T)$; inversement, si $f(x) \in S(T)$ et si de plus $x \notin \partial(X)$, alors $\dim_\xi(f_{\mathrm{trop}}(V)) = n$.*

Démonstration. — L'existence d'un voisinage analytique U vérifiant les i), ii) et iii) est le théorème 3.4 de **[50]**. Montrons (iv). Si $\dim_\xi(f_{\mathrm{trop}}(V)) = n$, il résulte de (ii) que $n \leqslant d$, donc que $d = n$ et que $f(x) \in S(T)$. Réciproquement, si $f(x) \in S(T)$ alors $d = n$ et si de plus $x \notin \partial X$ il résulte de (iii) que $\dim_\xi(f_{\mathrm{trop}}(V)) = n$. □

Remarque 12.2.9. — Soit X un espace k-analytique et soit $x \in X$. Soit $f\colon X \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ un moment. Si V est un voisinage analytique compact de x dans X, il résulte de la proposition ci-dessus que le germe de $f_{\mathrm{trop}}(V)$ en x ne dépend pas de V. Nous le noterons $f_{\mathrm{trop}}(X, x)$.

La preuve du théorème 3.4 de **[50]** en donne une description en termes de réduction de Temkin, que nous allons rappeler ici, en supposant que le germe est (X, x) séparé.

Le théorème 10.5.7 assure (en reprenant le vocabulaire et les notations de 10.5.6) l'existence d'un sous-foncteur D de $\mathsf{D}^n_{\{1\}}$ tel que pour tout $H \in \mathsf{D}$ et tout n-uplet $(h_1, \dots, h_n)$ d'éléments de H, les assertions suivantes soient équivalentes :

(i) $h \in D(H)$;

(ii) il existe $H' \in \mathsf{D}_H$ et une valuation w appartenant à $\widetilde{(X, x)}$ à valeurs dans H' telle que $w(\widetilde{f_i(x)}) = h_i$ pour tout i.

Comme le groupe des paramètres est ici $\{1\}$, le foncteur D est simplement défini par conjonctions et disjonctions d'inégalités de la forme $\varphi \leqslant 1$ où φ est un monôme $\prod x_i^{r_i}$ à exposants rationnels. L'ensemble $D(\mathbf{R}_+^\times)$ est alors un cône rationnel, et $f_{\mathrm{trop}}(X, x) = (f_{\mathrm{trop}}(x) \cdot D(\mathbf{R}_+^\times), f_{\mathrm{trop}}(x))$ en notation multiplicative.

En particulier, si x est intérieur, c'est-à-dire si $\widetilde{(X, x)} = \mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}$, ce germe de polytope ne dépend que de la classe d'isomorphie de l'extension graduée F de $\widetilde{k}$ dans $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ engendrée par les $\widetilde{f_i(x)}$, munie de cette famille. Dans ce cas, il est équidimensionnel, de dimension égale au degré de transcendance (gradué) de F sur $\widetilde{k}$.

Définition 12.2.10. — *Soit X un espace analytique et soit $f\colon X \to T$ un moment. Soit x un point de X. On appelle dimension tropicale de f en x la borne inférieure de dimensions des polyèdres $f_{\mathrm{trop}}(V)$, où V est un domaine analytique compact qui contient x. On la note $\dim_{\mathrm{trop},x}(f)$.*

Soit d le degré de transcendance résiduel de f en x. D'après le théorème 12.2.4 et la proposition 12.2.8, on a

$$\dim_{\mathrm{trop},x}(f) \leqslant d \leqslant d_k(x) \leqslant \dim_x(X), \tag{12.2.10.1}$$

et $\dim_{\mathrm{trop},x}(f) = d$ si $x \notin \partial X$. Si X est compact, il résulte de la définition que

$$\dim(f_{\mathrm{trop}}(X)) = \sup_{x \in X} \dim_{\mathrm{trop},x}(f). \tag{12.2.10.2}$$

Proposition 12.2.11. — *Soit X un espace analytique, soit x un point de $X - \partial(X)$. Il existe un voisinage analytique compact V de x dans X et un moment f sur V dont la dimension tropicale en x égale $d_k(x)$.*

Démonstration. — Posons $d = d_k(x)$ et soit $a_1, \dots, a_d$ une base de transcendance de $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ sur $\widetilde{k}$. Comme $x \notin \partial X$, l'espace X est bon, et a fortiori presque bon, en x. Il existe donc un voisinage analytique compact V de x dans X et d fonctions analytiques inversibles $f_1, \dots, f_d$ sur V telles que $\widetilde{f_i(x)} = a_i$ pour tout i. Le degré de transcendance résiduel de f en x est alors égal à d par construction. Puisque V est un voisinage de x dans X, le point x n'appartient pas à ∂V ; il s'ensuit que la dimension tropicale de f en x est elle aussi égale à d. □

Proposition 12.2.12. — *Supposons le corps k algébriquement clos. Soit X un espace k-analytique et soit f une fonction analytique inversible sur X. Soit x un point de $X - \partial(X)$ telle que $|f|$ soit constante au voisinage de x. Il existe un élément $a \in k^\times$ et une fonction $g \in \mathscr{O}_{X,x}^\times$ tels que $f = a + g$ et $|g| < |a|$ au voisinage de X.*

Démonstration. — L'hypothèse signifie que f est de dimension tropicale nulle en x. Puisque $x \notin \partial X$, la dimension tropicale de f en x coïncide avec son degré de transcendance résiduel. Celui-ci est donc nul, ce qui veut dire que $\widetilde{f(x)}$ est algébrique sur $\widetilde{k}$, c'est-à-dire encore que $\widetilde{f(x)}$ appartient à $\widetilde{k}$ puisque ce dernier est algébriquement clos (il hérite cette propriété de k). Il existe donc $a \in k^\times$ tel que $|a| = |f(x)|$ et $\widetilde{a} = \widetilde{f(x)}$. Si l'on pose $g = f - a$ on a alors $|g(x)| < a$ et donc $|g| < a$ au voisinage de x. □

Lemme 12.2.13. — *Soit X un espace analytique compact, soit T un tore soit $f\colon X \to T$ un moment ; on note $n = \dim(T)$. Alors $f(X)$ contient $\mathrm{sq}(f_{\mathrm{trop}}(X)^{(n)})$.*

Démonstration. — Soit C un sous-espace compact paralinéaire de dimension n contenu dans $f_{\mathrm{trop}}(X)$; prouvons que $f^{-1}(C_{\mathrm{sq}})$ n'est pas vide. Posons $W = f_{\mathrm{trop}}^{-1}(C)$; c'est un domaine analytique compact de X et l'on a $f_{\mathrm{trop}}(W) = C$. Il existe donc un point de W en lequel f est de dimension tropicale n. D'après la proposition 12.2.8, (iii), $f(W)$ rencontre $S(T)$, donc C_{sq} puisque $f_{\mathrm{trop}}(W) \subset C$. Ainsi, $f(X)$ rencontre C_{sq}, ce qu'on voulait démontrer.

Soit $s \in f_{\mathrm{trop}}(X)^{(n)}$. Soit C un voisinage compact de s qui est un polyèdre compact de dimension n contenu dans $f_{\mathrm{trop}}(X)$. D'après ce qui précède, $f(X)$ rencontre C_{sq} ; comme ces voisinages C forment une base de voisinages de s, les C_{sq} forment une base de voisinages de $\mathrm{sq}(s)$, et celui-ci est donc adhérent à $f(X)$. Puisque $f(X)$ est compact, $\mathrm{sq}(s) \in f(X)$. □

Proposition 12.2.14. — *Soit $p\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces analytiques, soit $y \in Y$ et soit x le point $p(y)$. Soit $g = (g_1, \dots, g_n)$ une famille de fonctions inversibles sur Y, et soit d le degré de transcendance sur $\widetilde{\mathscr{H}(y)}$ du corps gradué engendré par la famille $(\tilde{g}_i(y))$. Il existe d morphismes de tores $q_1, \dots, q_d\colon \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$, une famille (V_r) de domaines analytiques compacts de Y contenant y et dont la réunion est un voisinage de y, une famille (U_r) de domaines analytiques compacts de X telle que chaque U_r contienne $p(V_r)$ et, pour tout r, une famille $(f_{r,i})$ de fonctions analytiques inversibles sur U_r, et des familles $(a_{r,i,j})$ et $(b_{r,i,j})$ de nombres rationnels telles que*

$$g_{i,\mathrm{trop}}|_{V_r} = \sum_{j=1}^{d} a_{r,i,j}(q_j \circ g)_{\mathrm{trop}} + b_{r,i}(f_{r,i} \circ p)_{\mathrm{trop}}$$

pour tout couple d'indices (r, i).

Si le germe (X,x) est presque bon, on peut supposer que chaque U_r est un voisinage de x.

Démonstration. — La première partie de l'assertion est G-locale sur le germe (X,x) ; cela permet de supposer que X est presque bon.

Soit $\mathscr{V}$ un ouvert quasi-compact de $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(y)}}$ tel que $\mathscr{V} \cap \mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(y)/\tilde{k}}} = \widetilde{(Y,y)}$. Appliquons le théorème 10.5.7 à $(\widetilde{\mathscr{H}(x)}, \widetilde{\mathscr{H}(y)}, \mathscr{V}, (\widetilde{g_i(y)})_i)$, en reprenant la terminologie et les notations introduites en 10.5.6. Ce théorème assure l'existence d'une famille finie $(a_{j\ell m}, \varphi_{j\ell m})_{j,\ell,m}$, où les $a_{j\ell m}$ sont des éléments de $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^\times$ et où chaque $\varphi_{j\ell m}$ est un monôme $\prod_{i=1}^n x_i^{r_i}$ à exposants rationnels, qui vérifie la propriété suivante, en désignant pour tout $v \in \mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}^\times}$ par $\mathscr{D}_{j,v}$ le sous-foncteur de $\mathbf{G}^n_{v(\widetilde{\mathscr{H}(x)}^\times)}$ défini par la condition $\bigvee_\ell \bigwedge_m v(a_{j\ell m})\varphi_{j\ell m} \leqslant 1$: *il existe un recuuvremet fini $(\mathscr{U}_j)$ de $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}^\times}$ par des parties constructibles tel que pour tout j et tout $v \in \mathscr{U}_j$ le foncteur polyédral $\mathscr{D}_{j,v}$ soit de dimension $\leqslant d$ et que pour tout $H \in \mathsf{D}_{v(\widetilde{\mathscr{H}(x)}^\times)}$ et tout $h \in H^n$ les assertions suivantes soient équivalentes :*

(i) $h \in \mathscr{D}_{j,v}(H)$;
(ii) *il existe $w \in \mathscr{V} \cap \mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(y)}/(\widetilde{\mathscr{H}(x)},v)}$ à valeurs dans un groupe ordonné $H' \in \mathsf{D}_H$ telle que $w(\widetilde{g_i(y)}) = h_i$ quel que soit i.*

Pour tout j, tout ℓ et tout v, notons $\mathscr{D}_{j,\ell,v}$ le sous-foncteur de $\mathbf{G}_{v(\widetilde{\mathscr{H}(x)}^\times)}$, contenu dans $\mathscr{D}_{j,v}$, décrit par la condition $\bigwedge_m v(a_{j\ell m})\varphi_{j\ell m} \leqslant 1$. Fixons un indice j et une valuation $v \in \mathscr{U}_j$. Le foncteur polyédral $\mathscr{D}_{j,v}$ est de dimension $\leqslant d$ et c'est la réunion de ses sous-foncteurs $\mathscr{D}_{j,\ell,v}$. Chacun d'eux est donc de dimension $\leqslant d$, et est dès lors, au vu de sa forme explicite, contenu dans un translaté d'un sous-foncteur de $\mathbf{G}_{v(\widetilde{\mathscr{H}(x)}^\times)}$ décrit par une conjonction $\bigwedge_{m\in M_{j\ell,v}} \varphi_{j\ell m} \leqslant 1$, où $M_{j,\ell,v}$ est un ensemble d'indices de cardinal au moins $n-d$ tel que les $\varphi_{j\ell m}$ pour $m \in M_{j\ell,v}$ soient $\mathbf{Q}$-multiplicativement indépendants.

L'ensemble de tous les $M_{j,\ell,v}$ étant fini, il existe d monômes $\psi_1, \dots, \psi_d$ de la forme $\prod x_i^{e_i}$ avec les e_i dans $\mathbf{Z}$ tels que pour tout (j,ℓ) et tout $v \in \mathscr{U}_j$ la restriction de $(\psi_1, \dots, \psi_d)$ à $\mathscr{D}_{j\ell,v}$ soit injective. Il existe alors pour tout (j,ℓ) et tout i entre 1 et n un élément $b_{ij\ell}$ de $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^\times$ et des nombres rationnels $r_{ij\ell}, e_{1ij\ell}, \dots, e_{dij\ell}$ tels que la i-ème coordonnée x_i soit identiquement égale à $v(b_{ij\ell})^{r_{ij\ell}}\psi_1^{e_{1ij\ell}} \dots \psi_d^{e_{dij\ell}}$ sur $\mathscr{D}_{j,\ell,v}$.

Pour tout i entre 1 et d, notons q_i le morphisme de tores de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ dans $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ donné par le monôme ψ_i, et γ_i le moment $q_i \circ (g_1, \dots, g_n)$.

Comme X est presque bon il existe un voisinage analytique U de x dans X et des fonctions analytiques inversibles $f_{ij\ell}$ sur U telles que $b_{ij\ell} = \widetilde{f_{ij\ell}(x)}$ pour tout (i,j,ℓ).

Soit $w \in \widetilde{(Y,y)}$, et soit H un groupe abélien divisible ordonné non trivial dans lequel w prend ses valeurs. La valuation w appartient à $\mathscr{V}$, et son image v sur $\widetilde{(X,x)}$ appartient à $\mathscr{U}_j$ pour un certain j. D'après l'équivalence des propriétés (i) et (ii) rappelée plus haut, le n-uplet $w(\widetilde{g_i(y)})$ appartient à $\mathscr{D}_{j,v}(H)$, et donc à $\mathscr{D}_{j,v,\ell}(H)$ pour un certain ℓ. Il s'ensuit qu'on a pour tout indice i l'égalité

$$w(\widetilde{g_i(y)}) = v(\widetilde{f_{ij\ell}(x)}^{\,r_{ij\ell}})w(\widetilde{\gamma_1(y)})^{e_{1ij\ell}} \dots w(\widetilde{\gamma_d(y)})^{e_{dij\ell}}.$$

Pour tout (i,j,ℓ) notons $N_{ij\ell}$ le plus petit multiple commun des dénominateurs de $r_{ij\ell}, e_{1ij\ell}, \dots, e_{dij\ell}$, et posons

$$g_{ij\ell} = g_i^{N_{ij\ell}} (f_{ij\ell} \circ p)^{-N_{ij\ell} r_{ij\ell}} \gamma_1^{-N_{ij\ell} e_{1ij\ell}} \dots \gamma_d^{-N_{ij\ell} e_{dij\ell}}.$$

Par construction, $g_{ij\ell}$ est un moment sur le voisinage $p^{-1}(U)$ de y, et si w est une valuation de $\widetilde{(Y,y)}$ dont l'image sur $\widetilde{(X,x)}$ appartient à $\mathscr{U}_j$ on a $w(\widetilde{g_{ij\ell}(y)}) = 1$; autrement dit, $w \in \mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(y)}/\widetilde{\mathscr{H}(x)}}\{\widetilde{g_{ij\ell}(y)}, \widetilde{g_{ij\ell}(y)}^{-1}\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Posons $\rho_{ij\ell} = |g_{ij\ell}(y)|$ pour tout i compris entre 1 et n. Pour tout (j,ℓ) notons $V_{j,\ell}$ le domaine analytique de $p^{-1}(U)$ défini comme le lieu de validité des égalités $|g_{ij\ell}| = \rho_{ij\ell}$ pour i variant entre 1 et n. Le point y appartient à $V_{j\ell}$ et $\widetilde{(V_{j\ell}, y)}$ est égal à $\widetilde{(Y,y)} \cap \mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(y)}/\widetilde{\mathscr{H}(x)}}\{\widetilde{g_{ij\ell}(y)}, \widetilde{g_{ij\ell}(y)}^{-1}\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Il s'ensuit que les $\widetilde{(V_{j\ell}, y)}$ recouvrent $\widetilde{(Y,y)}$. Par conséquent la réunion des $V_{j\ell}$ est un voisinage de y dans Y. Or on a par construction pour tout (j,ℓ) et tout i l'égalité

$$|g_i| = |f_{ij\ell} \circ p|^{r_{ij\ell}} |\gamma_1|^{e_{1ij\ell}} \dots |\gamma_d|^{e_{dij\ell}}$$

identiquement sur $V_{j\ell}$, ce qui conclut. □

§ 12.3. COMPLÉMENTS SUR LES TROPICALISATIONS

Proposition 12.3.1. — *Soit X un bon espace k-analytique purement de dimension n et soit $f\colon X \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$ un moment sur X. Il existe un point y de X tel que $d_k(y) = n$ et $f_{\mathrm{trop}}(X,y) = f_{\mathrm{trop}}(X,x)$.*

Démonstration. — Écrivons $f = (f_1, \dots, f_d)$, et notons F l'extension graduée de $\widetilde{k}$ dans $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ engendrée par les $\widetilde{f_i(x)}$. On peut démontrer le résultat après avoir remplacé X par n'importe quel voisinage affinoïde de x. On peut aussi étendre le moment f, car il n'y aura ensuite plus qu'à composer avec une projection convenable pour obtenir le résultat souhaité pour f. Cela permet de supposer qu'il existe un ensemble $I \subset \{1, \dots, d\}$ tel que $\widetilde{(X,x)} = \mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}\{\widetilde{f_i(x)}\}_{i \in I}$. Quitte à renuméroter les f_i, on peut supposer qu'il existe un entier $\delta \in \{0, \dots, n\}$ tel que $\widetilde{f_1(x)}, \dots, \widetilde{f_\delta(x)}$ soit une base de transcendance de F sur k. Posons enfin $r_i = |f_i(x)|$ pour tout i. Quitte à restreindre X encore une fois, on peut supposer que $|f_i| \leqslant r_i$ sur X pour tout indice i appartenant à I.

Ainsi, la famille $(f_i)_{i \in I}$ définit un morphisme h de X vers le polydisque fermé D en les variables T_i pour $i \in I$ et de polyrayon $(r_i)_{i \in I}$. Puisque $|f_i(x)| = r_i$ pour tout $i \in I$, la réduction $\widetilde{(X,x)}$ est égale à l'image réciproque de $\widetilde{(D, h(x))}$ sur $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}$. Par conséquent, le morphisme h est sans bord en x, et est dès lors sans bord au voisinage de x.

Pour tout j compris entre $\delta + 1$ et d, notons $\widetilde{P}_j$ le polynôme minimal de $\widetilde{f_j(x)}$ sur $\widetilde{k}(\widetilde{f_1(x)}, \dots, \widetilde{f_{j-1}(x)})$; c'est un polynôme homogène lorsque l'indéterminée T est affectée du degré r_j. Choisissons un relevé unitaire P_j de $\widetilde{P}_j$ dans $\mathscr{O}_{X,x}$ dont chaque coefficient est une fraction rationnelle en $f_1, \dots, f_{j-1}$.

La famille $g = (f_1, \dots, f_\delta)$ peut être vue comme un morphisme de X dans $\mathbf{A}_k^\delta$. On a $g(x) = \eta_r$; en vertu du théorème 10.3.7 de **[52]**, le morphisme g est plat en tout point de la fibre $g^{-1}(\eta_r)$, car $\mathbf{A}_k^\delta$ est réduit.

Comme $\widetilde{P}_j(\widetilde{f_j(x)}) = 0$ pour tout $j > \delta$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X sur lequel le morphisme h défini ci-dessus est sans bord, et sur lequel les P_j sont définis et vérifient les inégalités $|P_j(f_j)| < r_j^{\deg(P_j)}$ pour tout $j > \delta$. Cet ouvert contient donc un point d'Abhyankar de rang maximal y de la fibre $g^{-1}(x)$. Comme X est équidimensionnel, on a $n = \dim_y(Y)$; par platitude, on a $\dim_y(X) = \dim_y(g^{-1}(\eta_r)) + \delta$; par le choix de y, on a $\dim_y(g^{-1}(\eta_r)) = d_{\mathscr{H}(\eta_r)}(y)$; on a donc

$$n = d_{\mathscr{H}(\eta_r)}(y) + \delta = d_{\mathscr{H}(\eta_r)}(y) + d_k(\eta_r) = d_k(y).$$

Démontrons que ce point y convient.

Soit G l'extension graduée de $\widetilde{k}$ dans $\widetilde{\mathscr{H}(y)}$ engendrée par les $\widetilde{f_i(y)}$, pour $i \in \{1, \dots, d\}$. Démontrons par récurrence qu'il existe un isomorphisme $F \simeq G$ d'extensions graduées de $\widetilde{k}$ qui envoie $\widetilde{f_i(x)}$ sur $\widetilde{f_i(y)}$ pour tout i. On commence au cran δ : comme $g(y) = \eta_r$, on a $|f_i(y)| = r_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, \delta\}$, et les $\widetilde{f_i(y)}$ (pour $1 \leqslant i \leqslant \delta$) sont algébriquement indépendants sur $\widetilde{k}$. Il existe donc un $\tilde{k}$-isomorphisme de corps gradués de $\tilde{k}(\widetilde{f_1(x)}, \dots, \widetilde{f_\delta(x)})$ sur $\tilde{k}(\widetilde{f_1(y)}, \dots, \widetilde{f_\delta(y)})$ qui applique $\widetilde{f_i(x)}$ sur $\widetilde{f_i(y)}$ pour tout i. Supposons l'isomorphisme voulu construit jusqu'au cran $j-1$. On a sur tout l'ouvert U, et en particulier en y, l'inégalité $|P_j(f_j)| < r_j^{\deg(P_j)}$, de sorte que l'image du polynôme minimal de $\widetilde{f_j(x)}$ sur $\tilde{k}(\widetilde{f_1(x)}, \dots, \widetilde{f_{j-1}(x)})$ dans $\tilde{k}(\widetilde{f_1(y)}, \dots, \widetilde{f_{j-1}(y)})[T]$ est un polynôme annulateur de $\widetilde{f_j(y)}$, qui est nécessairement son polynôme minimal par irréductibilité. On en déduit l'isomorphisme cherché au cran j.

En particulier, on a $|f_j(y)| = |f_j(x)| = r_j$ pour tout j, c'est-à-dire $f_{\mathrm{trop}}(y) = f_{\mathrm{trop}}(x)$.

Comme le morphisme h est sans bord en y, on a $\widetilde{(X, y)} = \mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(y)}/\widetilde{k}}\{\widetilde{f_i(y)}\}_{i \in I}$. Posons $\psi = (\widetilde{f_i(y)})_{1 \leqslant i \leqslant d}$, $\psi' = (\widetilde{f_i(y)})_{i \in I}$, $\varphi = (\widetilde{f_i(x)})_{1 \leqslant i \leqslant d}$ et $\varphi' = (\widetilde{f_i(x)})_{i \in I}$. On a alors

$$\begin{aligned}
f_{\mathrm{trop}}(X, y) &= f_{\mathrm{trop}}(y) \cdot \psi_{\mathrm{trop}}(\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(y)}/\widetilde{k}}\{\psi'\})(\mathbf{R}_+^\times) \\
&= f_{\mathrm{trop}}(y) \cdot \psi_{\mathrm{trop}}(\mathbf{P}_{G/\widetilde{k}}\{\psi'\})(\mathbf{R}_+^\times) \\
&= f_{\mathrm{trop}}(x) \cdot \varphi_{\mathrm{trop}}(\mathbf{P}_{F/\widetilde{k}}\{\varphi'\})(\mathbf{R}_+^\times) \\
&= f_{\mathrm{trop}}(x) \cdot \varphi_{\mathrm{trop}}(\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}\{\varphi'\})(\mathbf{R}_+^\times) \\
&= f_{\mathrm{trop}}(X, x),
\end{aligned}$$

où la première et la dernière égalités proviennent de la remarque 12.2.9, où la seconde et la quatrième égalités proviennent de la surjectivité des applications $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(y)}/\widetilde{k}} \to \mathbf{P}_{G/\widetilde{k}}$ et $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(/)}\widetilde{k}} \to \mathbf{P}_{F/\widetilde{k}}$ respectivement, et où la troisième égalité repose sur l'isomorphisme construit plus haut entre F et G et le fait que $f_{\mathrm{trop}}(y) = f_{\mathrm{trop}}(x)$. □

12.3.2. — Soit X un espace k-analytique, soit $f = (f_1, \dots, f_d)$ un moment sur X et soit x un point intérieur de X. Soit F l'extension graduée de $\widetilde{k}$ dans $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ engendrée par les $\widetilde{f_i(x)}$. Soit δ son degré de transcendance (gradué) sur $\widetilde{k}$. D'après la remarque 12.2.9, l'image par f_{trop} du germe (X, x) est un germe de polytope purement de dimension δ qui ne dépend que de la classe d'isomorphie de $(F, (\widetilde{f_i(x)}))$.

Proposition 12.3.3. — *Soit X un espace k-analytique sans bord, soit f un moment sur X et soit x un point de X. Soit δ la dimension tropicale de f en x. Il existe un point y de X et un morphisme g de (X,y) vers un germe (Y,z) tels que : $f_{\mathrm{trop}}(g^{-1}(z),y) = f_{\mathrm{trop}}(X,x)$ et $\dim_y g^{-1}(z) = \delta$.*

Démonstration. — Choisissons un point d'Abhyankar de rang maximal y de X tel que $f_{\mathrm{trop}}(X,y) = f_{\mathrm{trop}}(X,x)$ (proposition 12.3.1). Écrivons $f = (f_1,\dots,f_d)$, et notons F le sous-corps gradué de $\widetilde{\mathscr{H}(y)}$ engendré par $\widetilde{k}$ et les $\widetilde{f_i(y)}$. Quitte à renuméroter les f_i, on peut supposer que $(\widetilde{f_1(y)},\dots,\widetilde{f_\delta(y)})$ est une base de transcendance graduée de F sur $\widetilde{k}$. Soit n la dimension de X en y. Choisissons une famille $(g_{\delta+1},\dots,g_n)$ de fonctions analytiques définies au voisinage de y et telles que $(\widetilde{f_1(y)},\dots,\widetilde{f_\delta(y)},\widetilde{g_{\delta+1}(y)},\dots,\widetilde{g_n(y)})$ soit une base de transcendance de $\widetilde{\mathscr{H}(y)}$ sur $\widetilde{k}$.

Posons $r = (|g_\delta+1|(y),\dots,|g_n(y)|)$ et soit g le morphisme $(g_{\delta+1},\dots,g_n)$ de (X,y) vers $(\mathbf{A}^{n-\delta},\eta_r)$. Le théorème 10.3.7 de **[52]** assure que g est plat en tout point de $g^{-1}(\eta_r)$; il s'ensuit que $\dim_y g^{-1}(\eta_r) = n-(n-\delta) = \delta$.

Le but est maintenant de montrer que g convient ; c'est-à-dire que $f_{\mathrm{trop}}(g^{-1}(\eta_r),y)) = f_{\mathrm{trop}}(X,y)$. Pour cela, posons $t_i = \widetilde{g_i(y)}$ pour i entre $\delta+1$ et n. Les t_i forment une famille algébriquement indépendants sur $\widetilde{k}$, et le sous-corps gradué $\widetilde{\mathscr{H}(z)}$ de $\widetilde{\mathscr{H}(y)}$ s'identifie à $\widetilde{k}(t_i)_{\delta+1\leqslant i\leqslant n}$; quant au sous-corps de $\widetilde{\mathscr{H}(y)}$ engendré par les $\widetilde{f_1(y)},\dots,\widetilde{f_d(y)}$ et $\widetilde{\mathscr{H}(z)}$, il s'identifie à $F(t_i)_{\delta+1\leqslant i\leqslant n}$, les t_i restant algébriquement indépendants sur F.

La remarque 12.2.9 décrit explicitement les tropicalisations $f_{\mathrm{trop}}(X,y)$ et $f_{\mathrm{trop}}(g^{-1}(\eta_r),y)$ en termes de cônes. Il suffit ainsi de démontrer que pour tout groupe abélien ordonné divisible non trivial H et tout d-uplet $(h_1,\dots,h_d)$ d'éléments de H, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe une valuation graduée $|\cdot|$ sur F, triviale sur $\widetilde{k}$, telle que $|\widetilde{f_i(y)}| = h_i$ pour tout i entre 1 et d ;

(ii) il existe une valuation graduée $|\cdot|$ sur $F(t_i)_{\delta+1\leqslant i\leqslant n}$, triviale sur $\widetilde{k}(t_i)_{\delta+1\leqslant i\leqslant n}$, telle que $|\widetilde{f_i(y)}| = h_i$ pour tout i entre 1 et d.

Il est clair que (ii)⇒(i). Et si (i) est vraie, on montre (ii) en munissant $F(t_i)_{\delta+1\leqslant i\leqslant n}$ de la valuation de Gauß prolongeant $|\cdot|$ et valant 1 sur chacun des t_i. □

Proposition 12.3.4. — *Soit X un espace k-analytique purement de dimension n et soit $f\colon X\to T$ un moment. Supposons qu'il existe un entier $r\geqslant 0$ tel que le lieu des points de X en lesquels f est de dimension relative r soit dense (c'est automatique si X est irréductible).*

a) *Pour tout $x\in X$, on a $\dim_{\mathrm{trop},x}(f)\leqslant n-\dim(f^{-1}(f(x)))$. En particulier, $\dim(f_{\mathrm{trop}}(X))\leqslant n-r$.*

b) *Pour tout point $\xi\in f_{\mathrm{trop}}(X)$ tel que $\xi\notin f_{\mathrm{trop}}(\partial(X))$, on a $\dim_\xi(f_{\mathrm{trop}}(X)) = n-r$.*

c) *Si X est affinoïde et $r>0$, alors $f_{\mathrm{trop}}(X) = f_{\mathrm{trop}}(\partial(X))$.*

Les points *a*) et *b*) de cet énoncé sont une généralisation du théorème 1.1 de **[76]** qui traite le cas où X est un sous-espace analytique fermé d'un domaine analytique de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ de la forme $\mathrm{trop}^{-1}(\Delta)$, où Δ est un polyèdre compact de $\mathbf{R}^n$; la preuve est similaire. Compte tenu des deux premiers points, l'assertion *c*) est le théorème 6.6 de **[83]**, mais notre approche en redonne une preuve.

Démonstration. — a) Soit $x \in X$ et soit t son image sur T. Soit s la dimension de la fibre $(f^{-1}(t))$; on a $r \leqslant s$ par hypothèse.

Soit $z \in f^{-1}(t)$ tel que $d_{\widetilde{\mathscr{H}(t)}}(z) = s$; on a $d_k(t) + s = d_k(z) \leqslant n$, si bien que $d_k(t) \leqslant n - s$. Le sous-corps gradué de $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ engendré par les $\widetilde{f_i(x)}$ est contenu dans $\widetilde{\mathscr{H}(t)}$, donc est de degré de transcendance gradué $\leqslant n - s$. Par suite, la dimension tropicale de f en x est majorée par $n - s$.

b) Nous allons démontrer l'énoncé suivant : pour tout $\xi \in f_{\mathrm{trop}}(X) - f_{\mathrm{trop}}(\partial(X))$, on a $\dim_\xi(f_{\mathrm{trop}}(X)) = n - r$ et $\dim_\xi(f_{\mathrm{trop}}(X)) = n$ si X est affinoïde. Cela entraîne l'assertion *b*) du théorème ; quand X est affinoïde, cela entraîne également que $n - r = n$ si $f_{\mathrm{trop}}(X) \neq f_{\mathrm{trop}}(\partial(X))$, d'où *c*).

Si K est une extension complète de k alors $\partial(X_K)$ est contenu dans l'image réciproque de $\partial(X)$, si bien qu'un point ξ de $f_{\mathrm{trop}}(X)$ qui n'appartient pas à $f_{\mathrm{trop}}(\partial X)$ n'appartient pas non plus à $\mathrm{trop}(X_K)$. On peut donc démontrer l'assertion après extension des scalaires à K ; on peut dès lors supposer que k est algébriquement clos, non trivialement valué, et que X et $f_{\mathrm{trop}}^{-1}(\xi)$ sont stricts.

Soit $d = \dim_\xi(f_{\mathrm{trop}}(X))$. On raisonne par récurrence sur d. On suppose donc l'énoncé établi en dimension $< d$. La dimension $\dim_\xi(f_{\mathrm{trop}}(X))$ est le maximum des $\dim_\xi f_{\mathrm{trop}}(Y)$, où Y parcourt l'ensemble E des composantes irréductibles réduites de X dont l'image par f_{trop} contient ξ. De plus, $\partial(Y) = \partial(X) \cap Y$ pour toute composante $Y \in E$, il suffit de démontrer l'énoncé pour toute composante $Y \in E$. Si $\dim_\xi(f_{\mathrm{trop}}(Y)) < d$, l'assertion est vraie par l'hypothèse de récurrence. On s'est ainsi ramené au cas où X est irréductible et réduit.

Supposons $d = 0$. Dans ce cas, ξ est isolé dans $f_{\mathrm{trop}}(X)$, si bien que $f_{\mathrm{trop}}(X) = \{\xi\}$ puisque, X étant irréductible, et donc connexe, sa tropicalisation $f_{\mathrm{trop}}(X)$ est connexe. Comme on suppose que $\xi \notin f_{\mathrm{trop}}(\partial(X))$, l'espace X est sans bord ; puisqu'il est compact, il est propre sur k. La k-algèbre $\mathscr{O}_X(X)$ est alors de dimension finie (par propreté) et est intègre car X est irréductible et réduit ; comme k est algébriquement clos, il vient $\mathscr{O}_X(X) = k$. Ainsi, le moment f est constant, donc $r = n$, et l'on a bien $d = 0 = n - r$. Supposons de plus que X est affinoïde. Alors X est à la fois affinoïde et propre, donc fini, si bien que $n = 0$ et donc que $d = n$.

Supposons maintenant $d > 0$. L'ensemble $f_{\mathrm{trop}}(X)$ est un sous-espace paralinéaire compact de T_{trop} ; choisissons-en une décomposition cellulaire (finie) $\mathscr{C}$. Comme $d > 0$, le point ξ n'est pas isolé dans $f_{\mathrm{trop}}(X)$ et toute cellule maximale de $\mathscr{C}$ contenant ξ est de dimension > 0. Il existe alors un hyperplan ($\mathbf{Q}$-rationnel) H de T_{trop} contenant ξ et tel que $\dim(H \cap C) = \dim(C) - 1$ pour toute cellule maximale $C \in \mathscr{C}$ qui contiennent ξ. Écrivons une équation affine de H de la forme $\sum a_i t_i = b$, où les a_i appartiennent à $\mathbf{Z}$ et posons $h = \prod f_i^{a_i}$.

L'hypothèse que les cellules maximales passant par ξ ne sont pas contenues dans H assure que h_{trop} n'est pas constante sur X. Pour tout $\lambda \in k$, le fermé de Zariski $V(h - \lambda)$ de l'espace irréductible X est donc d'intérieur vide ; d'après le Hauptidealsatz, il est purement de dimension $n - 1$.

Soit U_f l'ouvert de Zariski de X tel que $\dim_x(f^{-1}(f(x))) = r$ pour tout $x \in U_f$; par hypothèse, il est dense. Soit Z_f son complémentaire. Soit $\lambda \in k$; les composantes irréductibles de $V(h - \lambda)$ sont de dimension $n - 1$, de sorte que si l'une d'elles est contenue dans le fermé d'intérieur vide Z_f, c'en est une composante irréductible. D'autre part, les $V(h - \lambda)$ sont deux à deux disjoints. Puisque Z_f n'a qu'un nombre fini de composantes

irréductibles, l'ensemble Λ des $\lambda \in k$ tels qu'une composante irréductible de $V(h-\lambda)$ soit contenue dans Z_f est fini.

Le domaine analytique $f_{\mathrm{trop}}^{-1}(\xi)$ de X n'est pas vide, il rencontre donc U_f. La la réunion, pour $\lambda \in \Lambda$, des $h^{-1}(\lambda) \cap U_f \cap f_{\mathrm{trop}}^{-1}(\xi)$, est purement de dimension $n-1$.

Son complémentaire dans $U_f \cap f_{\mathrm{trop}}^{-1}(\xi)$ est donc dense ; comme k est algébriquement clos, non trivialement valué, et comme $f_{\mathrm{trop}}^{-1}(\xi)$ est strictement analytique, il existe un k-point $x \in U_f \cap f_{\mathrm{trop}}^{-1}(\xi)$ qui n'appartient à aucune hypersurface $h^{-1}(\lambda)$, pour $\lambda \in \Lambda$. Posons $\lambda = h(x)$.

Soit Y une composante irréductible de $V(h-\lambda)$ et soit Y' le complémentaire dans Y de la réunion des autres composantes. Par le choix de λ, on a $Y \cap U_f \neq \varnothing$. Pour tout $y \in Y' \cap U_f$, on a $\dim_y(f|_Y^{-1}(f(y))) = \dim_y(f|_{V(h-\lambda)}^{-1}(f(y)))$, car y n'appartient qu'à une seule composante de $V(h-\lambda)$. D'autre part, h est un monôme en les f_i, si bien que $f|_{V(h-\lambda)}^{-1}(f(y)) = f^{-1}(f(y))$. Cela démontre que la dimension relative générique de $f|_Y$ est égale à r.

Soit Y une composante irréductible de $V(h-\lambda)$ telle que $\xi \in f_{\mathrm{trop}}(Y)$; c'est par exemple le cas des composantes irréductibles de $V(h-\lambda)$ qui contiennent x. Comme Y est un fermé de Zariski de X, on a $\partial(Y) \subset \partial(X)$, donc $\xi \notin f_{\mathrm{trop}}(\partial(Y))$. Puisque $f_{\mathrm{trop}}(Y) \subset H$, on a on a $\dim_\xi(f_{\mathrm{trop}}(Y)) \leqslant d-1$. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à $f|_Y$; on en déduit que que $\dim_\xi(f_{\mathrm{trop}}(Y)) = \dim(Y) - r = n-1-r$; par suite, $n-1-r \leqslant d-1$, d'où $n-r \leqslant d$. D'après le a), il vient $d = n-r$.

Si X est affinoïde, Y l'est aussi, et l'hypothèse de récurrence assure que $\dim_\xi(f_{\mathrm{trop}}(Y)) = \dim(Y)$, si bien que $d = n$. □

Proposition 12.3.5. — *On suppose que la valuation de k n'est pas triviale. Soit X un espace strictement k-analytique compact et soit $f\colon X \to T$ un moment. Si $f_{\mathrm{trop}}(X)$ est de dimension d, il existe un point $x \in \mathrm{Int}(X)$ en lequel f est de dimension tropicale d.*

Démonstration. — Quitte à remplacer f par $p \circ f$, où $p\colon T \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$ est un morphisme de tores convenable, on se ramène au cas où $T = \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$. Soit x un point de X en lequel f est de dimension tropicale d ; il en existe car X est compact, d'après la relation (12.2.10.2). D'après la proposition 12.2.8, $f(x)$ appartient au squelette de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$, c'est-à-dire $x \in \Sigma_f$.

Démontrons qu'il existe un domaine strictement analytique compact V de X, contenant x, et un domaine analytique compact W de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$, tel que le morphisme f induise un morphisme plat de V sur W (au sens de [**52**], definition 4.1.8 ; comme les espaces sont stricts, cela équivaut en fait à la notion de morphisme rig-plat en géométrie rigide, *loc. cit.*, corollary 10.3.3). Le lieu des points de X en lesquels f est plat est ouvert (de Zariski), d'après *loc. cit.*, théorème 10.3.2, et contient le point x (*loc. cit.*, théorème 10.3.7). Il contient donc un voisinage strictement analytique compact V de x. L'image W de V est un domaine strictement analytique compact de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$ (*loc. cit.*, théorème 9.2.1 ; c'est dans ce cas un théorème de Raynaud, [**26**], théorème 5.11).

Il existe alors un espace strictement analytique compact U et un morphisme $j\colon U \to V$ tel que la composée $g = f \circ j\colon U \to W$ soit surjective et de dimension relative nulle ([**52**], théorème 9.1.3). Puisque f est de dimension tropicale d en x et que V est un voisinage de x, on a $\dim(f_{\mathrm{trop}}(V)) = d$. Or $f_{\mathrm{trop}}(V) = \mathrm{trop}(W) = g_{\mathrm{trop}}(U)$, si bien que $\dim(g_{\mathrm{trop}}(U)) = d$. Par ailleurs, $\dim(U) = d$, puisque g est de dimension relative nulle. En particulier, $\Sigma_g^{(d)}$ n'est pas vide. D'après le théorème 12.2.4, $g_{\mathrm{trop}}(\partial(U))$ est contenu dans un polyèdre de dimension $\leqslant (d-1)$, si bien que $\Sigma_g^{(d)}$ rencontre $\mathrm{Int}(U)$.

Soit $u \in \mathrm{Int}(U) \cap \Sigma_g^{(d)}$ et soit $x = j(u)$; on a $x \in \mathrm{Int}(V)$, donc $x \in \mathrm{Int}(X)$. De plus, on a $\dim_{\mathrm{trop},u}(g) = d$, donc $\dim_{\mathrm{trop},x}(f) = d$. □

Lemme 12.3.6. — *Supposons que la valeur absolue du corps k n'est pas triviale. Soit X un espace analytique localement holomorphiquement séparé. Pour tout point $x \in X$, il existe un voisinage analytique compact V de x et un moment $f\colon V \to T$ tel que $f_{\mathrm{trop}}(x) \notin f_{\mathrm{trop}}(\partial(V/X))$.*

Démonstration. — Soit W un voisinage analytique compact de x qui est holomorphiquement séparé.

Soit $y \in W$; démontrons qu'il existe une fonction $f_y \in \mathscr{O}(W)$, inversible en x, telle que $|f_y(y)| \neq |f_y(x)|$. Par définition d'un espace holomorphiquement séparé, il existe $f \in \mathscr{O}(W)$ tel que $|f(y)| \neq |f(x)|$. Si $f(x) \neq 0$, la fonction f convient. Supposons $f(x) = 0$; alors $f(y) \neq 0$ et, comme la valeur absolue de k n'est pas triviale, il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $|\lambda| < |f(y)|$; la fonction $f + \lambda$ convient.

Notons W_y l'ensemble défini par l'inégalité $|f_y| \neq |f_y(x)|$; c'est un voisinage de y dans W. Comme $\partial(W/X)$ est compact, il existe une famille finie $(y_1, \ldots, y_n)$ dans $\partial(W/X)$ telle que les W_{y_i} recouvrent $\partial(W/X)$. Soit $r = \frac{1}{2}\inf|f_{y_i}(x)|$ et soit V le domaine analytique compact de W défini par les conditions $|f_{y_i}| \geqslant r$. On a $|f_{y_i}(x)| > r$ pour tout i, de sorte que V est un voisinage de x dans W, et a fortiori dans X. Pour tout i, notons f_i la fonction $f_{y_i}|_V$; elle est inversible.

Soit $f\colon V \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ le moment $(f_1, \ldots, f_n)$. Démontrons qu'il vérifie la condition requise par le lemme. Soit $y \in \partial(V/X)$. Il y a deux possibilités. Ou bien il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $|f_i(y)| = r$; dans ce cas, $f_{\mathrm{trop}}(y) \neq f_{\mathrm{trop}}(x)$. Ou bien, $y \in \partial(W/X)$; dans ce cas, il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $y \in W_{y_i}$ et $|f_i(y)| \neq |f_i(x)|$, par construction de W_{y_i}, donc $f_{\mathrm{trop}}(y) \neq f_{\mathrm{trop}}(x)$. □

Remarque 12.3.7. — Le lemme est faux lorsque la valeur absolue du corps k est triviale. Prenons pour espace X le disque unité ouvert et point x l'origine ; l'application $r \mapsto \eta_r$ induit un homéomorphisme de $[0;1[$ sur X, qui applique 0 sur le point x. Soit V un voisinage analytique compact de x dans X. La composante connexe de x dans V est l'image d'un intervalle de la forme $[0;r]$, pour $r \in]0;1[$; c'est donc le disque fermé de rayon r et de centre x. Sur cet espace, toute fonction inversible est de norme constante, donc ne sépare pas x du bord η_r de cette composante connexe.

§ 12.4. STRUCTURE G-TROPICALE AFFINÉE SUR UN ESPACE ANALYTIQUE

Soit X un espace k-analytique topologiquement séparé.[(1)] Dans ce paragraphe, nous munissons l'espace X d'une structure d'espace G-tropical (définition 3.1.4) affiné (§6.1) ; cela sera toujours cette structure que nous considérerons. Les structures paralinéaires considérées seront relatives au couple $(\mathbf{Q}, \mathbf{R})$. En particulier, l'espace $\mathbf{R}^n$ est muni de sa

[(1)] Par définition, un espace G-tropical est topologiquement séparé ; dans la suite de ce texte, nous avons pris garde à indiquer cette hypothèse lorsqu'elle était nécessaire, tout éventuel oubli ne serait qu'inadvertance.

Q-structure standard et les polyèdres de $\mathbf{R}^n$ sont définis par des inégalités dont la partie linéaire est **Q**-rationnelle.

Proposition 12.4.1. — *Soit X un espace k-analytique topologiquement séparé. Lorsqu'on prend pour domaines de X ses domaines analytiques et pour G-faisceau des fonctions paralinéaires le G-faisceau en **Q**-espaces vectoriels engendré par les fonctions constantes et celles de la forme f_{trop}, on munit X d'une structure d'espace G-tropical.*

Nous munirons implicitement tout espace k-analytique séparé de la structure d'espace G-tropical décrite dans cette proposition.

Démonstration. — L'espace X a été supposé topologiquement séparé ; il est localement compact et possède une base d'ouverts dénombrables à l'infini (lemme 11.1.15).

Les fonctions paralinéaires sur X sont des fonctions continues.

Vérifions les autres axiomes des espaces G-tropicaux. Soit W un domaine analytique de X et soit $f\colon W \to \mathbf{R}^m$ une application paralinéaire.

– Si W est compact, alors $f(W)$ est un polyèdre compact de $\mathbf{R}^m$. On peut en effet raisonner G-localement sur W, ce qui ramène au cas où f est de la forme $q \circ h_{\mathrm{trop}}$, où $h\colon W \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ est un moment sur W et $q\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ est une fonction affine à partie linéaire rationnelle. L'assertion se déduit du théorème 12.2.4.

– Si P est un sous-espace paralinéaire de $\mathbf{R}^m$ contenant $f(W)$ et si $\varphi\colon P \to \mathbf{R}$ est paralinéaire, alors $\varphi \circ f$ est paralinéaire. On peut encore raisonner localement, et est évidente lrosque f est de la forme $q \circ h_{\mathrm{trop}}$ comme ci-dessus.

– Si P est un sous-espace paralinéaire de $\mathbf{R}^m$, alors $f^{-1}(P)$ est un domaine de W. On peut encore raisonner G-localement, donc supposer que f est de la forme $q \circ h_{\mathrm{trop}}$ comme ci-dessus ; ainsi $f^{-1}(P) = h_{\mathrm{trop}}^{-1}(q^{-1}(P))$. Comme q est à partie linéaire **Q**-rationnelle, $q^{-1}(P)$ est un polyèdre de $\mathbf{R}^n$. Ainsi, $f^{-1}(P)$ est défini par des inégalités de la forme $|u| \leqslant \lambda$, où u est une fonction inversible sur W et λ un nombre réel strictement positif, donc est un domaine analytique. □

12.4.2. — Soit X un espace k-analytique topologiquement séparé, considéré comme espace G-tropical, soit $f\colon X \to T$ un moment et soit x un point de X. La dimension tropicale de f en x coïncide avec la dimension tropicale de la carte G-tropicale f_{trop}.

Il en résulte que pour toute carte G-tropicale f sur X, on a l'inégalité

$$\dim_{\mathrm{trop},x}(f) \leqslant d_k(x) \leqslant \dim_x(X). \tag{12.4.2.1}$$

Lemme 12.4.3. — *Soit X un espace analytique topologiquement séparé et soit P une partie fidèlement paralinéaire de X. Il existe un G-recouvrement (P_i) de P par des parties paralinéaires et, pour tout i, un moment f_i sur un domaine V_i de X contenant P_i, tels que $f_{i,\mathrm{trop}}$ soit une carte paralinéaire sur P_i.*

Démonstration. — Soit $f \in \Lambda(P)$ une carte paralinéaire sur P. On peut raisonner G-localement, et donc supposer que f est de la forme $q \circ h_{\mathrm{trop}}$, où h est un moment sur X et q une application affine. Alors, $h_{\mathrm{trop}} \in \Lambda(P)$. □

Lemme 12.4.4. — *Soit X un espace k-analytique topologiquement séparé, de dimension $\leqslant n$. Pour toute partie paralinéaire P de X, on a $\dim(P) \leqslant n$ et l'ensemble $\partial(X) \cap P$ est n-négligeable au sens de la définition 2.1.14.*

Démonstration. — L'assertion est G-locale. Cela permet de supposer que X est compact et qu'il existe un moment f sur X tel que $f_{\mathrm{trop}} \in \Lambda(P)$. D'après le corollaire 12.2.5, $f_{\mathrm{trop}}(X)$ est une partie paralinéaire de dimension $\leqslant n$, qui contient $f_{\mathrm{trop}}(P)$; par suite, P est de dimension $\leqslant n$. D'après le corollaire 12.2.6, $f_{\mathrm{trop}}(\partial(X))$ est contenu dans une partie paralinéaire de dimension $\leqslant (n-1)$; a fortiori, $\partial(X) \cap P$ est n-négligeable. □

12.4.5. — Un morphisme $p\colon Y \to X$ d'espaces analytiques topologiquement séparés, non nécessairement définis sur le même corps, induit un morphisme d'espaces G-tropicaux.

12.4.6. — Soit X un espace k-analytique topologiquement séparé ; définissons maintenant une structure d'espace G-tropical affiné sur X.

Soit u une fonction numérique définie sur un domaine V de X. On dit que u est *affine* au voisinage d'un point x de V s'il existe un voisinage U de x dans V, un moment f sur U, un nombre rationnel a et un nombre réel c tels que $u = af_{\mathrm{trop}} + c$ sur U. On dit que u est affine si elle l'est au voisinage de tout point de V.

Les fonctions affines sur un domaine de X forment un sous-préfaisceau du G-faisceau des fonctions paralinéaires. Par définition d'une fonction affine, les fonctions affines définissent un faisceau pour la topologie usuelle ; par définition d'une fonction paralinéaire, toute fonction paralinéaire est G-localement affine.

On a ainsi défini une structure d'espace G-tropical affiné sur X au sens du §6.1.

Proposition 12.4.7. — *Soit X un espace analytique topologiquement séparé et soit x un point de X. Si X est presque bon en x, alors l'espace G-tropical affiné associé à X est décent en x (définition 6.3.1).*

Démonstration. — Soit V un domaine analytique de X contenant x.

Montrons tout d'abord que si f est une fonction affine sur V, il existe un voisinage ouvert U de x dans X et un prolongement affine de $f|_{V\cap U}$ à U. Pour ce faire, on peut remplacer V par n'importe quel voisinage domanial de x dans V, et donc supposer que $f = ag_{\mathrm{trop}} + b$ où $a \in \mathbf{Q}$, où g est un moment sur V et où $b \in \mathbf{R}$. Puisque X est presque bon en x, il existe $h \in \mathscr{O}_{X,x}^{\times}$ telle que $|h(x) - g(x)| < |g(x)|$. Choisissons un voisinage ouvert U de x sur lequel h est définie et tel que $|h - g| < |g|$ sur $U \cap V$. On a alors $h_{\mathrm{trop}} = g_{\mathrm{trop}}$ sur $U \cap V$, et $ah_{\mathrm{trop}} + b$ est un prolongement de $f|_{U\cap V}$ à U tout entier.

Comme X et presque bon en x, il est séparé en x, et $\widetilde{(V,x)}$ est alors un ouvert quasi-compact et non vide de $\widetilde{(X,x)}$. On peut donc décrire

$$\widetilde{(V,x)} = \bigcup_i \mathbf{P}^{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}\{f_{ij}\}_j$$

où les f_{ij} sont des éléments de $\widetilde{k}^{\times}$. Par presque bonté de X en x, il existe une famille (g_{ij}) d'éléments de $\mathscr{O}_{X,x}^{\times}$ telle que $\widetilde{g_{ij}(x)} = f_{ij}$ pour tout (i,j) ; posons $r_{ij} = |g_{ij}(x)|$. Choisissons un voisinage ouvert U de x sur lequel les g_{ij} sont définis. La description de $\widetilde{(V,x)}$ assure alors que celui-ci coïncide avec le domaine de (U,x) défini par la condition $\bigvee_i \bigwedge_j |g_{ij}| \leqslant r_{ij}$; autrement dit, si l'on restreint suffisamment U alors $V\cap U$ est le domaine de U défini par la condition $\bigvee_i \bigwedge_j |g_{ij}| \leqslant r_{ij}$. Il s'ensuit que X est décent en x. □

§ 12.5. QUELQUES CLASSES DE FONCTIONS PARALINÉAIRES

12.5.1. — Soit X un espace k-analytique topologiquement séparé. Un $\mathrm{G}^{\mathrm{str}}$-recouvrement de X est un G-recouvrement (X_i) de X par des domaines analytiques stricts strict (au sens de ce texte, qui diffère du sens classique si k est trivialement valué, *cf.* 11.8.1) ; un tel recouvrement existe si et seulement si X lui-même est strict. Si c'est le cas, on note $X_{\mathrm{G}^{\mathrm{str}}}$ le site dont la la catégorie sous-jacente est celle des domaines k-analytiques stricts de X (les flèches étant les inclusions) et dont les familles couvrantes sont les $\mathrm{G}^{\mathrm{str}}$-recouvrements ; sa topologie est appelée la $\mathrm{G}^{\mathrm{str}}$-topologie.

12.5.2. — Notons $\mathrm{PL}_X^{\mathbf{Z}}$ le sous-faisceau de PL_X sur X_{G} qui associe à un domaine analytique V de X l'ensemble des fonctions paralinéaires sur V qui sont G-localement de la forme $\log|g|+c$ où g est une fonction analytique inversible et c une constante réelle. Ses sections sont appelées fonctions paralinéaires *entières*.

Supposons de plus que X est strict. On note $\mathrm{PL}_X^{\mathrm{str}}$ le sous-faisceau de $\mathrm{PL}_X|_{X_{\mathrm{G}^{\mathrm{str}}}}$ sur $X_{\mathrm{G}^{\mathrm{str}}}$ qui associe à un domaine strictement analytique V de X l'ensemble des fonctions paralinéaires sur V qui sont $\mathrm{G}^{\mathrm{str}}$-localement de la forme $\lambda\log|g|$ où g est une fonction analytique inversible et λ un nombre rationnel ; ses sections sont appelées fonctions paralinéaires *strictes*. Et l'on note $\mathrm{PL}_X^{\mathrm{str},\mathbf{Z}}$ le sous-faisceau de $\mathrm{PL}_X^{\mathrm{str}}$ sur $X_{\mathrm{G}^{\mathrm{str}}}$ qui associe à un domaine strictement analytique V de X l'ensemble des fonctions paralinéaires sur V qui sont $\mathrm{G}^{\mathrm{str}}$-localement de la forme $\log|g|$ où g est une fonction analytique inversible. Ses sections sont appelées fonctions paralinéaires *strictement entières*.

Lemme 12.5.3. — *Le sous-faisceau* $\mathrm{PL}_X^{\mathbf{Z}}$ *de* PL_X *en est un sous-faisceau en groupes abéliens, stable sous* min *et* max. *Si X est strict, les sous-faisceaux* $\mathrm{PL}_X^{\mathrm{str}}$ *et* $\mathrm{PL}_X^{\mathrm{str},\mathbf{Z}}$ *de* $\mathrm{PL}_X|_{X_{\mathrm{G}^{\mathrm{str}}}}$ *en sont des sous-faisceaux en groupes abéliens, stables sous* min *et* max.

Démonstration. — Nous allons traiter le cas de $\mathrm{PL}_X^{\mathrm{str},\mathbf{Z}}$; les autres sont établis de manière analogue. On suppose donc que X est strict, et l'on se donne un domaine analytique strict V de X. Il est clair que $0 \in \mathrm{PL}_X^{\mathrm{str},\mathbf{Z}}(V)$. Soit f et g deux fonctions appartenant à $\mathrm{PL}_X^{\mathrm{str},\mathbf{Z}}(V)$. Soit (V_i) et (W_j) deux $\mathrm{G}^{\mathrm{str}}$-recouvrements de V tels $f|_{V_i}$ soit pour tout i égale $\log|f_i|$ pour une certaine fonction analytique inversible f_i sur X_i, et que $g|_{W_ij}$ soit pour tout j égale à $\log|g_j|$ pour une certaine fonction analytique inversible g_j sur W_j. Pour tout (i,j), posons $h_{ij} = f_i|_{V_i\cap W_j}\cdot g_j|^{-1}_{V_i\cap W_j}$. On a alors pour tout (i,j) l'égalité $(f-g)|_{V_i\cap W_j} = \log|h_{ij}|$, ce qui montre que $f-g$ appartient à $\mathrm{PL}_X^{\mathrm{str},\mathbf{Z}}(V)$. Ainsi, $\mathrm{PL}_X^{\mathrm{str},\mathbf{Z}}$ est bien un sous-faisceau en groupes abéliens de $\mathrm{PL}_X|_{X_{\mathrm{G}^{\mathrm{str}}}}$.

Pour tout (i,j), notons V_{ij}^- et V_{ij}^+ les domaines analytiques stricts de $V_i\cap W_j$ définis par les inégalités $|f_i/g_i| \leqslant 1$ et $|g_i/f_i| \leqslant 1$ respectivement. Les V_{ij}^+ et V_{ij}^- constituent un $\mathrm{G}^{\mathrm{str}}$-recouvrement de V. Sur X_i^+, on a $\max(f,g) = \log|f_i|$ et $\min(f,g) = \log|g_i|$; sur X_i^-, on a $\max(f,g) = \log|g_i|$ et $\min(f,g) = \log|f_i|$. Il en résulte que $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ appartiennent à $\mathrm{PL}_X^{\mathrm{str},\mathbf{Z}}(V)$. □

Proposition 12.5.4. — *Soit X un espace k-analytique topologiquement séparé, soit $x\in X$ et et soit u une fonction paralinéaire et lisse sur X. Il existe alors un entier $n\geqslant 1$, un voisinage analytique U de x dans X, un nombre réel c et une fonction holomorphe inversible h sur U telle que $nu|_U = c+\log(|h|)$.*

Si de plus la valeur absolue de k n'est pas triviale et que le germe (X, x) est strict, on peut même supposer $c = 0$.

Démonstration. — La fonction u est lisse. On peut donc supposer que X est un espace analytique compact et qu'il existe un moment $f\colon X \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$ et une fonction lisse v sur $f_{\mathrm{trop}}(X)$ telle que $u = f^*v$. Comme u est paalinéaire, la G-forme $\mathrm{d}'\mathrm{d}''u$ sur X est nulle. Par suite, la G-forme $\mathrm{d}'\mathrm{d}''v$ sur $f_{\mathrm{trop}}(X)$ est nulle. Cela prouve que v est une fonction paralinéaire sur $f_{\mathrm{trop}}(X)$.

D'après la proposition 1.9.16, il existe un voisinage P de $f_{\mathrm{trop}}(x)$ dans $f_{\mathrm{trop}}(X)$ et une fonction affine w sur $\mathbf{R}^m$, à pentes rationnelles, telle que $v|_P = w|_P$. La restriction de u et de f^*w au voisinage $f_{\mathrm{trop}}^{-1}(P)$ de x coïncident. Soit n un entier tel que nw soit à pentes entières ; on écrit $nw = c + \sum a_i x_i$, avec $a_i \in \mathbf{Z}$ et $c \in \mathbf{R}$. Sur $f_{\mathrm{trop}}^{-1}(P)$, on a $nu = c + \log|\prod f_i^{a_i}|$. Ceci entraîne la première partie de la proposition.

Supposons maintenant que X est strict et que la valeur absolue de k n'est pas triviale. Les points rigides de X sont alors denses dans X. En évaluant la relation $nu = c + \sum a_i \log|f_i|$ en un tel point rigide y de $f_{\mathrm{trop}}^{-1}(P)$, on obtient $nu(y) = c + \sum a_i \log|f_i(y)|$. Comme u est paralinéaire, on a $u(y) \in \log(|\mathscr{H}(y)|^\times) \subset \mathbf{Q}\log|k^\times|$ car y est rigide ; la même propriété vaut pour les $\log|f_i(y)|$. Par conséquent, il existe un entier non nul m et un élément non nul a de k tel que $mc = \log|a|$. On a alors $nmu \equiv \log|a\prod f_i^{ma_i}|$ sur $f_{\mathrm{trop}}^{-1}(P)$. □

Remarque 12.5.5. — L'exemple suivant montre qu'on ne peut pas omettre l'hypothèse que le germe (X, x) est strict dans l'énoncé de la proposition 12.5.4.

Soit $r \in \mathbf{R}_+^\times$ un nombre réel qui n'est pas de torsion modulo $|k^\times|$. Dans le bidisque $\{|T_1| \leqslant r, |T_2| \leqslant r\}$ du plan affine $\mathbf{A}^2$, considérons la réunion X des deux domaines analytiques $X_1 = \{|T_1| = r\}$ et $X_2 = \{|T_2| = r\}$. Le point de Gauss $x = \eta_{r,r}$ appartient à X.

La fonction constante de valeur $\log(r)$ sur X est paralinéaire, parce qu'elle est égale à $\log(|T_1|)$ sur X_1 et à $\log(|T_2|)$ sur X_2. Démontrons par l'absurde qu'il n'existe pas de fonction $f \in \mathscr{O}_{X,x}^\times$ telle que $|f| = r$ au voisinage de x ; on suppose donc qu'il existe une telle f.

Comme r n'appartient pas à $|k^\times|^{\mathbf{Q}}$, la première projection identifie l'espace X_1 au disque $\{|T_2| \leqslant r\}$ sur le corps $k_r = k\{\widetilde{T_1/r, r/T_1}\}$ des séries $\sum a_n T_1^n$ telles que $a_n r^n \to 0$ quand $|n| \to +\infty$. Le corps résiduel $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$gradué s'identifie alors à $\widetilde{k_r}(\tau)$, où τ est la réduction de $(T_2/T_1)(x)$ (qui est de degré 1).

Posons $g = f/T_1$. Par hypothèse, la valeur absolue de la fonction g est constante, égale à 1, au voisinage de x dans X_1. Cela entraîne que sa réduction $\widetilde{g(x)}$ est un élément de $\widetilde{k_r(}\tau)$ inversible sur $\mathrm{Spec}(\widetilde{k_r}[\tau])$; c'est donc une constante non nulle. Il existe alors $a \in k_r^\times$ tel que $|a| = 1$ et tel que $g - a$ soit de norme < 1 au voisinage de x. Écrivons $a = \sum a_n T_1^n$; comme $r \notin |k^\times|^{\mathbf{Q}}$, on a $|a_0| = 1$ et $|a_n| r^n < 1$ pour tout $n \neq 0$; en remplaçant a par a_0, on se ramène au cas où $a \in k^\times$.

On a ainsi démontré qu'il existe $a \in k^\times$ tel que $|a| = 1$ et $|f - aT_1| < r$ au voisinage de x dans X_1. Soit s un nombre réel tel que $|f - aT_1|(x) < s < r$. Au voisinage de x dans X, on a donc $|f - aT_1| \leqslant s$. Cela entraîne que $|f| = |T_1|$ au voisinage de x dans X, et n'est donc pas constante de valeur r car $|T_1|$ prend des valeurs $< r$ sur tout voisinage de x dans X_2.

Lemme 12.5.6. — *Supposons que la valeur absolue du corps k n'est pas triviale. Soit X un espace analytique topologiquement séparé et localement holomorphiquement séparé. Soit x un point de X et soit V un voisinage de x. Il existe une fonction paralinéaire sur X, que l'on peut prendre stricte si X est strict, qui est non nulle en x et à support contenu dans V.*

Démonstration. — Appliquons le lemme 12.3.6 à l'espace $\mathring{V}$ et au point x ; il existe alors un voisinage compact W de x contenu dans V et holomorphiquement séparé, et un moment $f\colon W \to T$ sur W tel que $f_{\mathrm{trop}}(x) \notin f_{\mathrm{trop}}(\partial(W/X))$. Si X est strict, on suppose également que W est strict. Considérons un cube $Q \subset T_{\mathrm{trop}}$ disjoint de $f_{\mathrm{trop}}(\partial(W/X))$ et dont l'intérieur contient le point $f_{\mathrm{trop}}(x)$; on suppose que son arête appartient à $\mathbf{Q}\log|k^\times|$.

Soit a, b deux éléments de $\mathbf{Q}\log|k^\times|$ tels que $a < b$; définissons une fonction u sur $\mathbf{R}$ par $u(t) = 0$ pour $t \leqslant a$, $u(t) = t-a$ pour $a \leqslant t \leqslant (a+b)/2$, $u(t) = b-t$ pour $(a+b)/2 \leqslant t \leqslant b$ et $u(t) = 0$ pour $t \geqslant b$. Elle est paralinéaire et les scalaires qui interviennent dans sa définition sur dans $\mathbf{Q}\log|k^\times|$; elle est nulle hors de l'intervalle $[a;b]$ et strictement positive sur l'intervalle ouvert $]a;b[$. En écrivant le cube Q comme un produit d'intervalles, on construit une fonction paralinéaire u sur T_{trop}, à scalaires dans $\mathbf{Q}\log|k^\times|$, qui est nulle hors de Q et strictement positive sur l'intérieur de Q.

La fonction $f_{\mathrm{trop}}^* u$ est paralinéaire sur W, et paralinéaire stricte si W est strict ; et elle est nulle au voisinage de $\partial(W/X)$. Son prolongement par 0 à X tout entier est encore paralinéaire, et paralinéaire strict si X est strict ; et ce prolngement répond aux conditions de l'énoncé. □

***Théorème 12.5.7* (Stone–Weierstraß paralinéaire).** — *Supposons que la valeur absolue de k n'est pas triviale. Soit X un espace k-analytique (*resp. *strictement k-analytique) topologiquement séparé et localement holomorphiquement séparé. Soit U un ouvert de X. Soit f une fonction continue à valeurs réelles sur X dont le support est compact et contenu dans U. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction paralinéaire (*resp. *paralinéaire stricte) g sur X (strictement $\mathbf{Q}$-PL) dont le support est compact, contenu dans U, et telle que $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in X$.*

Démonstration. — Si U est compact, on pose $U' = U$; sinon, on note U' son compactifié d'Alexandroff. Par construction, U' est un espace topologique compact. Soit H l'ensemble des fonctions paralinéaires (*resp.* paralinéaires strictes) sur U qui prennent une valeur constante dans $\mathbf{Q}\log|k^\times|$ hors d'une partie compacte de U ; elles s'identifient à des fonctions continues sur U'. Pour $u, v \in H$, les fonctions $\min(u,v)$ et $\max(u,v)$ appartiennent encore à H (lemme 12.5.3).

Soit x, y des points de U' tels que $x \neq y$, soit $a, b \in \mathbf{R}$ et soit $\varepsilon > 0$. Démontrons qu'il existe $v \in H$ tel que $|v(x) - a| < \varepsilon$ et $|v(y) - b| < \varepsilon$.

Par symétrie, on peut supposer que $x \in U$. Soit V un voisinage compact de x qui est contenu dans U. D'après le lemme 12.5.6 appliqué il existe une fonction paralinéaire (*resp.* paralinéaire stricte) u sur X qui est strictement positive en x et nulle hors de V. En particulier, son support est compact, contenu dans U, et l'on a $u(y) = 0$. Choisissons $s \in \mathbf{Q}\log|k^\times|$ tel que $|s - b| < \varepsilon$, puis un nombre rationnel r tel que $|ru(x) + s - a| < \varepsilon$. La fonction $v = ru + s$ est paraliénaire (strictement paralinéaire stricte) sur X, elle vérifie $|v(x) - a| < \varepsilon$ et $|v(y) - b| < \varepsilon$.

Selon la proposition 2 de Bourbaki, Topologie générale X, p. 34, ceci entraîne que H est dense dans l'espace des fonctions numériques continues sur U'.

Soit f une fonction continue sur X dont le support est compact et contenu dans U. Soit $\varepsilon > 0$. D'après ce qui précède, il existe une fonction $g \in H$ telle que $|f(x) - g(x)| < \varepsilon/2$ pour tout $x \in U$.

Si U est compact, on prolonge g par 0 sur l'ouvert $X - U$. On obtient une fonction paralinéaire (*resp.* strictement paralinéaire) dont le support est compact et contenu dans U, qui approche f à ε près.

Supposons que U n'est pas compact. Par définition de l'ensemble H, il existe $a \in \mathbf{Q}\log|k^\times|$ tel que $g' = g - a$ soit une fonction paralinéaire (*resp.* paralinéaire stricte) à support compact dans U. Comme f est à support compact dans U, on a $|a| \leqslant \varepsilon/2$. Soit $x \in X$. Si $x \in U$, on a $|f(x) - g'(x)| \leqslant |f(x) - g(x)| + |a| \leqslant \varepsilon$. Sinon, on a $g'(x) = 0 = f(x)$. Cela conclut la démonstration de la proposition. □

Corollaire 12.5.8. — *On suppose que la valeur absolue de k n'est pas triviale. Soit X un espace k-analytique (*resp. *strictement k-analytique) topologiquement séparé et localement holomorphiquement séparé.*

a) *L'ensemble des fonctions paralinéaires (*resp. *paralinéaires strictes) à support compact sur X est dense dans l'espace $\mathscr{C}_{\mathrm{c}}(X)$ des fonctions continues à support compact sur X, muni de la topologie limite inductive des espaces de fonctions à support dans un compact donné.*

b) *L'ensemble des fonctions paralinéaires (*resp. *strictement paralinéaires) à support compact sur X est dense dans l'espace $\mathscr{C}(X)$ des fonctions continues sur X muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.*

La démonstration se déduit du théorème 12.5.7 de la même façon que le corollaire A.2.6 se déduisait du théorème A.2.5, *mutatis mutandis*.

§ 12.6. POLYÈDRE CARACTÉRISTIQUE D'UN MOMENT

Si P un espace paralinéaire et n un entier, rappelons que l'on note $P^{(n)}$ l'ensemble des points $x \in P$ tels que $\dim_x(P) \geqslant n$; c'est un sous-espace paralinéaire fermé de P.

Les paragraphes qui suivent visent à construire, pour tout espace analytique topologiquement séparé X, une notion de partie squelettique. D'après la construction générale, il va suffire de définir la notion de partie squelettique élémentaire et le procédé que nous proposons suppose donné un entier naturel n tel que $\dim(X) \leqslant n$. Même si la théorie ne voit pas les composantes irréductibles de X de dimension $< n$, il est commode, pour des raisons de rédaction, de ne pas supposer que X est équidimensionnel, ni que n est égal à $\dim(X)$.

Si n est un entier naturel, l'expression « Soit X un espace analytique de niveau n » signifiera ainsi que X est un espace analytique topologiquement séparé tel que $\dim(X) \leqslant n$, et que l'on garde trace de cet entier n.

Lorsque L est une extension complète de k, on considérera implicitement l'espace L-analytique X_L obtenu par changement de base comme un espace analytique de niveau n. (Il est topologiquement séparé car le morphisme de changement de base $X_L \to X$ est topologiquement séparé.)

Définition 12.6.1. — *Soit X un espace k-analytique de niveau n. Soit T un tore et soit $f\colon X \to T$ un moment sur X. On appelle* polyèdre caractéristique *du moment f la réunion des images réciproques par $q \circ f$ du squelette canonique de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$, lorsque q parcourt l'ensemble des morphismes de tores de T dans $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$. On le note Σ_f.*

Soit $x \in \Sigma_f$. Soit $q\colon T \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ un morphisme de tores tel que $q \circ f(x) \in S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)$. On a donc $d_k(x) \geqslant d_k(f(x)) \geqslant d_k(q \circ f(x)) = n = \dim(X)$, donc $d_k(x) = \dim(X) = d_k(f(x)) = n$. Par suite, le point x n'appartient à aucun fermé de Zariski de dimension $< \dim(X)$ d'aucun domaine analytique de X. En particulier, le point x n'appartient qu'à une seule composante irréductible de X dans laquelle il est Zariski-dense.

Cela démontre aussi que Σ_f est vide si $\dim(T) < n$.

Notons $f_{\mathrm{red}}\colon X_{\mathrm{red}} \to T$ le moment déduit de f par restriction. On a $\Sigma_{f_{\mathrm{red}}} = \Sigma_f$.

Remarque 12.6.2. — Soit X un espace k-analytique de niveau n et soit $f\colon X \to T$ un moment sur X. Le polyèdre caractéristique Σ_f est contenu dans la réunion $X^{(n)}$ des composantes irrédutibles de X qui sont de dimension n ; en particulier, cette théorie ignore les éventuelles composantes de dimension $< n$. On pourrait travailler sur chacune d'elle en changeant l'entier n de référence.

Proposition 12.6.3. — *Soit X un espace k-analytique de niveau n. Le polyèdre caractéristique de f est la réunion des images réciproques par $q_I \circ f$ du squelette canonique de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$, où I parcourt l'ensemble des parties de $\{1, \ldots, m\}$ de cardinal n.*

Démonstration. — Il résulte de la définition que pour toute partie I de $\{1, \ldots, m\}$ de cardinal n, on a $(q_I \circ f)^{-1}(S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)) \subset \Sigma_f$; cela démontre une inclusion. Inversement, soit $q\colon \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ un morphisme de tores et soit $x \in X$ un point tel que $q(f(x)) \in S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)$. Posons $t = f(x)$; comme $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$ est sans bord, on a donc $\dim_{\mathrm{trop},t}(q) = n$ (prop. 12.2.8, (iv)). Le morphisme q est formé de n monômes en les caractères canoniques $\chi_1, \ldots, \chi_m$ de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$. Si $\dim_{\mathrm{trop},t}(q) = n$, il existe donc une partie I de $\{1, \ldots, m\}$ de cardinal n telle que $\dim_{\mathrm{trop},t}((\chi_i)_{i\in I})$ soit égale à n. On a donc $q_I(t) \in S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)$ (prop. 12.2.8, (iv)), d'où $q_I \circ f(x) \in S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)$. □

Remarque 12.6.4. — Soit X un espace k-analytique de niveau n. Soit $x \in X$ un point tel que $d_k(x) = n$ et tel que le germe (X, x) est bon. Alors, x appartient au polyèdre caractéristique d'un moment défini au voisinage de x.

Plus précisément, soit $f_1, \ldots, f_d$ des germes de fonctions analytiques inversibles telles que les $\widetilde{f_j(x)}$ soient algébriquement indépendantes sur le corps gradué $\widetilde{k}$. Comme le germe (X, x) est bon, il existe des germes de fonctions analytiques inversibles $f_{d+1}, \ldots, f_n$ telles les $\widetilde{f_j(x)}$ (pour $1 \leqslant j \leqslant n$) forment une base de transcendance graduée de $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ sur $\widetilde{k}$. Cela signifie que $x \in \Sigma_f$.

L'assertion initiale s'obtient en partant de la famille vide $(f_1, \ldots, f_d)$ pour $d = 0$.

Proposition 12.6.5. — *Soit X un espace k-analytique de niveau n et soit $f\colon X \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$ un moment. Soit x un point de X tel que $\dim_x(X) = n$. Il existe un morphisme de tores $p\colon \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ tel que Σ_f et $\Sigma_{p\circ f}$ coïncident au voisinage de x.*

Démonstration. — On a toujours $\Sigma_{p\circ f} \subset \Sigma_f$; l'assertion est donc évidente si $x \notin \Sigma_f$. On suppose désormais que $x \in \Sigma_f$ et on raisonne par récurrence sur la longueur m de f. Elle est au moins égale à n, puisque $x \in \Sigma_f$; si elle est égale à n, on prend $p = \mathrm{id}$.

Supposons $m > n$; on écrit $f = (f_1, \ldots, f_m)$. Posons $r_i = |f_i(x)|$. Comme le degré de transcendance de $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ sur $\tilde{k}$ est égal à n, les éléments $a_i = \widetilde{f_i(x)}$ de $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ sont algébriquement dépendants et il existe donc un élément homogène non nul F de l'anneau gradué $\widetilde{\mathscr{H}(k)}[T_1/r_1, \ldots, T_m/r_m]$ tel que $F(a_1, \ldots, a_m) = 0$. Nous allons effectuer une « normalisation de Noether torique », reprise de [**99**, preuve de la proposition 3.2.7, p. 105]. Pour $q \in \mathbf{N}$ assez grand, on effectue un changement de variables monomial en $(T_1, \ldots, T_m)$ par :

$$\varphi^*(T_1) = T_1 T_m^q, \ldots, \varphi^*(T_{m-1}) = T_{m-1} T_m^{q^{m-1}}, \varphi^*(T_m) = T_m.$$

Si q est assez grand, on déduit de l'unicité du développement d'un entier en base q la propriété suivante sur le polynôme $G = \varphi^*(F)$: ses monômes ont des degrés deux à deux distincts en la variable T_m ; on écrit ainsi

$$G = \sum_{d \in \mathbf{N}} c_d(T_1, \ldots, T_{m-1}) T_m^d,$$

où c_d est un monôme, ces monômes n'étant pas tous nuls. Posons $b_1 = a_1 a_m^{-q}$, …, $b_{m-1} = a_{m-1} a_m^{-q^{m-1}}$ et $b_m = a_m$; par construction, on a $G(b_1, \ldots, b_m) = 0$:

$$\sum_{d \in \mathbf{N}} c_d(b_1, \ldots, b_{m-1}) b_m^d = 0.$$

Posons $g_i = f_i f_m^{-q^i}$ pour $1 \leqslant i < m$ et $g_m = f_m$; ce sont des fonctions inversibles sur X et on a $b_i = \widetilde{g_i(x)}$ par construction. Comme le changement de fonctions des f_i aux g_i est monomial inversible, on a $\Sigma_f = \Sigma_g$.

Posons $g' = (g_1, \ldots, g_{m-1})$; il est de la forme $p \circ f$, pour p convenable et nous allons démontrer que l'on a l'égalité $\Sigma_g = \Sigma_{g'}$ au voisinage de x, d'où l'assertion voulue par récurrence sur m.

On a

$$\sum_{d \in \mathbf{N}} c_d(\widetilde{g_1(x)}, \ldots, \widetilde{g_{m-1}(x)}) \widetilde{g_m(x)}^d = 0,$$

ce qui signifie que

$$|\sum_d c_d(g_1(x), \ldots, g_{m-1}(x)) g_m(x)^d| < \sup_d |c_d(g_1(x), \ldots, g_{m-1}(x))| \cdot |g_m(x)|^d.$$

L'ouvert W de X constitué des points y els que

$$|\sum_d c_d(g_1(y), \ldots, g_{m-1}(y)) g_m(y)^d| < \sup_d |c_d(g_1(y), \ldots, g_{m-1}(y))| \cdot |g_m(y)|^d$$

contient par conséquent x.

Soit $y \in W$. On a une relation

$$\sum_{d \in E} c_d(\widetilde{g_1(y)}, \ldots, \widetilde{g_{m-1}(y)}) \widetilde{g_m(y)}^d = 0$$

où E est l'ensemble non vide des entiers $d \in \mathbf{N}$ tels que $|c_d(g_1(y), \ldots, g_{m-1}(y))| \cdot |g_m(y)|^d$ est maximal. En particulier, $\widetilde{g_m(y)}$ est algébrique sur $\tilde{k}(\widetilde{g_1(y)}, \ldots, \widetilde{g_{m-1}(y)})$, si bien que $y \in \Sigma_g$ si et seulement si $y \in \Sigma_{g'}$. Cela conclut la démonstration. □

Lemme 12.6.6. — *Soit X un espace k-analytique de niveau n et soit $f\colon X \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ un moment sur X. Le sous-ensemble Σ_f de X en est alors une partie paralinéaire et l'application $f_{\mathrm{trop}}|_{\Sigma_f}\colon \Sigma_f \to \mathbf{R}^n$ est paralinéaire.*

Démonstration. — L'assertion est G-locale sur X d'après le lemme 3.2.9 ; on peut donc supposer X affinoïde. Par ailleurs, l'assertion est insensible à la présence de nilpotents ; on peut donc remplacer X par X_{red} et ainsi le supposer réduit. Soit $x \in \Sigma_f$. Toujours d'après le lemme 3.2.9, il suffit d'exhiber un voisinage affinoïde V de x dans X tel que $V \cap \Sigma_f$ soit une partie paralinéaire de V en restriction à laquelle f_{trop} est paralinéaire. Or cela résulte de la preuve du théorème 5.1 de **[50]** (et notamment du paragraphe 5.5.1 de celle-ci) qui montre même que V peut être choisi de sorte que $\Sigma_f \cap V$ soit *fidèlement* paralinéaire. □

Proposition 12.6.7. — *Soit X un espace k-analytique de niveau n, soit (X_i) une famille localement finie de domaines analytiques fermés ; pour tout i, soit $f_i\colon X_i \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{n_i}$ un moment. Posons $\Sigma = \bigcup_i \Sigma_{f_i}$. Il existe une famille (W_j) de domaines analytiques de X qui G-recouvrent Σ et pour tout j, un moment $g_j\colon W_j \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ tel que $\Sigma \cap W_j$ soit une partie paralinéaire de Σ_{g_j}. En particulier, Σ est paralinéaire.*

Démonstration. — L'assertion est G-locale sur X, ce qui permet de supposer que X est affinoïde et que (X_i) est fini. Pour tout i, notons $(f_{i,j})$ les composantes de f_i. Soit x un point de Σ. Soit I l'ensemble des indices tels que $x \in \Sigma_{f_i}$. Comme x est situé sur au moins un Σ_{f_i}, on a $n = d_k(x)$, et il existe donc un voisinage affinoïde V_x de x dans X qui est purement de dimension n. De plus, quitte à restreindre V_x, on peut supposer que les propriétés suivantes soient satisfaites :

– $V_x \cap \Sigma_i = \varnothing$ dès que $i \notin I$;
– pour tout $i \in I$, et pour tout j, on a $|f_{i,j}| \geqslant |f_{i,j}(x)|/2$ sur $X_i \cap V_x$;
– pour tout $i \in I$ et tout j, il existe une fonction analytique inversible $f'_{i,j}$ sur V_x telle que $|f_{i,j} - f'_{i,j}| < |f_{i,j}(x)|/2$ sur $X_i \cap V_x$

(la troisième condition est réalisable car X est affinoïde, donc bon, et en particulier presque bon en x). Pour tout i, notons f'_i le moment de composantes $(f'_{i,j})$. Par construction, on a alors $\Sigma_{f_i} \cap V_x = \Sigma_{f'_i} \cap X_i$ pour tout $i \in I$. Soit f la concaténation des f'_i. La proposition 12.6.5 assure l'existence d'un moment $g\colon V_x \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ tel que $\Sigma_f \subset \Sigma_g$. En particulier, chacun des $\Sigma_{f_i} \cap V_x$ est contenu dans Σ_g, et est par ailleurs une partie paralinéaire de $V_x \cap X_i$ par le lemme 12.6.6 ; c'est donc une partie paralinéaire de Σ_g. Et comme $\Sigma \cap V_x$ est la réunion des $\Sigma_{f_i} \cap V_x$, c'est encore une partie paralinéaire de Σ_g.

Il découle alors de la proposition 3.2.10 que Σ est paralinéaire. □

Corollaire 12.6.8. — *Soit X un espace k-analytique de niveau n. Le polyèdre caractéristique d'un moment $f\colon X \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$ est une partie paralinéaire de X, et l'application $f_{\mathrm{trop}}|_{\Sigma_f}\colon \Sigma_f \to \mathbf{R}^m$ est paralinéaire.*

Démonstration. — Compte tenu de la proposition 12.6.3, on écrit Σ_f comme la réunion des $\Sigma_{q_I \circ f}$, où I parcourt l'ensemble des parties de $\{1, \dots, m\}$ de cardinal n. Il résulte alors de la proposition précédente, appliquée à la famille des moments $(q_I \circ f)$, que Σ_f est une partie paralinéaire de X.

Par définition, f_{trop} est une application paralinéaire sur X et donc sa restriction à toute partie paralinéaire est paralinéaire. D'après le lemme 12.6.6, la restriction à $\Sigma_{q_I \circ f}$ de $(q_I \circ f)_{\mathrm{trop}}$ est une immersion par morceaux ; par suite, la restriction de f_{trop} est une

immersion par morceaux. Comme la famille des $\Sigma_{q_I \circ f}$ est un G-recouvrement de Σ, la restriction à Σ de f_{trop} est une immersion par morceaux. □

§ 12.7. POLYÈDRES CARACTÉRISTIQUES ET CHANGEMENT DE BASE

12.7.1. — Soit X un espace k-analytique de niveau n. Soit $f\colon X \to T$ un moment et soit L une extension complète de k. On note $p\colon X_L \to X$ le morphisme de changement de base et $f_L\colon X_L \to T_L$ le moment déduit par changement de base. On voudrait décrire le lien entre Σ_{f_L} et Σ_f.

Dans les deux cas « extrêmes » qui correspondent essentiellement au cas d'une extension résiduelle graduée qui est soit algébrique soit transcendente pure, les propositions 12.7.2 et le corollaire 12.7.5 indiquent que le polyèdre caractéristique se comporte de façon naturelle.

Proposition 12.7.2. — *Supposons que le corps résiduel gradué $\tilde{L}$ soit algébrique sur $\tilde{k}$; c'est par exemple le cas si L contient un sous-corps dense qui est algébrique sur k, ou si L est une extension immédiate de k. Alors, on a $\Sigma_{f_L} = p^{-1}(\Sigma_f)$.*

Démonstration. — En revenant la définition du polyèdre caractéristique il suffit, grâce à la proposition 12.6.3, de traiter le cas où X est irréductible, de dimension d, et où $T = \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$.

Soit $y \in X_L$ et soit $x = p(y)$. Pour que $x \in \Sigma_f$, il faut et il suffit que la famille $(\widetilde{f_1(x)}, \dots, \widetilde{f_d(x)})$ soit algébriquement indépendante sur $\tilde{k}$; pour que $y \in \Sigma_{f_L}$, il faut et il suffit que la famille $(\widetilde{f_1(x)}, \dots, \widetilde{f_d(x)})$ soit algébriquement indépendante sur $\tilde{L}$; l'assertion en résulte. □

12.7.3. — Soit $\mathscr{A}$ un anneau de Banach. Son spectre $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ est l'ensemble des seminormes multiplicatives bornées sur $\mathscr{A}$. Il est muni d'une relation d'ordre pour laquelle $x \preceq y$ si $|f(x)| \leqslant |f(y)|$ pour tout $f \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$. Le plus grand élément de $\mathscr{M}(\mathscr{A})$, s'il existe, est donc un élément x tel que $|f(x)| \geqslant |f(y)|$ pour tout $y \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$. Si la norme de $\mathscr{A}$ est elle-même multiplicative, c'est le le plus grand élément de $\mathscr{M}(\mathscr{A})$.

Lemme 12.7.4. — *Soit $x \in \Sigma_f$. Supposons que $p^{-1}(x) = \mathscr{M}(\mathscr{H}(x) \mathbin{\widehat{\otimes}} L)$ possède un plus grand élément, y. Alors y est l'unique antécédent de x sur Σ_{f_L}.*

Supposons que la norme tensorielle de $\mathscr{H}(x) \mathbin{\widehat{\otimes}} L$ soit multiplicative et notons y le point de X_L au-dessus de x qui correspond à cette norme. Alors, le point y est l'unique antécédent de x dans Σ_{f_L}.

Démonstration. — On se ramène encore au cas où X est irréductible, de dimension d, et où $f = (f_1, \dots, f_d)\colon X \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$. Posons $t = f(x)$ et $s = f_L(y)$. Notons q le morphisme canonique de T_L sur T. Par changement de base, on a $p^{-1}(x) = q^{-1}(t) \otimes_{\mathscr{H}(t)} \mathscr{H}(x)$, de sorte que le morphisme canonique $p^{-1}(x) \to q^{-1}(t)$ est surjectif, et, le point y étant le plus grand élément de $p^{-1}(x)$, le point s est ainsi le plus grand élément de $q^{-1}(t)$. Soit $r \in (\mathbf{R}_+^\times)^d$ tel que $t = \eta_r$; on a donc $s = \eta_{L,r}$. Puisque $f_L(y) = s$, cela prouve que $y \in \Sigma_{f_L}$.

Raisonnons par l'absurde et considérons un antécédent y' de x dans Σ_{f_L} tel que $y' \neq y$. Notons $\mathscr{A} = \mathscr{O}(q^{-1}(t))$, $\mathscr{B} = \mathscr{O}(p^{-1}(s))$, munissons ces algèbres de leurs normes tensorielles qui en font des algèbres de Banach. L'algèbre $\mathscr{A}$ est intègre, car sa norme est multiplicative ([**8**, lemma 5.2.2] ; [**49**, lemme 1.8 et exemple 1.9]). L'algèbre $\mathscr{B}$ est finie sur $\mathscr{A}$ car $f^{-1}(t)$ est de dimension nulle. Il existe une fonction $\varphi \in \mathscr{O}(f_L^{-1}(s) \cap p^{-1}(x))$ telle que $|\varphi(y')| = 1$ et $|\varphi(y)| = 0$. Puisque l'anneau $\mathscr{O}(f_L^{-1}(s) \cap p^{-1}(x))$ est le complété du produit tensoriel $\mathscr{B} \otimes_{\mathscr{A}} \mathrm{Frac}(\mathscr{A})$, il existe un élément ψ dans ce produit tensoriel tel que $\|\psi - \varphi\| < 1/2$. Alors $|\psi(y')| > 1/2 > |\psi(y)|$. Considérons $\lambda \in \mathscr{B}$ et $\mu \in \mathscr{A} - \{0\}$ tels que $\psi = \lambda/\mu$. Comme $|\mu(y')| = |\mu(y)| = |\mu(s)|$, on a donc $|\lambda(y')| > |\lambda(y)|$, ce qui contredit l'hypothèse que y est le plus grand élément de $p^{-1}(x)$. □

Rappelons ([**111**, définition 3.2]) qu'une extension complète L de k est dite universellement multiplicative si pour toute extension complète K de k, la norme tensorielle de l'algèbre $K \mathbin{\widehat{\otimes}_k} L$ est multiplicative. Dans ce cas, [**111**] démontre que l'application σ_L l'application de X dans X_L qui applique un point $x \in X$ sur le plus grand élément de $p^{-1}(x)$ est une section continue de la projection de X_L sur X (corollaire 3.7).

Voici un exemple important d'extension universellement multiplicative. On considère une famille $r = (r_1, \ldots, r_n)$ de nombres réels strictement positifs ; soit η_r le point de Shilov correspondant de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$, tel que $|T_i(\eta_r)| = r_i$ pour tout i, et l'on pose $L = \mathscr{H}(\eta_r)$. Alors, l'extension L de k est universellement multiplicative et la section σ_L se déduit de la « section de Shilov » $T_{\mathrm{trop}} \times X \to T \times_k X$.

Corollaire 12.7.5. — *Soit L une extension complète universellement multiplicative de k. On a $\Sigma_{f_L} = \sigma_L(\Sigma_f)$.*

Notons X_{u} l'ensemble des points universels de X, c'est-à-dire des points $x \in X$ tels que l'extension $\mathscr{H}(x)$ de x soit universellement multiplicative. C'est une partie fermée de X ([**111**, proposition 3.12]) et l'application $\sigma_L \colon X_{\mathrm{u}} \to X_L$ qui, à tout point universel x, associe le point de X_L au-dessus de x correspondant à la norme tensorielle de $\mathscr{H}(x) \mathbin{\widehat{\otimes}} L$, est une section continue au-dessus de X_{u} de la projection canonique $X_L \to X$ (*loc. cit.*, corollaire 3.7). Lorsque le corps k est algébriquement clos, on a $X_{\mathrm{u}} = X$ (*loc. cit.*, corollaire 3.14).

Corollaire 12.7.6. — *On $\Sigma_{f_L} \cap p^{-1}(X_{\mathrm{u}}) = \sigma_L(\Sigma_f \cap X_{\mathrm{u}})$. En particulier, si k est algébriquement clos, on a $\Sigma_{f_L} = \sigma_L(\Sigma_f)$.*

Lorsqu'on ne fait pas d'hypothèse sur l'extension L de k, nous pouvons préciser un résultat de [**50**].

Proposition 12.7.7. — a) *Pour toute extension complète L de k, l'application p induit une immersion par morceaux surjective de Σ_{f_L} sur Σ_f qui préserve la dimension locale.*

b) *Il existe une extension algébrique séparable F de k, de complétée $\widehat{F}$, telle que, pour toute extension complète L de $\widehat{F}$, la projection canonique de Σ_{f_L} sur $\Sigma_{f_{\widehat{F}}}$ est un isomorphisme d'espaces paralinéaires. Si, de plus, X est compact, on peut prendre F finie sur k (et donc $\widehat{F} = F$).*

c) *En particulier, si k est algébriquement clos, alors la projection canonique de Σ_{f_L} sur Σ_f est un isomorphisme, pour toute extension complète L de k.*

Démonstration. — D'après [**50**, théorème 5.1, 3)], l'application p induit une immersion par morceaux surjective de Σ_{f_L} sur Σ_F, ce qui démontre la première partie de l'assertion a). Si X est compact, le théorème 5.1, 4) de [**50**] fournit l'assertion b), l'extension F de k étant en outre finie. Puisque la formation des polyèdres caractéristiques est G-locale, l'assertion b) en résulte en composant toutes les extensions finies de k fournies par un recouvrement affinoïde de X. L'assertion c) en découle immédiatement.

Prouvons maintenant que le morphisme canonique de Σ_{f_L} sur Σ_f préserve la dimension locale. On peut raisonner G-localement sur X, et supposer que X est compact. Soit F une extension finie séparable de k, qu'on suppose galoisienne, stabilisant les polyèdres caractéristiques et soit M l'extension composée de L et F. Soit $y \in \Sigma_{f_L}$, soit x son image dans Σ_f, soit z un point de Σ_{f_M} au-dessus de y et t sa projection dans Σ_f. Comme la projection $\Sigma_{f_M} \to \Sigma_{f_F}$ est un isomorphisme, on a $\dim_z(\Sigma_{f_M}) = \dim_t(\Sigma_f)$. D'après la proposition 12.7.2, le polyèdre caractéristique Σ_f est le quotient de Σ_{f_F} par l'action de $\mathrm{Gal}(F/k)$; on a donc $\dim_t(\Sigma_{f_F}) = \dim_x(\Sigma_f)$, donc $\dim_z(\Sigma f_M) = \dim_x(\Sigma_f)$. Comme les projections $\Sigma_{f_M} \to \Sigma_{f_L}$ et $\Sigma_{f_L} \to \Sigma_f$ sont des immersions par morceaux d'espaces paralinéaires, on a $\dim_z(\Sigma_{f_M}) \leqslant \dim_y(\Sigma_{f_L}) \leqslant \dim_x(\Sigma_f)$. Cela démontre que $\dim_y(\Sigma_{f_L}) = \dim_x(\Sigma_f)$. □

§ 12.8. POLYÈDRES CARACTÉRISTIQUES ET DIMENSION TROPICALE

12.8.1. — Soit X un espace k-analytique de niveau n, soit m un entier et soit $f = X \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$ un moment sur X. On note $(f_1, \ldots, f_m)$ les composantes de f. Pour toute partie I de $\{1, \ldots, m\}$, on note q_I la projection canonique de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$ sur $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^I$.

Rappelons (proposition 12.6.8) que le polyèdre caractéristique de f est une partie paralinéaire de X et que l'application $f_{\mathrm{trop}}|_{\Sigma_f}$ est une immersion par morceaux d'espaces paralinéaires.

Le but de ce numéro est de relier la dimension tropicale de f_{trop} aux propriétés de Σ_f.

Théorème 12.8.2. — *Soit x un point de X.*

a) *On a $\dim_{\mathrm{trop},x}(f) \leqslant n$, avec égalité si et seulement si $x \in \Sigma_f^{(n)}$.*

b) *Supposons $x \in \mathrm{Int}(X)$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :* (i) *$x \in \Sigma_f$;* (ii) *f est de dimension tropicale n en x ;* (iii) *$x \in \Sigma_f^{(n)}$.*

c) *Si X est compact ou plus généralement si l'application f_{trop} est topologiquement propre, on a $f_{\mathrm{trop}}(X)^{(n)} = f_{\mathrm{trop}}(\Sigma_f^{(n)})$.*

Démonstration. — a) Soit d le degré de transcendance résiduel de f en x. On a $\dim_{\mathrm{trop},x}(f) \leqslant d \leqslant \dim_x X$ ((12.2.10.1)). Comme $\dim_x X \leqslant n$, il vient $\dim_{\mathrm{trop},x}(f) \leqslant d \leqslant n$.

Supposons que $\dim_{\mathrm{trop},x}(f) = n$, et montrons que $x \in \Sigma_f^{(n)}$. Puisque $\dim_{\mathrm{trop},x}(f) \leqslant d \leqslant n$, on a $d = n$. Il existe donc un sous-ensemble I de cardinal d de $\{1, \ldots, m\}$ tels que les $\widetilde{f_i(x)}$ soient algébriquement indépendants sur $\widetilde{k}$. Il s'ensuit que $x \in \Sigma_f$. Il reste à vérifier que $\dim_x(\Sigma_f) = n$. Soit V un voisinage analytique compact arbitraire de x dans X et démontrons que $\dim(\Sigma_f \cap V) = n$. Comme $\dim_{\mathrm{trop},x}(f) = n$, on a $\dim(f_{\mathrm{trop}}(V)) = n$. Soit C une cellule compacte de dimension n de $f_{\mathrm{trop}}(V)$ et soit

$q\colon \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ un morphisme de tores tel que la restriction de q_{trop} à $\langle C\rangle$ soit injective. Alors, $\dim(q\circ f)_{\mathrm{trop}}(V) = n$. D'après le lemme 12.2.13, $(q\circ f)_{\mathrm{trop}}(V)_{\mathrm{sq}}^{(n)}$ est contenu dans $(q\circ f)(V)$, donc dans $(q\circ f)(\Sigma_f\cap V)$. Comme $\dim(\Sigma_f\cap V)\geqslant n$, il vient $\dim(\Sigma_f\cap V) = n$, ce qu'il fallait démontrer.

Inversement, supposons que $x\in\Sigma_f^{(n)}$ et montrons que $\dim_{\mathrm{trop},x}(f) = n$. Soit V un voisinage compact de x. Alors, $V\cap\Sigma_f^{(n)}$ est un voisinage de x dans $\Sigma_f^{(n)}$, donc contient une cellule de dimension n puisque $\dim_x\Sigma_f = n$ par hypothèse. Comme la restriction de f_{trop} à $\Sigma_f^{(n)}$ est une immersion par morceaux, cela prouve que $\dim(f_{\mathrm{trop}}(V))\geqslant n$, et donc que $\dim(f_{\mathrm{trop}}(V)) = n$ puisque $\dim V\leqslant n$. Comme V est arbitraire, il vient $\dim_{\mathrm{trop},x}(f) = n$.

b) Faisons l'hypothèse que $x\in\mathrm{Int}(X)$. Supposons $x\in\Sigma_f$. Il existe alors un sous-ensemble I de $\{1,\dots,m\}$ tels que les $\widetilde{f_i(x)}$ pour $i\in I$ soient algébriquement indépendantes sur $\widetilde{k}$; par conséquent, $d\geqslant n$, si bien que $d = n$ puisqu'on sait que $d\leqslant n$. Et comme $x\in\mathrm{Int}(X)$, la dimension tropicale de f en x est égale à d (12.2.10.1), et donc à n.

Supposons réciproquement que x est de dimension tropicale n en x. Le point x appartient alors à $\Sigma_f^{(n)}$ d'après (a).

L'implication (iii)⇒(i) est évidente.

c) Supposons f_{trop} topologiquement propre. En raisonnant G-localement sur $\mathbf{R}^m$ on voit que $f_{\mathrm{trop}}(X)$, $f_{\mathrm{trop}}(\Sigma_f)$ et $f_{\mathrm{trop}}(\Sigma_f^{(n)})$ sont des parties paralinéaires fermées de $\mathbf{R}^m$. Comme f_{trop} induit une immersion par morceaux de Σ_f sur $f_{\mathrm{trop}}(\Sigma_f)$, l'image $f_{\mathrm{trop}}(\Sigma_f^{(n)})$ est purement de dimension n et est donc contenue dans $f_{\mathrm{trop}}(X)^{(n)}$.

Soit maintenant ξ un point de $f_{\mathrm{trop}}(X)$ qui n'appartient pas à $f_{\mathrm{trop}}(\Sigma_f^{(n)})$. Soit x un point de X tel que $f_{\mathrm{trop}}(x) = \xi$; on a donc $x\notin\Sigma_f^{(n)}$. D'après *a*), f_{trop} est de dimension tropicale $< n$ en x. Comme f_{trop} est topologiquement propre, il existe un voisinage analytique compact V de $f_{\mathrm{trop}}^{-1}(\xi)$ et un voisinage paralinéaire U de ξ dans $f_{\mathrm{trop}}(X)$ tels que $f_{\mathrm{trop}}^{-1}(U)\subset V$ et que $\dim(f_{\mathrm{trop}}(V))\leqslant n-1$. Puisque $U\subset f_{\mathrm{trop}}(V)$, il est de dimension au plus $n-1$ et ξ n'appartient à $f_{\mathrm{trop}}(X)^{(n)}$. □

Corollaire 12.8.3. — *Soit X un espace k-analytique de niveau n et soit $f\colon X\to T$ un moment. Alors $\Sigma_f^{(n)}$ coïncide avec le polyèdre de variation maximale $\Sigma_{f_{\mathrm{trop}}}^{(n)}$ de l'application paralinéaire f_{trop} (définition 5.2.1).*

Démonstration. — C'est l'assertion *a*) du théorème 12.8.2. □

Corollaire 12.8.4. — *Soit X un espace k-analytique de niveau n, sans bord. Pour tout moment $f\colon X\to T$, on a $\Sigma_f^{(n)} = \Sigma_f$.*

Démonstration. — Comme X est sans bord, on a $X = \mathrm{Int}(X)$. L'assertion découle alors du théorème 12.8.2, *b*). □

Remarque 12.8.5. — Soit X un espace k-analytique de niveau n et soit f un moment sur X. Puisqu'elle est égale à $\Sigma_{f_{\mathrm{trop}}}^{(n)}$, la partie paralinéaire $\Sigma_f^{(n)}$ de X ne dépend que de f_{trop}. Ce n'est en revanche pas le cas de Σ_f en général (à moins que X ne soit sans bord auquel cas $\Sigma_f = \Sigma_f^{(n)}$).

Par exemple, prenons pour X le domaine $|T(x)| = 1$ dans $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ et pour f le moment donné par l'immersion canonique. Alors Σ_f est réduit au point de Gauss de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$. Sur X, f_{trop} est la fonction constante de valeur 1, donc $f_{\mathrm{trop}} = 1_{\mathrm{trop}}$ mais $\Sigma_1 = \varnothing$.

§ 12.9. PARTIES SQUELETTIQUES D'UN ESPACE ANALYTIQUE

Le but de ce paragraphe est de définir la classe des parties squelettiques d'un espace analytique, le munissant ainsi d'une structure d'espace G-tropical vertébré.

12.9.1. — Soit X un espace k-analytique de niveau n. Soit $g\colon X \to \mathbf{R}^m$ une application paralinéaire sur X. Rappelons que l'on note $\Sigma_g^{(n)}$ le lieu des points x en lesquel g est de dimension tropicale n. Lorsque $f\colon X \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$ est un moment sur X tel que $g = f_{\mathrm{trop}}$, le corollaire 12.8.3 affirme que $\Sigma_g^{(n)} = \Sigma_f^{(n)}$, de sorte que $\Sigma_g^{(n)}$ est une partie paralinéaire de X. Plus généralement :

Lemme 12.9.2. — *Soit $g\colon X \to \mathbf{R}^m$ une application paralinéaire sur X.*

a) *Soit $q\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ une application affine injective. Alors $\Sigma_{q\circ g}^{(n)} = \Sigma_g^{(n)}$.*

b) *Il existe un G-recouvrement (W_j) de X et une famille (f_j), où $f_j\colon W_j \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ est un moment, tels que $\Sigma_g^{(n)} \cap W_j \subset \Sigma_{f_j}$ pour tout j.*

c) *L'ensemble $\Sigma_g^{(n)}$ est une partie paralinéaire de X, purement de dimension n, sur laquelle g est une immersion par morceaux.*

d) *Si X est compact, alors $g(X)^{(n)} = g(\Sigma_g^{(n)})$.*

Démonstration. — *a*) En effet, comme q est injective, $q \circ g$ et g ont même dimension tropicale en tout point.

Les énoncés *b*) et *c*) sont locaux sur X, ce qui permet de supposer que X est paracompact. Par définition d'une application paralinéaire, il existe un G-recouvrement (W_j) de X par des domaines compacts et, pour tout j, un moment $f_j\colon W_j \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$, un entier non nul d_j et un élement $a_j \in \mathbf{R}^m$ telle que $d_j g = f_{j,\mathrm{trop}} + a_j$. Puisque X est paracompact, on peut supposer que ce G-recouvrement est localement fini.

Pour tout j, l'égalité $d_j g = f_{j,\mathrm{trop}} + a_j$ (et la non-nullité de d_j) entraîne que $\Sigma_{g|_{W_j}}^{(n)} = \Sigma_{f_j}^{(n)}$. En particulier, il est contenu dans Σ_{f_j}. Soit Σ la réunion des Σ_{f_j}. D'après la proposition 12.6.7, c'est une partie paralinéaire de X ; de plus, il existe un G-recouvrement (V_i) de X et des moments $h_i\colon V_i \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ tels que $\Sigma \cap V_i \subset \Sigma_{h_i}$ pour tout i. Cela prouve *b*).

Démontrons *c*). L'ensemble $\Sigma_g^{(n)}$ est la réunion des $\Sigma_{g|_{W_j}}^{(n)}$, donc est contenue dans Σ. Pour tout j, l'ensemble $\Sigma_{f_j}^{(n)}$ est une partie paralinéaire fermée de Σ_{f_j} ; par conséquent, $\Sigma_g^{(n)}$ est une réunion localement finie de parties paralinéaires, donc est paralinéaire en vertu du lemme 3.2.10. Le reste de l'assertion découle de la proposition 5.2.5, de même que l'assertion *d*). □

Définition 12.9.3. — *Soit X un espace k-analytique de niveau n. Soit V un domaine de X ; on dit qu'une partie Σ de V est une* partie squelettique élémentaire *de V s'il existe un moment $f\colon V \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ tel que $\Sigma = \Sigma_f$.*

Théorème 12.9.4. — *Soit X un espace k-analytique de niveau n. Les parties squelettiques élémentaires de X et de ses domaines satisfont les axiomes des familles de parties squelettiques élémentaires (§5.1.2).*

Démonstration. — Vérifions les axiomes *a*) à *d*) de la définition.

a) Si V est un domaine analytique de X et $f\colon V \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ un moment, alors $\Sigma_f = f^{-1}(S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n))$ est fermé dans V puisque f est continu et $S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)$ est fermé dans $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$.

b) Soit V un domaine analytique de X, soit $f\colon V \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ un moment et soit W un domaine de V. Alors, $\Sigma_f \cap W = \Sigma_{f|_W}$, ce qui prouve que $\Sigma_f \cap W$ est une partie squelettique élémentaire de W.

c) C'est exactement le lemme 12.6.6.

d) Soit (V, g) une carte G-tropicale de X. Démontrons qu'il existe un G-recouvrement (W_j) de V tel que pour tout j, la partie $\Sigma_f^{(n)} \cap W_j$ de W_j soit contenue dans une partie squelettique élémentaire de W_j.

L'assertion est locale sur X ; cela permet de supposer que X est paracompact. On choisit maintenant un G-recouvrement (W_j) de V par des domaines compacts, une famille (d_j) d'entiers non nuls, une famille (a_j) dans $\mathbf{R}^m$ et une famille de moments (f_j) tels que $d_j g_{\mathrm{trop}}|_{W_j} = f_{j,\mathrm{trop}} + a_j$ pour tout j. Puisque X est paracompact, on se ramène au cas où le G-recouvrement (W_j) est localement fini.

La preuve du lemme entraîne que $\Sigma_g^{(n)}$ est contenu dans la réunion des Σ_{f_j}. D'après la proposition 12.6.7, cette réunion est G-localement contenue dans une partie squelettique élémentaire. □

12.9.5. — La théorie générale des parties squelettiques fournit maintenant une notion de partie squelettique d'un espace analytique associée à ces parties squelettiques élémentaires.

Soit X un espace k-analytique de niveau n. Une partie Σ de X est squelettique s'il existe une famille (V_i) de domaines analytiques de X telle que les $\Sigma \cap V_i$ forment un G-recouvrement de Σ et telle que pour tout i, $\Sigma \cap V_i$ soit une partie paralinéaire fermée d'une partie squelettique élémentaire de V_i.

Notons que toute partie squelettique de X est constituée de points x tels que $d_k(x) = n$; en un tel point x, on a $\dim_x(X) = n$. En particulier, si $\dim(X) < n$, la partie vide est la seule partie squelettique de X.

Ainsi, tout espace analytique de dimension $\leqslant n$ hérite d'une structure d'espace G-tropical vertébré de niveau n.

Proposition 12.9.6. — *Soit X et Y des espaces k-analytiques de niveau n et soit $p\colon Y \to X$ un morphisme.*

a) *Soit Σ une partie squelettique élémentaire d'un domaine V de X. Alors $p^{-1}(\Sigma)$ est une partie squelettique élémentaire de $p^{-1}(V)$.*

b) *Soit Σ une partie squelettique de X. Alors $p^{-1}(\Sigma)$ est une partie squelettique de Y, et l'application $p_\Sigma\colon p^{-1}(\Sigma) \to \Sigma$ est une immersion par morceaux.*

c) *Supposons de plus que $p^{-1}(\Sigma) \subset \mathrm{Int}(Y/X)$. L'application p_Σ est alors ouverte ; en particulier, elle préserve la dimension locale.*

Démonstration. — *a*) Par hypothèse, il existe un moment $f\colon V \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ tel que $\Sigma = f^{-1}(S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n))$. Alors $p^{-1}(\Sigma) = (f \circ p)^{-1}(S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n))$ donc est une partie squelettique élémentaire de $p^{-1}(V)$.

Les assertions restantes sont G-locales sur X. On peut donc supposer qu'il existe un moment $f\colon X \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ tel que $\Sigma \subset \Sigma_f$.

b) Alors, $\Sigma_{f\circ p} = p^{-1}(\Sigma_f)$, par définition de ces ensembles. Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_{f\circ p} & \xrightarrow{p_{\Sigma_f}} & \Sigma_f \\ & {\scriptstyle (f\circ p)_{\mathrm{trop}}}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle f_{\mathrm{trop}}} & \\ & T_{\mathrm{trop}} & \end{array}$$

les deux flèches obliques sont des immersions par morceaux. De plus, $p^{-1}(\Sigma)$ est l'image réciproque de Σ par l'immersion par morceaux de $\Sigma_{f\circ p}$ dans Σ_f déduite de p. Ainsi, $p^{-1}(\Sigma)$ est une partie paralinéaire de $\Sigma_{f\circ p}$ et p_Σ est une immersion par morceaux.

c) L'assertion est locale sur $p^{-1}(\Sigma)$ et a fortiori sur Σ. Soit $y \in p^{-1}(\Sigma)$. Alors p est de dimension relative nulle et sans bord en y, donc fini en y. Quitte à restreindre X et Y, on peut supposer que p est fini. Considérons le diagramme commutatif d'espaces k-analytiques :

$$\begin{array}{ccccc} Y_{\mathrm{red}} & \xrightarrow{p_{\mathrm{red}}} & X_{\mathrm{red}} & & \\ \downarrow & & \downarrow & \searrow & \\ Y & \xrightarrow{p} & X & \xrightarrow{f} & T. \end{array}$$

L'immersion de X_{red} dans X induit un homéomorphisme de $\Sigma_{f_{\mathrm{red}}}$ sur Σ_f ; de même, l'immersion de Y_{red} dans Y induit un homéomorphisme de $\Sigma_{(f\circ p)_{\mathrm{red}}}$ sur $\Sigma_{f\circ p}$. Ainsi, il suffit de traiter le cas où X et Y sont réduits.

L'ensemble Y' des points y de Y en lesquels p est plat est un ouvert de Zariski de Y. Il n'est pas vide : en effet, si V est un domaine affinoïde non vide de X et x un point de X en lequel l'anneau local $\mathscr{O}_{V,x}$ est artinien, cet anneau local est un corps (car X est réduit) et le morphisme fini $Y \times_X V \to V$ est plat au-dessus de x. Le fermé de Zariski $Y - Y'$ est alors de dimension $< n$, donc son image $p(Y - Y')$ est un fermé de Zariski de X de dimension $< n$. Notons X' l'ouvert complémentaire ; il contient Σ_f, car $d_k(x) = n$ pour tout $x \in \Sigma_f$. Par construction, le morphisme $Y \times_X X' \to X'$ est fini et plat. Il est en particulier ouvert. Par conséquent, l'application p_Σ est ouverte. □

Proposition 12.9.7. — *Soit X un espace k-analytique de niveau n. Pour qu'une partie Σ de X soit squelettique, il faut et il suffit qu'elle soit squelettique en tant que partie de X_{red}.*

Démonstration. — Soit Σ une partie squelettique de X ; d'après la proposition précédente, c'est également une partie squelettique de X_{red}.

Inversement, soit Σ une partie squelettique de X_{red} et démontrons que c'est une partie squelettique de X. L'assertion est G-locale sur X ; cela permet de supposer que X est affinoïde. On peut alors choisir un recouvrement affinoïde fini (V_i) de X_{red} tel que, pour tout i, $\Sigma \cap V_i$ soit contenue dans une partie squelettique élémentaire Σ_{f_i} de V_i. D'après le théorème de Gerritzen–Grauert, on peut supposer en outre que chaque V_i est un domaine rationnel de X_{red} ; c'est alors la trace d'un domaine rationnel W_i de X_{red}, de sorte que $V_i = (W_i)_{\mathrm{red}}$. Pour tout i, il existe alors un moment g_i sur W_i induisant f_i par réduction. On a alors $\Sigma_{f_i} = \Sigma_{g_i}$, ce qui prouve que $\Sigma \cap W_i$ est contenu dans une partie squelettique élémentaire de W_i. Comme les W_i forment un G-recouvrement affinoïde fini de X, cela démontre que Σ est une partie squelettique de X. □

Remarque 12.9.8. — Soit X un espace k-analytique de niveau n, soit m un entier tel que $m \leqslant n$, soit Y un fermé de Zariski de X, considéré comme espace k-analytique de niveau m. La notion de partie squelettique de Y ne dépend pas de la structure analytique précise choisie sur Y ; elle coïncidera avec la notion fournie par sa structure réduite. Si $\dim(Y) < n$, sa seule partie squelettique est l'ensemble vide.

Lemme 12.9.9. — *Soit X un espace k-analytique de niveau n. Soit (X_i) la famille de ses composantes irréductibles de X ; pour tout i, considérons X_i comme un espace k-analytique de niveau n. Soit Σ une partie de X. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'ensemble Σ est une partie squelettique de X ;*

(ii) *Pour tout i, l'ensemble $\Sigma \cap X_i$ est une partie squelettique de X_i ;*

(iii) *Le sous-espace Σ est somme disjointe des ensembles $\Sigma \cap X_i$, chacune d'elles étant squelettique dans X_i.*

Démonstration. — Soit U l'ensemble des points de X qui n'appartiennent qu'à une seule composante irréductible de X. Observons que U est un ouvert de Zariski de X.

Supposons que Σ soit une partie squelettique de X. Comme un point d'un polyèdre caractéristique n'est contenu dans aucun fermé de Zariski de dimension $< n$, on a $\Sigma \subset U$. Par suite, Σ est une partie squelettique de U ; comme $U \cap X_i$ est un ouvert de U, $\Sigma \cap X_i$ est donc une partie squelettique de $U \cap X_i$; comme $U \cap X_i$ est un ouvert de X_i, $\Sigma \cap X_i$ est une partie squelettique de X_i. Cela démontre l'implication (i)⇒(ii).

Supposons que pour tout i, $\Sigma \cap X_i$ soit une partie squelettique de X_i. Pour tout i, $\Sigma \cap X_i$ est alors contenu dans U, d'où (iii).

Sous les hypothèses de (iii), $\Sigma \cap X_i$ est une partie squelettique de $U \cap X_i$, donc de U puisque $U \cap X_i$ est ouvert dans U, et donc de X puisque U est ouvert dans X. Comme Σ est la réunion disjointe des parties ouvertes et fermées $\Sigma \cap X_i$, c'est une partie squelettiques de X. □

La proposition suivante indique que dans le cas d'un bon espace analytique de dimension n, les parties squelettiques coïncident avec les parties qui sont, localement, parties paralinéaires d'un polyèdre caractéristique de moment de taille n.

Proposition 12.9.10. — *Soit X un espace analytique de niveau n, soit Σ une partie squelettique de X et soit x un point de Σ en lequel le germe (X, x) est presque bon. Il existe un voisinage ouvert U de x et un moment $f\colon U \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ tel que $\Sigma \cap U \subset \Sigma_f$.*

Démonstration. — Par définition, il existe une famille finie (V_i) de domaines analytiques compacts contenant x, dont la réunion V est un voisinage de x, et, pour tout i, un moment $f_i\colon V_i \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$, tel que $\Sigma \cap V_i \subset \Sigma_{f_i}$. Pour tout i et tout entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant n$, choisissons un voisinage analytique compact W_i de x dans V et une fonction analytique inversible $g_{i,j}$ sur W_i telle que $|g_{i,j} - f_{i,j}| < |f_{i,j}|$ sur $W_i \cap V_i$; c'est possible car X est presque bon en x (lemme 12.2.3). D'après le paragraphe 12.1.14, 2), cela entraîne l'égalité $\Sigma_{g_i} \cap V_i = \Sigma_{f_i} \cap W_i$, où g_i est le moment sur W_i défini par la concaténation des $g_{i,j}$. Soit W l'intersection des W_i et soit $g\colon W \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$ le moment sur W obtenu par concaténation des g_i. L'ensemble W est un voisinage analytique compact de x. Comme $W \subset V = \bigcup_i V_i$, on a

$$\Sigma \cap W \subset \bigcup \Sigma_{f_i} \cap W \subset \bigcup \Sigma_{f_i} \cap W_i \subset \bigcup \Sigma_{g_i} \cap V_i \subset \Sigma_g.$$

On conclut à l'aide de la proposition 12.6.5. □

Théorème 12.9.11. — *Soit X un espace k-analytique de niveau n. Soit L une extension complète de k et notons $p\colon X_L \to X$ la projection canonique. Soit Σ une partie squelettique de X ; notons Σ_L la réunion des polyèdres caractéristiques Σ_{f_L}, où $f\colon V \to T$ parcourt l'ensemble des moments définis sur un domaine analytique V de X tels que $\Sigma_f \subset \Sigma$.*

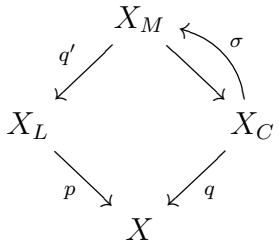
L'ensemble Σ_L est une partie squelettique de X_L et le morphisme p induit une immersion par morceaux surjective de Σ_L sur Σ qui préserve la dimension locale.

De plus, pour tout moment $f\colon V \to T$ tel que $\Sigma_f \subset \Sigma$, on a $\Sigma_L \times_\Sigma \Sigma_f = \Sigma_{f_L}$.

Démonstration. — La première assertion est G-locale sur X ; comme elle est vérifiée pour l'application $\Sigma_{f_L} \to \Sigma_f$, il suffit de démontrer la seconde assertion.

Soit $f\colon V \to T$ un moment défini sur un domaine analytique V de X. Démontrons l'égalité $P_L \times_P \Sigma_f = \Sigma_{f_L}$. Cela revient à démontrer que si $g\colon W \to T'$ est un moment et $x \in \Sigma_f \cap \Sigma_g$, alors les fibres de Σ_{f_L} et Σ_{g_L} au-dessus de x coïncident. Quitte à remplacer X par $V \cap W$, on suppose que les moments f et g sont définis sur X.

Soit $x \in \Sigma_f \cap \Sigma_g$. Soit C la complétion d'une clôture algébrique de k et soit M une extension complète composée de L et C. Considérons le diagramme



dans lequel σ est la section de Poineau de l'application $X_M \to X_C$ dont l'existence résulte de ce que C est algébriquement clos. Comme l'extension C/k contient une sous-extension algébrique dense, on a $\Sigma_{f_C} = q^{-1}(\Sigma_f)$. Comme C est algébriquement clos, on a $\Sigma_{f_M} = \sigma(\Sigma_{f_C})$. Enfin, on a $\Sigma_{f_L} = q'(\Sigma_{f_M})$. Par suite,

$$\Sigma_{f_L} = q'(\sigma(q^{-1}(\Sigma_f))),$$

donc la fibre de Σ_{f_L} au-dessus de x est donnée par la formule

$$\Sigma_{f_L,x} = q'(\sigma(q^{-1}(x)))$$

dans laquelle Σ_f n'intervient plus ; cette fibre coïncide donc avec la fibre de Σ_{g_L} au-dessus de x. Cela conclut la démonstration du théorème. □

Le cas des polyèdres caractéristiques et la définition de Σ_L entraînent de plus la caractérisation suivante :

Proposition 12.9.12. — *Conservons les notations du théorème 12.9.11.*

a) *Si l'extension L/k possède une sous-extension algébrique dense, alors $\Sigma_L = p^{-1}(\Sigma)$;*

b) *Si l'extension L/k est universellement multiplicative, ou si le corps le corps k est algébriquement clos, on a $\Sigma_L = \sigma_L(\Sigma)$.*

Démonstration. — Compte tenu de la seconde assertion du théorème, l'assertion *a*) découle de la proposition 12.7.2, et l'assertion *b*) du corollaire 12.7.5. □

Lemme 12.9.13. — *Soit X un espace k-analytique de niveau n, soit Σ une partie squelettique de X et soit d un entier $\leqslant n$. Soit $f\colon X \to \mathbf{A}^d$ un morphisme et soit r un polyrayon de longueur d. La fibre $f^{-1}(\eta_r)$ est de dimension $\leqslant n-d$ et l'intersection $\Sigma \cap f^{-1}(\eta_r)$ est une partie paralinéaire de Σ de dimension $\leqslant n-d$; c'est aussi une partie squelettique de $f^{-1}(\eta_r)$ vu comme espace de niveau $n-d$.*

Démonstration. — Comme X est de niveau n, il est de dimension $\leqslant n$. Pour tout $x \in f^{-1}(\eta_r)$ on a donc $n \geqslant d_k(x) = d_{\mathscr{H}(\eta_r)}(x) + d$, si bien que $d_{\mathscr{H}(\eta_r)}(x) \leqslant n-d$. Par conséquent $\dim f^{-1}(\eta_r) \leqslant d$. Dans ce qui suit, nous considérons cette fibre comme un espace $\mathscr{H}(\eta_r)$-analytique de niveau $n-d$.

Pour démontrer le lemme, on peut raisonner G-localement sur Σ, et donc supposer que Σ est compact et qu'il existe un domaine compact V de X et un moment $g\colon V \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ tel que $\Sigma \subset \Sigma_g$. Il existe alors un domaine compact W de V tel que $W \cap \Sigma_g = \Sigma$ (lemme 3.2.8). Quitte à remplacer X par W, cela permet de supposer que X est compact, que g est défini sur X et que $\Sigma = \Sigma_g$.

Comme l'énoncé est trivial au voisinage d'un point de Σ qui n'est pas dans $f^{-1}(\eta_r)$, on peut aussi supposer f inversible sur X.

Soit $x \in \Sigma_g \cap f^{-1}(\eta_r)$. On a alors $|f(x)| = r$ et $\widetilde{f(x)}$ est une famille de d éléments algébriquement indépendants sur $\widetilde{k}$. Comme x appartient à Σ_g, le corps gradué $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ est de degré de transcendance n sur $\widetilde{k}$ et la famille $\widetilde{g(x)}$ est une base de transcendance de $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ sur $\widetilde{k}$. Mais alors le sous-corps gradué de $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ engendré par $\widetilde{k}$ et les familles $\widetilde{f(x)}$ et $\widetilde{g(x)}$ est a fortiori de degré de transcendance n sur $\widetilde{k}$, et donc de degré de transcendance $n-d$ sur $\widetilde{k}(\widetilde{f(x)})$.

Il existe dès lors un sous-ensemble J de $\{1,\dots,n\}$ de cardinal $n-d$ tel que la famille $\widetilde{g_J(x)}$ forme une base de transcendance de $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ sur $\widetilde{k}(\widetilde{f(x)})$, où g_J désigne la sous-famille de g constituée des composantes d'indice appartenant à J.

Le point x appartient donc à $\Sigma_{g_J,f} \cap f^{-1}(\eta_r)$, qui est aussi le sous-espace paralinéaire T_J de $\Sigma_{g_J,f}$ défini par l'égalité $|f| = r$, puisque $f(\Sigma_{g_J,f})$ est à valeurs dans le squelette standard de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$.

Si y est un point de $f^{-1}(\eta_r)$, la famille $\widetilde{f(y)}$ est algébriquement indépendante sur $\widetilde{k}$; par suite, $\widetilde{g_J(y)}$ est algébriquement indépendante sur $\widetilde{k}(\widetilde{f(y)}) = \widetilde{\mathscr{H}(\eta_r)}$ si et seulement si la famille concaténée $(\widetilde{g_J(y)}, \widetilde{f(y)})$ est algébriquement indépendante sur $\widetilde{k}$. Autrement dit, $\mathrm{T}_J = \Sigma_{g_J|_{f^{-1}(\eta_r)}}$.

Remarquons que T_J apparaît comme une partie squelettique de X aussi bien que de $f^{-1}(\eta_r)$; les structures paralinéaires correspondantes coïncident car il est G-recouvert par des g-cellules.

D'après ce qui précède, $\Sigma_g \cap f^{-1}(\eta_r) = \bigcup_J \Sigma_g \cap \mathrm{T}_J$; c'est donc une partie squelettique de X aussi bien que de $f^{-1}(\eta_r)$. Comme $\dim(f^{-1}(\eta_r)) \leqslant n-d$, la dimension de $\Sigma_g \cap f^{-1}(\eta_r)$ est au plus égale à $n-d$. □

Corollaire 12.9.14. — *Soit X un espace k-analytique de niveau n et soit Σ une partie squelettique de X. L'intersection $\partial(X) \cap \Sigma$ est n-négligeable ; si X est affinoïde, c'est une partie paralinéaire de Σ de dimension $\leqslant n-1$.*

Démonstration. — Pour démontrer que $\partial(X)\cap\Sigma$ est n-négligeable, il suffit de vérifier que $V\cap\Sigma\cap\partial X$ est n-négligeable pour tout domaine affinoïde V de X. Comme $\partial V \supset \partial X\cap V$, il suffit de traiter le cas où X est affinoïde.

D'après le théorème 3.2 de [**50**], il existe une famille finie (f_i) de fonctions analytiques sur X et une famille (r_i) de nombres réels strictement positifs telles que $\partial(X) = \bigcup_i f_i^{-1}(\eta_{r_i})$. Le corollaire découle alors immédiatement du lemme ci-dessus. □

§ 12.10. LES ESPACES DE BERKOVICH SONT RICHES

12.10.1. — Nous nous proposons de montrer que tout espace analytique topologiquement séparé et purement de dimension n est riche en tant qu'espace G-tropical de niveau n. La preuve va reposer sur un certain nombre de résultats intermédiaires dans lesquels les valuations de Gauss jouent un rôle central. Pour manipuler commodément ces dernières, nous utiliserons la notation multiplicative ; la tropicalisation de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ sera en particulier dans ce qui suit identifiée à $(\mathbf{R}_+^\times)^n$.

Nous aurons besoin d'une variante graduée des valuations de Gauss. Plus précisément, soit K un corps gradué et soit $K(\tau_1,\dots,\tau_n)$ une extension transcendante pure de K (les τ_i sont donc homogènes, et algébriquement indépendants sur K). Soit H un groupe ordonné (noté multiplicativement) et soit $h\in H^n$. La valuation de Gauss de paramètre h sur $K(\tau_1,\dots,\tau_n)$, relative à la famille (τ_i), est la valuation à valeurs dans H donnée par la formule $\sum a_I T^I / \sum b_I T^I \mapsto \max_I v_0(a_I)/\max_I v_0(b_I)$, pour tout couple $(\sum a_I T^I, \sum b_I T^I)$ d'éléments homogènes de $K[\tau_1,\dots,\tau_n]$ avec les b_I non tous nuls, où v_0 est la valuation triviale sur K (qui envoie 0 sur 0 et tout élément de $K^\times$ sur 1).

Notons D la catégorie des groupes abéliens divisibles ordonnés non triviaux et Γ le foncteur d'oubli de D vers la catégorie des ensembles (autrement dit, $\mathsf{D}=\mathsf{D}_{\{1\}}$ et $\Gamma=\Gamma_{\{1\}}$ avec les notations de 10.5.6). Un *cône rationnel* de Γ^n sera un sous-foncteur polyédral de Γ^n au sens de 10.5.6, c'est-à-dire un sous-foncteur de Γ^n décrit par une condition de la forme $\bigvee_i\bigwedge_j \varphi_{ij}\leqslant 1$ où chaque φ_{ij} est un monôme de la forme $x_1^{e_1}\dots x_n^{e_n}$, les exposants e_i étant rationnels (le groupe ordonné de base est ici égal à $\{1\}$ et il n'y a donc pas de termes constants ; un cône rationnel non vide de Γ^n contient automatiquement l'origine $(1,\dots,1)$).

Lemme 12.10.2. — *Soit n un entier et soit $r=(r_1,\dots,r_n)$ un polyrayon. Posons $\tau_i = \widetilde{T_i(\eta_r)}$ pour tout i. Soit (U,η_r) un germe de domaine analytique de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ et soit $C\subset\mathbf{G}^n$ l'unique cône rationnel tel que $\mathrm{trop}(U\cap S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)) = r\cdot C(\mathbf{R}_+^\times)$ au voisinage de r. Soit H un objet de D, soit $h\in H^n$ et soit η_h la valuation de Gauss sur l'extension $\widetilde{\mathscr{H}(\eta_r)}$ de $\widetilde{k}$, de paramètre h et relative à la famille (τ_i). La valuation η_h appartient à $\widetilde{(U,\eta_r)}$ si et seulement si $h\in C(H)$.*

Démonstration. — Les formations de la réduction $\widetilde{(U,\eta_r)}$ et du cône C commutent aux unions finies de germes de domaines analytiques ; on peut supposer que le germe (U,η_r) est bon, c'est-à-dire que $\widetilde{(U,\eta_r)}$ est de la forme $\mathbf{P}_{K/\widetilde{k}}\{\widetilde{f_1(\eta_r)},\dots,\widetilde{f_m}(\eta_r)\}$, où les f_i sont des fonctions analytiques inversibles définies au voisinage de η_r. Par densité de $k(T_1,\dots,T_n)$ dans $\mathscr{H}(\eta_r)$, on peut supposer que chaque f_i est de la forme g_i/h_i, où g_i et h_i sont des

polynômes et où $h_i \neq 0$. Comme seules importent les réductions graduées des $f_i(\eta_r)$, on peut supposer qu'il existe pour tout i deux réels strictement positifs α_i et β_i et des écritures $f_i = \sum_{I\in E_i} a_{I,i}T^I$ et $g_i = \sum_{I\in F_i} b_{I,i}T^I$ où E_i et F_i sont finis et non vides et où $|a_{I,i}|r^I = \alpha_i$ pour tout $I \in E_i$ et $|b_{I,i}|r^I = \beta_i$ pour tout $I \in F_i$; notons qu'on a alors $|f_i(\eta_r)| = \alpha_i/\beta_i$.

Au voisinage de η_r, le domaine U est défini par la conjonction d'inégalités $|f_i| \leqslant \alpha_i/\beta_i$. Soit s un n-uplet de nombres réels strictement positifs, et posons $t = sr^{-1}$. Si s est suffisamment proche de r le point η_s appartient à U si et seulement si $|f_i(\eta_s)| \leqslant \alpha_i/\beta_i$ pour tout i, ce qui se récrit $\max_{I\in E_i} t^I \leqslant \max_{I\in F_i} t^I$. Le cône rationnel C est donc décrit par la conjonction des inégalités $\max_{I\in E_i} t^I \leqslant \max_{I\in F_i} t^I$, pour i variant entre 1 et n.

On déduit par ailleurs de la description de (U, η_r) que

$$\widetilde{(U,\eta_r)} = \mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(\eta_r)}/\widetilde{k}} \left\{ \frac{\sum_{I\in E_i} \widetilde{a_{I,i}}\tau^I}{\sum_{I\in F_i} \widetilde{b_{I,i}}\tau^I} \right\}_{1\leqslant i\leqslant n} .$$

Il en résulte que η_h appartient à $\widetilde{(U,\eta_r)}$ si et seulement si $\max_{I\in E_i} h^I \leqslant \max_{I\in F_i} h^I$, c'est-à-dire si et seulement si $h \in C(H)$. □

12.10.3. — Soit K un corps gradué et soit L une extension graduée de K. Soit $f = (f_1, \dots, f_n)$ un élément de $(L^\times)^n$. Si $v \in \mathbf{P}_{L/K}$ nous écrirons $f_{\mathrm{trop}}(v)$ au lieu de $(v(f_1), \dots, v(f_n))$ et si D est un sous-foncteur définissable de Γ^n, nous écrirons « $f_{\mathrm{trop}}(v) \in D$ » pour signifier que $f_{\mathrm{trop}}(v)$ appartient à $D(H)$ où H est un objet de D dans lequel v prend ses valeurs (la validité cet énoncé est indépendante du choix de H). Et nous noterons $f_{\mathrm{trop}}^{-1}(D)$ l'ensemble des $v \in \mathbf{P}_{L/K}$ telles que $f_{\mathrm{trop}}(v) \in D$; c'est une partie constructible de $\mathbf{P}_{L/K}$. Par exemple si D est décrit par les inégalités $x_i \leqslant 1$ pour $i = 1, \dots n$ alors $f_{\mathrm{trop}}^{-1}(D)$ est égal à $\mathbf{P}_{L/K}\{f_1, \dots, f_n\}$. En général si D est décrit par une conjonction d'inégalités larges $f_{\mathrm{trop}}^{-1}(D)$ est un ouvert affine de $\mathbf{P}_{L/K}$, et si D est un cône rationnel c'est un ouvert quasi-compact de $\mathbf{P}_{L/K}$.

Soit $\mathscr{U}$ un ouvert quasi-compact de $\mathbf{P}_{L/K}$. D'après le théorème 10.5.7, il existe un cône rationnel C de $\mathbf{G}^m$ tel que pour tout $H \in \mathsf{D}$ et tout m-uplet $h = (h_1, \dots, h_m)$ d'éléments de H les assertions suivantes soient équivalentes :

(i) il existe $H' \in \mathsf{D}_H$ et une valuation $w \in \mathscr{U}$ à valeurs dans H' telle que $f_{i,\mathrm{trop}}(w_i) = h_i$ pour tout i ;

(ii) $h \in C(H)$.

Le cône C sera noté $f_{\mathrm{trop}}(\mathscr{U})$.

Lemme 12.10.4. — *Soit $K \hookrightarrow K(\tau_1, \dots, \tau_n)$ une extension transcendante pure de corps gradués (chaque τ_i étant homogène) et soit $\mathscr{U}$ un ouvert quasi-compact et non vide de $\mathbf{P}_{K(\tau)/K}$. Supposons que le cône rationnel $\tau_{\mathrm{trop}}(\mathscr{U})$ est purement de dimension n. Alors pour tout $H \in \mathsf{D}$ et tout $h \in \tau_{\mathrm{trop}}(\mathscr{U})(H)$ la valuation η_h de $K(\tau)$ appartient à $\mathscr{U}$.*

Démonstration. — Si $f = \sum a_I\tau_I / \sum b_I\tau_I$ est un élément de $K(\tau)^\times$, alors pour tout $H \in \mathsf{D}$ et tout $h \in H^n$ on a $f_{\mathrm{trop}}(\eta_h) = \max_{I,a_I\neq 0} h^I / \max_{I,b_I\neq 0} h^I$, si bien que η_h appartient à $\mathbf{P}_{K(\tau)/K}\{f\}$ si et seulement si $\max_{I,a_I\neq 0} h^I \leqslant \max_{I,b_I\leqslant 0} h^I$.

Il s'ensuit, l'ouvert $\mathscr{U}$ étant une combinaison booléenne positive de parties de la forme $\mathbf{P}_{K(\tau)/K}\{f\}$ avec $f \in K(\tau)^\times$, qu'il existe un cône rationnel D de Γ^n tel que pour tout $H \in \mathsf{D}$ et tout $h \in H^n$, la valuation η_h appartient à $\mathscr{U}$ si et seulement si h appartient à $D(H)$. Si c'est le cas on déduit du fait que $h_i = \tau_{i,\mathrm{trop}}(\eta_h)$ pour tout i

que $h \in \tau_{\mathrm{trop}}(\mathscr{U})(H)$. Par conséquent $D \subset \tau_{\mathrm{trop}}(\mathscr{U})$, et il reste à établir la réciproque. Autrement dit, nous voulons montrer que le sous-foncteur $E := \tau_{\mathrm{trop}}(\mathscr{U}) - D$ de Γ^n est vide.

Soit $H \in \mathsf{D}$ et soit $h = (h_1, \dots, h_m) \in E(H)$. Par définition, il existe une valuation u située sur $\mathscr{U}$ à valeurs dans un groupe abélien ordonné contenant H telle que $\tau_{\mathrm{trop}}(u) = h$ et telle que $u \neq \eta_h$. Il en résulte l'existence d'un polynôme $P = \sum a_I \tau^I \in K(\tau)^\times$ tel que $P_{\mathrm{trop}}(u) < \max_{I, a_I \neq 0} h^I$. Ceci entraîne l'existence de deux multi-indices I et J distincts tels que $a_I \neq 0$, $a_J \neq 0$ et $h^I = h^J$.

Soit $E_{I,J}$ le cône rationnel de Γ^n défini par l'égalité $x^I = x^J$. Par ce qui précède, pour tout $H \in \mathsf{D}$ et tout $h \in E(H)$, il existe deux indices I et J distincts tels que $h \in E_{I,J}(H)$. Par le théorème de compacité en théorie des modèles, E est contenue dans une réunion finie $\bigcup_\ell E_{I\ell,J\ell}$, laquelle est un cône rationnel de dimension $\leqslant n-1$ de Γ^n. En tant que sous-foncteur de $\tau_{\mathrm{trop}}(\mathscr{U})$, le foncteur E est le complémentaire de D et est donc défini par une combinaison booléenne positive d'inégalités strictes ; il est en conséquence purement de dimension n puisque c'est le cas de $\tau_{\mathrm{trop}}(\mathscr{U})$; étant par ailleurs contenu par ce qui précède dans un cône rationnel de dimension $n-1$, le foncteur E est vide. □

Proposition 12.10.5. — *Soit X un espace k-analytique compact de niveau n, soit x un point de X tel que $d_k(x) = n$ et soit $f\colon X \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$ un moment sur X. Il existe une partie squelettique Σ de X contenant x telle que les germes de cônes $f_{\mathrm{trop}}(X, x)$ et $f_{\mathrm{trop}}(\Sigma, x)$ coïncident.*

Démonstration. — Écrivons $f = (f_1, \dots, f_m)$ et posons $\varphi_i = \widetilde{f_i(x)}$ pour tout i. L'assertion à montrer est G-locale sur le germe (X, x), ce qui permet de supposer que X est affinoïde. Quitte à composer ensuite avec une projection convenable, on peut également étendre le moment donné f. On peut ainsi supposer que la famille (φ_i) contient une base de transcendance de $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ sur $\widetilde{k}$, c'est-à-dire que $x \in \Sigma_f$, et que l'ouvert affine $\widetilde{(X, x)}$ de $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}$ est de la forme $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}\{\varphi_i\}_{i \in I}$ pour un certain sous-ensemble I de $\{1, \dots, m\}$.

Soit P le cône rationnel $\varphi_{\mathrm{trop}}(\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}})$. Comme la famille (φ_i) contient une base de transcendance de $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ sur $\widetilde{k}$, le cône P est purement de dimension n (théorème 10.5.7 (1b)). Soit Q l'intersection de P et du cône rationnel de Γ^n défini par les inégalités $x_i \leqslant 1$ pour $i \in I$. Comme $\widetilde{(X, x)}$ est égal à $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}\{\varphi_i\}_{i \in I}$, on a $\widetilde{(X, x)} = \varphi_{\mathrm{trop}}^{-1}(Q)$ et $\varphi_{\mathrm{trop}}(\widetilde{(X, x)}) = Q$. Par conséquent, $f_{\mathrm{trop}}(X, x) = f_{\mathrm{trop}}(x) \cdot Q(\mathbf{R}_+^\times)$ (remarque 12.2.9).

Le cône rationnel P peut être décrit par une condition de la forme $\bigvee_j \bigwedge_\ell \psi_{j\ell} \leqslant 1$ où chaque $\psi_{j\ell}$ est un monôme en les x_i à exposants rationnels, avec coefficient 1. Pour tout j, notons C_j le sous-cône rationnel de P décrit par la condition $\bigwedge_\ell \psi_{j\ell} \leqslant 1$. On a $P = \bigcup_j C_j$; comme P est purement de dimension n on peut retirer de l'écriture tous les C_j de dimension $< n$, et donc supposer que $\dim C_j = n$ pour tout j. On a alors $Q = \bigcup_j Q \cap C_j$. Il suffit pour conclure de montrer que $f_{\mathrm{trop}}(\Sigma_f, x)$ contient $(Q(\mathbf{R}_+^\times), x)$, c'est-à-dire qu'il contient $((Q \cap C_j)(\mathbf{R}_+^\times), x)$ pour tout j. On fixe donc j ; on écrit C au lieu de C_j et l'on pose $D = Q \cap C$.

Posons $\mathscr{U} = \varphi_{\mathrm{trop}}^{-1}(C)$ et $\mathscr{V} = \varphi_{\mathrm{trop}}^{-1}(D)$; par construction, $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ sont deux ouverts quasi-compacts de $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}$, et $\mathscr{V} = \mathscr{U} \cap \widetilde{(X, x)}$. Notons aussi que comme $C \subset P$, on a $\varphi_{\mathrm{trop}}(\mathscr{U}) = C$.

L'égalité $\mathscr{V} = \mathscr{U} \cap \widetilde{(X,x)}$ entraîne que $\mathscr{V} = \widetilde{(V,x)}$ où (V,x) est le domaine $(f_{\mathrm{trop}}^{-1}(C),x)$ de (X,x). Quitte à renuméroter les f_i (et les φ_i) on peut supposer que la restriction à C de $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est injective. Notons C' et D' les images de C et D dans Γ^n par la projection sur les n premières coordonnées ; la projection en question induit par construction des bijections $C \simeq C'$ et $D \simeq D'$. Soit $\pi\colon (V,x) \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ le morphisme défini par les f_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$, et soit y l'image de x.

Posons $\varphi_{\leqslant n} = (\varphi_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. L'image de $\mathscr{U}$ par $\varphi_{\leqslant n,\mathrm{trop}}$ est égale à C', donc est de dimension n. Ceci entraîne que $\varphi_{\leqslant n}$ est de degré de transcendance au moins n sur $\widetilde{k}$, et donc exactement égal à n ; par conséquent, y appartient au squelette standard S_n de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$. Le corps gradué $\widetilde{\mathscr{H}(y)}$ est égal à $\widetilde{k}(\varphi_{\leqslant n})$.

Notons $\mathscr{U}'$ et $\mathscr{V}'$ les images de $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ dans $\mathbf{P}^{\widetilde{\mathscr{H}(y)}/\widetilde{k}}$; ce sont des ouverts quasi-compacts et non vides de $\mathbf{P}^{\widetilde{\mathscr{H}(y)}/\widetilde{k}}$ d'après le théorème 7.2.5 de [**52**] et l'on a $\mathscr{V}' \subset \mathscr{U}'$. Si v est un élément de $\mathscr{V}'$ alors $\varphi_{\leqslant n,\mathrm{trop}}(v)$ appartient à D'. Inversement, soit u un élément de $\mathscr{U}'$ tel que $\varphi_{\leqslant n,\mathrm{trop}}(u) \in D'$. Choisissons un antécédent ω de u sur $\mathscr{U}$. Par construction, $\varphi_{\mathrm{trop}}(\omega)$ appartient à l'image réciproque de D' sur C par la projection sur les n premières coordonnées, qui n'est autre que D puisque cette projection induit une bijection $C \simeq C'$; par conséquent ω appartient à $\varphi_{\mathrm{trop}}^{-1}(D)$, c'est-à-dire à $\mathscr{V}$ et u appartient donc à $\mathscr{V}'$. Il s'ensuit que $\mathscr{V}' = \mathscr{U}' \cap \varphi_{\leqslant n,\mathrm{trop}}^{-1}(D')$.

Soit (U',y) et (V',y) les germes de domaines analytiques de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ tels que $\widetilde{(U',y)} = \mathscr{U}'$ et $\widetilde{(V',y)} = \mathscr{V}'$.

Dans les constructions ci-dessus, les germes $(U,x),(V,x),(U',y)$ et (V',y) sont bien définis, mais leurs représentants U,V,U' et V' sont arbitraires. Nous allons expliquer pourquoi l'on peut choisir V et V' compacts et tels que π induise un morphisme surjectif et plat de V sur V'. On part pour ce faire de deux choix arbitraires de V et V' ; dans ce qui suit, « restreindre » V (resp. V') signifiera le remplacer par un voisinage analytique de x dans V (resp. de y dans V'), ce qui ne modifiera pas les germes en jeu. Comme $d_k(y) = \dim \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n = n$ et comme $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ est réduit, le morphisme $\pi\colon V \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ est plat en tout antécédent de y, et en particulier en x. Le lieu de platitude de π étant un ouvert (de Zariski) de V, on peut restreindre V de sorte que $\pi\colon V \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ soit plat. Le germe (V',y) est le plus petit germe de domaine par lequel $\pi|_{(V,x)}\colon (V,x) \to (\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n,y)$ se factorise (théorème 7.3.1 (1) de [**52**]). Puisque $\pi|_{(V,x)}$ se factorise par (V',y) on peut, quitte à restreindre V, supposer que V est compact et que $\pi(V) \subset V'$. Comme π est plat et que V est compact, l'image $\pi(V)$ est un domaine analytique compact de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ ([**52**], théorème 9.2.1). Le morphisme $\pi|_{(V,x)}$ se factorise alors par $(\pi(V),y)$; par minimalité de (V',y), il vient $(\pi(V),y) = (V',y)$. Quitte à remplacer V' par $\pi(V)$ on peut donc bien supposer que π induit un morphisme plat et surjectif de V sur V'.

Comme $\varphi_{\mathrm{trop}}(\mathscr{U}) = C$ on a $\varphi_{\leqslant n,\mathrm{trop}}(\mathscr{U}') = C'$. Comme C' est purement de dimension n, il résulte du lemme 12.10.4 que pour tout $H \in \mathsf{D}$ et tout $h \in H^n$, la valuation η_h de $\widetilde{\mathscr{H}(y)}$ appartient à $\mathscr{U}'$ si et seulement si $h \in C'(H)$. En vertu de lemme 12.10.2 on a alors $\mathrm{trop}(U' \cap S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n),y) = (\mathrm{trop}(y)\cdot C'(\mathbf{R}_+^\times),\mathrm{trop}(y))$.

Comme $\mathscr{V}' = \mathscr{U}' \cap \varphi_{\leqslant n,\mathrm{trop}}^{-1}(D')$, on a $(V',y) = (U',y) \cap f_{\mathrm{trop}}^{-1}(f_{\mathrm{trop}}(y)\cdot D'(\mathbf{R}_+^\times)$, si bien que $\mathrm{trop}(V' \cap S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n),y) = (\mathrm{trop}(y)\cdot D'(R_+^\times),\mathrm{trop}(y))$. Il existe donc un voisinage Ω' de $\mathrm{trop}(y)$ dans $\mathrm{trop}(y)\cdot D'(R_+^\times)$ qui est contenu dans $\mathrm{trop}(V' \cap S_n)$.

Soit Ω l'image réciproque de Ω' sur $f_{\mathrm{trop}}(x) \cdot D(\mathbf{R}_+^\times)$ par la projection sur les n premières coordonnées. Soit $t \in \Omega$ et soit t' son image dans Ω'. Le point t' appartient par construction à $\mathrm{trop}(V' \cap S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n))$. Soit $v' \in V' \cap S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n))$ un point tel que $\mathrm{trop}(v') = t'$. Comme $\pi(V) = V'$, il existe $v \in V$ tel que $\pi(v) = v'$. Par définition de Σ_f, cet ensemble contient $\pi^{-1}(S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n))$, de sorte que l'on a $v \in \Sigma_f$. Par ailleurs, $f_{\mathrm{trop}}(v) \in f_{\mathrm{trop}}(x) \cdot D(\mathbf{R}_+^n)$ et sa projection sur $(\mathbf{R}_+^\times)^n$ coïncide avec t' ; puisque cette projection est injective sur $f_{\mathrm{trop}}(x) \cdot D(\mathbf{R}_+^n)$, on a $f_{\mathrm{trop}}(v) = t$. □

Théorème 12.10.6. — *Soit X un espace k-analytique purement de dimension n, compact, et soit f un moment sur X. Considérons X comme un espace analytique de niveau n. Il existe une partie squelettique compacte Σ de X telle que $f_{\mathrm{trop}}(\Sigma) = f_{\mathrm{trop}}(X)$.*

Démonstration. — L'assertion est G-locale sur X ; on peut donc supposer que X est affinoïde. Soit $x \in X$; d'après la proposition 12.3.1, il existe un point y_x de X tel que $d_k(y_x) = n$ et tel que les germes $f_{\mathrm{trop}}(X, x)$ et $f_{\mathrm{trop}}(X, y_x)$ coïncident. En particulier, il existe un voisinage analytique compact V_x de x et un voisinage analytique compact V_x' de y_x tels que $f_{\mathrm{trop}}(V_x) = f_{\mathrm{trop}}(V_x')$. D'après la proposition 12.10.5, il existe une partie squelettique Σ_x contenant y_x telle que les germes $f_{\mathrm{trop}}(X, y_x)$ et $f_{\mathrm{trop}}(\Sigma_x, y_x)$ coïncident. Quitte à restreindre V_x' et à remplacer V_x par $V_x \cap f_{\mathrm{trop}}^{-1}(f_{\mathrm{trop}}(V_x'))$, on peut supposer que Σ_x est compact et que $f_{\mathrm{trop}}(V_x) = f_{\mathrm{trop}}(V_x') = f_{\mathrm{trop}}(\Sigma_x)$. Comme X est compact, il existe une partie finie S de X telle que la famille $(V_x)_{x \in S}$ recouvre X. Posons $\Sigma = \bigcup_{x \in S} \Sigma_x$; c'est une partie squelettique compacte de X et l'on a

$$f_{\mathrm{trop}}(X) = \bigcup_{x \in S} f_{\mathrm{trop}}(V_x) = \bigcup_{x \in S} f_{\mathrm{trop}}(\Sigma_x) = f_{\mathrm{trop}}(\Sigma).$$

Cela conclut la démonstration du théorème. □

Corollaire 12.10.7. — *Soit X un espace k-analytique topologiquement séparé et purement de dimension n ; considérons-le comme un espace analytique de niveau n. Alors X est riche (définition 5.2.7).*

Démonstration. — Soit V un domaine compact de X et soit f une carte G-tropicale déinie sur V ; il s'agit de démontrer qu'il existe une partie squelettique compacte Σ de V telle que $f(\Sigma) = f(V)$. Soit $(V_i)_{i \in I}$ un G-recouvrement fini de V par des domaines analytiques compacts tels que, pour tout $i \in I$, il existe $a_i \in \mathbf{Q}$ et un moment f_i sur V_i tel que $f|_{V_i} = a_i f_{i,\mathrm{trop}}$. D'après le théorème 12.10.6, il existe, pour tout $i \in I$, une partie squelettique compacte Σ_i de V_i telle que $f_{i,\mathrm{trop}}(\Sigma_i) = f_{i,\mathrm{trop}}(V_i)$. Soit Σ la réunion de Σ_i ; c'est une partie squelettique compacte de V et l'on a

$$f(\Sigma) = \bigcup_i f(\Sigma_i) = \bigcup_i a_i f_{i,\mathrm{trop}}(\Sigma_i) = \bigcup_i a_i f_{i,\mathrm{trop}}(V_i) = \bigcup_i f(V_i) = f(V).$$

Le corollaire est ainsi démontré. □

§ 12.11. LES ESPACES DE BERKOVICH SANS BORD SONT TRÈS RICHES

Théorème 12.11.1. — *Soit X un espace k-analytique sans bord, topologiquement séparé et purement de dimension n ; considérons-le comme un espace analytique de niveau n. Alors X est très riche (définition 5.2.7).*

Démonstration. — D'après le corollaire 12.10.7, l'espace X est riche ; il reste à démontrer que toute partie squelettique compacte Σ de X est contenue dans une partie squelettique purement de dimension n.

Soit x un point de Σ. Le germe (X, x) est sans bord, donc presque bon ; d'après la proposition 12.9.10, il existe un voisinage ouvert U_x de x et un moment $f_x : U_x \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ tel que $\Sigma \cap U_x \subset \Sigma_{f_x}$. Considérons un voisinage analytique compact V_x de x dans U_x. Démontrons que $x \in (\Sigma_{f_x} \cap V_x)^{(n)}$.

Comme Σ est compact, il existe une partie finie S de Σ telle que les $\mathring{V}_x$, pour $x \in S$, recouvrent Σ. Soit T la réunion des $(\Sigma_{f_s} \cap V_s)^{(n)}$, pour $s \in S$. c'est une partie squelettique compacte de X, purement de dimension n.

Démontrons que $\Sigma \subset \mathrm{T}$. Soit $x \in \Sigma$; soit $s \in S$ tel que $x \in \mathring{V}_s$. Comme X est sans bord, l'ouvert $\mathring{V}_s$ est sans bord, donc $\Sigma_{f_s} \cap \mathring{V}_s$ est purement de dimension n (corollaire 12.8.4), si bien que x appartient à $(\Sigma_{f_s} \cap V_s)^{(n)}$. A fortiori, $x \in \mathrm{T}$. □

Remarque 12.11.2. — On ne peut pas, en général, enlever l'hypothèse que X est sans bord. Supposons par exemple qu'il existe $r \notin |k^\times|^{\mathbf{Q}}$ et considérons le domaine analytique de $\mathbf{A}_k^1$ défini par $|T| = r$. C'est un espace k-analytique de dimension 1, réduit au singleton $\{\eta_r\}$, qui est aussi son bord. Il ne contient aucun squelette de dimension 1, et n'est donc pas très riche.

Remarque 12.11.3. — La structure des courbes k-analytiques (pour laquelle nous renvoyons au chapitre 4 de **[8]**, et à la présentation plus générale de **[57]**) entraîne que toute courbe k-analytique ne comportant aucun point de type (3) isolé est très riche. En effet, soit X une telle courbe et soit $x \in X$ un point tel que $d_k(x) = 1$. Cela entraîne que X est de type (2) ou (3). Si x est de type (2), il existe une branche aboutissant à x ; il en est de même si x est de type (3) puisque, par hypothèse, il n'est pas isolé.

En particulier, pour tout $r > 0$, le disque de rayon r de $\mathbf{A}_k^1$ est très riche.

Remarque 12.11.4. — Nous nous attendons à ce que le polydisque unité de $\mathbf{A}_k^n$ soit très riche.

En revanche, si $r \notin |k^\times|\mathbf{Q}$, le bidisque X de birayon $(r, 1/r)$ n'est pas très riche. Considérons en effet l'ouvert U de X défini par $|T_1T_2 - 1| < 1$; nous allons démontrer qu'il est non vide et contenu dans la fibre de la première projection en η_r, qui est une courbe $\mathscr{H}(\eta_r)$-analytique, et ne contient donc aucune partie squelettique de dimension 2.

Soit $x \in U$. Comme $|T_1(x)T_2(x) - 1| < 1$, on a $|T_1(x)||T_2(x)| = 1$; par définition de X, on a $|T_1(x)| \leqslant r$ et $|T_2(x)| \leqslant 1/r$, si bien que $|T_1(x) = r|$. Alors $y = p_1(x)$ est un point de $\mathbf{A}_k^1$ tel que $|T_1(y)| = r$; comme $r \notin |k^\times|^{\mathbf{Q}}$, on a $y = \eta_r$.

Il reste à vérifier que U n'est pas vide. Mais $p_1^{-1}(\eta_r)$ est le domaine de $\mathbf{A}^1_{\mathscr{H}(\eta_r)}$, de coordonnée T_2, défini par $|T_2| \leqslant 1/r$. Le point $\mathscr{H}(\eta_r)$-rationnel de ce domaine défini par $T_2 = T_1(\eta_r)^{-1}$ appartient à U.

CHAPITRE 13

COMPLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

---

§ 13.1. ANNEAUX G-LOCAUX

13.1.1. — Soit X un espace k-analytique et soit x un point de X. Nous avons défini plus haut la dimension centrale du germe (X, x) (11.5.5). Celle-ci possède une variante G-topologique : la dimension centrale du G-germe (X_{G}, x), notée $\dim_{\mathrm{c}}(X_{\mathrm{G}}, x)$, et définie comme le minimum des dimensions de $\overline{\{x\}}^{V_{\mathrm{Zar}}}$ lorsque V parcourt l'ensemble des domaines analytiques de X contenant x.

On a de manière évidente

$$d_k(x) \leqslant \dim_{\mathrm{c}}(X_{\mathrm{G}}, x) \leqslant \dim \overline{\{x\}}^{X_{\mathrm{Zar}}} \leqslant \dim_x X \ ;$$

en particulier $\dim_{\mathrm{c}}(X_{\mathrm{G}}, x) = \dim_x X$ dès que $d_k(x) = n$.

Soit V un domaine analytique de X contenant x. L'ensemble des domaines analytiques de V contenant x est cofinal dans l'ensemble des domaines analytiques de X contenant x ; par conséquent $\dim_{\mathrm{c}}(V_{\mathrm{G}}, x) = \dim_{\mathrm{c}}(X_{\mathrm{G}}, x)$.

Soit Z un sous-espace analytique fermé de X contenant x. L'ensemble des domaines analytiques de Z contenant x de la forme $V \cap Z$, où V est un domaine analytique de X contenant x, est cofinal dans l'ensemble des domaines analytiques de X contenant x. Par conséquent Par conséquent $\dim_{\mathrm{c}}(Z_{\mathrm{G}}, x)$ est le minimum des $\dim \overline{\{x\}}^{(V\cap Z)_{\mathrm{Zar}}}$ où V parcourt l'ensemble des domaines analytiques de X contenant x. Mais pour un tel V on a $\overline{\{x\}}^{(V\cap Z)_{\mathrm{Zar}}} = \overline{\{x\}}^{V_{\mathrm{Zar}}}$, si bien que $\dim_{\mathrm{c}}(Z_{\mathrm{G}}, x) = \dim_{\mathrm{c}}(X_{\mathrm{G}}, x)$.

13.1.2. — Nous noterons X^{gen} l'ensemble des points x de X tels que $\dim_{\mathrm{c}}(X_{\mathrm{G}}, x) = \dim_x X$. Cet ensemble contient $\{x \in X, d_k(x) = \dim_x X\}$.

Si V est un domaine analytique de X on a $\dim_{\mathrm{c}}(V_{\mathrm{G}}, x) = \dim_{\mathrm{c}}(X_{\mathrm{G}}, x)$ et $\dim_x V = \dim_x X$ pour tout $x \in V$, si bien que $V^{\mathrm{gen}} = X^{\mathrm{gen}} \cap V$.

Si Z est un sous-espace analytique fermé de X on a $\dim_{\mathrm{c}}(Z_{\mathrm{G}}, x) = \dim_{\mathrm{c}}(X_{\mathrm{G}}, x)$ pour tout $x \in Z$, si bien que Z^{gen} est l'ensemble des points x de Z tels que $\dim_{\mathrm{c}}(Z_{\mathrm{G}}, x) = \dim_x Z$; cet ensemble ne dépend que du fermé de Zariski sous-jacent à Z, et pas de la structure de sous-espace analytique fermé choisie sur Z.

On déduit du lemme 11.2.6 que $x \in X^{\mathrm{gen}}$ si et seulement si $\overline{\{x\}}^{V_{\mathrm{Zar}}}$ est une composante irréductible de V pour tout domaine analytique V de X contenant x. L'appartenance à X^{gen} est donc une propriété de généricité universelle pour la topologie de Zariski, d'où la notation choisie.

Soit (X_i)la famille des composantes irréductibles de X ; pour tout i, soit U_i l'ouvert de Zariski $X_i - \bigcup_{j\neq i} X_j$ de X, et soit U la réunion des U_i (qui sont deux à deux disjoints). Si $x \in X^{\mathrm{gen}}$ alors $\overline{\{x\}}^{X_{\mathrm{Zar}}}$ est une composante irréductible de X, et c'est la seule composante irréductible de X contenant x (lemme 11.2.6). Il s'ensuit que $X^{\mathrm{gen}} = U^{\mathrm{gen}} = \bigcup U_i^{\mathrm{gen}}$ (cette dernière union étant disjointe). Pour tout i, l'ouvert non vide U_i de l'espace irréductible X_i est lui-même irréductible ([**53**], lemme 1.11), et U_i^{gen} est non vide : il contient par exemple tous les points x de X_i tels que $d_k(x) = \dim X_i$. Notons aussi que $U_i^{\mathrm{gen}} = X_i^{\mathrm{gen}}$ puisque tout point de X_i^{gen} est dense dans X_i pour la topologie de Zariski.

Définition 13.1.3. — *Soit X un espace k-analytique et soit x un point de X. L'anneau G-local de X en x est la colimite des k-algèbres $\mathscr{O}_X(V)$ où V parcourt l'ensemble des domaines analytiques de X contenant x. On le note $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}$.*

C'est un anneau local hensélien et excellent ([**55**], proposition 6.7, (1)).

Définissons la dimension centrale du germe (X_{G}, x) comme le minimum des dimensions de $\overline{\{x\}}^{V_{\mathrm{Zar}}}$ lorsque V parcourt l'ensemble des domaines analytiques de X contenant x ; on la note $\dim_{\mathrm{c}}(X_{\mathrm{G}}, x)$. Alors, on a

$$\dim_{\mathrm{c}}(X_{\mathrm{G}}, x) + \dim_{\mathrm{Krull}}(\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}) = \dim_x X$$

([**55**], proposition 6.7, (1)). En particulier, l'anneau local $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}$ est artinien si et seulement si $x \in X^{\mathrm{gen}}$.

Pour tout bon domaine analytique V de X contenant x, le morphisme naturel de $\mathscr{O}_{V,x}$ vers $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}$ est régulier ([**55**], proposition 6.7, (3)).

13.1.4. — Soit Y un espace analytique défini sur une extension de k, soit f un k-morphisme de Y vers X et soit y un antécédent de X. Le morphisme $f^*\colon \mathscr{O}_X \to f_*\mathscr{O}_Y$ induit un morphisme de $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}$ vers $\mathscr{O}_{Y_{\mathrm{G}},y}$. Si Y est k-analytique, le morphisme f est plat en y si et seulement si $\mathscr{O}_{Y_{\mathrm{G}},y}$ est une $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}$-algèbre plate ([**55**], théorème 7.5).

13.1.5. — Soit K une extension complète de k, soit y un point de X_K et soit x son image sur X. L'anneau $\mathscr{O}_{X_{K,\mathrm{G}},y}$ est alors plat sur $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}$. En effet, soit V un bon domaine analytique de X contenant x. Alors $\mathscr{O}_{V_K,y}$ est plat sur $\mathscr{O}_{V,x}$, si bien que par composition $\mathscr{O}_{X_{K,\mathrm{G}},x}$ est plats sur $\mathscr{O}_{V,x}$. L'énoncé voulu s'obtient en passant à la colimite sur V.

13.1.6. — Soit X un espace k-analytique et soit F un faisceau cohérent sur X. Nous noterons $F_{X_{\mathrm{G}},x}$ la colimite des $F(V)$ où V parcourt l'ensemble des domaines analytiques de X contenant x. C'est un $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}$-module de type fini, qui s'identifie à $\mathscr{O}_{V_{\mathrm{G}},x} \otimes_{\mathscr{O}_{V,x}} F_{V,x}$.

Soit P et Q deux propriétés algébriques comme en 11.3.1. Puisque le morphisme naturel de $\mathscr{O}_{V,x}$ vers $\mathscr{O}_{V_{\mathrm{G}},x}$ est régulier, l'espace X (*resp.* le faisceau cohérent $\mathscr{F}$) satisfait P (*resp.* Q) en x si et seulement si l'anneau local noethérien $\mathscr{O}_{V_{\mathrm{G}},x}$ (*resp.* le $\mathscr{O}_{V_{\mathrm{G}},x}$-module de type fini $\mathscr{F}_{V_{\mathrm{G}},x}$) satisfait P (*resp.* Q).

Lemme 13.1.7. — *Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme fini et soit x un point de X possédant un unique antécédent y sur Y. Soit V un domaine analytique de Y contenant y. Il existe un domaine affinoïde U de X contenant x tel que $f^{-1}(U) \subset V$.*

Démonstration. — Pour démontrer le lemme, on peut remplacer X par n'importe lequel de ses domaines analytiques contenant x, ce qui permet de le supposer séparé. Choisissons un pré-modèle X de $\widetilde{(X,x)}$ de dimension égale à $d_k(x)$. Comme f est sans bord, X est aussi un pré-modèle de $\widetilde{(Y,y)}$. Il existe alors un pré-modèle Y de $\widetilde{(Y,y)}$, propre et dominant sur X, et un ouvert de Zariski V de Y qui est un pré-modèle de $\widetilde{(V,y)}$. Puisque f est fini, on a $d_k(y) = d_k(x)$; on en déduit l'égalité $\dim(\mathsf{Y}) = \dim(\mathsf{X}) = d_k(x)$. Le complémentaire Z de V dans Y est un fermé de Zariski strict de Y et est donc de dimension $< d_k(x)$. Par propreté, son image T sur X est un fermé de Zariski, lui aussi de dimension $< d_k(x)$; en particulier, il est distinct de X. Soit U un ouvert affine non vide de X ne rencontrant pas T et soit W son image réciproque sur Y. Par construction, $\mathsf{W} \subset \mathsf{V}$. Soit U un domaine affinoïde de X contenant x tel que $\widetilde{(U,x)} = \mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)/k}}\{\mathsf{U}\}$. L'image réciproque W de U sur Y vérifie l'égalité $\widetilde{(W,x)} = \mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(y)/k}}\{\mathsf{W}\}$, si bien qu'on a une inclusion de germes $(W,y) \subset (V,y)$. Comme le morphisme de W dans U induit par f est topologiquement propre, il en résulte qu'il existe un voisinage affinoïde de x dans U dont l'image réciproque par f est contenue dans V. □

Corollaire 13.1.8. — *Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces k-analytiques, soit y un point en lequel f est quasi-fini et soit x l'image de y sur X. Il existe un domaine affinoïde U de X contenant x et un domaine affinoïde V de $f^{-1}(U)$ contenant y qui est fini sur U.*

Démonstration. — Pour démontrer le corollaire, on peut remplacer (X,Y) par n'importe lequel couple (X',Y'), où X' est un domaine analytique de X contenant x et Y' est un domaine analytique de $f^{-1}(X')$ contenant Y. Ceci permet de se ramener au cas où X et Y sont affinoïdes. D'après la version analytique du *Main Theorem* de Zariski ([**48**], théorème 3.2), on peut alors supposer, quitte à remplacer X et Y par des voisinages affinoïdes convenables de x et y respectivement, qu'il existe une factorisation

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \overset{f}{\frown} & & & \\ Y & \xrightarrow{g} & W & \hookrightarrow & T & \xrightarrow{h} & X \end{array}$$

de f, où h est étale, W est un domaine affinoïde de T, où g est fini. Soit t l'image de y sur T. Il existe un voisinage affinoïde T' de t dans T fini étale sur un voisinage affinoïde X' de x dans X, et tel que t soit le seul antécédent de x sur T'. Posons $W' = W \cap T'$ et $Y' = Y \times_T T'$. On obtient par changement de base le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \overset{f'}{\frown} & & & \\ Y' & \xrightarrow{g'} & W' & \hookrightarrow & T' & \xrightarrow{h'} & X' \end{array}$$

où g' est fini et où h' est fini étale. Le lemme précédent assure l'existence d'un domaine affinoïde U de X' contenant x tel que $(h')^{-1}(U) \subset W'$. Posons $V = (f')^{-1}(U)$. Il résulte de l'inclusion $(h')^{-1}(U) \subset W'$ et de la finitude de g' que V est un domaine affinoïde de Y' (et donc de Y) fini sur $(h')^{-1}(U)$. Par finitude de h', le domaine V est alors fini sur U, et il contient y par construction. □

Proposition 13.1.9. — *Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces k-analytiques. Soit y un point de Y et soit x son image sur X. Supposons que f est quasi-fini en y.*

a) *On a $\dim_{\mathrm{c}}(X_{\mathrm{G}}, x) = \dim_{\mathrm{c}}(Y_{\mathrm{G}}, y)$.*

b) *Le morphisme f^* de $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}$ vers $\mathscr{O}_{Y_{\mathrm{G}},y}$ est fini.*

c) *Si f est fini en y et si les germes (X, x) et (Y, y) sont bons, le morphisme canonique*

$$\mathscr{O}_{Y,y} \otimes_{\mathscr{O}_{X,x}} \mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x} \to \mathscr{O}_{Y_{\mathrm{G}},y}$$

est un isomorphisme.

d) *Pour tout $x \in X$, on a $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{red,G}},x} = (\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x})_{\mathrm{red}}$.*

Démonstration. — Par définition de la dimension centrale et des anneaux G-locaux, on peut pour démontrer *a*) et *b*), remplacer X par un domaine affinoïde V de X contenant x et Y par un domaine affinoïde de $Y \times_X U$ contenant y. Compte tenu du corollaire 13.1.8, on peut supposer que X et Y sont affinoïdes, que f est fini et que y est le seul antécédent de x sur Y.

De même, pour démontrer *c*), on peut remplacer remplacer X un voisinage affinoïde U de x dans X, et Y par un voisinage affinoïde de y dans $Y \times_X U$. On peut donc également supposer que X et Y sont affinoïdes, que f est fini et que y est le seul antécédent de x sur Y.

L'ensemble des domaines affinoïdes de Y de la forme $f^{-1}(U)$, où U est un domaine affinoïde de X contenant x, est cofinal dans l'ensemble des domaines analytiques de Y contenant y (lemme 13.1.7). En conséquence l'anneau local $\mathscr{O}_{Y_{\mathrm{G}},y}$ est la colimite des anneaux $\mathscr{O}_Y(f^{-1}(U))$ où U parcourt l'ensemble des domaines affinoïdes de X contenant x. Pour un tel U, on a l'égalité $\mathscr{O}_Y(f^{-1}(U)) = \mathscr{O}_Y(Y) \otimes_{\mathscr{O}_X(X)} \mathscr{O}_X(U)$, si bien que $\mathscr{O}_{Y_{\mathrm{G}},y}$ s'identifie à $\mathscr{O}_Y(Y) \otimes_{\mathscr{O}_X(X)} \mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}$, d'où *b*). Alors,

$$\mathscr{O}_{Y,y} \otimes_{\mathscr{O}_{X,x}} \mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x} = \mathscr{O}_Y(Y) \otimes_{\mathscr{O}_X(X)} \mathscr{O}_{X,x} \otimes_{\mathscr{O}_{X,x}} \mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x} = \mathscr{O}_Y(Y) \otimes_{\mathscr{O}_X(X)} \mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x} = \mathscr{O}_{Y_{\mathrm{G}},y},$$

ce qui démontre *c*).

Prouvons *a*). Soit U un domaine analytique de X contenant x tel que l'adhérence de Zariski Z de x dans U soit de dimension $\dim_{\mathrm{c}}(X_{\mathrm{G}}, x)$. Alors $f^{-1}(Z)$ est un fermé de Zariski de $f^{-1}(U)$ contenant y et fini sur Z. Alors $f(f^{-1}(Z))$ est un fermé de Zariski de U qui contient x ; il est donc égal à Z. Par suite, la dimension de $f^{-1}(Z)$ est donc égale à $\dim Z$, si bien que $\dim_{\mathrm{c}}(Y_{\mathrm{G}}, y) \leqslant \dim_{\mathrm{c}}(X_{\mathrm{G}}, x)$.

Réciproquement, soit V un domaine analytique de Y contenant y tel que l'adhérence de Zariski T de y dans V soit de dimension $\dim_{\mathrm{c}}(Y_{\mathrm{G}}, y)$. Par le lemme 13.1.7 il existe un domaine affinoïde U de X contenant x tel que $f^{-1}(U) \subset V$. L'intersection $T \cap f^{-1}(U)$ est encore de dimension $\dim_{\mathrm{c}}(Y_{\mathrm{G}}, y)$ et son image par le morphisme fini f est un fermé de Zariski de U contenant x et de dimension $\dim_{\mathrm{c}}(Y_{\mathrm{G}}, y)$. Il vient $\dim_{\mathrm{c}}(X_{\mathrm{G}}, x) \leqslant \dim_{\mathrm{c}}(Y_{\mathrm{G}}, y)$, ce qui achève la démonstration.

Démontrons enfin l'assertion *d*). Soit $\mathscr{N}$ le nilradical de $\mathscr{O}_X$, de sorte que $X_{\mathrm{red}} = V(\mathscr{N})$. D'après *c*), on a $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{red,G}},x} = \mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}/\mathscr{N}\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}$. L'idéal $\mathscr{N}\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}$ est nilpotent ; d'autre part, comme les domaines analytiques d'un espace réduit sont réduits, l'anneau $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{red,G}},x}$ est réduit. Il en résulte que $\mathscr{N}\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}$ est le nilradical de $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}$, d'où l'assertion. □

Corollaire 13.1.10. — *Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme fini d'espaces k-analytiques, soit x un point de X et soit $y_1, \ldots, y_r$ ses antécédents sur Y. Soit F un faisceau cohérent*

sur Y. On a alors

$$(f_*F)_{X_{\mathrm{G}},x} = \prod_{i=1}^{r} F_{Y_{\mathrm{G}},y_i}.$$

Démonstration. — Soit V un bon domaine analytique de X contenant x ; posons $W = f^{-1}(V)$. Notons H la restriction de G à W ; par un léger abus, notons f_*H l'image directe de H sous le morphisme fini de W vers V induit par f. Remarquons que $f_*H = (f_*G)|_V$. On a

$$\begin{aligned}(f_*G)_{X_{\mathrm{G}},x} &= (f_*H)_{V,x} \otimes_{\mathscr{O}_{V,x}} \mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x} \\ &= (\prod_{i=1}^{r} H_{W,y_i}) \otimes_{\mathscr{O}_{V,x}} \mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x} \\ &= \prod_{i=1}^{r} (H_{W,y_i} \otimes_{\mathscr{O}_{V,x}} \mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}) \\ &= \prod_{i=1}^{r} G_{Y_{\mathrm{G}},y_i},\end{aligned}$$

où la deuxième égalité provient de l'analogue du corollaire pour les anneaux locaux classiques (voir par exemple le lemme 4.1.15 de [**52**]) et la dernière de la proposition 13.1.9 *c*).

□

§ 13.2. LONGUEURS ET MULTIPLICITÉS GÉNÉRIQUES

Lemme 13.2.1. — *Soit A un anneau local artinien d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et soit B une A-algèbre locale artinienne plate et telle que $\mathfrak{m}B$ soit l'idéal maximal de B. Soit M un A-module de type fini. On a l'égalité*

$$\ell_B(B \otimes_A M) = \ell_A(M).$$

Démonstration. — Soit $\{0 = M_0 \subset M_1 \ldots \subset M_{ell_A(M)} = M$ une filtration de M telle que le $A-module$ M_{i+1}/M_i soit isomorphe à $A/\mathfrak{m}$. Par platitude de B sur A cette filtration induit une filtration $\{0 = B \otimes_A M_0 \subset B \otimes_A M_1 \subset \ldots \subset B \otimes_A M_{\ell_A(M)}$ de $B \otimes_A \ell_A(M)$, dont les quotients successifs sont tous isomorphes comme B-modules à $B/\mathfrak{m}B$, qui est par hypothèse le corps résiduel de B. En conséquence, $\ell_B(B \otimes_A M) = \ell_A(M)$. □

Corollaire 13.2.2. — *Soit A un anneau local artinien d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et soit B une A-algèbre locale artinienne telle que le morphisme structural de A dans B soit régulier. Soit M un A-module de type fini. On a l'égalité*

$$\ell_B(B \otimes_A M) = \ell_A(M).$$

Démonstration. — Comme le morphisme de A vers B est régulier, la $(A/\mathfrak{m})$-algèbre artinienne $B/\mathfrak{m}B$ est géométriquement régulière, et a fortiori réduite. C'est donc un corps, ce qui signifie que $\mathfrak{m}B$ est l'idéal maximal de B. On conclut par une application directe du lemme précédent. □

13.2.3. — Soit X un espace k-analytique. Soit x un point de X^{gen}. L'anneau local $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}$ est artinien, ainsi que l'anneau local $\mathscr{O}_{V,x}$ pour tout bon domaine analytique de X contenant x (puisque $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}$ est plat sur $\mathscr{O}_{V,x}$). Si F est un faisceau cohérent sur X nous noterons $\ell_{X_{\mathrm{G}},x}(F)$ la longueur du $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}$-module de type fini $F_{X_{\mathrm{G}},x}$. Si V est un bon domaine analytique de X contenant x nous noterons $\ell_{V,x}$ la longueur du $\mathscr{O}_{V,x}$-module de type fini $F_{V,x}$.

Proposition 13.2.4. — *Soit X un espace k-analytique et soit F un faisceau cohérent sur X. Soit (X_i) la famille des composantes irréductibles de X et pour tout i, soit U_i l'ouvert de Zariski $X_i - \bigcup_{j\neq i} X_j$ de X.*

a) *Pour tout i, l'application $x \mapsto \ell_{X_{\mathrm{G}},x}(F)$ est constante sur U_i^{gen}.*

b) *Pour tout $x \in X^{\mathrm{gen}}$ et tout bon domaine analytique V de X contenant x on a l'égalité $\ell_{X_{\mathrm{G}},x}(F) = \ell_{V,x}(F)$.*

Rappelons que les U_i sont irréductibles, que les U_i^{gen} sont non vides, deux à deux disjoints, et qu'ils recouvrent X^{gen} (13.1.2).

Démonstration. — Montrons tout d'abord *a*). Fixons i. On peut pour alléger les notations remplacer X par U_i, c'est-à-dire supposer X irréductible. Il s'agit alors de montrer que l'application $x \mapsto \ell_{X_{\mathrm{G}},x}(F)$ de X^{gen} dans $\mathbf{N}$ est constante. Notons que comme X est irréductible, tout point de X^{gen} est dense dans X pour la topologie de Zariski.

Soit I le faisceau des fonctions localement nilpotentes sur X. Faisons une remarque générale. Soit $x \in X^{\mathrm{gen}}$. L'anneau local artinien $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}/I\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}$ est égal à $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{red,G}},x}$, et est donc réduit. C'est en conséquence un corps, si bien que $I\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}$ est l'idéal maximal de $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}$.

Fixons maintenant $x_0 \in X^{\mathrm{gen}}$. Comme $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x_0}$ est noethérien, il existe n tel que $I^n\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x_0} = 0$. Pour tout i entre 0 et $n-1$, notons r_i la dimension du $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x_0}/I\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x_0}$-espace vectoriel $I^i\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x_0}/I^{i+1}F_{X_{\mathrm{G}},x_0}$.

Soit U le plus grand ouvert de X au-dessus duquel I^n est nul et chacun des $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{red,G}},x}$-modules $I^iF/I^{i+1}\mathscr{O}_X$ est localement libre de rang r_i. C'est un ouvert de Zariski de X, non vide puisqu'il contient x_0 par construction ; par conséquent, $X^{\mathrm{gen}} \subset U$. Soit x un point de X^{gen}. Puisque $x \in U$, on dispose d'une filtration

$$0 = I^nF_{X_{\mathrm{G}},x} \subset I^{n-1}F_{X_{\mathrm{G}},x} \subset \ldots \subset IF_{X_{\mathrm{G}},x} \subset IF_{X_{\mathrm{G}},x},$$

dont le i-ème quotient $\mathscr{I}^iF_{X_{\mathrm{G}},x}/\mathscr{I}^{i+1}F_{X_{\mathrm{G}},x}$ est un espace vectoriel de dimension r_i sur le corps résiduel $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}/I\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}$. Il s'ensuit que $\ell_{X_{\mathrm{G}},x}$ est égal à $\sum_i r_i$ pour tout $x \in X^{\mathrm{gen}}$, ce qui termine la preuve de *a*).

L'assertion *b*) résulte quant à elle du fait que le morphisme de $\mathscr{O}_{V,x}$ vers $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}$ est géométriquement régulier, et du corollaire 13.2.2. □

Définition 13.2.5. — *On conserve les notations de la proposition 13.2.4. La valeur constante de la fonction $x \mapsto \ell_{X_{\mathrm{G}},x}(F)$ sur l'ensemble non vide U_i^{gen} sera appelé la longueur générique de F le long de X_i. Si $F = \mathscr{O}_X$, nous dirons que c'est la multiplicité générique de X le long de X_i.*

Proposition 13.2.6. — *On conserve les notations de la proposition 13.2.4. Soit V un domaine analytique de X, soit W une composante irréductible de V et soit soit i l'unique indice tel que $W \subset X_i$. La multiplicité générique de $F|_V$ le long de W est égale à la multiplicité de F le long de X_i.*

Démonstration. — En effet, soit $x \in V^{\mathrm{gen}} \cap W$. Alors, $x \in U_i^{\mathrm{gen}}$. Par définition des anneaux G-locaux, $\mathscr{O}_{V_G,x}$ s'identifie à $\mathscr{O}_{X_G,x}$ de sorte que $\ell_{V_G,x}(F) = \ell_{X_G,x}$ pour tout point $x \in V$. La proposition en découle. □

Lemme 13.2.7 **(Principe GAGA pour les longueurs génériques)**
Soit $\mathscr{X}$ un schéma localement de type fini sur une algèbre affinoïde A, soit $\mathscr{Z}$ une composante irréductible de $\mathscr{X}$ et soit ζ son point générique. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur $\mathscr{X}$.

a) *La longueur générique de $\mathscr{F}^{\mathrm{an}}$ le long de $\mathscr{Z}^{\mathrm{an}}$ est égale à la longueur générique de $\mathscr{F}$ le long de $\mathscr{Z}$, c'est-à-dire à la longueur du $\mathscr{O}_{\mathscr{Z},\zeta}$-module de type fini $\mathscr{F}_\zeta$.*
b) *La multiplicité générique de $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ le long de $\mathscr{Z}^{\mathrm{an}}$ est égale à la multiplicité générique de $\mathscr{X}$ le long de $\mathscr{Z}$, c'est-à-dire à la longueur de l'anneau local artinien $\mathscr{O}_{\mathscr{Z},\zeta}$.*

Démonstration. — Choisissons $z \in (\mathscr{Z}^{\mathrm{an}})^{\mathrm{gen}}$. Alors z est Zariski-dense dans $\mathscr{Z}^{\mathrm{an}}$, si bien que l'image de z sur $\mathscr{Z}$ est égale à ζ. Les deux morphismes d'anneaux naturels de $\mathscr{O}_{\mathscr{Z},\zeta}$ vers $\mathscr{O}_{\mathscr{Z}^{\mathrm{an}},z}$ et de $\mathscr{O}_{\mathscr{Z}^{\mathrm{an}},z}$ vers $\mathscr{O}_{\mathscr{Z}^{\mathrm{an}}_{\mathrm{G}},z}$ sont réguliers, si bien que leur composée l'est aussi. L'assertion *a*) découle alors du corollaire 13.2.2 ; la'assertion *b*) est simplement l'assertion *a*) dans le cas particulier où $\mathscr{F} = \mathscr{O}_{\mathscr{X}}$. □

Lemme 13.2.8 **(Longueur générique et extension des scalaires)**
Soit X un espace k-analytique et soit K une extension complète de k. Soit F un faisceau cohérent sur X. Soit Z une composante irréductible de X, soit ℓ la longueur générique de X le long de Z, soit ℓ_K la longueur générique de F_K le long de Z_K, et soit μ la multiplicité générique de $X_{\mathrm{red},K}$ le long de Z_K. On a alors $\ell_K = \mu\ell$.

Démonstration. — Choisissons un point y sur $Z_K^{\mathrm{gen}} \subset X_K^{\mathrm{gen}}$ dont on note x l'image sur X ; par construction, $x \in Z$. L'anneau local $\mathscr{O}_{X_{K,\mathrm{G}},y}$ est artinien car $y \in X_K^{\mathrm{gen}}$, et il est plat sur $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}$ (13.1.5) ; ce dernier est donc également artinien, ce qui montre que x appartient à X^{gen}, et donc à Z^{gen} car $x \in Z$.

Pour alléger les notations posons $A = \mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}$, $B = \mathscr{O}_{X_{K,\mathrm{G}},y}$ et $M = F_{X_{\mathrm{G}},x}$. On note $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A et $\kappa = A/\mathfrak{m}$ son corps résiduel. Enfin on pose $B' = B/\mathfrak{m}B = \kappa \otimes_A B$. Remarquons que $\kappa = \mathscr{O}_{X_{\mathrm{red},\mathrm{G}},x}$ et $B' = \mathscr{O}_{X_{\mathrm{red},K,\mathrm{G}},y}$ (proposition 13.1.9 *d*) et *c*)).

Par définition de ℓ il existe une filtration

$$\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_\ell = M$$

du A-module M dont les quotients successifs sont A-isomorphes à κ. Comme B est plat sur A, cette filtration en induit une

$$\{0\} = B \otimes_A M_0 \subset B \otimes_A M_1 \subset \ldots \subset B \otimes_A M_\ell = B \otimes_A M$$

dans la catégorie des B-modules dont les quotients successifs sont tous B-isomorphes à B'. Il vient

$$\ell_K = \ell_B(B \otimes_A M) = \ell \cdot \ell_B(B') = \ell \cdot \ell_{B'}(B') = \ell\mu. \qquad \square$$

§ 13.3. DEGRÉ ET DEGRÉ CALIBRÉ D'UN MORPHISME QUASI-FINI

13.3.1. — Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces k-analytiques. Soit $y \in Y$. Si $\dim_y(f^{-1}(f(y)) > 0$, on pose $\deg^y(f) = +\infty$. Sinon, le point y est isolé dans sa fibre $f^{-1}(f(y))$, l'anneau local de $f^{-1}(f(y))$ en y est une $\mathscr{H}(f(y))$-algèbre de dimension finie et on note $\deg^y(f)$ sa dimension.

Lorsque f est fini et plat en y, cet entier $\deg^y(f)$ coïncide avec l'entier $\deg^y(f)$ défini en 11.6.3.

Nous dirons que $\deg^y(f)$ est le degré de f en y.

Soit V un domaine analytique de Y contenant y et soit U un domaine analytique de X tel que $f(V) \subset U$; soit $g\colon V \to U$ le morphisme déduit de f. Pour tout $y \in V$, on a $\deg^y(f) = \deg^y(g)$, car pour tout $y \in V$ d'image $x \in X$, les anneaux locaux en y de $f^{-1}(f(y))$ et de $g^{-1}(g(y))$ coïncident.

Soit Z un sous-espace analytique fermé de X contenant x et soit $g\colon Y \times_X Z \to Z$ le morphisme déduit de f par changement de base. Comme les espaces $\mathscr{H}(x)$-analytiques $f^{-1}(x)$ et $g^{-1}(x)$ coïncident, on a $\deg^y(f) = \deg^y(g)$.

13.3.2. — Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces k-analytiques. Pour tout $x \in X$, on définit de le degré de f au-dessus de x comme la somme

$$\deg_x(f) = \sum_{y \in f^{-1}(x)} \deg^y(f).$$

Il est fini si et seulement si $f^{-1}(x)$ est compact et de dimension nulle ; alors $f^{-1}(x)$ est un espace analytique fini sur $\mathscr{H}(x)$, et $\deg_x(f) = \dim_{\mathscr{H}(x)}(\mathscr{O}(f^{-1}(x)))$.

Lorsque f est globalement fini et plat, cet entier $\deg_x(f)$ coïncide avec l'entier $\deg_x(f)$ défini en 11.6.1.

Lemme 13.3.3. — *Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces analytiques. Soit K une extension valuée complète de k ; notons $p\colon X_K \to X$ et $q\colon Y_K \to Y$ les morphismes de changement de base, et $f_K\colon Y_K \to X_K$ le morphisme déduit de f par changement de base. Soit $x_K \in p^{-1}(x)$.*

a) *Pour tout $y \in Y$ d'image $x = f(y) \in X$, tout point $x_K \in p^{-1}(x)$, on a*

$$\deg^y(f) = \sum_{z \in f_K^{-1}(x_K) \cap q^{-1}(y)} \deg^z(f_K).$$

b) *Pour tout $x \in X$ et tout point $x_K \in p^{-1}(x)$, on a $\deg_x(f) = \deg_{x_K}(f_K)$.*

Démonstration. — Tout se passe dans les fibres $f^{-1}(x)$ et fibre $f_K^{-1}(x_K) = f^{-1}(x) \times \mathscr{M}(\mathscr{H}(x_K))$. Cela permet de supposer que $X = \mathscr{M}(k) = \{x\}$ et $X_K = \mathscr{M}(K) = \{x_K\}$.

Prouvons l'égalité *a*). Si $\dim_y(Y) > 0$, il en est de même de $\dim_z(Y_K)$ pour tout antécédent z de y, si bien que les deux membres de l'égalité sont infinis. Supposons maintenant $\dim_y(Y)$. Alors $\mathscr{O}_{Y,y}$ est une k-algèbre artinienne et $\mathscr{O}_{Y,y} \otimes_k K = \prod_z \mathscr{O}_{Y_K,z}$, où z parcourt l'ensemble des antécédents de y dans Y_K. L'égalité s'ensuit.

L'égalité *b*) s'en déduit en sommant sur tous les points de Y. □

13.3.4. — Soit A un anneau local artinien et soit M un A-module de longueur finie. Nous noterons $\delta_A(M)$ le nombre rationnel $\ell_A(M)/\ell_A(A)$. Indiquons quelques propriétés élémentaires de cet invariant.

Si A est réduit, c'est un corps, on a $\ell_A(A) = 1$ et $\delta_A(M)$ est donc simplement $\ell_A(M)$, c'est-à-dire la dimension de M comme A-espace vectoriel.

Supposons M plat sur A, c'est-à-dire libre comme A-module ; soit r son rang. Comme $M \simeq A^r$, $\ell_A(M) = r\ell_A(A)$, si bien que $\delta_A(M) = r$.

Si $M = A_{\mathrm{red}}$, alors $\ell_A(M) = 1$ et $\delta_A(M) = 1/\ell_A(A)$.

Soit B une A-algèbre finie. Soit κ le corps résiduel de A et λ celui de B. Choisissons une filtration complète de B comme B-module ayant $\ell_B(B)$ quotients successifs tous isomorphes à λ. On a alors $\ell_A(B) = \ell_B(B)\ell_A(\lambda)$, et $\ell_A(\lambda)$ est simplement la dimension de λ comme κ-espace vectoriel, si bien qu'on peut finalement écrire $\delta_A(B) = (\ell_B(B)/\ell_A(A))\dim_\kappa(\lambda)$.

Soit C une B-algèbre locale finie, de corps résiduel μ. On a

$$\begin{aligned}\delta_A(C) &= [\ell_C(C)/\ell_A(A)]\dim_\kappa \mu \\ &= [\ell_C(C)/\ell_B(B)][\ell_B(B)/\ell_A(A)]\dim_\lambda(\mu)\dim_\kappa(\lambda) \\ &= [\ell_C(C)/\ell_B(B)]\dim_\lambda(\mu)\cdot[\ell_B(B)/\ell_A(A)]\dim_\kappa(\lambda) \\ &= \delta_B(C)\delta_A(B).\end{aligned}$$

13.3.5. — Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme entre espaces k-analytiques. Soit y un point de Y et soit x son image sur X. Supposons que f est quasi-fini en y et que $x \in X^{\mathrm{gen}}$ (13.1.2), ce qui revient à demander que $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}$ soit artinien. L'anneau local $\mathscr{O}_{Y_{\mathrm{G}},y}$ est alors artinien car il est fini sur $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}$ (proposition 13.1.9), si bien que $y \in Y^{\mathrm{gen}}$. D'après la proposition 13.1.9, on a $\dim_{\mathrm{c}}(Y_{\mathrm{G}}, y) = \dim_{\mathrm{c}}(X_{\mathrm{G}}, x)$; comme ces deux entiers sont respectivement égaux à $\dim_y Y$ et $\dim_x X$ puisque $x \in X^{\mathrm{gen}}$ et $y \in Y^{\mathrm{gen}}$, il vient $\dim_y Y = \dim_x X$.

Nous appellerons *degré calibré* de f en y le nombre rationnel $\delta_{\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}}(\mathscr{O}_{Y_{\mathrm{G}},y})$; nous le noterons $\mathrm{dc}^y(f)$.

Soit U un domaine analytique de X contenant x et soit V un domaine analytique de Y contenant y tels que $f(V) \subset U$; soit $g\colon V \to U$ le morphisme déduit de f ; on a $\mathrm{dc}^y(f) = \mathrm{dc}^y(g)$. En effet, les anneaux G-locaux de U et X en x coïncident, et les anneaux G-locaux de V et Y en y coïncident.

Soit $g\colon Z \to Y$ un morphisme et soit z un antécédent de y tel que $\dim_z g = 0$. On déduit de 13.3.4 que $\mathrm{dc}^z(f \circ g) = \mathrm{dc}^y(f)\,\mathrm{dc}^z(g)$.

Soit V un domaine analytique de X contenant x et soit j l'immersion de V dans X. Comme $\mathscr{O}_{V_{\mathrm{G}},x} = \mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}$, on a $\mathrm{dc}^x(j) = 1$.

13.3.6. — Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme entre espaces k-analytiques. Soit x un point de X^{gen}. Supposons que la fibre $f^{-1}(x)$ soit finie sur $\mathscr{H}(x)$. On pose alors

$$\mathrm{dc}_x(f) = \sum_{y \in f^{-1}(x)} \mathrm{dc}^y(f).$$

Si V est un domaine analytique de X contenant x et $g\colon Y \times_X V \to V$ est le morphisme déduit par changement de base, on a $\mathrm{dc}_x(g) = \mathrm{dc}_x(f)$.

Soit $f\colon X_{\mathrm{red}} \to X$ l'immersion canonique. Soit $x \in X^{\mathrm{gen}}$. Par définition, on a

$$\mathrm{dc}_x(f) = \mathrm{dc}^x(f) = \delta_{\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}}(\mathscr{O}_{X_{\mathrm{red,G}},x}).$$

Comme $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{red,G}},x} = (\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x})_{\mathrm{red}}$, il en résulte que

$$\mathrm{dc}_x(f) = \delta_{\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}}((\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x})_{\mathrm{red}}) = 1/\ell(\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}).$$

Autrement dit, le degré calibré de f en x est l'inverse de la multiplicité générique de X le long de l'unique composante irréductible de X qui contient x.

Proposition 13.3.7. — *Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme fini d'espaces k-analytiques et soit Z une composante irréductible de X. Soit λ la longueur générique de $f_*\mathscr{O}_Y$ le long de Z, et soit μ la multiplicité générique de X le long de Z. Pour tout $x \in Z^{\mathrm{gen}}$, on a $\mathrm{dc}_x(f) = \lambda/\mu$.*

En particulier, si f est l'immersion canonique de X_{red} dans X, on a $\mathrm{dc}_x(f) = 1/\mu$.

Démonstration. — Soit $x \in Z^{\mathrm{gen}} \subset X^{\mathrm{gen}}$ et soit $y_1, \ldots, y_r$ les antécédents de x sur Y. Soit V un bon domaine analytique de X contenant x ; posons $W = f^{-1}(V)$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{dc}_x(f) &= \sum_i \mathrm{dc}^{y_i}(f) \\
&= \frac{1}{\ell(\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x})} \sum_i \ell_{\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}}(\mathscr{O}_{Y_{\mathrm{G}},y_i}) \\
&= \frac{1}{\mu} \sum_i \ell_{\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}}(\mathscr{O}_{Y_{\mathrm{G}},y_i}) \\
&= \frac{1}{\mu} \ell_{\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}}(\prod_i \mathscr{O}_{Y_{\mathrm{G}},y_i}) \\
&= \frac{\lambda}{\mu},
\end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte du corollaire 13.1.10 et du fait que f est fini, d'où la proposition. □

Lemme 13.3.8. — *Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme entre espaces k-analytiques. Soit y un point de Y et soit x son image sur X. Supposons que $x \in X^{\mathrm{gen}}$ et que f est quasi-fini et plat en y. On a alors l'égalité $\mathrm{dc}^y(f) = \deg^y(f)$.*

Démonstration. — Pour établir le lemme, on peut remplacer X par n'importe quel domaine analytique V de X contenant x et Y par n'importe quel domaine analytique W de $f^{-1}(V)$ contenant y. Cela permet, au vu du corollaire 13.1.8, de supposer que X et Y ont affinoïdes et que f est fini. Comme f est plat en y, l'anneau local $\mathscr{O}_{Y,y}$ est un $\mathscr{O}_{X,x}$-module libre de rang $\deg^y(f)$. En vertu de la proposition 13.1.9, *c*), $\mathscr{O}_{Y_{\mathrm{G}},y}$ est un $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}$-module libre de rang $\deg^y(f)$, si bien que $\mathrm{dc}^y(f) = \delta_{\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}}(\mathscr{O}_{Y_{\mathrm{G}},y}) = \deg^y(f)$. □

Corollaire 13.3.9. — *Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme entre espaces k-analytiques. Soit y un point de Y et soit x son image sur X. Supposons que $x \in X^{\mathrm{gen}}$, que f est quasi-fini en y et que X est réduit en x. On a alors l'égalité $\mathrm{dc}^y(f) = \deg^y(f)$.*

Démonstration. — Comme X est réduit en x, l'anneau local artinien $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}$ est un corps. Par conséquent, l'anneau $\mathscr{O}_{Y_{\mathrm{G}},y}$ est plat sur $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}$, si bien que f est plat en y ([**55**], théorème 7.5) ; on conclut à l'aide du lemme précédent. □

Proposition 13.3.10. — *Soit $g\colon Z \to Y$ et $f\colon Y \to X$ deux morphismes d'espaces k-analytiques. Soit z un point de Z et soit y son image sur Y. On suppose que f est quasi-fini en y et que g est quasi-fini en z.*

a) *Soit X' un sous-espace analytique fermé réduit d'un domaine analytique de X tel que $x \in X'$ et que $\dim_x X' = \dim_{\mathrm{c}}(X_{\mathrm{G}}, x)$, et soit g' le morphisme de $Z \times_X X'$ vers $Y \times_X X'$ déduit de g. On a alors $\deg^z(f \circ g) = \deg^y(f)\,\mathrm{dc}^z(g')$.*

b) *Supposons que le morphisme g est plat en z ou que la fibre $f^{-1}(x)$ est réduite en y. Alors, $\deg^z(f \circ g) = \deg^y(f)\deg^z(g)$.*

Remarquons que $\dim_{\mathrm{c}}(X'_{\mathrm{G}}, x) = \dim_x X'$ par construction, c'est-à-dire que $x \in (X')^{\mathrm{gen}}$, si bien que $\mathrm{dc}^z(g')$ a bien un sens. Notons aussi que si $x \in X^{\mathrm{gen}}$ on peut prendre $X' = X_{\mathrm{red}}$.

Démonstration. — Démontrons a). Pour alléger les notations, posons $Y' = Y \times_X X'$ et $Z' = Z \times_X X'$, et notons f' le morphisme de Y' vers X' induit par f.

On a alors $\deg^z(f' \circ g') = \deg^z(f \circ g)$ et $\deg^y f' = \deg^y f$. Comme X' est réduit, le corollaire 13.3.9 entraîne les égalités $\mathrm{dc}^z(f' \circ g') = \deg^z(f' \circ g')$ et $\mathrm{dc}^y(f') = \deg^y(f')$, car $f' \circ g'$ et f' se déduisent de $f \circ g$ et f par changement de base. On a par ailleurs $\mathrm{dc}^z(f' \circ g') = \mathrm{dc}^y(f')\,\mathrm{dc}^z(g')$; il vient donc $\deg^z(f \circ g) = \deg^y(f)\,\mathrm{dc}^z(g')$.

Comme g' se déduit de g par changement de base, on a $\deg^z(g) = \deg^z(g')$. Pour démontrer b), il suffit de donc vérifier que si g est plat en z ou si $f^{-1}(x)$ est réduit en y, alors $\mathrm{dc}^z(g') = \deg^z(g')$.

Si g est plat en z, alors g' est encore plat en z, si bien que $\mathrm{dc}^z(g')$ est égal à $\deg^z(g')$ (lemme 13.3.8).

Supposons maintenant que $f^{-1}(x)$ est réduit en y. D'après le corollaire 13.3.9, il suffit de prouver que Y' est réduit en y. Pour ce faire, on peut remplacer X par n'importe quel domaine analytique U de X contenant x, l'espace X' par $U \times_X X'$ et l'espace Y par n'importe quel domaine analytique V de $Y \times_X U$ contenant y. On peut donc tout d'abord supposer que X' est un sous-espace analytique fermé de X puis, en vertu du corollaire 13.1.8 supposer que X et Y sont affinoïdes et que f est fini. L'anneau local $\mathscr{O}_{X'_{\mathrm{G}},x}$ est artinien et réduit ; c'est donc un corps. Comme il est fidèlement plat sur l'anneau local $\mathscr{O}_{X',x}$, ce dernier est également un corps. Le morphisme f' étant sans bord en y, il résulte alors du théorème 6.3.3 de [**52**] que $\mathscr{O}_{f^{-1}(x),y}$ est fidèlement plat sur $\mathscr{O}_{Y',y}$. Par conséquent, l'anneau $\mathscr{O}_{Y',y}$ s'injecte dans un anneau réduit et est dès lors lui-même réduit, ce qui signifie que Y' est réduit en y. □

§ 13.4. SEMI-CONTINUITÉ DU DEGRÉ

Proposition 13.4.1. — *Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces k-analytiques. La fonction $y \mapsto \deg^y(f)$ de $Y \to \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ est semi-continue supérieurement.*

Démonstration. — L'ensemble des points $y \in Y$ en lesquels $\dim_y(f^{-1}(f(y)) > 0$ est un fermé de Zariski de Y ; c'est aussi l'ensemble des points y tels que $\deg^y(f)$ soit infini. Notons V l'ouvert complémentaire. Il suffit de prouver que $y \mapsto \deg^y(f)$ est semi-supérieurement sur V. Autrement dit, on peut supposer que f est partout de dimension relative nulle

L'assertion à montrer est G-locale sur Y ; on peut ainsi supposer que X et Y sont affinoïdes. Soit $y \in Y$. D'après le *Main theorem* analytique ([**48**], Thm. 3.2) il existe une factorisation $V \xrightarrow{g} W \xrightarrow{j} T \xrightarrow{h} X$ de f, où V est un voisinage affinoïde de y dans Y, où $g\colon V \to W$ est fini, $j\colon W \to T$ est l'immersion d'un domaine affinoïde, et $h\colon T \to X$ est étale.

Le morphisme h étant fini et plat en tout point, la fonction $t \mapsto \deg^t(h)$ est semi-continue supérieurement (lemme 11.6.4). Il en est donc de même de sa restriction à W, qui n'est autre que $w \mapsto \deg^w(h \circ j)$. La fonction $v \mapsto \deg^v(g)$ est semi-continue supérieurement. Soit en effet $v \in V$; posons $d = \deg^v(g)$. Comme g est finie, il existe des voisinages affinoïdes Ω de v dans V et Υ de $g(v)$ dans W tels que g induise un morphisme fini de Ω sur Υ. On peut également supposer que v est le seul antécédent de $g(v)$ dans Ω ; le rang ponctuel du faisceau cohérent $g_*\mathscr{O}_\Omega$ en $g(v)$ est donc égal à d ; par le lemme de Nakayama, il est majoré par d sur un voisinage Υ' de $g(v)$ dans Υ. Soit u un point de $g^{-1}(\Upsilon')$. On a

$$\begin{aligned} d &\geqslant \dim_{\mathscr{H}(g(u))}(g_*\mathscr{O}_\Omega \otimes \mathscr{H}(g(u))) \\ &= \dim_{\mathscr{H}(g(u))} \prod_{\omega \in \Omega \cap g^{-1}(g(u)} \mathscr{O}_{g^{-1}(g(u)),\omega} \\ &= \sum_{\omega \in \Omega \cap g^{-1}(g(u))} \deg^\omega(g), \end{aligned}$$

si bien que $\deg^\omega(g) \leqslant d$ pour tout ω appartenant à $\Omega \cap g^{-1}(g(u))$; c'est en particulier le cas pour $\omega = u$, ce qui achève de prouver la semi-continuité supérieure de g.

Comme un morphisme quasi-étale est quasi-fini et à fibres réduites, la proposition 13.3.10 entraîne la relation $\deg^v(f) = \deg^{g(v)}(h \circ j)\deg^v(g)$ pour tout $v \in V$. Il s'ensuit alors que $v \mapsto \deg^v(g)$ est semi-continue supérieurement sur V, donc au voisinage de y, ce qui achève la démonstration. □

Proposition 13.4.2. — *Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces k-analytiques qui est compact et séparé. La fonction $x \mapsto \deg_x(f)$ de X dans $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ est semi-continue supérieurement.*

Démonstration. — Nous allons reprendre les arguments de la démonstration de la proposition précédente. Soit Z le lieu des $y \in Y$ tels que $\dim(f^{-1}(f(y))) > 0$; c'est un fermé de Zariski de Y. Par compacité de f, son image est une partie fermée de X ; c'est lieu des points x en lesquels $\deg^x(f)$ est infini. Il suffit donc de démontrer que la fonction $x \mapsto \deg^x(f)$ est semi-continue supérieurement sur son complémentaire. Cela permet de se ramener au cas où f est compacte à fibres de dimension nulle. On peut raisonner G-localement sur X, ce qui permet de le supposer séparé ; dans ce cas, Y est également séparé.

Soit x un point de X. La fibre $f^{-1}(x)$ est finie ; en appliquant le *Main theorem* de [**48**] à chacun de ses éléments (ce qui est possible car Y est séparé) et en utilisant la compacité de f, on obtient l'existence d'un diagramme $V \xrightarrow{g} W \xrightarrow{j} T \xrightarrow{h} X$ de f, où V est un voisinage analytique compact de $f^{-1}(x)$, W est un espace analytique compact, $g\colon V \to W$ est fini, $j\colon W \to T$ est l'immersion d'un domaine analytique, et $h\colon T \to X$ est étale. Par compacité de f, l'image $f(V)$ est un voisinage de x. Il suffit ainsi de démontrer que $\deg^\cdot(h \circ j \circ g)$ est semi-continue supérieurement.

La fonction $w \mapsto \deg_w(g)\colon W \to \mathbf{N}$ est égale à $w \mapsto \dim_{\mathscr{H}(w)}(g_*\mathscr{O}_V) \otimes \mathscr{H}(w)$; elle est semi-continue supérieurement par le lemme de Nakayama.

Soit (w_i) la famille des antécédents de x dans W ; pour tout i, posons $d_i = \deg^{w_i}(h \circ j) = \deg^{w_i}(h)$. Par définition, on a $\deg_x(h \circ j) = \sum d_i$. Comme h est étale, c'est un morphisme fini et plat en tout point ; par suite, pour tout i, il existe un voisinage analytique compact T_i de w_i dans T qui est fini et plat sur un voisinage analytique compact X_i de x dans X. On peut supposer que les T_i sont deux à deux disjoints, que T_i est de degré constant d_i sur X_i, et que $\deg_w(g) \leqslant_{w_j} (g)$ pour tout $w \in j^{-1}(T_i)$.

La réunion des $j^{-1}(T_i)$ est un voisinage de $(h\circ j)^{-1}(x)$ dans W ; comme W est compact, il existe un voisinage X' de x dans $\bigcap X_i$ tel que $(h\circ j)^{-1}(X')$ soit contenu dans la réunion de $j^{-1}(T_i)$.

Pour $x' \in X'$, le degré $\deg_{x'}(h \circ j)$ est la somme des $\deg_{x'}(h \circ j)|_{j^{-1}(T_i)}$, qui est majoré par $\sum d_i$.

Soit x' un point de X' ; par définition,

$$\deg_{x'}(f) = \sum_{y' \in f^{-1}(x')} \deg^{y'}(f) = \sum_i \sum_{\substack{y' \in f^{-1}(x') \\ g(y') \in j^{-1}(T_i)}} \deg^{y'}(f).$$

Comme $h \circ j$ est quasi-étale, la proposition 13.3.10 entraîne l'égalité $\deg^{y'}(f) = \deg^{g(y')}(h \circ j) \deg^{y'}(g)$. Par suite,

$$\begin{aligned}
\deg_{x'}(f) &= \sum_i \sum_{\substack{y' \in f^{-1}(x') \\ g(y') \in j^{-1}(T_i)}} \deg^{g(y')}(h \circ j) \deg^{y'}(g) \\
&= \sum_i \sum_{\substack{w' \in j^{-1}(T_i) \\ h\circ j(w') = x'}} \sum_{y' \in g^{-1}(w')} \deg^{g(y')}(h \circ j) \deg^{y'}(g) \\
&= \sum_i \sum_{\substack{w' \in j^{-1}(T_i) \\ h\circ j(w') = x'}} \deg^{w'}(h \circ j) \deg_{w'}(g).
\end{aligned}$$

Appliqué à $x' = x$, cette formule démontre que

$$\deg_x(f) = \sum_i d_i \deg_{w_i(g)}.$$

On a par ailleurs par choix des T_i les inégalités $\deg_{w'}(g) \leqslant \deg_{w_i}(g)$, et $\deg^{w'}(h \circ j) \leqslant d_i$ pour tout i et tout $w' \in j^{-1}(T_i)$; il vient alors

$$\deg_{x'}(f) \leqslant \sum_i d_i \deg_{w_i}(g) = \deg_x(f)$$

pour tout x' dans X'. Cela entraîne la semi-continuité voulue. □

Remarque 13.4.3. — L'hypothèse de séparation est indispensable à la validité de la proposition 13.4.2 ci-dessus. En effet, soit X le disque unité fermé et soit X' son domaine affinoïde défini par l'égalité $|T| = 1$. Soit Y l'espace k-analytique compact obtenu en recollant deux copies de X le long de X', le recollement se faisant via l'identité de X' (et non via l'inversion, qui conduirait à la droite projective) ; on pourrait alternativement décrire Y comme la fibre générique de la droite affine formelle avec origine dédoublée. Soit $f\colon Y \to X$ le morphisme induit par l'identité sur chacune des deux copies de X

constituant Y. Alors $\deg_x(f) = 1$ si $x \in X'$ et $\deg_x(f) = 2$ si $x \notin X'$. Par conséquent $x \mapsto \deg_x(f)$ est semi-continue inférieurement, mais pas supérieurement.

Lemme 13.4.4. — *Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces k-analytiques. Soit x un point de X et soit W un domaine analytique compact de $f^{-1}(x)$. Lorsque V et V' sont des voisinages analytiques compacts de W dans Y tels que $V \cap f^{-1}(x) = V' \cap f^{-1}(x) = W$, les fonctions $\xi \mapsto \deg_\xi(f|_V)$ et $\xi \mapsto \deg_\xi(f|_{V'})$ coïncident au voisinage de x.*

Démonstration. — Par construction, $V \cap V'$ est un voisinage de $V \cap f^{-1}(x)$ dans V. Comme V est compact, l'application $f|_V$ est propre ; il existe donc un voisinage ouvert U de x tel que $V \cap f^{-1}(U) \subset V \cap V'$, c'est-à-dire $f^{-1}(U) \cap V \subset f^{-1}(U) \cap V'$. Par symétrie, il existe un voisinage ouvert U' de x tel que $f^{-1}(U') \cap V' \subset f^{-1}(U') \cap V$. L'ouvert $U'' = U \cap U'$ est un voisinage de x tel que $f^{-1}(U'') \cap V = f^{-1}(U'') \cap V'$. En revenant aux définitions des fonctions $\deg_\xi(f|_V)$ et $\deg_\xi(f|_{V'})$, on en déduit qu'elles coïncident sur U''. □

13.4.5. — Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces k-analytiques. Soit y un point de Y et soit x son image sur X. Supposons que y est isolé dans sa fibre $f^{-1}(x)$. Alors, $\{y\}$ est un domaine compact de $f^{-1}(x)$ et il existe un voisinage analytique compact V de y dans Y tels que $V \cap f^{-1}(x) = \{y\}$. D'après le lemme précédent, le germes en x de l'application $\xi \mapsto \deg_\xi(f|_V)$ ne dépendent pas du choix de V ; on note $\xi \mapsto \deg_\xi^{(y)}(f)$ ce germe d'application à valeurs dans $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$.

D'après la proposition 13.4.2, si le germe (Y, y) est séparé, le germe d'application $\xi \mapsto \deg_\xi^{(y)}(f)$ est semi-continu supérieurement en x.

Si f est fini et plat en y, le germe $\xi \mapsto \deg_\xi^{(y)}(f)$ est localement constant en x. En effet, il existe un voisinage analytique compact V de y tel que $f^{-1}(x) \cap V = \{y\}$ et un voisinage analytique compact U de x tels que f induise un morphisme fini et plat de V sur U. L'assertion découle alors du §11.6.2.

§ 13.5. CYCLES

Soit X un espace k-analytique.

Définition 13.5.1. — *On appelle* cycle *sur X une application z de l'ensemble des fermés de Zariski intègres (i.e., irréductibles et réduits) de X dans $\mathbf{Z}$ qui est* localement finie *au sens suivant : pour tout domaine affinoïde V de X, l'ensemble des fermés de Zariski intègres Y de X tels que $Y \cap V \neq \varnothing$ et $z(Y) \neq 0$ est fini.*

On notera $\sum z(Y)[Y]$ le cycle z ; cette notation est abusive lorsque l'ensemble E des fermés de Zariski Y de X tels que $z(Y) \neq 0$ est infini. On dit que z est *effectif* si l'on a $z(Y) \geqslant 0$ pour tout Y. Comme E est G-localement fini, la réunion des Y pour Y parcourant E est un fermé de Zariski de X, appelé le *support* du cycle z ; on le note $|z|$. Observons que $|z| = \varnothing$ si et seulement si $z = 0$.

L'ensemble $\mathrm{Z}(X)$ est un groupe abélien.

On dira qu'un cycle z est purement p-dimensionnel (resp. purement p-codimensionnel) si $z(Y) \neq 0$ entraîne $\dim(Y) = p$ (resp. $\operatorname{codim}(Y) = p$). Dans ce cas, son support est purement p-dimensionnel (resp. purement p-codimensionnel). On notera $\mathrm{Z}_p(X)$ (resp.

$\mathrm{Z}^p(X)$) le sous-groupe de $\mathrm{Z}(X)$ formé des cycles purement p-dimensionnels (resp. purement p-codimensionnels).

13.5.2. — Soit Y un sous-espace analytique fermé de X. Soit (Y_i) la famille des composantes irréductibles de Y ; pour tout i, notons n_i la multiplicité générique de Y le long de Y_i (13.2.5). Alors, $[Y] = \sum n_i[Y_{i,\mathrm{red}}]$ est un cycle sur X, qu'on appelle le cycle associé à Y ; il est effectif.

Proposition 13.5.3. — a) *Soit V un domaine analytique de X. Il existe un unique morphisme de groupes $\mathrm{Z}(X) \to \mathrm{Z}(V)$, noté $z \mapsto z|_V$, qui commute aux sommes localement finies et qui, pour tout sous-espace analytique fermé Y de X, applique le cycle $[Y] \in \mathrm{Z}(X)$ sur le cycle $[Y \cap V] \in \mathrm{Z}(V)$.*

b) *Soit V un domaine analytique de X. Pour tout $z \in \mathrm{Z}(X)$, on a $|z|_V| = |z| \cap V$. En particulier, pour que $z|_V = 0$, il faut et il suffit que le support de z soit disjoint de V.*

c) *Ces applications font de $V \mapsto \mathrm{Z}(V)$ un G-préfaisceau en groupes abéliens sur X ; c'est un faisceau.*

Démonstration. — Démontrons a). Soit z un cycle sur X ; pour tout fermé irréductible Y de X, soit $n_Y = z(Y)$ la multiplicité de Y dans z. Soit T un fermé de Zariski irréductible de V et soit Y son adhérence de Zariski dans X. Si $\dim(Y) = \dim(T)$, on pose $n_T = n_Y$; sinon, on pose $n_T = 0$. La famille des Y tels que $n_Y \neq 0$ est localement finie sur X, par définition d'un cycle. La famille des T tels que $n_T \neq 0$ est la famille des composantes irréductibles de $Y \cap V$, où Y est un fermé irréductible de X tel que $n_Y \neq 0$. Elle est donc encore localement finie. Ainsi, la famille des $(n_T)_T$ est un cycle sur V ; on le note $z|_V$. L'application $z \mapsto z|_V$ est manifestement un morphisme de groupes qui commute aux sommes localement finies.

Soit Y un sous-espace analytique fermé de X. Soit (Y_i) la famille de ses composantes irréductibles et soit n_i la multiplicité générique de Y le long de Y_i. Le cycle $z = [Y]$ qui est associé à Y est donné par $\sum n_i[Y_i]$. Pour tout i, soit (Z_{ij}) la famille des composantes irréductibles de $Y_i \cap V$. D'après la proposition 13.2.6, appliquée à l'espace Y, à son domaine $Y \cap V$ et au faisceau $\mathscr{O}_Y$, la multiplicité de $Y \cap V$ le long de Z_{ij} est égale à n_i. Par conséquent, le cycle associé à $Y \cap V$ est égal à $\sum_{i,j} n_i Z_{ij}$; c'est également le cycle $[Y]|_V$ défini ci-dessus. Le morphisme $z \mapsto z|_V$ satisfait donc les conditions de l'assertion a) ; vérifions que c'est le seul.

Soit $\rho\colon \mathrm{Z}(X) \to \mathrm{Z}(V)$ un morphisme satisfaisant ces conditions ; démontrons que $\rho(z) = z|_V$ pour tout cycle z. Par additivité localement finie, il suffit de le vérifier lorsque $z = [Y]$, où Y est un fermé de Zariski intègre de X. Soit (Z_i) la famille des composantes irréductibles de $Y \cap V$. Comme Y est réduit, son domaine $Y \cap V$ est réduit, de sorte que $\rho(Y) = [Y \cap V] = \sum [Z_i] = [Y]|_V$.

L'assertion b) découle de la construction de morphisme de restriction des cycles.

Démontrons maintenant c). Soit V et W des domaines analytiques de X tels que $W \subset V$ et soit Y un sous-espace analytique fermé de X. D'après ce qui précède, on a

$$[Y]|_W = [Y \cap W] = [(Y \cap V) \cap W] = [Y \cap V]|_W = ([Y]|_V)|_W.$$

Cela entraîne que l'application $V \mapsto \mathrm{Z}(V)$ est un G-préfaisceau pour ces applications de restriction. Démontrons que ce préfaisceau est un faisceau.

Soit V un domaine analytique de X, soit (V_i) un G-recouvrement de V, pour tout couple (i, j), posons $V_{ij} = V_i \cap V_j$. Pour tout i, soit $z_i \in \mathrm{Z}(V_i)$; supposons que pour tout

couple (i,j), on ait $z_i|_{V_{ij}} = z_j|_{V_{ij}}$ et démontrons qu'il existe un unique cycle $z \in \mathrm{Z}(V)$ tel que $z|_{V_i} = z_i$ pour tout i.

L'unicité d'un tel cycle z découle de b) : si $z|_{V_i} = 0$ pour tout i, alors le support de z ne rencontre aucun des V_i, donc est vide, donc $z = 0$.

Prouvons maintenant l'existence d'un cycle z tel que $z|_{V_i} = z_i$ pour tout i.

Soit Y un sous-espace analytique fermé intègre de X et soit m un entier. Pour tout i, soit T_i la réunion des composantes irréductibles de $Y \cap V_i$ apparaissant avec multiplicité m dans le cycle z_i ; c'est un fermé de Zariski de $Y \cap V_i$. Le sous-espace fermé $T_i \cap V_j$ de V_{ij} est la réunion des composantes irréductibles de $T \cap V_{ij}$ qui apparaissent avec multiplicité m dans le cycle $z_i|_{V_{ij}}$. Comme $z_i|_{V_{ij}} = z_j|_{V_{ij}}$, on a $T_i \cap V_j = T_j \cap V_i \subset T_j$. Soit $T^{(m)}$ la réunion des T_i ; d'après ce qui précède, on a $T^{(m)} \cap V_i = T_i$ pour tout i. Par suite, $T^{(m)}$ est un fermé de Zariski de V contenu dans Y.

La famille $(Y \cap V_i)$ est un G-recouvrement de Y ; il existe donc un indice i et une composante irréductible E de $Y \cap V_i$; soit m sa multiplicité dans z_i. Comme E est Zariski dense dans Y et comme $T^{(m)}$ contient E, on a $T^{(m)} = Y$. Par suite, $Y \cap V_j = T_j$ pour tout j ; autrement dit, pour tout j, toute composante irréductible de $Y \cap V_j$ est de mulitplicité m dans z_j, si bien que $T^{(n)} = \varnothing$ si $n \neq m$. Posons $z(Y) = m$.

Démontrons maintenant que la famille $z = (z(Y))_Y$ est un cycle sur V. Fixons un indice i et considérons un domaine analytique compact W de V contenu dans V_i. Par définition d'un cycle, l'ensemble des sous-espaces fermés T de V_i tels que $z_i(T) \neq 0$ et T rencontre W est fini. Par construction de l'application $Y \mapsto z(Y)$, pour tout sous-espace analytique fermé intègre Y de V qui rencontre W et tel que $z(Y) \neq 0$, il existe une composante irréductible T de $Y \cap V_i$ telle que $z_i(Y) = z_i(T) \neq 0$ et T rencontre W ; alors Y est l'adhérence de Zariski de T dans V. Par suite, l'ensemble des sous-espaces analytiques fermés intègres Y de V tels que $z(Y) \neq 0$ et $Y \cap W \neq \varnothing$ est fini. Comme (V_i) est un G-recouvrement de V, cela entraîne que la famille $(z(Y))_Y$ est localement finie ; ainsi, z est un cycle sur V.

Démontrons maintenant que $z|_{V_i} = z_i$ pour tout i. Soit T un sous-espace analytique fermé intègre de V_i et soit Y son adhérence de Zariski dans V. Compte tenu de la proposition 13.5.3 définissant la restriction d'un cycle à un domaine, il suffit de démontrer que l'on a $z_i(T) = z(Y)$ si $\dim(Y) = \dim(T)$, et $z_i(T) = 0$ sinon.

Supposons d'abord $\dim(Y) = \dim(T)$; dans ce cas, T est une composante irréductible de $Y \cap V$, donc on a $z(Y) = z_i(T)$ par construction du cycle z.

Supposons maintenant $\dim(Y) \neq \dim(T)$ et démontrons que $z_i(T) = 0$; on va raisonner par contraposition et, supposant que $z_i(T) \neq 0$, prouver que $\dim(Y) = \dim(T)$. Pour tout j, notons Z'_j la réunion des composantes de dimension $\dim(T)$ du cycle z_j ; pour $j = i$, le fermé T de V_i apparaît dans z_i, car $z_i(T) \neq 0$, si bien que Z'_i contient T.

Soit Z' la réunion des Z'_j. Le sous-espace fermé $Z'_j \cap V_k$ de V_{jk} est la réunion des composantes du cycle $z_j|_{V_{jk}}$ qui sont de dimension $\dim(T)$. Comme $z_j|_{V_{jk}} = z_k|_{V_{jk}}$, on $Z'_j \cap V_k = Z'_k \cap V_j \subset Z'_k$. On a donc $Z' \cap V_j = Z'_j$ pour tout j, ce qui entraîne que Z' est un fermé de Zariski de V ; il est purement de dimension $\dim(T)$.

Comme Z' contient Z'_i, il contient T, donc également son adhérence de Zariski Y, si bien que $\dim(Y) \leqslant \dim(Z') = \dim(T)$. Ainsi, $\dim(Y) = \dim(T)$. Cela termine la démonstration de la proposition. □

§ 13.6. FONCTIONS MÉROMORPHES EN GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Lemme 13.6.1. — *Soit A une algèbre affinoïde et soit $f \in A$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *La fonction f est un élément régulier de A ;*
(2) *Le germe f_x est régulier pour tout $x \in \mathrm{Spec}(A)$;*
(3) *Le germe f_x est régulier pour tout $x \in \mathscr{M}(A)$;*
(4) *Pour tout domaine affinoïde V de $\mathscr{M}(A)$, $f|_V$ est un élément régulier de $\mathscr{A}_V$;*
(5) *Il existe un recouvrement (V_i) de $\mathscr{M}(A)$ par des domaines affinoïdes tels que pour tout i, $f|_{V_i}$ soit un élément régulier de $\mathscr{A}_{V_i}$.*

Démonstration. — L'équivalence des propriétés (1) et (2) découle de la fidèle platitude du morphisme $\coprod_{x\in\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(A_x) \to \mathrm{Spec}(A)$, celle de (2) et (3) de la fidèle platitude du morphisme naturel d'espaces localement annelés $\mathscr{M}(A) \to \mathrm{Spec}(A)$. De même, l'implication (3)⇒(4) découle de la platitude du morphisme d'inclusion $V \to \mathscr{M}(A)$. L'implication (4)⇒(5) est évidente. Enfin (5) entraîne (3) car, sous ces hypothèses, le morphisme $\coprod_i V_i \to \mathscr{M}(A)$ est fidèlement plat. □

13.6.2. — Soit X un espace analytique. Soit $\mathscr{S}_X$ le sous-G-faisceau du G-faisceau $\mathscr{O}_X$ dont les sections sur un domaine analytique V sont les fonctions holomorphes sur V dont la restriction à tout domaine affinoïde U de V est un élément régulier dans $\mathscr{O}(U)$. Il découle du lemme 13.6.1 que pour tout domaine affinoïde V de X, $\mathscr{S}_X(V)$ est l'ensemble des éléments réguliers de $\mathscr{O}_X(V)$.

13.6.3. — Par définition, le faisceau des *fonctions méromorphes* $\mathscr{M}_X$ sur X est le faisceau pour la G-topologie associé au préfaisceau $U \mapsto \mathscr{S}_X(U)^{-1}\mathscr{O}_X(U)$. Le morphisme naturel de préfaisceaux donné par $f \mapsto f/1$ induit un morphisme de $\mathscr{O}_X$ dans $\mathscr{M}_X$; il est injectif.

Lorsque U est un domaine affinoïde de X, on a encore un morphisme naturel, injectif, de l'anneau total des fractions de $\mathscr{O}_X(U)$ dans $\mathscr{M}_X(U)$.

13.6.4. — Soit f une section globale de $\mathscr{M}_X$.

On définit le *faisceau des dénominateurs* $\mathscr{D}_f$ de f comme le faisceau d'idéaux de $\mathscr{O}_X$ constitué des sections a telles que af appartienne à l'image de $\mathscr{O}_X$ dans $\mathscr{M}_X$. C'est un faisceau cohérent. En effet, on peut se borner à vérifier cette assertion sous l'hypothèse que X est un espace affinoïde sur lequel f s'écrit g/h, pour $g \in \mathscr{O}_X(X)$ et $h \in \mathscr{S}_X(X)$. Comme h n'est pas diviseur de zéro, $\mathscr{D}_f$ apparaît comme le noyau du morphisme $a \mapsto haf$ de $\mathscr{O}_X$ dans $\mathscr{O}_X/h\mathscr{O}_X$, d'où l'assertion.

Comme $\mathscr{D}_f$ est un faisceau cohérent d'idéaux, son lieu des zéros D_f est un fermé de Zariski de X (*cf.* [**49**], §0.2.3). Le complémentaire de D_f est le plus grand ouvert de Zariski de X sur lequel f est holomorphe. Par définition d'un élément régulier, si V est un domaine affinoïde de X sur lequel f s'écrit g/h, avec $g \in \mathscr{O}_X(V)$ et $h \in \mathscr{S}_X(V)$, on a $D_f \cap V \subset \mathscr{V}(h)$, donc $D_f \cap V$ ne contient aucune composante irréductible de V. D'après le th. 4.20 de [**49**], pour tout domaine analytique V de X, $V \cap D_f$ ne contient aucune composante irréductible de V.

Lemme 13.6.5. — *Soit A une algèbre affinoïde, soit $X = \mathscr{M}(A)$. L'homomorphisme injectif de* $\mathrm{Frac}(A)$*, l'anneau total des fractions de A, dans $\mathscr{M}_X(X)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Démontrons qu'il est surjectif. Soit $f \in \mathscr{M}_X(X)$, soit $\mathscr{D}_f$ son faisceau des dénominateurs, soit I l'idéal correspondant de A.

Démontrons que I contient un élément régulier h de A.

Raisonnons par l'absurde. Si I ne contient aucun élément régulier, c'est qu'il est contenu dans un idéal premier associé à A, car A est un anneau noethérien (Bourbaki, AC IV, §1, n° 4, prop. 8). Soit $\mathfrak{p}$ un tel idéal premier associé et soit a un élément de A dont $\mathfrak{p}$ soit l'annulateur. Comme $\mathscr{D}_f$ est le faisceau cohérent associé à l'idéal I, on a, pour tout domaine analytique V de $\mathscr{M}(A)$ l'égalité $\mathscr{D}_f(V) = I\mathscr{O}_X(V)$. Par suite, pour tout tel domaine V et toute section $h \in \mathscr{D}_f(V)$, on a $a|_V h = 0$.

Soit maintenant (V_i) une famille finie de domaines affinoïdes de X recouvrant X telle que sur chaque V_i, la fonction méromorphe f s'écrive g_i/h_i, avec $g_i \in \mathscr{O}_X(V_i)$ et $h_i \in \mathscr{S}_X(V_i)$. Pour tout i, on a $h_i \in \mathscr{D}_f(V_i)$, donc $a|_{V_i} h_i = 0$, puis $a|_{V_i} = 0$ puisque h_i n'est pas diviseur de zéro dans $\mathscr{O}_X(V_i)$. Puisque les V_i recouvrent X, il vient $a = 0$, ce qui est absurde, son annulateur étant égal à $\mathfrak{p}$.

Si h est un élément régulier de A qui appartient à I, la fonction méromorphe hf est une section globale de $\mathscr{O}_X(X)$, donc appartient à A. Par conséquent, $f = (hf)/h$ appartient à $\mathrm{Frac}(A)$. □

Corollaire 13.6.6. — *Soit X un bon espace k-analytique et soit f une fonction méromorphe sur X. Pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert U de x, une fonction $g \in \mathscr{O}_X(U)$ et une fonction $h \in \mathscr{S}_X(U)$ telles que $f|_U = g/h$.*

13.6.7. — Soit X un espace analytique et soit $f \in \mathscr{M}_X(X)$ une fonction méromorphe sur X. On dit que f est une fonction méromorphe régulière (*cf.* **[72]**, 20.1.8) si pour tout domaine affinoïde V de X, la restriction de f à V est un élément régulier de l'anneau $\mathscr{M}_X(V)$. Alors, f est un élément inversible de l'anneau $\mathscr{M}_X(X)$. De plus, il existe un ouvert de Zariski U de X, dont le complémentaire est rare, tel que f définisse une fonction holomorphe inversible sur U.

Observons que le faisceau $\mathscr{M}_X^\times$ des fonctions méromorphes régulières est le faisceau en groupes abéliens associé au faisceau des fonctions holomorphes régulières sur X.

§ 13.7. DIVISEUR D'UNE FONCTION MÉROMORPHE RÉGULIÈRE

13.7.1. — Soit X un espace k-analytique. Soit $f \in \mathscr{S}_X(X)$ une fonction analytique régulière sur X. Le sous-espace analytique fermé de X d'équation $f = 0$ est purement de codimension 1, il est vide si et seulement si f est inversible. Notons $\mathrm{div}(f)$ le cycle sur X associé ; ce cycle est effectif et nul si et seulement si f est inversible.

Pour tout sous-espace analytique fermé intègre Y de X, notons $m_Y(f)$ le coefficient de Y dans $\mathrm{div}(f)$.

Lemme 13.7.2. — *Soit f une fonction analytique régulière sur X. Soit Y un sous-espace analytique fermé intègre de X. Soit V un bon domaine analytique de X et soit $y \in V \cap Y$ tel que l'anneau local $\mathscr{O}_{V\cap Y,y}$ soit artinien. On a $m_Y(f) = \mathrm{long}(\mathscr{O}_{V,y}/(f))$.*

Démonstration. — Si $f(y) \neq 0$, alors Y n'est pas une composante irréductible de $\{f = 0\}$. Dans ce cas, $m_Y(f) = 0$; de plus, f est inversible dans $\mathscr{O}_{V,y}$ donc $\mathrm{long}(\mathscr{O}_{V,y}/(f)) = 0$.

Supposons maintenant $f(y) = 0$. Comme $\{y\}$ est Zariski dense dans Y (voir les commentaires après la définition 13.1.3), on a $Y \subset \{f = 0\}$. Puisque Y est purement de codimension 1, c'est une composante irréductible de $\{f = 0\}$. Par définition, $m_Y(f)$ est la longueur générique du faisceau cohérent $\mathscr{O}_X/(f)$ le long de Y. D'après la proposition 13.2.4, c'est la longueur de l'anneau $\mathscr{O}_{V,y}/(f)$. □

Lemme 13.7.3. — *Si f et g sont deux fonctions holomorphes régulières sur X, alors* $\mathrm{div}(fg) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(g)$.

Démonstration. — Soit Y un sous-espace analytique fermé intègre de X, de codimension 1 ; démontrons que $m_Y(fg) = m_Y(f) + m_y(g)$. Soit V un domaine affinoïde de X et soit $y \in V \cap Y$ tel que $\mathscr{O}_{V\cap Y,y}$ soit artinien (il en existe). Notons $\mathscr{A} = \mathscr{O}_{V,y}$; la suite exacte

$$0 \to g\mathscr{A}/(fg) \to \mathscr{A}(fg) \to \mathscr{A}/(g) \to 0$$

peut se récrire

$$0 \to \mathscr{A}/(f) \to \mathscr{A}/fg \to \mathscr{A}/(g) \to 0$$

puisque g n'est pas diviseur de zéro dans $\mathscr{A}$. on a donc l'égalité $\mathrm{long}(\mathscr{O}_{V,y}/(fg)) = \mathrm{long}(\mathscr{O}_{V,y}/(f)) + \mathrm{long}(\mathscr{O}_{V,y}/(g))$, d'où l'assertion d'après le lemme 13.7.2. □

Proposition 13.7.4. — a) *La formule $f \mapsto \mathrm{div}(f)$ définit un morphisme de G-faisceaux en monoïdes abéliens du G-faisceau des fonctions analytiques régulières sur X dans le G-faisceau des cycles effectifs sur X.*

b) *Ce morphisme de faisceaux se prolonge de manière unique en un morphisme de G-faisceaux en groupes abéliens du G-faisceau des fonctions méromorphes régulières sur X dans le G-faisceau des cycles sur X.*

Démonstration. — (1) Soit V et W des domaines analytiques de X tels que $W \subset V$. Pour toute fonction analytique régulière f sur V, $f|_W$ est une fonction analytique régulière sur W et $\mathrm{div}(f|_W) = [\{f|_W = 0\}] = [\{f = 0\}]|_W = \mathrm{div}(f)|_W$. Cela prouve que cette formule définit un morphisme de G-faisceaux ; d'après le lemme 13.7.3, c'est un morphisme de G-faisceaux en monoïdes.

L'assertion (2) en découle par définition du faisceau des fonctions méromorphes sur X. □

§ 13.8. EXTENSIONS D'ABHYANKAR ET LEUR DÉFAUT

On fixe un corps ultramétrique complet k.

13.8.1. — Soit F une extension de type fini de k, de degré de transcendance d. Soit $|\cdot|$ une valeur absolue ultramétrique sur F, prolongeant celle de k. Soit X un k-schéma intègre de corps des fonctions F et soit x le point de X^{an} situé au-dessus du point générique de X et défini par la valeur absolue $|\cdot|$ de F. Rappelons (10.8.5) que le degré de transcendance gradué de $\widetilde{F}$ sur $\widetilde{k}$ est majoré par d et que l'extension valuée F de k est dite d'Abhyankar si on a égalité, auquel cas $\widetilde{F}$ est de type fini sur $\widetilde{k}$. Comme $\mathscr{H}(x)$ est le complété de $(F, |\cdot|)$, l'extension valuée F de k est d'Abhyankar si et seulement si $d_k(x) = d$.

Définition 13.8.2. — *Soit k un corps ultramétrique complet et L une extension complète de k. Nous dirons que L est d'Abhyankar sur k s'il existe un espace k-analytique X, un point x de X tel que $d_k(x) = \dim_x(X)$ et un k-isomorphisme $\mathscr{H}(x) \simeq_k L$ d'extensions complètes de k.*

Si L est une extension complète d'Abhyankar de k, un triplet $(X, x, \mathscr{H}(x) \simeq_k L)$ comme ci-dessus sera appelé une *présentation analytique* de L sur k. Par abus, nous omettrons le plus souvent de mentionner l'isomorphisme $\mathscr{H}(x) \simeq_k L$ et dirons simplement que (X, x) est une présentation analytique de L sur k.

Exemple 13.8.3. — Soit $(F, |\cdot|)$, X et x comme dans 13.8.1. Si l'extension valuée F de k est d'Abhyankar alors l'extension complète $\widehat{F}$ de k est d'Abhyankar, et (X^{an}, x) en est une présentation analytique sur k.

13.8.4. — Soit L une extension complète d'Abhyankar de k et soit (X, x) une présentation analytique de L sur k. On a

$$\deg.\,\mathrm{tr}_{\tilde{k}}(\tilde{L}) = \deg.\,\mathrm{tr}_{\tilde{k}}(\widetilde{\mathscr{H}(x)}) = d_k(x) = \dim_x(X).$$

Nous noterons aussi $d_k(L)$ cet entier.

Comme $d_k(x) = \dim_x X$ on a $\dim_{\mathrm{c}}(X_{\mathrm{G}}, x) = \dim_x X$. Par conséquent, si Y est un sous-espace analytique fermé d'un domaine analytique de X tel que $x \in Y$ alors $\dim_x Y = \dim_x X$, si bien que (Y, x) est encore une présentation analytique de L sur k. En particulier, (X_{red}, x) est une présentation analytique de L sur k. Si U désigne le lieu normal de X_{red} alors U contient x car l'anneau local artinien réduit $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{red,G}},x}$ est un corps, et (U, x) est encore une présentation analytique de L sur k. Choisissons enfin un domaine affinoïde V connexe de U contenant x. Le domaine V est normal, connexe et non vide, et donc intègre ; et le couple (V, x) est encore une présentation analytique de L sur k. Notons que la dimension de V est alors égale à $\dim_x V$, donc à $d_k(L)$.

13.8.5. — Soit L une extension complète d'Abhyankar de k. Une famille (t_i) d'éléments de L est une *base d'Abhyankar* de L sur k si les $\widetilde{t_i}$ forment une base de transcendance de $\widetilde{L}$ sur $\widetilde{k}$. Cela revient à demander que le cardinal de la famille soit égal à $d_k(L)$ et que

$$\left|\sum a_I t^I\right| = \sup_I |a_I| \cdot |t|^I$$

pour toute famille (a_I) d'éléments presque tous nuls de k. Supposons que ce soit le cas et posons $r = (|t_1|, \ldots, |t_r|)$. Il existe alors un unique isomorphisme d'extensions complète de k de $\widehat{k(t)}$ sur $\mathscr{H}(\eta_r)$ qui envoie t_i sur $T_i(\eta_r)$ pour tout i.

Lemme 13.8.6. — *Soit L une extension d'Abhyankar de k et soit (X, x) une présentation analytique de L. Soit $t = (t_1, \ldots, t_n)$ une base d'Abhyankar de L sur k. Pour tout i, posons $r_i = |t_i|$. Soit $\varepsilon > 0$.*

a) *Il existe un domaine affinoïde V de X contenant x, des fonctions analytiques $f_1, \ldots, f_n$ telles que $|f_i(x) - t_i| < \varepsilon$ pour tout i.*

Supposons désormais que $\varepsilon \leqslant |t_i|$ pour tout i.

b) *Le point $f(x)$ de $\mathbf{A}^n_k$ est égal à η_r, autrement dit, $(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ est une base d'Abhyankar de $\mathscr{H}(x)$ sur k.*

c) *Les sous-corps $\widehat{k(t)}$ et $\mathscr{H}(\eta_r)$ de $\mathscr{H}(x)$ sont des extension complètes de k isomorphes, les degrés $[\mathscr{H}(x) : \widehat{k(t)}]$ et $[\mathscr{H}(x) : \mathscr{H}(\eta_r)]$ sont égaux, et finis.*

d) *Les sous-corps résiduels* $\widetilde{\mathscr{H}(\eta_r)}$ *et* $\widetilde{k(t)}$ *de* $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ *sont égaux.*

Démonstration. — Pour démontrer le lemme, on peut remplacer X par n'importe lequel de ses domaines analytiques contenant x. Cela permet de supposer que $\dim X = \dim_x X = n$ et que X est affinoïde. Alors, X est presque bon en x. Quitte à restreindre encore X, on peut donc supposer qu'il existe n fonctions analytiques $f_1, \dots, f_n$ sur X telles que $|f_i(x) - t_i| < \varepsilon$ pour tout i. Cela démontre a).

Supposons maintenant que $\varepsilon \leqslant |t_i|$ pour tout i. Alors $\widetilde{f_i(x)} = \widetilde{t_i}$ pour tout i, si bien que les $f_i(x)$ forment une base d'Abhyankar de L sur k. Le morphisme $f\colon X \to \mathbf{A}^n_k$ identifie $\mathscr{H}(\eta_r)$ au sous-corps complet de $\mathscr{H}(x)$ engendré par les $f_i(x)$ sur k. Il existe de plus un unique k-isomorphisme de corps valués de $\widehat{k(t)}$ sur $\mathscr{H}(\eta_r)$ qui applique t_i sur $f_i(x)$ pour tout i. Comme l'extension L de k est d'Abhyankar, le corps gradué $\widetilde{\mathscr{H}(L)}$ est engendré sur $\tilde{k}$ par les $\widetilde{t_i}$; et $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ est engendré sur sur $\tilde{k}$ par les $\widetilde{f_i(x)}$. Cela prouve d).

Comme $d_k(\eta_r) = n$ et $\dim(X) = n$, la fibre $f^{-1}(\eta_r)$ est de dimension nulle. en particulier, $\mathscr{H}(x)$ est finie sur $\mathscr{H}(\eta_r)$. L'égalité des degrés dans c) se déduit de [**132**, Theorem 3.1.9] et [**129**, Lemma 6.3.3]. □

Définition 13.8.7. — *Soit F le complété d'une clôture algébrique de k. Nous dirons qu'une extension complète K de k est* presque algébrique *si elle admet un k-plongement isométrique dans F.*

Cela ne dépend bien sûr pas du choix de F.

Proposition 13.8.8. — *Soit L une extension d'Abhyankar de k et soit K une extension complète presque algébrique de k. Soit (X, x) une présentation analytique de L et soit $\pi\colon X_K \to X$ le morphisme canonique.*

a) *$L\widehat{\otimes}_k K$ est artinien.*

b) *Pour tout $y \in \pi^{-1}(x)$ l'application composée*

$$L\widehat{\otimes}_k K \simeq \mathscr{H}(x)\widehat{\otimes}_k K \to \mathscr{H}(y)$$

est surjective.

c) *Pour tout $y \in \pi^{-1}(x)$, notons $\mathfrak{m}_y$ le noyau de la surjection de $L\widehat{\otimes}_k K \to \mathscr{H}(y)$ définie ci-dessus. L'application $y \mapsto \mathfrak{m}_y$ établit une bijection entre $\pi^{-1}(y)$ et* $\operatorname{Spec}(L\widehat{\otimes}_k K)$.

d) *Pour tout $y \in \pi^{-1}(y)$ le corps gradué $\widetilde{\mathscr{H}(y)}$ est fini sur son sous-corps $\widetilde{L} \cdot \widetilde{K}$.*

e) *Pour tout $y \in \pi^{-1}(y)$, la longueur de l'anneau local artinien $(L\widehat{\otimes}_k K)_{\mathfrak{m}_y}$ est égale à la multiplicité générique de $X_{\mathrm{red},K}$ le long de l'unique composante irréductible de X_K qui contient y.*

f) *Supposons que K est le complété d'une extension quasi-galoisienne de k. Le groupe* $\operatorname{Aut}(K/k)$ *agit transitivement sur* $\operatorname{Spec}(L\widehat{\otimes}_k K)$.

Démonstration. — Pour démontrer la proposition, on peut supposer que X est réduit. On peut également le remplacer par n'importe lequel de ses domaines analytiques contenant x. Cela permet de supposer de plus que $\dim X = \dim_x X = n$ et que X est affinoïde et qu'il existe n fonctions analytiques $f_1, \dots, f_n$ sur X telles que les $f_i(x)$ forment une base d'Abhyankar de $\mathscr{H}(x)$ sur k. Dans la suite de la preuve, nous identifions L à $\mathscr{H}(x)$. Pour tout i, $r_i = f_i(x)$; le point $f(x)$ de $\mathbf{A}^n_k$ est donc égal à η_r.

Comme $d_k(\eta_r) = n$ et que X est de dimension n, la fibre $f^{-1}(\eta_r)$ est de dimension nulle ; en particulier, $\mathscr{H}(x)$ est finie sur $\mathscr{H}(\eta_r)$. Comme $f^{-1}(\eta_r)$ est ensemblistement

fini, on peut (en remplaçant X par un voisinage affinoïde convenable de x) supposer que x est l'unique antécédent de η_r sur X. L'espace X étant affinoïde et réduit, il résulte du théorème 6.3.7 de **[52]** que la fibre $f^{-1}(\eta_r)$ est réduite, ce qui veut dire qu'elle s'identifie à $\mathscr{M}(\mathscr{H}(x))$.

Notons $\eta_{K,r}$ le point squelettique de $\mathbf{A}^n_K$ de paramètre r ; comme K est presque algébrique sur k, ce point $\eta_{K,r}$ est l'unique antécédent de η_r sur $\mathbf{A}^n_K$, si bien que $\pi^{-1}(x) = f^{-1}(\eta_{K,r})$ et $\mathscr{H}(\eta_{K,r}) = \mathscr{H}(\eta_r)\widehat{\otimes}_k K$ (corollaire 12.1.8, b)).

On a par ailleurs

$$\begin{aligned}\mathscr{H}(x)\widehat{\otimes}_k K &= \mathscr{H}(x)\widehat{\otimes_{\mathscr{H}(\eta_r)}}(\mathscr{H}(\eta_r)\widehat{\otimes}_k K)\\ &= \mathscr{H}(x) \otimes_{\mathscr{H}(\eta_r)} \mathscr{H}(\eta_{K,r}),\end{aligned}$$

d'où il résulte que $\mathscr{H}(x)\widehat{\otimes}_k K$ s'identifie à l'anneau des fonctions de la fibre $f^{-1}(\eta_{K,r})$. C'est par conséquent une K-algèbre finie, et en particulier un anneau artinien, dont l'ensemble des idéaux maximaux s'identifie *via* les applications d'évaluation à la fibre $f^{-1}(\eta_{K,r}) = \pi^{-1}(x)$, ce qui montre a),b) et c). Soit y un point de $\pi^{-1}(x)$. Le corps gradué $\widetilde{\mathscr{H}(y)}$ est fini sur $\widetilde{\mathscr{H}(\eta_{K,r})} = \widetilde{K}\cdot\widetilde{\mathscr{H}(\eta_r)}$; il l'est a fortiori sur $\widetilde{K}\cdot\widetilde{\mathscr{H}(x)}$, d'où d). Le facteur local de $\mathscr{H}(x)\widehat{\otimes}_k K$ correspondant à y est alors $\mathscr{O}_{f^{-1}(\eta_{K,r}),y}$, et le morphisme canonique de $\mathscr{O}_{X_K,y}$ vers $\mathscr{O}_{f^{-1}(\eta_{K,r}),y}$ est régulier d'après le théorème 6.3.7 de **[52]** (parce que X est réduit). Le corollaire 13.2.2 assure alors que la longueur de $\mathscr{O}_{f^{-1}(\eta_{K,r}),y}$ est égale à celle de $\mathscr{O}_{X_K,y}$, d'où e).

Supposons maintenant que K est le complété d'une extension quasi-galoisienne de k. Le groupe $\mathrm{Aut}(K/k)$ agit alors transitivement sur les fibres de π, si bien que f) se déduit de c). □

Proposition 13.8.9. — *Soit L une extension complète de k qui est d'Abhyankar. Soit K une extension complète presque algébrique de k qui est stable et qui est le complété d'une extension algébrique quasi-galoisienne de k. Désignons par ℓ la longueur de l'anneau artinien $L\widehat{\otimes}_k K$ et par $\widetilde{\ell}$ celle de l'anneau gradué artinien $\widetilde{L}\otimes_{\widetilde{k}}\widetilde{K}$.*

Soit $t = (t_1,\dots,t_n)$ une base d'Abhyankar de L sur k.

L'extension L de $\widehat{k(t)}$ est finie et son défaut est égal à

$$\ell[\widetilde{F} : (\widetilde{L}\cdot\widetilde{K})]/\widetilde{\ell},$$

pour tout corps résiduel F de $L\widehat{\otimes}_k K$.

Démonstration. — Choisissons une présentation analytique (X,x) de L. D'après le lemme 13.8.6, on peut supposer qu'il existe un morphisme $f\colon X \to \mathbf{A}^n_k$ tel que $|f_i(x) - t_i| < |t_i|$ pour tout i. Alors, les extensions $K/\widehat{k(t)}$ et $K/\widehat{k(f(x))}$ sont finies, ont même degré et même degré résiduel ; elles ont donc même défaut.

On peut ainsi supposer que $t_i = f_i(x)$ pour tout i. Le point $f(x)$ de $\mathbf{A}^n_k$ est alors égal à η_r, où $r = (|t_1|,\dots,|t_n|)$. Le morphisme f est dimension nulle en x ; quitte à restreindre X, on peut supposer que $f^{-1}(\eta_r) = \{x\}$.

Notons $\pi\colon X_K \to X$ le morphisme de changement de base.

D'après la proposition 13.8.8, f), les différents corps résiduels F de l'anneau artinien $L\widehat{\otimes}_k K$ sont permutés par $\mathrm{Aut}(K/k)$, de sorte que les différents degrés résiduels $[\widetilde{F} : (\widetilde{L}\cdot\widetilde{K})]$ sont égaux à un même entier $\widetilde{d}$. D'après la proposition 13.8.8, c), ces

corps F sont de la forme $\mathscr{H}(y)$, pour un unique point $y \in \pi^{-1}(x)$, et l'assertion d) affirme que les degrés résiduels considérés sont finis.

Notons δ le défaut de $\mathscr{H}(x)$ sur $\mathscr{H}(\eta_r)$.

Il reste à démontrer que l'on a $\delta = \ell\widetilde{d}/\widetilde{\ell}$. On a :

$$\delta = \frac{[\mathscr{H}(x) : \mathscr{H}(\eta_r)]}{[\widetilde{\mathscr{H}(x)} : \widetilde{\mathscr{H}(\eta_r)}]} = \frac{[(\mathscr{H}(x) \otimes_{\mathscr{H}(\eta_r)} \mathscr{H}(\eta_{K,r})) : \mathscr{H}(\eta_{K,r})]}{[(\widetilde{\mathscr{H}(x)} \otimes_{\widetilde{\mathscr{H}(\eta_r)}} \widetilde{\mathscr{H}(\eta_{K,r})}) : \widetilde{\mathscr{H}(\eta_{K,r})}]}.$$

Fixons un point $y \in f^{-1}(\eta_{K,r})$ et posons $d = [\mathscr{H}(y) : \mathscr{H}(\eta_{K,r})]$.

Puisque les points de $f^{-1}(\eta_{K,r})$ sont permutés par $\mathrm{Aut}(K/k)$, on a

$$\begin{aligned}[(\mathscr{H}(x) \otimes_{\mathscr{H}(\eta_r)} \mathscr{H}(\eta_{K,r})) : \mathscr{H}(\eta_{K,r})] &= \sum_{z \in f^{-1}(\eta_{K,r})} [\mathscr{H}(z) : \mathscr{H}(\eta_{K,r})] \\ &= \ell[\mathscr{H}(y) : \mathscr{H}(\eta_{K,r})] = \ell d.\end{aligned}$$

Comme K est stable, $\mathscr{H}(\eta_{K,r})$ l'est aussi, et l'entier d est donc égal à $[\widetilde{\mathscr{H}(y)} : \widetilde{\mathscr{H}(\eta_{K,r})}]$.

Par un calcul explicite (il s'agit de corps gradués de fractions rationnelles, et $\widetilde{K}$ est algébrique sur $\widetilde{k}$), on a $\widetilde{\mathscr{H}(\eta_{K,r})} = \widetilde{\mathscr{H}(\eta_r)} \otimes_{\widetilde{k}} \widetilde{K}$. Alors,

$$[(\widetilde{\mathscr{H}(x)} \otimes_{\widetilde{\mathscr{H}(\eta_r)}} \widetilde{\mathscr{H}(\eta_{K,r})}) : \widetilde{\mathscr{H}(\eta_{K,r})}] = \widetilde{\ell} \cdot [\widetilde{\mathscr{H}(x)} \cdot \widetilde{\mathscr{H}(\eta_{K,r})} : \widetilde{\mathscr{H}(\eta_r)}],$$

où $\widetilde{\mathscr{H}(x)} \cdot \widetilde{\mathscr{H}(\eta_{K,r})}$ est le sous-corps de $\widetilde{\mathscr{H}(y)}$ composé de $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ et $\widetilde{\mathscr{H}(\eta_{K,r})}$, car $\mathrm{Aut}(\widetilde{K}/\widetilde{k})$ agit transitivement sur les corps résiduels gradués de l'algèbre artinienne graduée $\widetilde{\mathscr{H}(x)} \otimes_{\widetilde{\mathscr{H}(\eta_r)}} \widetilde{\mathscr{H}(\eta_{K,r})}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{[(\mathscr{H}(x) \otimes_{\mathscr{H}(\eta_r)} \mathscr{H}(\eta_{K,r})) : \mathscr{H}(\eta_{K,r})]}{[(\widetilde{\mathscr{H}(x)} \otimes_{\widetilde{\mathscr{H}(\eta_r)}} \widetilde{\mathscr{H}(\eta_{K,r})}) : \widetilde{\mathscr{H}(\eta_{K,r})}]} \\ &= \frac{\ell d}{\widetilde{\ell} \cdot [(\widetilde{\mathscr{H}(x)} \cdot \widetilde{\mathscr{H}(\eta_{K,r})}) : \widetilde{\mathscr{H}(\eta_r)}]} \\ &= \frac{\ell}{\widetilde{\ell}} \frac{[\widetilde{\mathscr{H}(y)} : \widetilde{\mathscr{H}(\eta_{K,r})}]}{[(\widetilde{\mathscr{H}(x)} \cdot \widetilde{\mathscr{H}(\eta_{K,r})}) : \widetilde{\mathscr{H}(\eta_r)}]}.\end{aligned}$$

Or, dans $\widetilde{\mathscr{H}(y)}$, on a

$$\widetilde{\mathscr{H}(x)} \cdot \widetilde{\mathscr{H}(\eta_{K,r})} = \widetilde{\mathscr{H}(x)} \cdot (\widetilde{\mathscr{H}(\eta_r)} \otimes_{\widetilde{k}} \widetilde{K}) = \widetilde{\mathscr{H}(x)} \cdot \widetilde{K},$$

de sorte que

$$\frac{[\widetilde{\mathscr{H}(y)} : \widetilde{\mathscr{H}(\eta_{K,r})}]}{[(\widetilde{\mathscr{H}(x)} \cdot \widetilde{\mathscr{H}(\eta_{K,r})}) : \widetilde{\mathscr{H}(\eta_r)}]} = \frac{[\widetilde{\mathscr{H}(y)} : \widetilde{\mathscr{H}(\eta_{K,r})}]}{[(\widetilde{\mathscr{H}(x)} \cdot \widetilde{K}) : \widetilde{\mathscr{H}(\eta_r)}]} = [\widetilde{\mathscr{H}(y)} : (\widetilde{\mathscr{H}(x)} \cdot \widetilde{K})].$$

Ainsi,

$$\delta = \ell[\widetilde{\mathscr{H}(y)} : (\widetilde{\mathscr{H}(x)} \cdot \widetilde{K})]/\widetilde{\ell},$$

comme il fallait démontrer. □

Théorème 13.8.10. — *Soit L une extension d'Abhyankar de k et soit (X, x) une présentation analytique de L. Le corps L est une extension finie de $\widehat{k(t)}$ et son défaut ne dépend pas de t.*

Démonstration. — Le fait que L soit une extension finie de $\widehat{k(t)}$ a été démontré dans le lemme 13.8.6. Soit K le complété d'une clôture algébrique de k ; c'est une extension quasi-galoisienne de k qui est stable. Le défaut de L sur $\widehat{k(t)}$ a été calculé dans la proposition précédente et la formule obtenue ne dépend pas de t. □

Définition 13.8.11. — *Soit L une extension d'Abhyankar de k. On appelle* défaut *de l'extension d'Abhyankar L le défaut commun des extensions finies $L/\widehat{k(t)}$, lorsque t parcourt l'ensemble des bases d'Abhyankar de L sur k. On le note* $\mathrm{def}_k(L)$.

Lorsque L est une extension finie de k, c'est une extension d'Abhyankar avec $d_k(L) = 0$, la famille vide étant une base d'Abhyankar de L sur k (et même la seule !). Le défaut $\mathrm{def}_k(L)$ que nous avons introduit coïncide donc avec la notion classique.

Soit X un espace k-analytique et soit x un point de X tel que $d_k(x) = \dim_x(X)$. Par définition, l'extension d'Abhyankar $\mathscr{H}(x)$ de k est d'Abhyankar ; son défaut est noté $\mathrm{def}_k(x)$.

13.8.12. — Soit L une extension complète de k qui est d'Abhyankar et soit t une base d'Abhyankar de L sur k.

Soit $r = (r_1, \dots, r_m)$ une famille de réels strictement positifs. Pour tout corps ultramétrique complet F, notons F_r le complété de $F(s_1, \dots, s_m)$ pour la norme de Gauss de paramètre r (c'est aussi le corps $\mathscr{H}(\eta_{F,r})$ où $\eta_{F,r}$ est le point squelettique de $\mathbf{G}^m_{\mathrm{m},F}$ de paramètre r). Soit s la base d'Abhyankar standard de k_r sur k.

Alors la réunion de s et t est une base d'Abhyankar de L_r sur k, si bien que t est une base d'Abhyankar de L_r sur k_r, et l'on a $\widehat{k_r(t)} \simeq \widehat{k(t)}_r$. Le degré de L_r sur $\widehat{k_r(t)}$ est donc égal à celui de L sur $\widehat{k(t)}$, et l'on a

$$\widetilde{L_r} = \widetilde{L}(\widetilde{s}) = \widetilde{L} \otimes_{\widetilde{k(t)}} \widetilde{k}(\widetilde{t})(\widetilde{s}) = \widetilde{L} \otimes_{\widetilde{k(t)}} \widetilde{k_r(t)},$$

si bien que le degré résiduel (gradué) de L_r sur $\widehat{k_r(t)}$ est égal est égal à celui de L sur $\widehat{k(t)}$.

Cela démontre l'égalité $\mathrm{def}_{k_r}(L_r) = \mathrm{def}_k(L)$; autrement dit, le défaut de L_r sur $\widehat{k_r(t)}$ est égal à celui de L sur $\widehat{k(t)}$.

CHAPITRE 14

CALIBRAGE CANONIQUE D'UN ESPACE ANALYTIQUE

---

§ 14.1. CELLULES COMMODES ET MOMENTS AGRÉABLES

Définition 14.1.1. — *Soit X un espace analytique de niveau n, soit $f\colon X \to T$ un moment et soit C une partie de X. On dit C est une* f-cellule *si $C \subset \Sigma_f$ et si c'est une f-cellule de l'espace paralinéaire Σ_f.*

Toute f_{trop}-cellule de l'espace vertébré X au sens de la définition 5.4.1 est une f-cellule, car $\Sigma_f^{(n)} \subset \Sigma_f$. Inversement, toute f-cellule C qui est contenue dans $\Sigma_f^{(n)}$ est une f_{trop}-cellule ; c'est en particulier le cas dès que $\dim(C) = n$ ou que $C \subset \mathrm{Int}(X)$.

Une f-cellule de X est une partie squelettique de X ; elle est connexe et non vide, donc est contenue dans une unique composante connexe de X, et même dans une unique composante irréductible de dimension n de X, car une partie squelettique connexe non vide est contenue dans une unique composante irréductible de dimension n de X.

Remarque 14.1.2. — Soit C une partie de X et soit $f\colon X \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$ un moment. Si f_{trop} induit un homéomorphisme de C sur une cellule *de dimension n* de $\mathbf{R}^m$, alors c'est une f_{trop}-cellule au sens de la définition 5.4.1, donc une f-cellule.

Définition 14.1.3. — *Soit X un espace k-analytique de niveau n, soit $f\colon X \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$ un moment. Soit C une f-cellule. On dit que C est* commode *si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

a) *On a $\dim(C) < n$;*
b) *La cellule $\overset{\circ}{C}$ est ouverte dans $\Sigma_f \cap \mathrm{Int}(X)$.*

Remarques 14.1.4. — a) Soit C une f-cellule commode. Supposons que la seconde condition d'une f-cellule commode soit satisfaite. D'après le théorème 12.8.2, $\Sigma_f \cap \mathrm{Int}(X) = \Sigma_f^{(n)}$ est purement de dimension n, si bien que $\overset{\circ}{C}$ est de dimension n. et $C \subset \Sigma_f^{(n)}$. En particulier, les deux conditions de la définition sont exclusives l'une de l'autre.

Notons que l'on a $\overset{\circ}{C} \subset \Sigma_f^{(n)} \cap \mathrm{Int}(X)$, qui est un ouvert de $\Sigma_f \cap \mathrm{Int}(X)$. Cependant, la condition imposée dans la définition est plus forte.

b) Soit Σ une partie squelettique de X qui est une partie ouverte de Σ_f. Soit $\mathscr{C}$ une décomposition cellulaire de Σ en f-cellules. Supposons que l'intérieur $\mathring{C}$ de toute cellule $C \in \mathscr{C}$ de dimension n soit disjointe du bord $\partial(X)$ de X. Alors, toute cellule de $\mathscr{C}$ est commode.

En effet, les n-cellules ouvertes de $\mathscr{C}$ sont ouvertes dans Σ, donc dans Σ_f.

En particulier, si X est sans bord, toute cellule d'une décomposition cellulaire en f-cellules est commode.

Lemme 14.1.5. — *Soit X un espace analytique de niveau n, soit $f\colon X \to T$ un moment, soit Σ un sous-espace paralinéaire paracompact de Σ_f. Il existe une décomposition cellulaire $\mathscr{C}$ de Σ en f-cellules commodes.*

Rappelons que l'hypothèse de paracompacité est nécessaire, car tout espace paralinéaire qui possède une décomposition cellulaire est paracompact.

Démonstration. — Posons $P = \partial(X) \cap \Sigma$ et démontrons d'abord que P est contenu dans un sous-espace paralinéaire de dimension $< n$. Comme Σ est paracompact, il existe un ensemble $\mathscr{V}$ de domaines analytiques compacts de X tel que la famille $(V \cap \Sigma)$ soit un G-recouvrement localement fini de Σ. Pour tout $V \in \mathscr{V}$, on a comme $P \cap V \subset \partial(V) \cap \Sigma$, il existe un sous-espace paralinéaire Q_V de dimension $< n$, fermé et contenu dans V, tel que $P \cap V \subset Q_V$ (lemme 12.4.4). La réunion Q de ces sous-espaces Q_V, lorsque V parcourt $\mathscr{V}$, est un sous-espace paralinéaire de dimension $\leqslant n-1$ de Σ.

Comme Σ est connexe et paracompact, il est dénombrable à l'infini. D'après le corollaire 2.1.8, il possède un voisinage ouvert Σ' dans Σ_f qui est encore dénombrable à l'infini, et en particulier paracompact.

L'application $f_{\mathrm{trop}}\colon \Sigma_f \to T_{\mathrm{trop}}$ est une immersion par morceaux. Considérons alors une décomposition cellulaire $\mathscr{C}'$ de Σ', adaptée à Q et à Σ, telle que $(\mathscr{C}, (f|_C))$ soit un atlas cellulaire (proposition 2.2.13 et remarque 2.2.12). En particulier, les cellules de $\mathscr{C}'$ sont des f-cellules. D'après la remarque 14.1.4, *b*), toutes les cellules de $\mathscr{C}'$ sont commodes.

Les cellules de $\mathscr{C}'$ qui sont contenues dans Σ constituent la décomposition cellulaire $\mathscr{C}$ cherchée. □

Corollaire 14.1.6. — *Soit $f\colon X \to T$ un moment et soit Σ un sous-espace paralinéaire de Σ_f. Les f-cellules de Σ qui sont commodes forment un G-recouvrement de Σ.*

Démonstration. — Comme tout point de X possède une base d'ouverts paracompacts, on peut supposer que X est paracompact. Alors, Σ_f est paracompact, donc Σ est paracompact. Il possède donc une décomposition cellulaire en f-cellules commodes, et elles constituent un G-recouvrement de X. □

Définition 14.1.7. — *Soit X un espace analytique de niveau n. On dit qu'un moment $f\colon X \to T$ est* agréable *si la carte G-tropicale (X, f_{trop}) est agréable.*

Rappelons (définition 5.4.3) que cela signifie que $f_{\mathrm{trop}}(\Sigma_f^{(n)})$ est un sous-espace paralinéaire de T_{trop} et que la restriction de f_{trop} à $\Sigma_f^{(n)}$ est compacte sur son image.

Tout moment propre est agréable.

Pour qu'un moment f soit agréable, il suffit que $\Sigma_f^{(n)}$ possède une décomposition cellulaire finie en f-cellules. Les deux propositions suivantes fournissent deux exemples importants.

Proposition 14.1.8. — *Si X est un espace k-analytique compact de niveau n, tout moment sur X est agréable.*

Démonstration. — C'est un cas particulier du §5.4.4. □

Proposition 14.1.9. — *Soit X un k-schéma de type fini de dimension $\leqslant n$; on considère l'espace X^{an} comme un espace analytique de niveau n. Soit T un k-tore et soit $f\colon X \to T$ un morphisme de k-schémas.*

a) *On a $\Sigma_f^{(n)} = \Sigma_f$ et $f_{\mathrm{trop}}(X^{\mathrm{an}})^{(n)} = f_{\mathrm{trop}}(\Sigma_f)$.*

b) *Le sous-espace paralinéaire $\Sigma_f^{(n)}$ de X^{an} possède une décomposition cellulaire finie en f^{an}-cellules commodes.*

c) *En particulier, le moment $f\colon X^{\mathrm{an}} \to T^{\mathrm{an}}$ est agréable.*

Notons que, X^{an} étant sans bord, $\Sigma_f^{(n)}$ coïncide avec Σ_f sur toute composante irréductible de dimension n, et est vide ailleurs.

Démonstration. — On sait que $f_{\mathrm{trop}}(X^{\mathrm{an}})$ est un sous-espace paralinéaire de T_{trop}, équidimensionnel ; si cette dimension m vérifie $m < n$, alors Σ_f est vide et il n'y a rien à démontrer. Supposons que $f_{\mathrm{trop}}(X^{\mathrm{an}})$ soit de dimension n et démontrons que l'on a $f_{\mathrm{trop}}(X^{\mathrm{an}}) = f_{\mathrm{trop}}(\Sigma_f)$. L'inclusion $f_{\mathrm{trop}}(\Sigma_f) \subset f_{\mathrm{trop}}(X^{\mathrm{an}})$ est évidente.

Il existe un ouvert dense U de X, pour la topologie de Zariski, et un moment $g\colon U \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$ tel que g_{trop} soit injective en restriction à Σ_f (**[50]**, proposition 2.7). Il existe d'autre part un ouvert dense U' de U, toujours pour la topologie de Zariski, et un moment $g'\colon U' \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$ qui est une immersion fermée. (Les ouverts « très affines » forment une base d'ouverts de X.) Notons h le moment (f, g, g') sur U' et q la projection de $T \times \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m \times \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{m'}$ sur T ; on a $f = q \circ h$. Par construction, h est une immersion fermée et h_{trop} est injective sur Σ_f.

On a $\Sigma_f = \Sigma_{f|_{U'}}$, et $h_{\mathrm{trop}}(U'^{\mathrm{an}}) = h_{\mathrm{trop}}(X^{\mathrm{an}})$ et $f_{\mathrm{trop}}(U'^{\mathrm{an}}) = f_{\mathrm{trop}}(X^{\mathrm{an}})$ (cf. **[50]**, théorème 1.2, assertions A et B). On peut donc remplacer X par U' ; posons aussi $S = T \times \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m \times \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{m'}$.

Comme X^{an} est sans bord, les espaces paralinéaires Σ_f et Σ_h sont purement de dimension n.

Le sous-espace paralinéaire Σ_f de Σ_h est l'ensemble des points en lesquels $f_{\mathrm{trop}}|_{\Sigma_h}$ est de dimension tropicale n.

Comme h est une immersion fermée, h^{an} est propre ; comme la tropicalisation standard d'un tore est un morphisme topologiquement propre, on en déduit que $h_{\mathrm{trop}}\colon X^{\mathrm{an}} \to S_{\mathrm{trop}}$ est topologiquement propre. Par suite, $h_{\mathrm{trop}}(X^{\mathrm{an}})^{(n)} = h_{\mathrm{trop}}(\Sigma_h)$ (théorème 12.8.2, *d*)).

On sait aussi (cf. **[50]**, loc. cit.) que $h_{\mathrm{trop}}(X^{\mathrm{an}})$ est un sous-espace paralinéaire fermé de S_{trop}, purement de dimension n, et qu'il possède une décomposition cellulaire finie $\mathscr{C}$.

La famille des cellules $C \in \mathscr{C}$ sur lesquelles q_{trop} est injective est une décomposition cellulaire d'un sous-espace paralinéaire $h_{\mathrm{trop}}(X^{\mathrm{an}})'$ de $h_{\mathrm{trop}}(X^{\mathrm{an}})$.

Comme h_{trop} est une immersion par morceaux et $f = q \circ h$, le morphisme $f_{\mathrm{trop}}|_{\Sigma_h}$ est de dimension tropicale n en un point x de Σ_h si et seulement si $q_{\mathrm{trop}}|_{h_{\mathrm{trop}}(X^{\mathrm{an}})}$ est de dimension tropicale n en $h_{\mathrm{trop}}(x)$. Cela prouve que $\Sigma_f = h_{\mathrm{trop}}^{-1}(h_{\mathrm{trop}}(X^{\mathrm{an}})')$. Comme $h_{\mathrm{trop}}|_{\Sigma_f}$ est injective, il en résulte que h_{trop} induit un isomorphisme paralinéaire de Σ_f sur $h_{\mathrm{trop}}(X^{\mathrm{an}})'$.

On a donc $f_{\mathrm{trop}}(X^{\mathrm{an}}) = f_{\mathrm{trop}}(X^{\mathrm{an}})^{(n)} = q_{\mathrm{trop}} \circ h_{\mathrm{trop}}(X^{\mathrm{an}})' = q_{\mathrm{trop}}(h_{\mathrm{trop}}(\Sigma_f)) = f_{\mathrm{trop}}(\Sigma_f)$, ce qui conclut la démonstration de l'assertion *a*).

Démontrons b). Dans la décomposition cellulaire finie de $h_{\mathrm{trop}}(X^{\mathrm{an}})$ introduite plus haut, la famille des cellules qui sont contenues dans $h_{\mathrm{trop}}(X^{\mathrm{an}})'$ constitue une décomposition cellulaire de $h_{\mathrm{trop}}(X^{\mathrm{an}})'$. On en déduit, par h_{trop}, une décomposition cellulaire finie de Σ_f. D'après la remarque 14.1.4, b), ses cellules sont toutes commodes, ce qui établit l'assertion b), et l'assertion c) en résulte. □

Proposition 14.1.10. — *Soit X un espace k-analytique de niveau n et soit $f\colon X \to T$ un moment sur X. Tout point de X possède un voisinage* ouvert U *tel que $f|_U$ soit un moment agréable.*

Démonstration. — Soit $x \in X$. Si $x \notin \Sigma_f^{(n)}$, le complémentaire $X - \Sigma_f^{(n)}$ convient. On suppose dans la suite que $x \in \Sigma_f^{(n)}$.

Soit V_1 un sous-espace paralinéaire compact de $\Sigma_f^{(n)}$ qui est un voisinage de x dans $\Sigma_f^{(n)}$. La fibre $V_1 \cap f_{\mathrm{trop}}^{-1}(f_{\mathrm{trop}}(x))$ de $f_{\mathrm{trop}}(x)$ sur V_1 est finie ; soit alors V_2 un voisinage paralinéaire compact de x dans $\mathring{V}_1$ tel que x soit le seul antécédent de $f_{\mathrm{trop}}(x)$ dans V_2. Notons $\partial(V_2)$ le bord de V_2 dans V_1 ; c'est un sous-espace paralinéaire fermé de V_2 qui ne contient pas x.

Soit $A = f_{\mathrm{trop}}(V_2) - f_{\mathrm{trop}}(\partial(V_2))$ et soit $W = f_{\mathrm{trop}}^{-1}(A) \cap V_2$. L'ensemble A est ouvert dans $f_{\mathrm{trop}}(V_2)$, donc W est ouvert dans V_2 ; en outre, W ne rencontre pas $\partial(V_2)$, donc il est ouvert dans V_1. Comme $V_2 \subset \mathring{V}_1$, W ne rencontre pas non plus le bord de V_1 dans $\Sigma_f^{(n)}$, donc est ouvert dans $\Sigma_n^{(f)}$.

L'application f_{trop} de W dans A est compacte et son image est un sous-espace paralinéaire de T_{trop}. Soit U une partie ouverte de X telle que $U \cap \Sigma_f^{(n)} = W$. On a $\Sigma_{f|_U}^{(n)} = \Sigma_f^{(n)} \cap U = W$, si bien que le moment $f|_U$ est agréable. □

Remarque 14.1.11. — Dans les deux cas précédents (compact, proposition 14.1.8, et algébrique, proposition 14.1.9), les polyèdres caractéristiques jouissent d'une propriété de modération particulièrement forte : on peut remplacer $\Sigma_f^{(n)}$ par Σ_f et la décomposition cellulaire peut être choisie finie ; dans le cas algébrique, le bord est même vide.

Proposition 14.1.12. — *Soit X un espace analytique de niveau n et soit $f\colon X \to T$ un moment agréable. Alors, $\Sigma_f^{(n)}$ est paracompact.*

Il existe une décomposition cellulaire $\mathscr{C}$ de $\Sigma_f^{(n)}$ en f-cellules commodes et une décomposition cellulaire forte $\mathscr{D}$ de $f_{\mathrm{trop}}(\Sigma_f^{(n)})$ tel que le couple $(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ soit adapté à l'immersion par morceaux compacte $f_{\mathrm{trop}}|_{\Sigma_f^{(n)}}$.

Enfin, pour tout couple $(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ comme ci-dessus, $f_{\mathrm{trop}}(\partial(X) \cap \Sigma_f^{(n)})$ est une partie fermée de $f_{\mathrm{trop}}(\Sigma_f^{(n)})$, contenue dans la réunion des cellules de dimension $\leqslant n-1$ de $\mathscr{D}$.

On dira qu'une décomposition cellulaire $\mathscr{C}$ de $\Sigma_f^{(n)}$ est *agréable* (relativement à f) s'il existe une décomposition cellulaire $\mathscr{D}$ (nécessairement unique) telle que le couple $(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ vérifie les conclusions de la proposition.

Démonstration. — L'espace $f_{\mathrm{trop}}(\Sigma_f^{(n)})$ est réunion d'une famille dénombrable de sous-espaces compacts, dont l'image réciproque par f_{trop} est compacte dans $\Sigma_f^{(n)}$, par définition

d'un moment agréable. Par suite, $\Sigma_f^{(n)}$ est réunion d'une famille dénombrable de sous-espaces compacts. Cela entraîne qu'il est paracompact.

D'après le lemme 14.1.5, il existe une décomposition cellulaire $\mathscr{C}_1$ de $\Sigma_f^{(n)}$ en f-cellules commodes. D'après la proposition 2.3.6, il existe une décomposition cellulaire $\mathscr{C}$ de $\Sigma_f^{(n)}$ qui raffine $\mathscr{C}_1$ et une décomposition cellulaire $\mathscr{D}$ adaptée à l'inclusion de $f_{\mathrm{trop}}(\Sigma_f^{(n)})$ dans T_{trop} tel que le couple $(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ soit adapté à l'immersion par morceaux compacte f_{trop}. Ses cellules sont des f-cellules commodes car la décomposition cellulaire $\mathscr{C}$ raffine $\mathscr{C}_1$.

La dernière assertion découle de la définition d'une cellule commode. □

§ 14.2. MOMENTS ET DEGRÉS

Lemme 14.2.1. — *Soit X un espace analytique de niveau n, soit $f\colon X \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ un moment. Alors, f est quasi-fini et plat en tout point de Σ_f.*

Démonstration. — Soit $x \in \Sigma_f$. On a $f(x) \in S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)$, donc $d_k(f(x)) = n$. D'après le lemme 11.5.1, le morphisme f est quasi-fini en x. Comme $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ est réduit, le théorème 10.3.7 de [**52**] entraîne que f est plat en x. □

Proposition 14.2.2. — *Soit X un espace analytique de niveau n, soit $f\colon X \to T$ un moment sur X et soit C une f-cellule commode de dimension n de X. Soit $q\colon T \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ un morphisme de tores tel que $q_{\mathrm{trop}}|_{f_{\mathrm{trop}}(C)}$ est injectif. Alors le morphisme $q \circ f$ est de dimension relative nulle en tout point de C et il existe un unique entier $d > 0$ tel que ce morphisme soit fini et plat de degré d en tout point de $\mathring{C}$.*

Démonstration. — Soit $q\colon T \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ un morphisme de tores tel que q_{trop} soit injectif sur $f_{\mathrm{trop}}(C)$. La dimension tropicale de $q \circ f$ est égale à n en tout point de C, donc $C \subset (q \circ f)^{-1}(S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n))$ d'après la prop. 12.2.8, (iv). D'après le lemme 11.5.1, le morphisme $q \circ f$ est de dimension relative nulle en tout point de C.

Comme $\mathring{C}$ ne rencontre pas $\partial(X)$, il résulte du lemme 11.6.5 que le morphisme $q \circ f$ est fini et plat en tout point de $\mathring{C}$; on a noté $\deg^x(q \circ f)$ son degré et il s'agit de démontrer que l'entier $\deg^x(q \circ f)$ est indépendant du point $x \in \mathring{C}$.

Soit D la cellule $\mathrm{sq}(q_{\mathrm{trop}}(f_{\mathrm{trop}}(C)))$ de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$. Si un point $x \in \mathrm{Int}(X)$ vérifie $q \circ f(x) \in \mathring{D}$, alors $q \circ f$ est de dimension tropicale n en x, donc f aussi, si bien que $x \in \Sigma_f^{(n)}$. Autrement dit, on a les inclusions

$$\mathring{C} \subset (q \circ f)^{-1}(\mathring{D}) \cap \mathrm{Int}(X) \subset \Sigma_f^{(n)}.$$

Soit maintenant $x \in \mathring{C}$. Par hypothèse, $\mathring{C}$ est ouvert dans $\Sigma_f^{(n)}$; il est donc ouvert dans $(q \circ f)^{-1}(\mathring{D}) \cap \mathrm{Int}(X)$. Comme $q \circ f$ est fini et plat en x, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathrm{Int}(X)$ et un voisinage ouvert V de $q \circ f(x)$ dans $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ tels que $q \circ f$ induise un morphisme fini et plat de degré $\deg^x(q \circ f)$ de U sur V, et tel que $(q \circ f)^{-1}(\mathring{D}) \cap U \subset \mathring{C}$. Un point $y \in \mathring{C} \cap U$ est alors le seul antécédent dans U de $q \circ f(y)$ par $q \circ f$; on a donc $\deg^y(q \circ f) = \deg^x(q \circ f)$ pour tout $y \in \mathring{C} \cap U$. La fonction $x \mapsto \deg^x(q \circ f)$ est localement constante sur l'ensemble $\mathring{C}$; comme celui-ci est connexe, elle est constante. □

Proposition 14.2.3. — *Soit X un espace k-analytique paracompact de niveau n et soit $f\colon X \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ un moment. Soit Σ un sous-espace paralinéaire paracompact de Σ_f. Il existe une décomposition cellulaire $\mathscr{C}$ de Σ en f-cellules telle que pour toute cellule $C \in \mathscr{C}$, l'application $x \mapsto \deg^x(f)$ soit finie et constante sur $\mathring{C}$.*

Rappelons que le degré $\deg^x(f)$ d'un morphisme f en un point x a été défini au §13.3.1 sans hypothèse de finitude ou de platitude. Il peut éventuellement être infini.

Démonstration. — Pour tout $x \in \Sigma_f$, on a $d_k(x) = n$, donc f est quasi-fini en x (lemme 11.5.1) ; cela prouve que $\deg^x(f)$ est fini.

Nous procédons alors par récurrence sur le niveau n, et supposons donc la proposition vraie en niveau $< n$. Puisque Σ est paracompact, il possède une décomposition cellulaire $\mathscr{D}$ constituée de f-cellules commodes (lemme 14.1.5).

Soit D une cellule de $\mathscr{D}$.

Si D est de dimension n, la proposition 14.2.2 assure que f est fini et plat de degré constant sur $\mathring{D}$; en particulier, la fonction $x \mapsto \deg^x(f)$ est constante sur $\mathring{D}$.

Supposons maintenant que $\dim(D) < n$. Il existe un domaine analytique compact V de X dont l'intersection avec Σ est égale à V (lemme 3.2.8 (e)) ; on a donc $D = \Sigma_{f|V}$. Comme D est une f-cellule, $f(D)$ est une partie du squelette canonique $S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)$, et $f(D)_{\mathrm{trop}}$ est une d-cellule forte Δ de $\mathbf{R}^n$. Il existe un automorphisme φ de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ tel que l'espace affine engendré par $\varphi_{\mathrm{trop}}(\Delta)$ soit défini par les $n-d$ égalités $x_{d+1} = \cdots = x_n = 0$. Quitte à changer f en $\varphi \circ f$, on se ramène au cas où φ est l'identité. La cellule D est ainsi contenue dans $f^{-1}(S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n) \cap p^{-1}(\eta_1))$, où p désigne la projection de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ sur les $n-d$ dernières composantes et où η_1 désigne, par abus, le point $\eta_{1,\dots,1}$ de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{n-d}$.

Notons V' la fibre $(p \circ f)^{-1}(\eta_1) \cap V$. Puisque $d_k(\eta_1) = n - d$, la dimension de V' est au plus $n - (n-d) = d$; on le considère comme un espace $\mathscr{H}(\eta_1)$-analytique de niveau d. Notons $f'\colon V' \to \mathbf{G}_{\mathrm{m},\mathscr{H}(\eta_1)}^d$ le morphisme d'espaces $\mathscr{H}(\eta_1)$-analytiques donné par $(f_1, \dots, f_d)$. On a $D = \Sigma_{f'}$. En effet, pour $x \in V'$, on a $x \in \Sigma_{f'}$ si et seulement si $\widetilde{f_1(x)}, \dots, \widetilde{f_d(x)}$ sont algébriquement indépendants sur $\widetilde{\mathscr{H}(\eta_1)}$; comme ce corps est transcendant pur engendré par les $\widetilde{f_i(x)}$ pour $i > d+1$, cela revient à exiger que $\widetilde{f_1(x)}, \dots, \widetilde{f_n(x)}$ soit algébriquement indépendant sur $\tilde{k}$, c'est-à-dire $x \in \Sigma_f$, soit encore $x \in D$ puisque $D = \Sigma_f \cap V$.

Puisque $d < n$, l'hypothèse de récurrence assure l'existence d'une décomposition cellulaire $\mathscr{D}_D$ de D telle que $x \mapsto \deg^x(f')$ soit constant sur toute cellule ouverte de $\mathscr{D}_D$. Comme les fibres de f' sont celles de f, on a $\deg^x(f') = \deg^x(f)$ pour tout $x \in D$. Par conséquent, $x \mapsto \deg^x(f)$ est constant sur toute cellule ouverte de $\mathscr{D}_D$.

Choisissons maintenant une décomposition cellulaire $\mathscr{D}'$ de la réunion des cellules D de $\mathscr{D}$ de dimension $< n$ et qui raffine chacune des $\mathscr{D}_D$.

La famille $\mathscr{C}$ formée des cellules de $\mathscr{D}'$ et des cellules de $\mathscr{D}$ qui sont de dimension n est une décomposition cellulaire de Σ. Elle répond aux exigences de l'énoncé. □

14.2.4. — Conservons les notations de la proposition précédente et notons d_C la valeur constante de $\deg^x(f)$ sur $\mathring{C}$. Comme $x \mapsto \deg^x(f)$ est semi-continue supérieurement, on a $d_D \leqslant d_C$ si $C \subset D$. Lorsque X est sans bord, on a des relations plus précises données par le théorème suivant qui montre, en outre, que toute décomposition cellulaire de Σ_f convient.

Théorème 14.2.5. — *Soit X un espace k-analytique de niveau n, sans bord, soit $f\colon X \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ un moment sur X et soit $\mathscr{C}$ une décomposition cellulaire de Σ_f en f-cellules.*

a) *Pour toute cellule C de $\mathscr{C}$, il existe un unique entier $d_C > 0$ tel que f soit fini et plat de degré d_C en tout point de $\mathring{C}$.*

b) *Soit $C \in \mathscr{C}$ et soit d un entier tel que $\dim(C) \leqslant d \leqslant n$. Soit Δ un ensemble non vide de cellules de $\mathscr{C}$ qui contiennent C, tel que $\bigcap_{D\in\Delta} f_{\mathrm{trop}}(D)$ soit une cellule de dimension d, et maximal pour cette propriété ; notons Δ^* l'ensemble de ses éléments minimaux. On a*

$$d_C = \sum_{D\in\Delta^*} d_D.$$

Démonstration. — Sous les hypothèses du théorème, toute cellule de $\mathscr{C}$ est une f-cellule commode (remarque 14.1.4, *b*)). D'après le lemme 11.6.5, le morphisme f est fini et plat en tout point de Σ_f ; le contenu du théorème est la constance du degré sur chaque cellule ouverte et une formule de récurrence pour ces degrés.

On démontre ces résultats par récurrence descendante sur $c = \dim(C)$. Lorsque $c = n$, la première assertion découle de la proposition 14.2.2, et la seconde revient à l'égalité triviale $d_C = d_C$, car on a alors nécessairement $d = n$ et $\Delta = \Delta^* = \{C\}$.

Soit c un entier $< n$; supposons les assertions (1) et (2) vérifiées pour toute cellule C de dimension $> c$. Pour une telle cellule C, on a donc un degré d_C bien défini.

Soit $C \in \mathscr{C}$ une cellule de dimension c. Soit d un entier tel que $c \leqslant d \leqslant n$. Soit $\mathscr{E}_{C,d}$ l'ensemble des parties Δ de $\mathscr{C}$ formées de cellules contenant C et telles que $\bigcap_{D\in\Delta} f_{\mathrm{trop}}(D)$ soit de dimension d, et maximale pour cette propriété. Pour $\Delta \in \mathscr{E}_{C,d}$, notons Δ^* l'ensemble des éléments minimaux de Δ, lorsque ce dernier est ordonné par l'inclusion.

Comme Σ_f est purement de dimension n, il existe une n-cellule de $\mathscr{C}$ qui contient C. Il existe alors une cellule $D \in \mathscr{C}$ de dimension d qui contient C. Comme $f_{\mathrm{trop}}(D)$ est de dimension d, il existe une partie Δ appartenant à $\mathscr{E}_{C,d}$ qui contient D. En particulier, $\mathscr{E}_{C,d}$ n'est pas vide.

Lemme 14.2.6. — *(Sous l'hypothèse de récurrence.) Supposons $d > c$. Pour tout $\Delta \in \mathscr{E}_{C,d}$ et tout $x \in \mathring{C}$, on a $\deg^x(f) = \sum_{D\in\Delta^*} d_D$.*

Admettons provisoirement ce lemme.

Rappelons que $c < n$; appliqué à $d = n$ et à un élément de l'ensemble non vide $\mathscr{E}_{C,n}$, le lemme 14.2.6 entraîne que la fonction $x \mapsto \deg^x(f)$ est constante sur l'ensemble non vide $\mathring{C}$; notons d_C cette valeur. Cela établit déjà l'assertion (1) pour C.

Soit d un entier tel que $d \leqslant c \leqslant n$. Le lemme 14.2.6 établit alors également l'assertion (2) dès que $d > c$. Dans le cas restant où $d = c$, on a $\Delta = \Delta^* = \{C\}$ et l'assertion (2) se réduit alors à l'égalité tautologique $d_C = d_C$.

Cela termine la démonstration du théorème et il reste à démontrer le lemme 14.2.6 que nous avions admis.

Notons W_C la réunion des cellules ouvertes $\mathring{D}$, où D parcourt l'ensemble des cellules de $\mathscr{C}$ contenant C ; c'est un voisinage ouvert de $\mathring{C}$ dans Σ_f. Soit V un voisinage ouvert de x dans X tel que $V \cap \Sigma_f \subset W_C$ et tel que f induise un morphisme fini et plat de degré $\deg^x(f)$ de V sur un voisinage ouvert U de $f(x)$ dans $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$.

Notons P l'intersection des $f_{\mathrm{trop}}(D)$, pour $D \in \Delta$; c'est une cellule de dimension d contenant $f_{\mathrm{trop}}(C)$. Soit $E \in \mathscr{C}$ contenant C telle que $E \notin \Delta$; alors $\Delta \cup \{E\}$ n'appartient

pas à $\mathscr{E}_{C,d}$, par maximalité de Δ, de sorte que $P\cap f_{\mathrm{trop}}(E)$ est une cellule de dimension $< d$. Notons Q_1 la réunion de ces $P\cap f_{\mathrm{trop}}(E)$, lorsque E parcourt l'ensemble des cellules de $\mathscr{C}$ contenant C et n'appartenant pas à Δ ; c'est un sous-espace paralinéaire fermé de P, de dimension $< d$.

D'autre part, soit $D\in\Delta^*$ et soit E une cellule contenue dans $\partial(D)$ disjointe de $\mathring{C}$; alors $P\cap f_{\mathrm{trop}}(E)$ est une cellule, disjointe de $f_{\mathrm{trop}}(\mathring{C})$, car f_{trop} est injectif sur D. La réunion Q_2 de ces cellules $P\cap f_{\mathrm{trop}}(E)$ est un sous-espace paralinéaire de P, fermé, disjoint de $f_{\mathrm{trop}}(\mathring{C})$, de sorte que $P-Q_2$ est un voisinage de $f_{\mathrm{trop}}(\mathring{C})$ dans P.

Posons $Q=Q_1\cup Q_2$; c'est un sous-espace paralinéaire de P, fermé. L'ensemble $P-Q_2$ est un voisinage de $f_{\mathrm{trop}}(\mathring{C})$ dans P ; choisissons un ouvert Ω de P tel que $f_{\mathrm{trop}}(\mathring{C})\subset\Omega\subset P-Q_2$. Comme Q_1 est d'intérieur vide dans P, sa trace sur Ω est d'intérieur vide dans U, de sorte que $U-Q_1$ est dense dans Ω. Cela prouve que l'adhérence de $P-Q$ contient Ω ; elle contient en particulier $f_{\mathrm{trop}}(\mathring{C})$, puis $f_{\mathrm{trop}}(C)$ qui est son adhérence.

Soit P' l'ensemble des points $\xi\in P$ tels que d'une part $\mathrm{sq}(\xi)\in U$, et d'autre part, pour toute cellule $D\in\Delta$, l'unique antécédent de ξ par $f_{\mathrm{trop}}|_D$ appartient à V. C'est un ouvert de P qui contient $f_{\mathrm{trop}}(x)$. Il rencontre donc $P-Q$. Soit alors $u\in U\cap(P'-Q)_{\mathrm{sq}}$.

Soit $v\in V\cap f^{-1}(u)$. Comme $f(v)=u\in S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)$, on a $v\in\Sigma_f$; soit D l'unique cellule de $\mathscr{C}$ telle que $v\in\mathring{D}$.

Démontrons que $D\in\Delta^*$. Comme $V\cap\Sigma_f\subset W_C$, on a $v\in W_C$, donc D contient C. Comme $f_{\mathrm{trop}}(v)\in P-Q_1$, la cellule D appartient à Δ. Soit $E\in\Delta^*$ une cellule minimale contenue dans D ; par hypothèse, il existe $w\in E$ tel que $f_{\mathrm{trop}}(w)=f_{\mathrm{trop}}(v)$, car $f_{\mathrm{trop}}(v)\in P$; alors $w=v$ car f_{trop} est injective sur D ; comme $v\in\mathring{D}$, cela entraîne $D=E$, et donc $D\in\Delta^*$, comme annoncé.

Inversement, soit $D\in\Delta^*$. On a $\mathrm{trop}(u)\in f_{\mathrm{trop}}(D)$, par hypothèse ; soit $v\in D$ tel que $f_{\mathrm{trop}}(v)=\mathrm{trop}(u)$; comme $f(v)$ et u appartiennent à $S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)$, on en déduit que $f(v)=u$. Comme $\mathrm{trop}(u)\in P'$, on a $v\in V$. Démontrons que $v\in\mathring{D}$. Dans le cas contraire, il existerait une cellule E de $\mathscr{C}$, contenue dans $\partial(D)$ telle que $v\in E$. On a $\mathrm{trop}(u)\in P\cap f_{\mathrm{trop}}(E)$. On a $E\notin\Delta$, par minimalité de D. Si E contenait C, on aurait $\mathrm{trop}(u)\in Q_1$, ce qui n'est pas. Donc E ne contient pas C, donc est disjoint de $\mathring{C}$, et $\mathrm{trop}(u)$ appartient alors à Q_2, ce qui n'est pas.

Cela prouve que la relation « $v\in\mathring{D}$ » dans $V\times\mathscr{C}$ définit une bijection de l'ensemble $V\cap f^{-1}(u)$ sur l'ensemble Δ^*. Puisque f induit un morphisme fini et plat de degré $\deg^x(f)$ de V sur U, on a $\deg^x(f)=\deg_{f(x)}(f)=\deg_u(f)=\sum_{v\in V\cap f^{-1}(u)}\deg^v(f)$. Par l'hypothèse de récurrence, on a $\deg^v(f)=d_D$ si $v\in\mathring{D}$ et $D\in\Delta^*$, car $\dim(D)\geqslant d>\dim(C)$, de sorte que $\deg^x(f)=\sum_{D\in\Delta^*}d_D$.

Cela conclut la démonstration du lemme 14.2.6 et, partant, du théorème 14.2.5. □

Théorème 14.2.7. — *Soit X un espace analytique de niveau n, soit $f,f'\colon X\to\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ des moments tels que $f'_{\mathrm{trop}}-f_{\mathrm{trop}}$ soit constante sur X. Les ensembles $\Sigma_f\cap\mathrm{Int}(X)$, $\Sigma_{f'}\cap\mathrm{Int}(X)$, $\Sigma^{(n)}_{f_{\mathrm{trop}}}\cap\mathrm{Int}(X)$ et $\Sigma^{(n)}_{f'_{\mathrm{trop}}}\cap\mathrm{Int}(X)$ sont égaux. Pour tout point x dans cet ensemble, les morphismes f et f' sont finis et plats en x et l'on a $\deg^x(f)=\deg^x(f')$.*

Démonstration. — Les dimensions tropicales de f_{trop} et f'_{trop} sont égales en tout point ; en particulier, on a $\Sigma^{(n)}_{f_{\mathrm{trop}}}=\Sigma^{(n)}_{f'_{\mathrm{trop}}}$. La première assertion résulte donc du corollaire 12.8.4. Pour un point $x\in\Sigma_f\cap\mathrm{Int}(X)$, on a $d_k(f(x))=d_k(f'(x))=n$ puisque ces points

appartiennent au squelette de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$. Comme $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ est réduit, le lemme 11.6.5 entraîne que f et f' sont finis et plats en x. Il reste à démontrer que $\deg^x(f) = \deg^x(f')$.

Soit K le complété d'une clôture algébrique de k ; les deux squelettes canoniques $S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)$ et $S(\mathbf{G}_{\mathrm{m},K}^n)$ sont identifiés à $\mathbf{R}^n$ par la tropicalisation ; notons ainsi y_K et y'_K les points de $S(\mathbf{G}_{\mathrm{m},K}^n)$ correspondant à y et y'. On constate sur les formules définissant les semi-normes correspondantes que le point y_K est invariant sous l'action du groupe $\mathrm{Aut}(K/k)$; comme $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ est (ensemblistement) le quotient de $(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)_K$ par l'action de ce groupe, le point y_K est le seul antécédent de y dans $(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)_K$. De même, le point y'_K est le seul antécédent de y' dans $(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)_K$.

Notons $p\colon X_K \to X$ le morphisme de changement de base canonique. D'après ce qui précède, $p^{-1}(x) \subset f_K^{-1}(y_K)$ et $p^{-1}(x) \subset (f')_K^{-1}(y'_K)$. Appliquons le lemme 13.3.3. On obtient

$$\deg^x(f) = \sum_{z\in p^{-1}(x)} \deg^z(f_K) \quad \text{et} \quad \deg^x(f') = \sum_{z\in p^{-1}(x)} \deg^z(f'_K).$$

Soit $z \in p^{-1}(x)$. Le point z est intérieur à X_K. De plus, il appartient à l'image réciproque du squelette canonique par f_K et par f'_K. Quitte à étendre les scalaires à K, on peut ainsi supposer que k est algébriquement clos.

Notons $(f_1, \dots, f_n)$ et $(f'_1, \dots, f'_n)$ les composantes de f et de f'. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. La fonction numérique $|f'_i/f_i|$ est constante sur X ; comme $x \in \mathrm{Int}(X)$ et comme le corps k est maintenant supposé algébriquement clos, la proposition 12.2.12 affirme qu'il existe un élément $\lambda_i \in k^\times$ et une fonction $g_i \in \mathscr{O}_{X,x}^\times$ tels que $|g_i| < |\lambda_i|$ et $f_i = \lambda_i + g_i$ au voisinage de x. Quitte à composer f avec la translation par $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dans $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$, on suppose que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1$. Alors, $\mathrm{trop}(y) = \mathrm{trop}(y')$, donc $y = y'$ puisque ces deux points appartiennent à $S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)$.

On a $d_k(x) = n = \dim(X)$; l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est donc artinien (§11.5.5) ; c'est en particulier un anneau de Cohen-Macaulay. Choisissons alors un voisinage affinoïde connexe V de y dans $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ et et un voisinage affinoïde W de x dans $\mathrm{Int}(X)$ tels que les conditions suivantes soient satisfaites :

– Les fonctions g sont définies sur W et l'on a $|g_i| < 1$ et $f'_i = (1 + g_i)f_i$ sur W ;
– L'espace W est de Cohen-Macaulay ;
– Le point x est le seul antécédent de $f(x)$ par f dans W ;
– Le morphisme f définit par restriction un morphisme fini et plat de W vers V.

Comme x est le seul antécédent de $f(x)$ par f dans W, on a $\deg_{f(x)}(f) = \deg^x(f)$. Comme V est connexe, il s'ensuit le morphisme fini et plat $f|_W\colon W \to V$ est de degré constant d.

Soit R un nombre réel > 1 tel que $R|g| < 1$ sur W et soit $B = D(0, R)$ le disque ouvert de rayon R dans la droite affine ; on note θ la fonction coordonnée sur B. Soit h le morphisme de $W \times B$ vers $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n \times B$ défini par la famille

$$((1 + \theta g_1)f_1, \dots, (1 + \theta g_n)f_n).$$

Pour tout $t \in B$, on note h_t le morphisme de $W_{\mathscr{H}(t)}$ dans $\mathbf{G}_{\mathrm{m},\mathscr{H}(t)}^n$ déduit de h par restriction à la fibre de la dernière projection en t. En particulier, on a $h_0 = f|_W$ et $h_1 = f'|_W$.

Rappelons (§12.1.10) que pour $r \in \mathbf{R}^n$ et $t \in B$, on a noté $\mathrm{sq}_t(r)$ l'unique point de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n \times_k B$ caractérisé par les propriétés suivantes :

– son image par la composition de la première projection et de l'application de tropicalisation est r ;
– son image par la seconde projection est t ;
– il appartient au squelette canonique du $\mathscr{H}(t)$-tore $\mathbf{G}^n_{\mathrm{m},\mathscr{H}(t)}$, immergé dans $\mathbf{G}^n_{\mathrm{m}} \times B$.

Lemme 14.2.8. — *Soit r un point de $\mathbf{R}^n$. Soit z un point de $W \times B$, d'image w dans W et t dans B. Si $h_t(z) = \mathrm{sq}_t(r)$, on a $h_0(w) = \mathrm{sq}(r)$.*

Démonstration. — Puisque $R|g| < 1$ sur W et puisque $h_t(z) = \mathrm{sq}_t(r)$, il résulte de la seconde assertion du §12.1.14 que $h_{0,\mathscr{H}(t)(z)} = \mathrm{sq}_t(r)$. Le point $h_0(w)$ est alors l'image de $\mathrm{sq}_t(r)$ dans $\mathbf{G}^n_{\mathrm{m}}$, c'est-à-dire $\mathrm{sq}(r)$. □

Le point x appartient à l'intérieur de W car $W \subset \mathrm{Int}(X)$, et c'est le seul antécédent de $q \circ f(x) = h_0(x)$ sur W par h_0. Il existe donc un pavé ouvert Δ de $\mathbf{R}^n$ contenant $(q \circ f)_{\mathrm{trop}}(x)$ tel que Δ_{sq} soit contenu dans V et ne rencontre pas $h_0(\partial W)$.

Lemme 14.2.9. — *Notons $\mathrm{sq}_B(\Delta)$ l'ensemble des points $\mathrm{sq}_t(r)$, pour $r \in \Delta$ et $t \in B$. Le morphisme h est fini et plat au-dessus de $\mathrm{sq}_B(\Delta)$.*

Démonstration. — Soit $r \in \Delta$ et $t \in B$; soit $z \in W \times B$ un antécédent de $\mathrm{sq}_t(r)$ par h et soit w son image dans W. D'après le lemme 14.2.8, on a $h_0(w) = \mathrm{sq}(r)$. Par le choix de Δ, cela entraîne que $w \in \mathrm{Int}(W)$; en conséquence, $z \in (\mathrm{Int}(W))_{\mathscr{H}(t)}$. Nous avons ainsi prouvé que $h^{-1}(\mathrm{sq}_t(r))$ est contenu dans l'espace sans bord $\mathrm{Int}(W) \times B$.

Le morphisme h est compact. Soit en effet une partie compacte K de $\mathbf{G}^n_{\mathrm{m}} \times B$. Sa projection dans B étant compacte, il existe un disque fermé B' contenu dans B tel que $K \subset \mathbf{G}^n_{\mathrm{m}} \times B'$. Alors, $h^{-1}(K)$ est contenu dans $W \times B'$, donc est compact.

Il résulte enfin du lemme 11.5.1, appliqué au morphisme h_t, que la fibre $h^{-1}(\mathrm{sq}_t(r))$ (égale à $h_t^{-1}(\mathrm{sq}_t(r))$) est de dimension nulle. D'après le lemme 11.6.6, appliqué maintenant à h, le morphisme h est alors fini au-dessus de $\mathrm{sq}_t(r)$.

L'espace $\mathbf{G}^n_{\mathrm{m}} \times B$ est lisse, donc régulier ; l'espace $W \times B$ est lisse sur l'espace de Cohen-Macaulay W, donc Cohen-Macaulay lui-même ; ces deux espaces $\mathbf{G}^n_{\mathrm{m}} \times B$ et $W \times B$ sont purement de dimension $n + 1$. Le corollaire 11.5.9 assure donc que h est fini et plat au-dessus de $\mathrm{sq}_t(r)$. Cela conclut la démonstration du lemme 14.2.9. □

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 14.2.7. L'espace $\mathrm{sq}_B(\Delta)$ est une partie connexe et non vide de $\mathbf{G}^n_{\mathrm{m}} \times B$ (§12.1.10). Par suite, le morphisme h possède un degré δ au-dessus de $\mathrm{sq}_B(\Delta)$. Par changement de base, pour tout $t \in B$, le morphisme h_t est fini et plat de degré δ au-dessus du point $\mathrm{sq}_t(r)$.

En particulier, le morphisme $h_0 = f|_W$ est fini et plat de degré δ au-dessus de $y = f(x)$. On a donc $\delta = d$.

Le morphisme $h_1 = f'|_W$ est aussi fini et plat de degré δ au-dessus de $y = f'(x)$.

D'après l'assertion (3) du §12.1.14, les images réciproques de $S(\mathbf{G}^n_{\mathrm{m}})$ par $f|_W$ et $f'|_W$ coïncident. Puisque $f_{\mathrm{trop}} = f'_{\mathrm{trop}}$, on en déduit que pour tout $t \in S(\mathbf{G}^n_{\mathrm{m}})$, $f^{-1}(t) = (f')^{-1}(t)$. En particulier, la fibre de f en y coïncide avec celle de f', si bien que le point x est le seul antécédent dans W de y par f'. Il en résulte que f' est fini et plat de degré δ en x. Par définition, on a donc $\deg^x(f') = \delta = \deg^x(f)$, d'où le théorème 14.2.7. □

Lemme 14.2.10. — *Soit $p\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces analytiques. Soit $y \in Y$, soit $x = p(y)$; posons $m = \dim_x(X)$, $n = \dim_y(Y)$ et $d = \dim_y(Y_x)$; supposons $n = m+d$*

(c'est par exemple le cas si p est plat en y). Soit $f\colon X \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$ et $g\colon Y \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$ des moments ; posons $h = (f \circ p, g)\colon Y \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$.

a) *Pour que $y \in \Sigma_h$, il faut et il suffit que $y \in \Sigma_{g|_{Y_x}}$ et $x \in \Sigma_f$.*

b) *Supposons $y \in \mathrm{Int}(Y)$. Pour que h soit de dimension tropicale n en y, il faut et il suffit que $g|_{Y_x}$ soit de dimension tropicale d en y et que f soit de dimension tropicale m en x.*

c) *Supposons $y \in \Sigma_h \cap \mathrm{Int}(Y)$. Alors le morphisme f est fini et plat en x et les morphismes h et $g|_{Y_x}$ sont finis et plats en y.*

d) *Supposons que $y \in \Sigma_h$ et que p est plat en y. Le morphisme h est quasi-fini en y, le morphisme f est quasi-fini en x et le morphisme $g|_{Y_x}$ est quasi-fini en y. De plus, on a*

$$\deg^y(h) = \deg^x(f)\deg^y(g|_{Y_x}).$$

Démonstration. — *a*) Les formules explicites décrivant le squelette de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ montrent qu'un point t de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ appartient à son squelette si et seulement si sa projection s dans $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$ est squelettique et si t appartient au squelette de sa fibre $\mathbf{G}_{\mathrm{m},\mathscr{H}(s)}^d$. L'assertion en résulte.

b) Comme y n'appartient pas au bord de Y, il n'appartient pas au bord de Y_x et x n'appartient pas au bord de X. L'assertion *b*) du lemme découle alors de ce qui précède et de la proposition 12.2.8, (iv).

c) On déduit de *a*) les égalités $d_k(x) = m$, $d_k(y) = n$ et $d_{\mathscr{H}(x)}(y) = d$. D'après le lemme 11.6.5, *c*), le morphisme f est fini et plat en x et les morphismes h et $g|_{Y_x}$ sont finis et plats en y, car $y \in \mathrm{Int}(Y)$.

d) Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y & & \\ {\scriptstyle g'}\downarrow & \searrow^{h} & \\ X \times \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d & \xrightarrow[f']{} & \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m \times \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m, \end{array} \qquad p\colon Y \to X \times \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d \to X$$

où le carré inférieur est cartésien. Comme $y \in \Sigma_h$, le morphisme h est quasi-fini et plat en y (lemme 14.2.1). D'après *a*), le point y apartient à $\Sigma_{g|_{Y_x}}$, donc $g|_{Y_x}$ est quasi-fini et plat en y ; de même, $x \in \Sigma_f$, donc f est quasi-fini et plat en x.

On a $h = f' \circ g'$. Comme h est quasi-fini en y, il en est de même de g' ; par ailleurs, le morphisme f' est quasi-fini en $g'(y)$, par changement de base, car $g'(y)$ est au-dessus de x. Démontrons que $\deg^y(h) = \deg^{g'(y)}(f')\deg^y(g')$; d'après la proposition 13.3.10, il suffit de démontrer que le morphisme g' est plat en y. La projection $X \times \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d \to X$ est plate ([**52**], lemme 4.1.13) ; le morphisme p est plat en y par hypothèse. De plus, la fibre de g' en x s'identifie au morphisme $g|_{Y_x}\colon Y_x \to \mathbf{G}_{\mathrm{m},\mathscr{H}(x)}^d$ qui est plat en y. D'après le critère de platitude par fibres ([**52**], théorème 8.3.8), le morphisme g' est plat en y.

Pour conclure, il suffit alors de démontrer les égalités $\deg^{g'(y)}(f') = \deg^x(f)$ et $\deg^y(g') = \deg^y(g|_{Y_x})$.

Commençons par la seconde. Par définition, $\deg^y(g')$ est la dimension sur $\mathscr{H}(g'(y))$ de l'anneau local de $(g')^{-1}(g'(y))$ en $g'(y)$. Considérons $X \times \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$ comme $\mathbf{G}_{\mathrm{m},X}^d$; alors

$g'(y)$ s'identifie au point $g|_{Y_x}(y)$ de $\mathbf{G}^d_{\mathrm{m},\mathscr{H}(x)}$. De même, la fibre $(g')^{-1}(g'(y))$ s'identifie à la fibre $(g|_{Y_x})^{-1}(g|_{Y_x}(y))$. Il en résulte l'égalité $\deg^y(g') = \deg^y(g|_{Y_x})$.

Démontrons enfin que $\deg^{g'(y)}(f') = \deg^x(f)$. Par définition, $\deg^{g'(y)}(f')$ est la dimension sur $f'(g'(y)) = h(y)$ de l'anneau local de $(f')^{-1}(h(y))$ en $g'(y)$. Le morphisme f' est déduit de f par changement de base. Ainsi, $(f')^{-1}(h(y)) = f^{-1}(f(x)) \otimes_{\mathscr{H}(f(x))} \mathscr{H}(h(y))$. L'anneau local de $f^{-1}(f(x))$ en x est une algèbre locale artinienne de dimension $\deg^x(f)$ sur $\mathscr{H}(x)$. Son produit tensoriel par $\mathscr{H}(h(y))$ est le produit des anneaux locaux de $(f')^{-1}(h(y))$ en tous les antécédents de x. Pour conclure la démonstration de l'égalité voulue, il suffit de démontrer que le point x n'a qu'un seul antécédent dans $(f')^{-1}(h(y))$. Cela résulte du fait que $\mathscr{H}(f(x))$ est séparablement clos dans $\mathscr{H}(h(y))$: le point $h(y)$ appartient à $S(\mathbf{G}^n_{\mathrm{m},\mathscr{H}(f(x))})$, le corollaire 12.1.8 s'applique donc. □

§ 14.3. CALIBRAGES CANONIQUES

Soit X un espace analytique de niveau n.

Proposition 14.3.1. — *Soit $f\colon X \to T$ un moment et soit C une f-cellule de dimension n. Soit q et q' des morphismes de tores de T dans $\mathbf{G}^n_{\mathrm{m}}$ tels que q_{trop} et q'_{trop} soient injectifs sur $f_{\mathrm{trop}}(C)$. Soit σ_q l'unique section affine de q_{trop} dont l'image contient $f_{\mathrm{trop}}(C)$; on définit $\sigma_{q'}$ de façon analogue.*

Soit μ un vecteur-volume sur $\mathbf{R}^n$. Pour presque tout $x \in C$, on a l'égalité

$$\deg^x(q \circ f)\sigma_{q,*}(\mu) = \deg^x(q' \circ f)\sigma_{q',*}(\mu) \tag{14.3.1.1}$$

de vecteurs volumes sur l'espace affine $\langle f_{\mathrm{trop}}(C)\rangle$.

Démonstration. — Notons $C_f = f_{\mathrm{trop}}(C)$.

Supposons d'abord que q' soit de la forme $\varphi \circ q$, où $\varphi\colon \mathbf{G}^n_{\mathrm{m}} \to \mathbf{G}^n_{\mathrm{m}}$ est un morphisme surjectif de tores. D'après la proposition 13.3.10, on a

$$\deg^x(q' \circ f) = \deg^x(\varphi \circ q \circ f) = \deg^{q\circ f(x)}(\varphi)\deg^x(q \circ f).$$

Le morphisme φ est fini et plat et pour tout $t \in S(\mathbf{G}^n_{\mathrm{m}})$, on a $\deg^t(\varphi) = \deg(\varphi)$, en vertu du corollaire 12.1.7. Par suite, on a $\deg^x(q' \circ f) = \deg(\varphi)\deg^x(q \circ f)$ pour tout $x \in C$.

Par ailleurs, φ_{trop} est une application affine bijective de $\mathbf{R}^n$ dans lui-même et l'on a $\sigma_{q'} = \sigma_q \circ \varphi^{-1}_{\mathrm{trop}}$. La valeur absolue du déterminant de l'application linéaire $\overrightarrow{\varphi}_{\mathrm{trop}}$ est égale au degré de φ. Par suite, $\varphi^{-1}_{\mathrm{trop}}$ applique le vecteur volume μ sur $\deg(\varphi)^{-1}\mu$, de sorte que $\sigma_{q',*}(\mu) = \deg(\varphi)^{-1}\sigma_{q,*}(\mu)$. La relation voulue est donc vérifiée dans ce cas particulier.

Supposons ensuite que $q'_{\mathrm{trop}} - q_{\mathrm{trop}}$ soit constante sur C_f. D'après le théorème 14.2.7, on a $\deg^x(q \circ f) = \deg^x(q' \circ f)$ pour tout $x \in C \cap \mathrm{Int}(X)$; d'autre part, $C \cap \partial(X)$ est localement négligeable. De plus, σ_q et $\sigma_{q'}$ diffèrent d'une constante, si bien que $\sigma_{q,*}(\mu) = \sigma_{q',*}(\mu)$. Cela prouve la relation voulue dans ce cas.

Montrons maintenant comment la conjonction de ces deux cas permet d'obtenir le cas général. Notons ψ l'unique application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans lui-même telle que $\psi \circ q_{\mathrm{trop}}$ et q'_{trop} diffèrent d'une translation sur C_f. Compte tenu de la convention faite au paragraphe 12.1.13, l'espace affine $\langle C_f\rangle$ est $\mathbf{Q}$-rationnel, si bien que ψ appartient

à $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Q})$. Il existe donc deux morphismes de tores φ et φ' de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ dans lui-même tels que $\varphi'_{\mathrm{trop}} \circ \psi = \varphi_{\mathrm{trop}}$. Ainsi, $(\varphi' \circ q' \circ f)_{\mathrm{trop}}$ et $(\varphi \circ q \circ f)_{\mathrm{trop}}$ diffèrent d'une constante sur C. Posons $V = f_{\mathrm{trop}}^{-1}(C_f)$; c'est un domaine analytique fermé de X qui contient C. Sur V, on a $(\varphi' \circ q' \circ f)_{\mathrm{trop}} = (\varphi \circ q \circ f)_{\mathrm{trop}}$.

D'après le premier cas particulier, on a donc presque partout les relations

$$\deg^x(\varphi \circ q \circ f|V)\sigma_{\varphi\circ q,*}(\mu) = \deg^x(q \circ f|V)\sigma_{q,*}(\mu)$$

et

$$\deg^x(\varphi' \circ q' \circ f|V)\sigma_{\varphi'\circ q',*}(\mu) = \deg^x(q' \circ f|V)\sigma_{q',*}(\mu).$$

D'autre part, il résulte du second cas particulier traité que

$$\deg^x(\varphi \circ q \circ f|V)\sigma_{\varphi\circ q,*}(\mu) = \deg^x(\varphi' \circ q' \circ f|V)\sigma_{\varphi'\circ q',*}(\mu).$$

Comme V est un domaine de X contenant x, on a les égalités de degrés

$$\deg^x(q \circ f|V) = \deg^x(q \circ f) \quad \text{et} \quad \deg^x(q' \circ f|V) = \deg^x(q' \circ f)$$

pour tout $x \in V$. Cela conclut la démonstration de la proposition. □

14.3.2. — Soit Σ une partie squelettique de X, paracompacte et contenue dans le polyèdre caractéristique Σ_f d'un moment $f\colon V \to T$ défini sur un domaine analytique V de X. Nous allons définir un calibrage μ_Σ de Σ.

Soit $\mathscr{C}$ une décomposition cellulaire de Σ en f-cellules commodes (lemme 14.1.5). Soit C une cellule de dimension n appartenant à $\mathscr{C}$. Soit $q\colon T \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ un morphisme de tores tel que q_{trop} soit injectif sur $f_{\mathrm{trop}}(C)$. D'après la proposition 14.2.2, le morphisme $q \circ f$ est fini et plat sur $\mathring{C}$ et son degré $x \mapsto \deg^x(q \circ f)$ prend une valeur finie, strictement positive et constante d_C sur $\mathring{C}$. Notons $e = |e_1 \wedge \cdots \wedge e_n|$ le vecteur-volume canonique de $\mathbf{R}^n$, considéré comme un calibrage constant, et posons $\mu_C = d_C(q \circ f)_{\mathrm{trop}}^*(e)$; c'est un calibrage standard de la cellule C. Il ne dépend pas du choix de q d'après la proposition 14.3.1. La famille (μ_C) définit un calibrage standard de Σ ; on le note $\mu_{\Sigma,f,\mathscr{C}}$.

Vérifions que ce calibrage est indépendant du choix de $(V, f, \mathscr{C})$.

Soit V' un domaine analytique de X, soit $f'\colon V' \to T'$ un moment tel que $\Sigma \subset \Sigma_{f'}$ et soit $\mathscr{C}'$ une décomposition cellulaire de Σ en f'-cellules commodes. Posons $W = V \cap V'$ et soit g le moment (f, f') sur W et considérons une décomposition cellulaire $\mathscr{D}$ de Σ en g-cellules commodes qui est adaptée aux décompositions cellulaires $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

Soit D une cellule de dimension n appartenant à $\mathscr{D}$. Soit $q\colon T \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ un morphisme de tores tel que q_{trop} est injectif sur $f_{\mathrm{trop}}(D)$. Notons aussi $p\colon T \times T' \to T$ la première projection.

Soit C une cellule de $\mathscr{C}$ contenant D. Comme $\mathring{D}$ ne rencontre pas $\partial(W)$, il est contenu dans $\mathrm{Int}(W/V)$, si bien que $q \circ f|_W$ est fini et plat de degré d_C en tout point de $\mathring{D}$. Il existe aussi un entier $d_D > 0$ tel que $(q \circ p) \circ g$ soit fini et plat de degré d_D en tout point de $\mathring{D}$ (proposition 14.2.2). Comme on a $(q \circ p) \circ g = q \circ f|_W$, on a $d_C = d_D$. Par ailleurs, $(q \circ g)_{\mathrm{trop}}^*(e) = (q \circ f)_{\mathrm{trop}}^*(e)$. Par suite, les triplets $(V, f, \mathscr{C})$ et $(W, g, \mathscr{D})$ induisent le même calibrage sur D.

Cela entraîne que le calibrage $\mu_{\Sigma,f,\mathscr{C}}$ de Σ déduit de $(V, f, \mathscr{C})$ coïncide avec celui déduit de $(W, g, \mathscr{D})$; par symétrie, il coïncide avec celui déduit de $(V', f', \mathscr{C}')$. Notons-le μ_Σ.

14.3.3. — Soit Σ' un sous-espace paralinéaire de Σ. Soit $\mathscr{C}'$ une décomposition cellulaire de Σ en f-cellules commodes qui raffine $\mathscr{C} \cap \Sigma'$. La description de $\mu_{\Sigma',f,\mathscr{C}'}$ entraîne alors l'égalité $\mu_\Sigma|_{\Sigma'} = \mu_{\Sigma'}$.

Lemme 14.3.4. — *Soit X un espace analytique de niveau n et soit Σ une partie squelettique de X. Il existe un unique calibrage μ_Σ de Σ vérifiant la propriété suivante : pour tout domaine analytique V de X, tout moment f sur V et tout sous-espace paralinéaire Σ' de $\Sigma_f \cap \Sigma$ qui est paracompact, on a $\mu_\Sigma|_{\Sigma'} = \mu_{\Sigma'}$. Ce calibrage μ_Σ est standard.*

Démonstration. — Par définition, l'espace squelettique Σ est G-recouvert par des sous-espaces paralinéaires Σ' comme dans l'énoncé. Les calibrages formant un G-faisceau, il existe au plus un tel calibrage. Pour démontrer son existence, il suffit alors de vérifier la condition de coïncidence. Or, si Σ' est Σ'' sont des sous-espaces paralinéaires de Σ satisfaisant les conditions de l'énoncé, on a $\mu_{\Sigma'}|_{\Sigma'\cap\Sigma''} = \mu_{\Sigma'\cap\Sigma''} = \mu_{\Sigma''}|_{\Sigma'\cap\Sigma''}$ d'après le paragraphe 14.3.3. □

Définition 14.3.5. — *Soit X un espace analytique de niveau n, topologiquement séparé, et soit Σ une partie squelettique de X. On appelle* calibrage canonique *de Σ le calibrage dont le lemme 14.3.4 affirme l'existence et l'unicité.*

Par construction, ce calibrage est standard. Si $\Sigma' \subset \Sigma$, on a $\mu_\Sigma|_{\Sigma'} = \mu_{\Sigma'}$. Il résulte aussi des constructions que si Σ est contenu dans un domaine analytique V de X, le calibrage canonique μ_Σ de Σ, vu comme partie squelettique de V, coïncide avec son calibrage canonique comme partie squelettique de X.

Ce calibrage canonique munit l'espace vertébré associé à l'espace analytique X d'une structure d'espace G-tropical calibré de niveau n. Nous supposerons toujours implicitement que X est muni de cette structure.

Proposition 14.3.6. — *Soit X un espace analytique de niveau n. Soit Σ une partie squelettique de X, soit μ son calibrage canonique. Soit L une extension complète de k, soit $p\colon X_L \to X$ le morphisme de changement de base, soit Σ_L la partie squelettique déduite de Σ par changement de base (théorème 12.9.11) et soit μ_L son calibrage canonique. On a $p_*(\mu_L) = \mu$.*

Démonstration. — Il suffit de traiter le cas où X est (para)compact et où il existe un moment $f\colon X \to T$ tel que $\Sigma = \Sigma_f$. Alors, $\Sigma_L = \Sigma_{f_L}$ (théorème 12.9.11). Le morphisme de changement de base p étant compact, il existe une décomposition cellulaire $\mathscr{C}$ de Σ en f-cellules commodes et une décomposition cellulaire $\mathscr{D}$ de Σ_L en f_L-cellules commodes telles que le couple $(\mathscr{D},\mathscr{C})$ soit adapté au morphisme p. Soit C une cellule de dimension n de $\mathscr{C}$. et soit $q\colon T \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ un morphisme de tores tel que q_{trop} soit injectif sur $f_{\mathrm{trop}}(C)$. Soit $x \in \mathring{C}$ et soit $t = q \circ f(x) \in S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)$. Soit $t_L \in (\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)_L$ l'unique antécédent de t dans $S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)_L$. D'après le lemme 13.3.3, on a

$$\deg^x(q \circ f) = \sum_{y \in p^{-1}(x) \cap (q\circ f_L)^{-1}(t_L)} \deg^y(q \circ f_L).$$

Les points y qui apparaissent au second membre de cette égalité sont des antécédents de x dans Σ_{f_L}. Inversement, soit $y \in \Sigma_{f_L}$ un point tel que $p(y) = x$; prouvons que $q \circ f_L(y) = t_L$. Soit D la cellule de $\mathscr{D}$ telle que $y \in \mathring{D}$; on a $p(D) = C$, donc $(q \circ f_L)_{\mathrm{trop}} = (q \circ f)_{\mathrm{trop}} \circ p$ est injectif sur D, si bien que $q \circ f_L$ est de dimension tropicale n en y. Cela

entraîne que $q \circ f_L(y) \in S((\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)_L)$; comme c'est un antécédent de t, on a $q \circ f_L(y) = t_L$. On a donc

$$\deg^x(q \circ f) = \sum_{y \in p^{-1}(x) \cap \Sigma_{f_L}} \deg^y(q \circ f_L).$$

Par conséquent, $\mu_C = \sum_D p_* \mu_D$, où D parcourt l'ensemble des n-cellules D de $\mathscr{D}$ au-dessus de C. Ainsi, $\mu_\Sigma = p_*(\mu_{\Sigma_L})$. □

§ 14.4. CALIBRAGES CANONIQUES ET MORPHISMES FINIS

14.4.1. — Soit $p\colon Y \to X$ un morphisme entre espaces k-analytiques de niveau n. Soit Σ une partie squelettique de X. Supposons que les fibres de p au-dessus de tout point de Σ sont des ensembles finis.

Soit x un point de Σ et soit $y \in f^{-1}(x)$. Comme $d_k(x) = n$, on a $\dim(f^{-1}(x)) = 0$, de sorte que f est quasi-finie en y. Par suite, $f^{-1}(x)$ est un $\mathscr{H}(x)$-espace analytique fini. On a ainsi défini au §13.3.6 le nombre rationnel $\mathrm{dc}_x(f)$.

Proposition 14.4.2. — *Soit $p\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces k-analytiques de niveau n. Soit Σ une partie squelettique de X, soit μ_Σ son calibrage canonique. Soit T la partie squelettique $p^{-1}(\Sigma)$ de Y (proposition 12.9.6) et soit μ_{T} son calibrage canonique.*

Supposons que le morphisme $p_\Sigma\colon \mathrm{T} \to \Sigma$ est topologiquement compact.

a) *La restriction de la fonction $x \mapsto \mathrm{dc}_x(p)$ à toute partie paralinéaire paracompacte de Σ est localement constante en dehors d'une partie paralinéaire n-négligeable.*

b) *On a $p_*\mu_{\mathrm{T}} = \mathrm{dc}(p)\mu_\Sigma$.*

Sous les hypothèses de b), les fibres de f en tout point de Σ sont finies, de sorte que la fonction $x \mapsto \mathrm{dc}_x(p)$ sur Σ est définie. De plus, l'assertion a) donne sens au produit $\mathrm{dc}(p)\mu_\Sigma$ et montre que c'est un calibrage standard de Σ.

Démonstration. — On sait (proposition 12.9.6) que p induit une immersion par morceaux compacte de T sur Σ. Ainsi, l'image directe $p_*\mu_{\mathrm{T}}$ est définie, et est un calibrage standard de Σ.

L'espace X est G-recouvert par des domaines analytiques compacts V sur lesquels il existe un moment f tel que $\Sigma \cap V \subset \Sigma_f$. Puisque la formation des calibrages canoniques et des degrés calibrés commute à la restriction à un domaine analytique, on peut remplacer X par V et Y par $p^{-1}(V)$, ce qui nous ramène à prouver la proposition sous l'hypothèse supplémentaire que X est compact et qu'il existe un moment $f\colon X \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ tel que Σ soit une partie squelettique de Σ_f. En remplaçant Y par un voisinage analytique compact de T, on se ramène au cas où Y est compact.

Les moments f et $f \circ p$ sont agréables et l'on a $p^{-1}(\Sigma_f) = \Sigma_{f\circ p}$ et $p^{-1}(\Sigma_f^{(n)}) = \Sigma_{f\circ p}^{(n)}$ (prop. 12.9.6). Choisissons une décomposition cellulaire $\mathscr{C}$ de $\Sigma_f^{(n)}$ en f-cellules commodes, et une décomposition cellulaire $\mathscr{D}$ de $\Sigma_{f\circ p}^{(n)}$ en $f \circ p$-cellules commodes, telles que le couple $(\mathscr{D}, \mathscr{C})$ soit adapté à $p_{\Sigma_f^{(n)}}\colon \Sigma_{f\circ p}^{(n)} \to \Sigma_f^{(n)}$, à Σ et à T.

Soit C une n-cellule de $\mathscr{C}$ et soit $D_1, \ldots, D_r$ les n-cellules de $\mathscr{D}$ dont l'image par p est égale à C ; l'immersion par morceaux de $\Sigma_{f\circ p}^{(n)}$ vers $\Sigma_f^{(n)}$ induit au-dessus de $\mathring{C}$ un

revêtement dont les feuillets sont les $\mathring{D}_i$. Soit $x \in \mathring{C}$; pour tout i, on note y_i l'unique antécédent de x sur $\mathring{D}_i$, et l'on pose $\xi = f(x)$.

Par définition d'une cellule commode, le point x appartient à $\mathrm{Int}(X)$. De même, chacun des y_i appartient $\mathrm{Int}(Y)$. Le morphisme $f \circ p$ est fini et plat en chacun des y_i, de degré $\deg^{y_i}(f \circ p)$. Le morphisme f est fini et plat en x, de degré $\deg^x(f)$.

Pour tout i, on a $\deg^{y_i}(f \circ p) = \mathrm{dc}^{y_i}(f \circ p)$, car $f \circ p$ est fini et plat en y_i. Par multiplicativité des degrés calibrés, on a $\deg^{y_i}(f \circ p) = \mathrm{dc}^{y_i}(p)\,\mathrm{dc}^x(f)$, donc $\deg^{y_i}(f \circ p) = \mathrm{dc}^{y_i}(p)\deg^x(f)$ puisque f est fini et plat en x. On a donc

$$\sum_{i=1}^{r} \deg^{y_i}(f \circ p) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{dc}^{y_i}(p) \cdot \deg^x(f) = \mathrm{dc}_x(p)\deg^x(f).$$

Compte tenu de la définition des calibrages canoniques, cela entraîne l'égalité voulue. □

Remarque 14.4.3. — Soit F une extension finie de k et soit X un espace F-analytique de niveau n. On peut aussi voir X comme un espace k-analytique de niveau n ; pour éviter les confusions nous le noterons ici X_0 ; on a $\dim(X_0) = \dim(X)$.

Comme l'extension F de k est algébrique, le squelette canonique $S(\mathbf{G}^n_{\mathrm{m},F})$ est l'image réciproque de $S(\mathbf{G}^n_{\mathrm{m}})$ par la projection de $\mathbf{G}^n_{\mathrm{m},F}$ sur $\mathbf{G}^n_{\mathrm{m}}$, et $S(\mathbf{G}^n_{\mathrm{m}})$ est l'image de $S(\mathbf{G}^n_{\mathrm{m},F})$ ([**50**], (0.15)). On en déduit qu'une partie de X est squelettique si et seulement si elle l'est en tant que partie de X_0.

Soit donc Σ une partie squelettique de X ; notons μ son calibrage canonique et μ_0 celui de Σ vu comme partie squelettique de X_0. La projection canonique de $\mathbf{G}^n_{\mathrm{m},F}$ sur $\mathbf{G}^n_{\mathrm{m}}$ est finie et plate de degré $[F : k]$. Il découle donc de la définition du calibrage canonique que $\mu_0 = [F : k]\mu$.

§ 14.5. CALIBRAGES ET TROPICALISATIONS

Définition 14.5.1. — *Soit n un entier, soit X un espace k-analytique de niveau n et soit $f\colon X \to T$ un moment agréable sur X. On appelle* polyèdre tropical *du moment f le polyèdre $f_{\mathrm{trop}}(\Sigma_f^{(n)})$ muni du calibrage image directe du calibrage canonique de $\Sigma_f^{(n)}$. On le note Π_f.*

Ce n'est autre que le polyèdre tropical de la carte tropicale agréable f_{trop}.

Lorsque X est compact, rappelons (théorème 12.8.2) que l'on a l'égalité de polyèdres $\Pi_f = f_{\mathrm{trop}}(X)^{(n)}$.

Comme le calibrage canonique de $\Sigma_f^{(n)}$ est standard, il en est de même du calibrage canonique de Π_f.

Comme la formation du calibrage canonique de Σ_f commute à l'extension des scalaires (proposition 14.3.6), il en est de même de la formation du calibrage canonique de Π_f.

14.5.2. — Voyons maintenant comment décrire explicitement le calibrage de Π_f. Soit $\mathscr{C}$ une décomposition cellulaire de $\Sigma_f^{(n)}$ vérifiant les propriétés de la proposition 14.1.12 et soit $\mathscr{D} = \{f_{\mathrm{trop}}(C)\ ;\ C \in \mathscr{C}\}$ la décomposition cellulaire de Π_f qui lui correspond. Soit D une n-cellule appartenant à $\mathscr{D}$ et soit $q\colon T \to \mathbf{G}^n_{\mathrm{m}}$ un morphisme de tores tel que $q_{\mathrm{trop}}|_D$ soit injectif. Soit $\mathscr{C}_D$ l'ensemble des n-cellules $C \in \mathscr{C}$ telles que $f_{\mathrm{trop}}(C) = D$; pour $C \in \mathscr{C}_D$, soit d_C l'entier naturel que $q \circ f$ soit fini et plat de degré d_C en tout

point de $\mathring{C}$ (prop. 14.2.2). Notons $d_D = \sum_{C \in \mathscr{C}_D} d_C$. Notons $e = |e_1 \wedge \cdots \wedge e_n|$ le vecteur-volume canonique de $\mathbf{R}^n$, considéré comme un calibrage constant. Soit $\sigma_D \colon \mathbf{R}^n \to T_{\mathrm{trop}}$ l'unique section affine de q_{trop} d'image $\langle D \rangle$. Par définition du calibrage canonique de $\Sigma_f^{(n)}$ et de l'image directe d'un calibrage, on a $\mu_{\Pi_f, D} = d_D \sigma_{D,*}(e)$.

Proposition 14.5.3. — *Soit X un espace k-analytique de dimension n, soit $f \colon X \to T$ un moment agréable et soit $x \in \Pi_f$. Soit V un voisinage de x dans Π_f qui est une n-cellule* ouverte *de T_{trop}. Soit $q \colon T \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ un morphisme de tores tel que $q_{\mathrm{trop}}|_V$ est injectif. Supposons que $q \circ f|_{f_{\mathrm{trop}}^{-1}(V)}$ est fini et plat au-dessus de $q_{\mathrm{trop}}(x)_{\mathrm{sq}}$, de degré d_x. Notons $\sigma_q \colon \mathbf{R}^n \to T_{\mathrm{trop}}$ l'unique section affine de q_{trop} d'image $\langle V \rangle$ et notons $e = |e_1 \wedge \cdots \wedge e_n|$ le vecteur-volume canonique de $\mathbf{R}^n$, considéré comme un calibrage constant. Alors, le calibrage canonique de Π_f est constant sur un voisinage de x dans V, et est égal à $d_x \sigma_{q,*}(e)$.*

Démonstration. — Reprenons les notations précédentes. Comme D est une n-cellule qui contient x et que V est un voisinage de x dans Π_f, on a $\langle D \rangle = \langle V \rangle$. En particulier, q_{trop} est injective sur D. Il suffit donc de démontrer que l'on $d_D = d_x$ pour toute n-cellule $D \in \mathscr{D}$ contenant x.

Soit W un voisinage ouvert de $q_{\mathrm{trop}}(x)_{\mathrm{sq}}$ dans $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ tel que $q \circ f$ induise un morphisme fini et plat de $f_{\mathrm{trop}}^{-1}(V) \cap (q \circ f)^{-1}(W)$ sur W, de degré d_x. Soit Δ une cellule contenue dans D, contenant x et de dimension n, telle que $q_{\mathrm{trop}}(\Delta)_{\mathrm{sq}} \subset W$.

Démontrons que l'on a $d_x = \sum d_C$. Soit y un point de $\mathring{\Delta} \cap W$. Démontrons que les antécédents de $q_{\mathrm{trop}}(y)_{\mathrm{sq}}$ sont les antécédents de y dans $\Sigma_f^{(n)}$ par f_{trop}.

Soit $z \in f_{\mathrm{trop}}^{-1}(V)$ tel que $q \circ f(z) = q_{\mathrm{trop}}(y)_{\mathrm{sq}}$. Comme $\mathrm{sq} \circ q_{\mathrm{trop}}$ est injective sur V, on a $f_{\mathrm{trop}}(z) = y$. Prouvons alors que $z \in \Sigma_f^{(n)}$. Par définition, on a $z \in \Sigma_f$. Comme $q \circ f|_{f^{-1}(V)}$ est fini et plat en z, l'application $q \circ f$ est ouverte au voisinage de z, donc l'image de tout voisinage de z par $q \circ f$ contient un voisinage de $q \circ f(z) = q_{\mathrm{trop}}(y)_{\mathrm{sq}}$, donc $q \circ f$ est de dimension tropicale n en z. Cela entraîne que f est de dimension tropicale n en z, d'où $z \in \Sigma_f^{(n)}$.

Soit $z \in \Sigma_f^{(n)}$ tel que $f_{\mathrm{trop}}(z) = y$. Soit C l'unique cellule de $\mathscr{C}$ contenant z ; alors f_{trop} induit un homéomorphisme de C sur D, si bien que $(q \circ f)_{\mathrm{trop}}$ induit un homéomorphisme de C sur $q_{\mathrm{trop}}(D)$; il en résulte que $q \circ f$ est de dimension tropicale n en tout point de C. Par suite, $q \circ f(z) \in S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)$, d'où $q \circ f(z) = q_{\mathrm{trop}}(y)_{\mathrm{sq}}$ puisque $\mathrm{trop}((q \circ f)(z)) = q_{\mathrm{trop}}(f_{\mathrm{trop}}(z)) = q_{\mathrm{trop}}(y)$. □

Remarque 14.5.4. — Soit V une partie ouverte de Π_f dont l'adhérence est une cellule de dimension n et telle que $f_{\mathrm{trop}}^{-1}(V)$ soit sans bord. Soit q un morphisme de tores $q \colon T \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ tel que $q_{\mathrm{trop}}|_V$ soit injective. Supposons que $q \circ f$ soit compact au-dessus d'un voisinage de $q_{\mathrm{trop}}(V)_{\mathrm{sq}}$. Cette hypothèse est automatiquement vérifiée lorsque X est compact. Elle l'est aussi dans le cas algébrique : comme $\dim(X) \leqslant n$, il existe un ouvert de Zariski algébrique U de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ non vide, tel que $q \circ f$ soit fini et plat au-dessus de U^{an}, et U^{an} contient $S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)$ (lemme 12.1.6).

Sous ces conditions, il découle du lemme 11.6.6 que le morphisme $q \circ f|_{f_{\mathrm{trop}}^{-1}(V)}$ est fini et plat au-dessus de tout point $x \in q_{\mathrm{trop}}(V)_{\mathrm{sq}}$; notons d_x son degré. Comme $q_{\mathrm{trop}}(V)_{\mathrm{sq}}$ est connexe et non vide, il existe un unique entier d tel que $d_x = d$ pour tout $x \in q_{\mathrm{trop}}(V)_{\mathrm{sq}}$. D'après la proposition précédente, le calibrage μ_{Π_f} est donc constant, égal à $d\sigma_{q,*}(e)$,

sur V (où σ_q et e sont comme dans cette proposition). Remarquons enfin que d est strictement positif.

§ 14.6. CÔNES TROPICAUX

14.6.1. — Dans les applications arithmétiques de la théorie des formes et courants sur un espace de Berkovich, nous aurons souvent à travailler avec des situations analytiques issues de modèles formels. Nous chercherons alors à décrire des objets analytiques (tel l'opérateur de Monge-Ampère) en termes de théorie de l'intersection sur la fibre spéciale. Pour cela, nous ferons de la géométrie analytique sur cette fibre spéciale, considérée comme espace analytique sur le corps *trivialement valué* $\tilde{k}$.

Le résultat crucial sur lequel nous nous appuierons pour relier géométrie analytique sur k et géométrie analytique sur $\widetilde{k}$ (ce dernier étant trivialement valué) est le suivant ; rappelons que le cône tropical d'un moment f en un point de $\Sigma_f^{(n)}$ a été défini en 5.4.6. et son calibrage en 5.5.8.

Théorème 14.6.2. — *Soit k un corps ultramétrique complet algébriquement clos. Soit (X, x) un germe d'espace analytique sans bord, génériquement quasi-lisse, purement de dimension n ; on suppose $d_k(x) = n$. Soit $f_1, \dots, f_m$ des fonctions analytiques sur (X, x) telles que $|f_i(x)| = 1$ pour tout i ; soit $f\colon (X, x) \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ le moment qu'elles définissent. Soit V une $\tilde{k}^1$-variété propre de corps des fonctions $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1$ et soit ξ le point de V^{an} correspondant à la valeur absolue triviale sur $\widetilde{k}^1(V)$; soit $\tilde{f}\colon (V^{\mathrm{an}}, \xi) \to \mathbf{G}_{\mathrm{m},\tilde{k}}^m$ le moment définit par $\widetilde{f_1(x)}, \dots, \widetilde{f_m(x)}$.*

Les dimensions tropicales de f en x et de $\tilde{f}$ en ξ coïncident. Si elles sont toutes deux égales à n, les cônes tropicaux (calibrés) $\Pi_{\tilde{f},\xi}$ et $\Pi_{f,x}$ dans $\mathbf{R}^m$ sont égaux.

Nous faisons observer au lecteur que ce théorème vaut si la valuation de k est triviale. Sa preuve consistera à montrer que les deux cônes tropicaux dont on veut prouver l'égalité peuvent être décrits exactement de la même façon. Pour, il sera *essentiel* de ne pas avoir à supposer que la valuation de k est non triviale.

Démonstration. — Comme X est sans bord, la dimension tropicale de f en x est égale au degré de transcendance résiduel gradué de $f_1(x), \dots, f_m(x)$, c'est-à-dire à celui de l'extension $\widetilde{k}(\widetilde{f_1}(x), \dots, \widetilde{f_m}(x))$ de $\widetilde{k}$. Mais comme les $\widetilde{f_i(x)}$ sont tous de degré 1, ce degré de transcendance est aussi celui $\widetilde{k}^1(\widetilde{f_1}(x), \dots, \widetilde{f_m}(x))$ sur $\widetilde{k}^1$. Calculons maintenant la dimension tropicale de de $\widetilde{f}$ en ξ. Le corps complet $\mathscr{H}(\xi)$ est le corps trivialement valué $\widetilde{k}^1(\xi) = \widetilde{\mathscr{H}(x)}^1$, si bien que $\widetilde{\mathscr{H}(\xi)} = \widetilde{\mathscr{H}(x)}^1$ et que $\widetilde{g(\xi)} = g$ pour tout $g \in \widetilde{k}^1(V) = \widetilde{\mathscr{H}(x)}^1$. Puisque V^{an} est sans bord, il s'ensuit que la dimension tropicale de de $\widetilde{f}$ en ξ est égale au degré de transcendance de $\widetilde{k}^1(\tilde{f}_1(\xi), \dots, \tilde{f}_m(\xi))$ sur $\widetilde{k}^1$. Cela démontre que les deux dimensions tropicales considérées coïncident.

Supposons les toutes égales à n, de sorte que les cônes tropicaux $\Pi_{f,x}$ et $\Pi_{\tilde{f},\xi}$ sont définis. La coïncidence des cônes rationnels sous-jacents est alors une conséquence de la remarque 12.2.9. Il reste à démontrer que leurs calibrages coïncident. À partir de maintenant, nous n'allons manipuler dans cette preuve que les réductions ordinaires,

c'est-à-dire les parties de degré 1 des réductions graduées. Pour alléger les notation nous écrirons donc (uniquement dans la suite de la preuve) $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ au lieu de $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1$, etc.

Commençons par rappeler la définition des calibrages sur nos cônes tropicaux. Notons tout d'abord que $f_{\mathrm{trop}}(x) = 0$. On choisit une application linéaire de $\mathbf{R}^m$ sur $\mathbf{R}^n$, définie sur $\mathbf{Z}$, dont la restriction à chaque face maximale de $\Pi_{f,x}$ est injective. On note g la composée du moment f et du morphisme de tores $q\colon \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ tel que q_{trop} soit l'application linéaire choisie. Posons $g = (g_1, \ldots, g_n)$; on a $g_{\mathrm{trop}}(x) = 0$. Pour tout i, g_i est un monôme (sans coefficient) en $f_1, \ldots, f_m$, donc $|g_i(x)| = 1$. De plus, la dimension tropicale de g en x est égale à n. Par suite, $g(x)$ est le point de Gauß η_1 de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$.

Par réduction, le morphisme g fournit un morphisme de germes $\tilde{g}\colon (V^{\mathrm{an}}, \xi) \to (\mathbf{G}_{\mathrm{m},\tilde{k}}^n, \eta_1)$. Notons que $\tilde{g} = \tilde{q} \circ \tilde{f}$, où $\tilde{q}\colon \mathbf{G}_{\mathrm{m},\tilde{k}}^m \to \mathbf{G}_{\mathrm{m},\tilde{k}}^n$ est le morphisme de tores donné par les mêmes monômes que q.

D'après le lemme 11.6.5, le point x est isolé dans $g^{-1}(\eta_1)$ et le morphisme g est fini et plat en x.

Comme $d_k(x) = n$, le groupe de la valuation de $\mathscr{H}(x)$ est de torsion modulo $|k^\times|$, donc égal à $|k^\times|$ puisque celui-ci est divisible, k étant algébriquement clos. Soit F la sous-extension non ramifiée maximale de $\mathscr{H}(x)/\mathscr{H}(\eta_1)$; son corps résiduel $\tilde{F}$ est la fermeture séparable de $\widetilde{\mathscr{H}(\eta_1)}$ dans $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$. Notons que $\widetilde{\mathscr{H}(\eta_1)}$ est égal à $\tilde{k}(T_1, \ldots, T_n)$. Les corps $\mathscr{H}(\eta_1)$, $\mathscr{H}(x)$ et F sont stables (lemme 11.5.4). On a donc

$$P = [\widetilde{\mathscr{H}(x)} : \tilde{F}] = [\mathscr{H}(x) : F] \tag{14.6.2.1}$$

$$D = [\tilde{F} : \tilde{k}(T_1, \ldots, T_n)] = [F : \mathscr{H}(\eta_1)] \tag{14.6.2.2}$$

$$DP = [\widetilde{\mathscr{H}(x)} : \tilde{k}(T_1, \ldots, T_n)] = [\mathscr{H}(x) : \mathscr{H}(\eta_1)]. \tag{14.6.2.3}$$

Remarquons que P est une puissance de l'exposant caractéristique résiduel et que $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^P \subset \tilde{F}$.

Comme l'extension F de $\mathscr{H}(\eta_1)$ est séparable, le lemme de Krasner assure qu'il existe une extension finie séparable F_1 de $k(T_1, \ldots, T_n)$, de degré D, induisant F par produit tensoriel avec $\mathscr{H}(\eta_1)$. Ce corps F_1 est le corps des fonctions d'un k-schéma de type fini intègre $\mathscr{Y}$ muni d'un morphisme étale dominant vers $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$, génériquement de degré D. Par construction, η_1 possède un unique antécédent $y \in \mathscr{Y}^{\mathrm{an}}$ et l'on a $\mathscr{H}(y) = F$. Posons $Y = \mathscr{Y}^{\mathrm{an}}$.

Par construction, le $\mathscr{H}(\eta_1)$-plongement $\mathscr{H}(y) \to \mathscr{H}(x)$ fournit un morphisme $\mathscr{H}(y) \otimes_{\mathscr{H}(\eta_1)} \mathscr{H}(x) \to \mathscr{H}(x)$, c'est-à-dire un point $\mathscr{H}(x)$-rationnel de $X \times_{\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n} Y$ au-dessus de x. D'après l'antiéquivalence de catégories entre espaces étales sur (X, x) et algèbres étales sur $\mathscr{H}(x)$ ([**9**], théorème 3.4.1), le morphisme de germes $g\colon (X, x) \to (\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n, \eta_1)$ se relève donc en un morphisme $h\colon (X, x) \to (Y, y)$ tel que $h(x) = y$.

Lemme 14.6.3. — *Le morphisme h est fini et plat de degré P.*

Démonstration. — Comme $\mathscr{Y}$ est intègre et étale sur $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$, il est réduit et purement de dimension n ; il en est donc de même de Y. On a $d_k(y) = d_k(\eta_1) = n$. Comme X est sans bord, le lemme 11.6.5 entraîne que le morphisme de germes h est fini et plat. Comme X est génériquement lisse et comme $d_k(x) = n$, l'espace X est lisse au voisinage de x ; en particulier, l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est un corps. Le théorème 6.3.7 de [**52**] entraîne alors que le morphisme d'anneaux locaux $\mathscr{O}_{X,x} \to \mathscr{O}_{X_y,x}$ est régulier. En conséquence, la

fibre $h^{-1}(y)$ est réduite en x. Le degré du morphisme h en x est alors égal au degré de l'extension $\mathscr{H}(x)/\mathscr{H}(y)$, c'est-à-dire P. □

Soit Ω un voisinage affinoïde de x dans X tel que le polyèdre calibré $\Pi_{f|\Omega}$ soit un voisinage de 0, étoilé en 0, dans le cône calibré $\Pi_{f,x}$; on exige en outre que x soit le seul antécédent de η_1 dans Ω. Le morphisme $g|_\Omega$ est alors fini et plat au-dessus de η_1. Soit W un voisinage affinoïde de η_1 dans $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ tel que g induise un morphisme fini et plat surjectif de $\Omega \cap g^{-1}(W)$ dans W. Il existe une cellule C de $\mathbf{R}^n$, voisinage de l'origine, telle que $C_{\mathrm{sq}} \subset W$. Soit $W' = \mathrm{trop}^{-1}(C)$; c'est un domaine affinoïde de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$. Alors $g_{\mathrm{trop}}(\Omega \cap g^{-1}(W \cap W')) = C$ et $g(\Omega \cap g^{-1}(W \cap W'))$ contient C_{sq}. Quitte à remplacer Ω par $\Omega \cap g^{-1}(W \cap W')$, on peut donc supposer que $g_{\mathrm{trop}}(\Omega)$ est une cellule, voisinage de l'origine dans $\mathbf{R}^n$, et que $g|_\Omega$ est fini et plat au-dessus de $g_{\mathrm{trop}}(\Omega)_{\mathrm{sq}}$.

Soit $\mathscr{C}$ une décomposition cellulaire du cône tropical $\Pi_{f,x}$, dont les cellules sont des cônes et qui est adaptée à son calibrage ; on suppose en outre que son image par q_{trop} se prolonge en une décomposition cellulaire de $\mathbf{R}^n$.

Soit C une n-cellule ouverte de $\Pi_{f,x}$; posons $C' = g_{\mathrm{trop}}(C)$. Notons aussi $D = C \cap f_{\mathrm{trop}}(\Omega)$ et $D' = q_{\mathrm{trop}}(D)$. L'ensemble D est ouvert et fermé dans $q_{\mathrm{trop}}^{-1}(D') \cap f_{\mathrm{trop}}(\Omega)$, donc $f_{\mathrm{trop}}^{-1}(D) \cap \Omega$ est ouvert et fermé dans $g_{\mathrm{trop}}^{-1}(D') \cap \Omega$. Par suite, la restriction de g à $f_{\mathrm{trop}}^{-1}(D) \cap \Omega$ est finie et plate au-dessus de D'_{sq}. Comme D'_{sq} est connexe et non vide, il existe un unique entier $N_{C,\Omega}$ tel que cette restriction soit de degré $N_{C,\Omega}$. Le vecteur-volume μ_C correspondant au calibrage de la cellule C de $\Pi_{f,x}$ est égal à $N_{C,\Omega}\sigma_C(e)$, où e est le vecteur-volume canonique de $\mathbf{R}^n$ et $\sigma_C \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ est l'unique section de q_{trop} d'image $\langle C \rangle$. Cela prouve que l'entier $N_{C,\Omega}$ ne dépend pas du choix du voisinage Ω choisi comme ci-dessus ; on le notera N_C.

Le cône tropical $\Pi_{\tilde{f},\xi}$ jouit d'une description similaire, à l'aide d'un voisinage affinoïde Υ de ξ dans V^{an} et de décompositions cellulaires de $\tilde{f}(\Upsilon)$, de $\Pi_{\tilde{f},\xi}$ et de $\mathbf{R}^n$ adaptées à q_{trop}. Par raffinement, on suppose que ces décompositions cellulaires coïncident avec celles introduites précédemment pour $\Pi_{f,x}$.

Pour toute n-cellule C de $\Pi_{\tilde{f},\xi}$ qui rencontre la n-cellule ouverte D de $\mathscr{C}$, d'image D' dans $\mathbf{R}^n$, la restriction de $\tilde{g}$ à $f_{\mathrm{trop}}^{-1}(C) \cap \Upsilon$ est finie et plate au-dessus de D'_{sq} ; on note $\tilde{N}_C$ le degré correspondant, de sorte que le vecteur-volume $\tilde{\mu}_C$ donné par le calibrage de $\Pi_{\tilde{f},\xi}$ est égal à $\tilde{N}_C\sigma_C(e)$.

D'après la proposition suivante, on a $N_C = \tilde{N}_C$ pour toute n-cellule C de $\Pi_{f,x}$. Le théorème s'ensuit. □

Proposition 14.6.4. — *Pour toute n-cellule C de $\Pi_{f,x}$, on a $N_C = \tilde{N}_C$.*

Démonstration. — On peut définir la n-cellule conique C comme le lieu de validité dans $\mathbf{R}^m$ d'une conjonction d'inégalités $\Phi = \bigwedge\{\sum Pa_{r,i}x_i < 0\}$. De même, le cône C' de $\mathbf{R}^n$ est défini par une conjonction d'inégalités $\Phi' = \bigwedge\{\sum a'_{s,j}y_j < 0\}$.

On note Ψ la conjonction des inégalités monomiales $\prod|f_i|^{Pa_{r,i}} < 1$; elle définit un ouvert de X. On note aussi $\widetilde{\Psi}$ la conjonction des inégalités monomiales $\prod|\widetilde{f_i(x)}|^{Pa_{r,i}} < 1$; en interprétant $\widetilde{f_i(x)}$ comme une fonction rationnelle sur V, cette conjection définit un ouvert de V^{an}.

De même, notons Ψ' la conjonction des inégalités $\prod|T_j|^{a'_{s,j}} < 1$, définissant un ouvert de $\mathbf{G}_{\mathrm{m},k}^n$. On notera $\widetilde{\Psi}'$ la même conjonction d'inégalités définissant un ouvert de $\mathbf{G}_{\mathrm{m},\tilde{k}}^n$.

Le degré N_C peut être caractérisé ainsi : dans l'ouvert de Ω défini par la condition Ψ, tout point de $S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)$ satisfaisant Ψ' et suffisamment proche de η_1 a N_C antécédents (comptés avec degrés de l'extension de corps résiduels et multiplicité) par le morphisme g.

Pour tout i, choisissons une fonction $h_i \in \mathscr{O}_{Y,y}$ telle que $|h_i(y)| = 1$ et $\widetilde{h_i(y)} = \widetilde{f_i(x)}^P$; c'est possible puisque $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^P \subset \tilde{F} = \widetilde{\mathscr{H}(y)}$ et puisque, $Y = \mathscr{Y}^{\mathrm{an}}$ étant sans bord (donc presque bon en tout point), $\kappa(y)$ est dense dans $\mathscr{H}(y)$. Au voisinage de x, les fonctions f_i^P et $h_i \circ h$ ont donc même valeur absolue. Notons Θ la conjonction des inégalités $\prod |h_i|^{a_{r,i}} < 1$. Elle définit un ouvert de Y dont l'image réciproque par h se décrit au voisinage, de x par la conjonction des inégalités monomiales $\prod |f_i|^{Pa_{r,i}} < 1$, c'est-à-dire par Ψ.

L'extension $\tilde{F}$ définit un revêtement fini étale $\widetilde{\mathscr{Y}}$ de $(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)_{\tilde{k}}$ au voisinage de son point générique et le morphisme $\tilde{g}\colon (V^{\mathrm{an}}, \xi) \to (\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)_{\tilde{k}}$ se factorise par un morphisme $\tilde{p}\colon \widetilde{\mathscr{Y}^{\mathrm{an}}} \to (\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)_{\tilde{k}}$. Soit $\zeta = \tilde{p}(\xi)$; alors le morphisme $\tilde{h}\colon (V^{\mathrm{an}}, \xi) \to (\widetilde{\mathscr{Y}}^{\mathrm{an}}, \zeta)$ est fini et plat de degré P. De plus, le morphisme $\tilde{p}$ est fini et étale en ζ. La condition $\widetilde{\Psi}$ ne portant, par construction, que sur des normes de fonctions sur $\widetilde{\mathscr{Y}}$, elle définit une condition $\widetilde{\Theta}$ sur $\widetilde{\mathscr{Y}}^{\mathrm{an}}$.

Lemme 14.6.5. — a) *Par le morphisme g, tout point de $S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)$ satisfaisant Ψ' et suffisamment proche de η_1 a exactement N_C/P antécédents (comptés avec degrés de l'extension de corps résiduels) dans Y satisfaisant Θ.*

b) *Par le morphisme $\tilde{g}$, tout point de $S(\mathbf{G}_{\mathrm{m},\tilde{k}}^n)$ satisfaisant $\widetilde{\Psi}'$ et suffisamment proche de $\eta_{1,\tilde{k}}$ a $\tilde{N}_C/P$ antécédents (comptés avec degrés de l'extension de corps résiduels) dans $\widetilde{\mathscr{Y}}^{\mathrm{an}}$ satisfaisant $\widetilde{\Theta}$.*

Démonstration. — Nous ne démontrons que la première assertion, la seconde en est le cas particulier d'un corps trivialement valué.

On commence par choisir des voisinages affinoïdes X_1 de x dans Ω, Y_1 de y dans Y et Z_1 de η_1 dans $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$, tels que h induise un morphisme fini et plat de degré P, $h_1\colon X_1 \to Y_1$, et $p\colon \mathscr{Y} \to \mathscr{G}_{\mathrm{m}}^n$ induise un morphisme fini étale $p_1\colon Y_1 \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$. C'est possible car le morphisme h est fini et plat en x et le morphisme p est fini et étale en y.

Comme x est le seul antécédent de η_1 par g dans Ω, le voisinage X_1 de x est un voisinage de la fibre de g ; il contient donc l'image inverse d'un voisinage de η_1. Autrement dit, tous les antécédents dans Ω d'un point assez proche de η_1 appartiennent à X_1. De même, tous les antécédents dans Y d'un point assez proche de η_1 appartiennent à Y_1.

Soit z un point de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ assez proche de η_1 satisfaisant la condition Ψ'. Notons $y_1, \dots, y_a$ ses antécédents dans Y_1 par p. Pour $i \in \{1, \dots, a\}$, notons x_{ij} les antécédents de y_i dans X_1 par h ; on remarque que x_{ij} vérifie la condition Ψ si et seulement si y_i vérifie la condition Θ. Par suite, la définition de N_C entraîne que

$$N_C = \sum_{\Psi(x_{ij})} \mathrm{rg}_{\mathscr{O}_{Z,\eta_1}}(\mathscr{O}_{X,x_{ij}}) = \sum_{\Theta(y_i)} \mathrm{rg}_{\mathscr{O}_{Z,\eta_1}}(\mathscr{O}_{Y,y_i}) \, \mathrm{rg}_{\mathscr{O}_{Y,y_i}}(\mathscr{O}_{X,x_{ij}}).$$

Puisque h_1 est fini et plat de degré P, on a

$$P = \sum_j \mathrm{rg}_{\mathscr{O}_{Y,y_i}}(\mathscr{O}_{X,x_{ij}})$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, a\}$. Puisque p_1 est étale, on a aussi

$$\mathrm{rg}_{\mathscr{O}_{Z,\eta_1}}(\mathscr{O}_{Y,y_i}) = [\mathscr{H}(y_i) : \mathscr{H}(\eta_1)].$$

Ainsi,

$$N_C = P \sum_{\Theta(y_i)} [\mathscr{H}(y_1) : \mathscr{H}(\eta_1)],$$

comme il fallait démontrer. □

Soit $\beth$ le groupe $\mathbf{R}_+^\times \times \mathbf{R}$ muni de l'ordre lexicographique ; son élément neutre est $(1,0)$ et les éléments de la forme $(1,x)$ avec $x > 0$ vérifient $(1,0) < (1,x) < (t,0)$ pour tout $t \in \mathbf{R}_+^\times$ tel que $t > 1$. Choisissons un élément $\mathbf{g}$ de $\beth^n$ de la forme $(1,c)$, où $c \in \mathbf{R}^n$ appartient à la cellule ouverte C. Il définit une valuation de Gauß $\eta_{\mathbf{g}}$ sur $k(T_1, \ldots, T_n)$ et une valuation de Gauß $\eta_{\mathbf{g},\tilde{k}}$ sur $\tilde{k}(T_1, \ldots, T_n)$.

Appliquons l'« élimination des quantificateurs » dans ACVF ([**117**], voir aussi [**137**]) : soit Λ_C une formule sans quantificateur du langage des anneaux valués, à paramètres dans k qui est équivalente dans la théorie ACVF à la formule :

$$(x \in \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n) \wedge \Psi'(x) \wedge \text{« } x \text{ a } N_C/P \text{ antécédents dans } \mathscr{Y} \text{ satisfaisant } \Theta \text{ »}.$$

Compte tenu de la formule définissant les valuations de Gauß η_γ, on voit qu'il existe une formule Λ'_C sans quantificateur du langage des groupes ordonnés à paramètres dans $|k^\times|$ tel que pour tout modèle Γ de la théorie DOAG contenant $|k^\times|$ et tout $\gamma \in \Gamma$, l'élément γ satisfait Λ'_C si et seulement si le point η_γ satisfait Λ_C.

Le lemme 14.6.5 ci-dessus assure l'existence d'un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $r \in (\mathbf{R}_+^*)^n$, le point $\eta_r \in \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ satisfait Λ_C dès que $\varepsilon < |r_i| < 1/\varepsilon$ pour tout i et que r satisfait Ψ'.

Lorsque la valeur absolue de k n'est pas triviale, le groupe $|k^\times|$ est dense dans $\mathbf{R}_+^\times$, car k est algébriquement clos, et l'on peut supposer que ε appartient à $|k^\times|$. L'implication

$$\forall i (\varepsilon < |r_i| < 1/\varepsilon) \wedge \Psi'(r) \Rightarrow \Lambda'_C(r)$$

est vérifiée dans le modèle $\mathbf{R}_+^*$ de la théorie DOAG ; elle est donc vérifiée dans le modèle $\beth$. Par suite, la valuation $\eta_{\mathbf{g}}$ satisfait Λ_C.

Dans le cas où la valeur absolue de k est triviale, on remarque que si η_r satisfait ces conditions, alors pour tout $\alpha > 0$, le point η_{r^α} les satisfait également, car ces points définissent la même valuation ; on voit ainsi que l'on peut omettre la condition $\varepsilon < |r_i| < 1/\varepsilon$ dans l'argument ci-dessus et l'on en déduit que la valuation $\eta_{\mathbf{g}}$ satisfait Λ_C.

Retraduisons ceci en termes de valuations. La valuation $\eta_{\mathbf{g}}$ du corps $k(T_1, \ldots, T_n)$ possède ainsi N_C/P extensions à $k(\mathscr{Y})$ et satisfaisant Θ, comptées avec multiplicités. A priori, la multiplicité associée à une telle extension est le degré de son hensélisé sur celui du hensélisé de $(k(T_1, \ldots, T_n), \eta_1)$; par stabilité, cette multiplicité est simplement égale au produit des indices d'inertie et de ramification de l'extension.

On prouve de même que la valuation $\eta_{\mathbf{g},\tilde{k}}$ possède $\widetilde{N}_C/P$ extensions à $\widetilde{k}(\widetilde{\mathscr{Y}})$ satisfaisant $\widetilde{T}heta$, comptés avec multiplicités ; et la multiplicité associée à une telle extension est simplement égale au produit de ses indices d'inertie et de ramification.

Il résulte alors du lemme suivant que $N_C/P = \widetilde{N_C}/P$, si bien que $N_C = \widetilde{N}_C$, ce qui conclut la démonstration de la proposition 14.6.4. □

Lemme 14.6.6. — *Par composition avec la valuation associée à y, toute valuation $\tilde{v}$ sur $\tilde{k}(\tilde{\mathscr{Y}})$ triviale sur $\tilde{k}$ induit une valuation v sur $k(\mathscr{Y})$.*

a) *Cette application $\tilde{v} \mapsto v$ induit une bijection de l'ensemble des prolongements à $\tilde{k}(\tilde{\mathscr{Y}})$ de $\eta_{\mathbf{g},\tilde{k}}$ sur l'ensemble des prolongements à $k(\mathscr{Y})$ de $\eta_{\mathbf{g}}$.*

Soit $\tilde{v}$ et v deux telles valuations.

b) *Les indices d'inertie de v et de $\tilde{v}$ sont égaux.*

c) *Les indices de ramification de v et de $\tilde{v}$ sont égaux.*

d) *La valuation v vérifie la condition Θ si et seulement si la valuation $\tilde{v}$ vérifie la condition $\tilde{\Theta}$.*

Démonstration. — La valuation $\eta_{\mathbf{g}}$ raffine η_1 qui n'a qu'un seul prolongement à $k(\mathscr{Y})$. En effet, comme $k(\mathscr{Y})$ est finie sur $k(T_1,\dots,T_n)$, le groupe des valeurs d'une valuation de $k(\mathscr{Y})$ qui prolonge η_1 contient celui de $\mathscr{H}(\eta_1)$ comme sous-groupe d'indice fini, donc coïncide avec celui-ci puisqu'il est égal à $|k^\times|$ et que k est algébriquement clos. En particulier, tout prolongement de η_1 à $k(\mathscr{Y})$ appartient à Y^{an}, donc est égal à y qui est le seul antécédent de η_1 dans Y^{an}. La première assertion résulte alors de ce que la valuation $\eta_{\mathbf{g}}$ est la composée de la valuation de Gauß usuelle η_1 sur $k(T_1,\dots,T_n)$ et de la valuation $\eta_{\mathbf{g},\tilde{k}}$ sur $\tilde{k}(T_1,\dots,T_n)$,

Puisque les extensions résiduelles correspondantes coïncident, les indices d'inertie de v et de $\tilde{v}$ sont égaux. Puisque $|\mathscr{H}(y)^\times| = |\mathscr{H}(\eta_1)\times| = |k^\times|$, leurs indices de ramification sont aussi égaux.

Démontrons maintenant que v vérifie la condition Θ si et seulement si $\tilde{v}$ la condition $\tilde{\Theta}$. Par construction, Θ est une conjonction d'inégalités de la forme $|\varphi| < 1$, où $\varphi \in \mathscr{O}_{Y,y}$ vérifie $|\varphi(y)| = 1$, et $\tilde{\Theta}$ est la conjonction des inégalités $|\tilde{\varphi(y)}| < 1$ (pour les mêmes fonctions φ) où $\tilde{\varphi(y)} \in \widetilde{\mathscr{H}(y)}$ est considéré comme un élément de $\mathscr{O}_{\tilde{\mathscr{Y}},\zeta}$. Rappelons que la valuation v est la composée de la valuation associée à y et de $\tilde{v}$; comme $|\varphi(y)| = 1$, les conditions $|\varphi(v)| < 1$ et $|\tilde{\varphi}(\tilde{v})| < 1$ sont équivalentes. Le lemme en résulte □

Terminons ce paragraphe par un complément sur la structure des cônes tropicaux lorsqu'ils ne sont pas de dimension maximale qui indique néanmoins qu'elles ne peuvent être arbitraire. En particulier, il résultera du théorème 15.6.1 qu'ils peuvent être munies d'un calibrage partout strictement positif et harmonieux.

§ 14.7. VARIATION DES TROPICALISATIONS

Lemme 14.7.1. — *Soit X un espace analytique compact, soit $f\colon X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques, soit $g\colon X \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ un moment. Pour tout $y \in Y$, on pose $X_y = f^{-1}(y)$. Soit y un point* rigide *de Y. Il existe un voisinage U de y dans Y et un polyèdre $\Delta \subset g_{\mathrm{trop}}(X_y)$ de dimension $\leqslant \dim(X_y) - 1$ tels que $g_{\mathrm{trop}}(X_u) \subset g_{\mathrm{trop}}(X_y)$ et $g_{\mathrm{trop}}(X_u \cap \partial(X)) \subset \Delta$ pour tout $u \in U$.*

Démonstration. — Le domaine analytique $g_{\mathrm{trop}}^{-1}(g_{\mathrm{trop}}(X_y))$ de X contient le fermé de Zariski X_y, donc en est un voisinage (lemme 11.4.10). Comme X est compact, il existe un voisinage U de y tel que $f^{-1}(U) \subset g_{\mathrm{trop}}^{-1}(g_{\mathrm{trop}}(X_y))$. Ainsi, si $u \in U$, $g_{\mathrm{trop}}(X_u)$ est contenu dans $g_{\mathrm{trop}}(X_y)$.

Le bord $\partial(X)$ de X est contenu dans une réunion finie de compacts qui sont chacun de la forme $\varphi^{-1}(\eta_r)$, où φ est un morphisme d'un domaine affinoïde V de X vers $\mathbf{A}^1$ et r est un nombre réel > 0 (**[50]**, lemme 3.1). Soit $\varphi\colon V \to \mathbf{A}^1$ un tel morphisme et soit $r > 0$.

Posons $Q = g_{\mathrm{trop}}(X_y \cap \varphi^{-1}(\eta_r))$ et $W = g_{\mathrm{trop}}^{-1}(Q) \cap \varphi^{-1}(\eta_r)$. L'espace W est un domaine analytique compact de $V \cap \varphi^{-1}(\eta_r)$ et en contient le fermé de Zariski $X_y \cap \varphi^{-1}(\eta_r)$. Par suite, W est un voisinage de $X_y \cap \varphi^{-1}(\eta_r)$ dans $X \cap \varphi^{-1}(\eta_r)$. Puisque X est compact, et quitte à diminuer U, on a $g_{\mathrm{trop}}(X_u \cap \varphi^{-1}(\eta_r)) \subset Q$ pour $u \in U$.

Par ailleurs, démontrons que $\dim(Q) \leqslant \dim(X_y) - 1$. Soit $x \in X_y \cap \varphi^{-1}(\eta_r)$; on a $d_k(x) \leqslant \dim(X_y)$; d'autre part, $d_k(x) = d_{\mathscr{H}(\eta_r)}(x) + 1$; par conséquent, $d_{\mathscr{H}(\eta_r)}(x) \leqslant \dim(X_y) - 1$. Ainsi, la dimension $\mathscr{H}(\eta_r)$-analytique de $X_y \cap \varphi^{-1}(\eta_r)$ est majorée par $\dim(X_y) - 1$ et, *a fortiori*, $\dim(Q) \leqslant \dim(X_y) - 1$.

Le lemme en résulte. □

Théorème 14.7.2. — *Soit d un entier, soit X un espace analytique compact purement de dimension n qui satisfait à la condition (S_d), soit Y un espace analytique régulier purement de dimension d et soit $f\colon X \to Y$ un morphisme purement de dimension relative $n-d$; pour tout $t \in Y$, on pose $X_t = f^{-1}(t)$.*

Soit $g\colon X \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^N$ un moment. Soit y un point rigide *de Y et soit P le polyèdre calibré $g_{\mathrm{trop}}(X_y)^{(n-d)}$.*

a) *Il existe un voisinage ouvert U de y dans Y tel que, pour tout point $u \in U$, le polyèdre calibré $g_{\mathrm{trop}}(X_u)^{(n-d)}$ soit égal à P.*

b) *On suppose de plus que $Y = \mathbf{A}^d$ et que y est l'origine. Posons $X' = f^{-1}(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d)$ et soit $h\colon X' \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^N \times \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$ le moment défini par (g, f) ; c'est un moment agréable. Il existe un nombre réel $r > 0$ tel que le polyèdre calibré $h_{\mathrm{trop}}(X') \cap \mathbf{R}^N \times]-\infty, \log(r)[^d$ soit égal au produit des polyèdre calibrés P et de la cellule $]-\infty, \log(r)[^d$ munie de son calibrage standard.*

Dans une première version de ce texte, l'énoncé de ce théorème supposait $d = 1$. Comme l'a noté A. Mihatsch dans [**103**], la démonstration s'étend à tout d.

Démonstration. — D'après le lemme 14.7.1, il existe un voisinage ouvert U de y dans Y et un polyèdre Δ de dimension $\leqslant n-d-1$ tels que $g_{\mathrm{trop}}(X_u) \subset g_{\mathrm{trop}}(X_y)$ et $g_{\mathrm{trop}}(X_u \cap \partial(X)) \subset \Delta$ pour tout $u \in U$. Quitte à le remplacer par la composante connexe de y dans U, on suppose que U est connexe.

Choisissons une décomposition cellulaire $\mathscr{C}$ de $g_{\mathrm{trop}}(X_y)$ telle que Δ soit contenu dans la réunion des $(n-d-1)$-cellules de $\mathscr{C}$.

Lemme 14.7.3. — *Soit C une $(n-d)$-cellule de $\mathscr{C}$. Soit $p\colon \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^N \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{n-d}$ un morphisme affine de tores tel que la restriction à C de p_{trop} soit injective ; soit $\sigma_C\colon \mathbf{R}^{n-d} \to \mathbf{R}^N$ l'unique section affine de p dont l'image contient C. Posons $W = g_{\mathrm{trop}}^{-1}(C)$; c'est un domaine de Weierstrass de X, purement de dimension n.*

a) *Il existe un entier naturel $\delta_C \neq 0$ tel que le morphisme $(p \circ g, f)|_W\colon W \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{n-d} \times \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$ soit fini et plat de degré δ_C au-dessus de tout point de $\mathrm{sq}_U(p_{\mathrm{trop}}(\mathring{C}))$.*

b) *Pour tout $u \in U$, on a $C \subset g_{\mathrm{trop}}(X_u)$.*

(Rappelons, voir §12.1.12, que l'ensemble $\mathrm{sq}_U(p_{\mathrm{trop}}(\mathring{C}))$ est constitué des points de X de la forme $\mathrm{sq}_u(c)$, pour $u \in U$ et $c \in p_{\mathrm{trop}}(\mathring{D})$.)

Démonstration. — a) Soit $u \in U$ et soit S_u le squelette de $(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{n-d})_u$, identifié à une partie de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{n-d} \times Y$. Soit s un point de l'image canonique $\mathrm{sq}_u(p_{\mathrm{trop}}(\mathring{C}))$ de $p_{\mathrm{trop}}(\mathring{C})$ dans S_u. Prouvons que $(p \circ g, f)|_Y$ est fini et plat au-dessus de s.

Soit x un point de W tel que $(p \circ g, f)(x) = s$. Le lemme 11.5.1, appliqué au morphisme de W_u dans $\mathbf{G}_{\mathrm{m},u}^{n-d}$ induit par $p \circ g$, affirme que la dimension de ce morphisme en x est nulle.

Cela entraîne que $\dim_x(p\circ g, f) = 0$. Puisque $\partial(W) \subset \partial(X) \cup g_{\mathrm{trop}}^{-1}(\partial C)$, on a $x \notin \partial(W)$. Puisque f_W est propre, le lemme 11.6.6, *a*), entraîne que $f|_W$ est fini au-dessus d'un voisinage de s.

Comme $d_{\mathscr{H}(t)}(s) = n - d$, on a $d_k(s) \geqslant n - d$. Les espaces W et $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{n-d} \times Y$ sont tous deux purement de dimension n, l'espace k-analytique $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{n-d} \times Y$ est régulier. Comme X vérifie la propriété (S_d), le lemme 11.5.8 appliqué au morphisme $(p\circ g, f)|_W$ entraîne que ce morphisme est plat au-dessus de s.

Comme U est connexe, l'ensemble $\mathrm{sq}_U(p_{\mathrm{trop}}(\mathring{C})) = \{\mathrm{sq}_u(p_{\mathrm{trop}}(\mathring{C}))\}_{u\in U}$ est connexe, d'après 12.1.12. Par suite, le degré de $(p \circ g, f)|_W$ au-dessus de s ne dépend pas du point s choisi. Notons-le δ_C.

Par hypothèse, $C \subset g_{\mathrm{trop}}(X_y)$, donc $p_{\mathrm{trop}}(C) \subset p \circ g_{\mathrm{trop}}(W_y)$; d'après le théorème 12.8.2, on a $p_{\mathrm{trop}}(C) \subset p \circ g_{\mathrm{trop}}(\Sigma^{(n-d)}_{(p\circ g)_y})$ donc tout point de $\mathrm{sq}_y(p_{\mathrm{trop}}(\mathring{C}))$ possède un antécédent par $p \circ g$. Cela entraîne que $\delta_C \neq 0$ et termine la démonstration de l'assertion *a*).

b) Soit s un point de $\mathrm{sq}_U(p_{\mathrm{trop}}(\mathring{C}))$ et soit u son image sur U. Par changement de base, le morphisme de W_u dans $(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{n-d})_u$ déduit de $p \circ g$ est fini et plat de degré δ_C au-dessus de s.

Comme $\delta_C \neq 0$, il s'ensuit que $p_{\mathrm{trop}}(\mathring{C}) \subset p \circ g_{\mathrm{trop}}(W_u)$ pour tout $u \in U$. Par densité de $\mathring{C}$ dans C et compacité de W_u, on a $p_{\mathrm{trop}}(C) \subset p \circ g_{\mathrm{trop}}(W_u)$ pour tout $u \in U$. Par définition de W, ceci entraîne que $C \subset g_{\mathrm{trop}}(W_u)$ pour tout $u \in U$. □

Reprenons la démonstration du théorème 14.7.2.

a) Démontrons d'abord la constance des *polyèdres calibrés* $g_{\mathrm{trop}}(X_u)^{(n-d)}$ pour $u \in U$.

Soit $u \in U$.

D'après le lemme précédent, toute $(n - d)$-cellule de $g_{\mathrm{trop}}(X_y)$ est contenue dans $g_{\mathrm{trop}}(X_u)$. Par suite, $g_{\mathrm{trop}}(X_y)^{(n-d)} \subset g_{\mathrm{trop}}(X_u)$. Par définition de U, on a également $g_{\mathrm{trop}}(X_u) \subset g_{\mathrm{trop}}(X_y)$. Il en résulte que $g_{\mathrm{trop}}(X, u)^{(n-d)} = g_{\mathrm{trop}}(X_y)^{(n-d)}$.

De plus, le calibrage canonique de $g_{\mathrm{trop}}(X_u)$ est adapté à la décomposition cellulaire $\mathscr{C}$, car aucune $(n - d)$-cellule ouverte de $\mathscr{C}$ ne rencontre $g_{\mathrm{trop}}(X_u \cap \partial(X))$.

Soit C une $(n - d)$ cellule de $\mathscr{C}$, soit $p\colon \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^N \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{n-d}$ un morphisme affine de tores tel que la restriction à C de p_{trop} soit injective et soit $\sigma_C\colon \mathbf{R}^{n-d} \to \mathbf{R}^N$ l'unique section affine de p dont l'image contient C. Par définition des calibrages canoniques, le vecteur-volume $\mu_{C,u}$ de $g_{\mathrm{trop}}(X_u)$ sur C est donné par

$$\mu_{C,u} = \delta_C \sigma_{C,*}(|e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-d}|).$$

Ainsi, le polyèdre calibré $g_{\mathrm{trop}}(X_u)^{(n-d)}$ est égal à $g_{\mathrm{trop}}(X_y)^{(n-d)} = P$, ainsi qu'il fallait démontrer.

b) Nous supposons maintenant que $Y = \mathbf{A}^d$ et que $y = 0$ est l'origine.

Le morphisme $f\colon X \to Y$ est topologiquement propre, donc le morphisme $f|_{X'}\colon X' \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$ est topologiquement propre. Par suite, le moment $h' = (g|_{X'}, f|_{X'})$ est topologiquement propre, et en particulier agréable.

On choisit un nombre réel $r > 0$ assez petit tel que l'on puisse prendre $U = D(0, r)$ dans *a*).

Posons $\Gamma =]-\infty; \log(r)[^d$ et notons $X_\Gamma = X' \cap f^{-1}(D(0, r)) = X' \cap f_{\mathrm{trop}}^{-1}(\Gamma)$.

Prouvons d'abord que $h'_{\mathrm{trop}}(X_\Gamma) = P \times \Gamma$.

Soit $\gamma \in \Gamma$ et soit $u \in D(0, r)$ tel que $\mathrm{trop}(u) = \gamma$. Soit C une cellule de dimension $(n - d)$ de $\mathscr{C}$. La cellule $C \times \{\gamma\}$ est contenue dans $g_{\mathrm{trop}}(X_u)$, d'après *a*). Par suite, la cellule

$C \times \Gamma$ est contenue dans $h'_{\mathrm{trop}}(X_\Gamma)$. Comme elle est de dimension n, elle est contenue dans $h'_{\mathrm{trop}}(X_\Gamma)^{(n)}$. Inversement, la définition de U au début de la démonstration garantit que pour tout $u \in D(0,r) \cap \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$, $g_{\mathrm{trop}}(X'_u) \subset g_{\mathrm{trop}}(X_y)$. Par suite, $h'_{\mathrm{trop}}(X_\Gamma) \subset g_{\mathrm{trop}}(X_y) \times \Gamma$. On a donc $h'_{\mathrm{trop}}(X_\Gamma)^{(n)} \subset g_{\mathrm{trop}}(X_y)^{(n-d)} \times \Gamma$. On a donc l'égalité voulue.

Démontrons maintenant l'égalité des calibrages. Soit C une $(n-d)$-cellule de $\mathscr{C}$. notons aussi $q\colon \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^N \times \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ le morphisme de tores (p, id). L'application affine $\tau_C = (\sigma_C, \mathrm{id})$ est l'unique section affine de q_{trop} dont l'image contient $C \times \Gamma$. Nous allons démontrer que le calibrage de la cellule $C \times \Gamma$ de $h'_{\mathrm{trop}}(X_\Gamma)^{(n)}$ est au produit du calibrage μ_C de C dans P par le calibrage standard de Γ.

Posons $X_{C,\Gamma} = (h'_{\mathrm{trop}})^{-1}(C \times \Gamma)$; nous allons démontrer que le morphisme $q \circ h'|_{X_{C,\Gamma}}$ est fini et plat de degré δ_C au-dessus de tout point de $\mathrm{sq}(q_{\mathrm{trop}}(\mathring{C} \times \Gamma))$.

Soit $c \in p_{\mathrm{trop}}(\mathring{C})$ et $\gamma \in \Gamma$ Par la construction de la décomposition cellulaire C et le choix de r, le point $\mathrm{sq}(c,\gamma)$ n'appartient pas à $q \circ h'(\partial(X_{C,\Gamma}))$. D'après le lemme 11.6.6, c), le morphisme $q \circ h'|_{X_{C,\Gamma}}$ est fini et plat au-dessus de $\mathrm{sq}(c,\gamma)$; notons δ son degré.

On a $q \circ h' = (p, \mathrm{id}) \circ (g,f)|_{X'} = (p \circ g, f)|_{X'}$. Par changement de base, le morphisme de $X_{C,\Gamma,\mathrm{sq}(\gamma)}$ dans $\mathbf{G}_{\mathrm{m},\mathscr{H}(\mathrm{sq}(\gamma))}^{n-d}$ déduit de $p \circ g$ est fini et plat de degré δ au-dessus de $\mathrm{sq}_{\mathscr{H}\mathrm{sq}(\gamma)}(\mathrm{sq}(\gamma))$. D'après la première partie de l'énoncé et le choix de r, ce degré est égal à δ_C.

Par conséquent (*cf.* §14.5.2), le calibrage de la cellule $C \times \Gamma$ est constant, de vecteur-volume

$$\mu_{C\times\Gamma} = \delta_C \tau_{C,*}(|e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-1} \wedge e_n|).$$

De plus,

$$\tau_{C,*}(|e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-1} \wedge e_n)| = \sigma_{C,*}(|e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-d}|) \cdot |e_{n-d+1} \wedge \cdots \wedge e_n|,$$

qui est le produit du vecteur-volume associé à C dans P et du vecteur-volume associé au calibrage standard de Γ. Ceci achève la démonstration du théorème. □

Remarque 14.7.4. — Le théorème 14.7.2 ne peut pas être vrai sans certaines hypothèses sur le morphisme $f\colon X \to Y$.

Considérons par exemple le cas où f est la normalisation d'une courbe lisse en dehors d'un unique point double ordinaire y et g est le moment trivial ($N = 0$). Dans ce cas, la tropicalisation de X_y est un point avec multiplicité 2. En revanche, pour tout autre point $u \neq y$, la tropicalisation de X_u est un point avec multiplicité 1. Dans ce cas, la base Y n'est pas régulière.

De même, considérons dans l'éclaté du bidisque en l'origine le domaine analytique défini par $|y/x| \leqslant 1$. Son image par l'application d'éclatement est définie par l'inégalité $|y| \leqslant |x|$. Sur tout voisinage de l'origine, certaines fibres sont vides et d'autre non. La fibre de f en l'origine est de dimension 1 et les autres sont de dimension $\leqslant 0$.

CHAPITRE 15

FORMES DIFFÉRENTIELLES RÉELLES EN GÉOMÉTRIE ULTRAMÉTRIQUE

Soit X un espace k-analytique topologiquement séparé. La définition 14.3.5 le munit d'une structure d'espace G-tropical affiné.

On en déduit des notions de formes et G-formes différentielles de type (p, q) sur X, à coefficients dans une classe de coefficients.

Au §12.9.5, nous avons expliqué comment ses parties squelettiques le munissent d'une structure d'espace G-tropical vertébré de niveau n. La définition 14.3.5 munit les parties squelettiques de X d'un n-calibrage, de sorte que X est muni d'une structure d'espace G-tropical calibré de niveau n.

On en déduit une théorie de l'intégration des (n, n)-formes et des $(n-1, n)$-formes sur X, ainsi qu'une théorie de courants.

Dans ce chapitre, nous explorons plus avant les propriétés des formes différentielles sur les espaces analytiques.

Nous allons également démontrer que les espaces analytiques sans bord sont harmonieux et munir les espaces analytiques purement de dimension n d'une structure d'espace tropical.

§ 15.1. FORMES ET FONCTIONS LISSES

Proposition 15.1.1. — *Soit X un espace k-analytique topologiquement séparé, considéré comme espace G-tropical affiné.*

a) *Soit ω une G-forme de type (p, q) sur X. Il existe un G-recouvrement (V_i) de X et, pour tout i, un* moment *$f_i \colon V_i \to T_i$ sur V_i, une forme α_i de type (p, q) sur une partie paralinéaire de $T_{i,\mathrm{trop}}$ contenant $f_{i,\mathrm{trop}}(V_i)$ tels que $\omega|_{V_i} = f_{i,\mathrm{trop}}^* \alpha_i$.*

b) *Soit ω une forme de type (p, q) sur X. Il existe un recouvrement* ouvert *(V_i) de X et, pour tout i, un* moment *$f_i \colon V_i \to T_i$ sur V_i, une forme α_i de type (p, q) sur une partie paralinéaire de $T_{i,\mathrm{trop}}$ contenant $f_{i,\mathrm{trop}}(V_i)$ tels que $\omega|_{V_i} = f_{i,\mathrm{trop}}^* \alpha_i$.*

Démonstration. — On ne traite que le cas des G-formes, l'autre est analogue. Par hypothèse, il existe un G-recouvrement (W_i) de X et, pour tout i, une application paralinéaire g_i sur W_i à valeurs dans un espace affine $\mathbf{R}^{n_i}$, une forme β_i de type (p,q) sur une partie paralinéaire de E_i contenant $g_i(W_i)$, tels que $\omega|_{W_i} = g_i^*\beta_i$ pour tout i. Par définition d'une application paralinéaire, il existe pour tout i un G-recouvrement $(V_{i,j})$ de W_i et, pour tout j, un moment $f_{i,j}$ sur $V_{i,j}$, à valeurs dans le tore $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{n_i}$ un nombre rationnel $a_{i,j}$ et un élément $c_{i,j} \in \mathbf{R}^{n_i}$ tels que $g_{i,j} = a_{i,j} f_{i,j,\mathrm{trop}} + c_{i,j}$. Notons $p_{i,j} \colon \mathbf{R}_{\mathrm{trop}}^{n_i} \to \mathbf{R}^{n_i}$ l'application affine $t \mapsto at + c_{i,j}$; on a donc $g_{i,j} = p_{i,j} \circ f_{i,j,\mathrm{trop}}$, de sorte que

$$\omega|_{V_{i,j}} = f_{i,j,\mathrm{trop}}^*(p_{i,j}^*\beta_i).$$

L'assertion en résulte. □

Corollaire 15.1.2. — *Une fonction u sur X est lisse au voisinage d'un point x s'il existe un voisinage U de x dans X, des fonctions inversibles $f_1, \dots, f_n$ sur U et une fonction φ sur $\mathbf{R}^n$ au voisinage de $(f_{1,\mathrm{trop}}(x), \dots, f_{n,\mathrm{trop}}(x))$ telle que $u = \varphi \circ f_{\mathrm{trop}}$ sur U.*

Dans la suite du texte, nous travaillerons essentiellement avec ce type de cartes (G)-tropicales.

Proposition 15.1.3. — *Soit $\mathscr{G}$ une classe de coefficients. Soit X un espace analytique topologiquement séparé et soit u une fonction numérique sur X.*

a) *Pour que u soit G-localement de classe $\mathscr{G}$, il faut et il suffit que $u|_{X_{\mathrm{red}}}$ le soit.*
b) *Si X est presque bon, pour que u soit localement de classe $\mathscr{G}$, il faut et il suffit que $u|_{X_{\mathrm{red}}}$ le soit.*

Une variante de cet énoncé vaut pour les formes et les G-formes.
Démonstration. — Si u est localement (resp. G-localement) de classe $\mathscr{G}$, il en est de même de sa restriction à X_{red}. Démontrons la réciproque.

a) Supposons que $u|_{X_{\mathrm{red}}}$ soit G-localement de classe $\mathscr{G}$. Soit V un domaine affinoïde de X_{red} sur lequel il existe un moment $f \colon V \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ et une fonction φ de classe $\mathscr{G}$ sur $\mathbf{R}^n$ telle que $u|_V = \varphi \circ f_{\mathrm{trop}}$. On déduit du théorème de Gerritzen–Grauert (voir par exemple **[128]**, théorème 3.1) que V est recouvert par une réunion de domaines affinoïdes de la forme W_{red}, où W est un domaine affinoïde de X. Sur W_{red}, chacune des f_i se relève en une fonction g_i sur W ; ces fonctions sont inversibles et ont même norme que f_i ; elles définissent un moment $g \colon W \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ tel que $u_W = \varphi \circ g_{\mathrm{trop}}$. Cela prouve que u est G-localement de classe $\mathscr{G}$.

b) Soit x un point de X et soit V un voisinage analytique de x dans X_{red} sur lequel il existe un moment $f \colon V \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ et une fonction φ de classe $\mathscr{G}$ sur $\mathbf{R}^n$ telle que $u|_V = \varphi \circ f_{\mathrm{trop}}$. Comme X est presque bon en x, chaque $f_i(x) \in \mathscr{H}(x)$ est approchée par une fonction $g_i \in \mathscr{O}_{X,x}$. En particulier f_i et g_i ont même norme au voisinage de g. Ainsi, les g_i définissent un moment g défini au voisinage de X sur lequel on a $u = \varphi \circ g_{\mathrm{trop}}$; cela prouve que u est de classe $\mathscr{G}$ au voisinage de x. □

§ 15.2. SÉPARATION HOLOMORPHE

Proposition 15.2.1. — *Soit X un espace k-analytique topologiquement séparé, considéré comme espace G-tropical affiné. Soit ω une G-forme de type (p,q) sur X.*

a) *Le support de ω est contenu dans l'ensemble des points $x \in X$ tels que $d_k(x) \geqslant \max(p,q)$.*

b) *Soit V un domaine analytique de X et soit Y un fermé de Zariski de V. Si $\dim(Y) < \max(p,q)$, le support de ω ne rencontre pas Y.*

Démonstration. — Démontrons l'assertion a). Soit $x \in X$ un point tel que $d_k(x) < \max(p,q)$. Comme $d_{\mathrm{trop}}(x) \leqslant d_k(x)$, on a donc $d_{\mathrm{trop}}(x) < \max(p,q)$; l'assertion résulte donc de la proposition 3.3.6.

L'assertion b) en résulte car tout point y de Y vérifie $d_k(y) \leqslant \dim(Y)$. □

15.2.2. Séparation holomorphe. — On dira qu'un espace analytique X est *holomorphiquement séparé* si pour tout couple (x,y) de points de X avec $x \neq y$ il existe une fonction analytique f sur X telle que $|f(x)| \neq |f(y)|$. Un tel espace est topologiquement séparé.

Si X est un espace holomorphiquement séparé, il en va trivialement de même de tout domaine analytique de X.

Tout espace affinoïde est par définition holomorphiquement séparé ; en conséquence, tout domaine analytique d'un espace affinoïde est holomorphiquement séparé.

Un espace analytique sera dit *localement holomorphiquement séparé* s'il est topologiquement séparé et si chacun de ses points possède un voisinage analytique holomorphiquement séparé.

Un espace analytique topologiquement séparé qui est bon, ou plus généralement dont tout point possède un voisinage isomorphe à un domaine analytique d'un espace affinoïde, est localement holomorphiquement séparé. C'est en particulier le cas d'un espace analytique topologiquement séparé sans bord.

Lemme 15.2.3. — *Soit X un espace k-analytique holomorphiquement séparé. L'anneau des fonctions lisses sur X sépare les points.*

Démonstration. — Soit x, y des points distincts de X. Par définition de la séparation holomorphe, il existe une fonction analytique f sur X telle que $|f(x)| \neq |f(y)|$.

Supposons ces deux valeurs non nulles ; soit φ une fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support compact sur $\mathbf{R}$ valant 0 au voisinage de $\log|f(x)|$ et 1 au voisinage de $\log|f(y)|$. La fonction $\varphi \circ \log|f|$, définie sur l'ouvert d'inversibilité de f, est lisse ; prolongeons-la par 0 sur X tout entier. Comme φ est à support compact, la fonction obtenue est nulle au voisinage de l'ensemble des zéros de f ; elle est donc lisse et prend des valeurs différentes en x et y.

Si $f(x) = 0$, on a alors $f(y) \neq 0$ et on raisonne de même à partir d'une fonction φ à support compact valant 1 au voisinage de $\log|f(y)|$.

Le cas où $f(y) = 0$ est analogue par symétrie. □

Corollaire 15.2.4. — *Soit X un espace k-analytique localement holomorphiquement séparé. L'espace G-tropical affiné X est localement différentiellement séparé. En particulier, le faisceau des fonctions lisses sur X sépare localement les points.*

Corollaire 15.2.5. — *Soit X un espace analytique localement holomorphiquement séparé. Soit K une partie compacte de X et soit U un voisinage ouvert de K. Il existe une fonction lisse sur X qui vaut* 1 *au voisinage de K et dont le support est compact et contenu dans U.*

Démonstration. — Comme X est localement différentiellement séparé, c'est une conséquence du corollaire 6.2.4. □

Théorème 15.2.6 **(Stone–Weierstraß).** — *Soit X un espace analytique localement holomorphiquement séparé et soit U un ouvert de X. Soit f une fonction continue à valeurs réelles sur X dont le support est compact et contenu dans U. Soit a et b des nombres réels tels que $a \leqslant f \leqslant b$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction lisse g sur X dont le support est compact, contenu dans U, telle que $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in X$ et telle que $a \leqslant g \leqslant b$.*

Démonstration. — Comme X est localement différentiellement séparé, c'est une conséquence du théorème 6.2.5. □

Corollaire 15.2.7. — *Soit X un espace analytique localement holomorphiquement séparé.*

a) *L'ensemble des fonctions lisses à support compact sur X est dense dans l'espace $\mathscr{C}_{\mathrm{c}}(X)$ des fonctions continues à support compact sur X, muni de la topologie limite inductive des espaces de fonctions à support dans un compact donné.*

b) *L'ensemble des fonctions lisses à support compact sur X est dense dans l'espace $\mathscr{C}(X)$ des fonctions continues sur X muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.*

Démonstration. — Comme X est localement différentiellement séparé, c'est une conséquence du corollaire 6.2.6. □

Proposition 15.2.8 **(Partitions de l'unité lisses).** — *Soit X un espace analytique localement holomorphiquement séparé, paracompact. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X. Il existe une partition de l'unité subordonnée à (U_i) formée de fonctions lisses sur X.*

Démonstration. — Comme X est localement différentiellement séparé, cela résulte de la proposition 6.2.7. □

Corollaire 15.2.9. — *Soit X un espace analytique localement holomorphiquement séparé et soit F une partie fermée de X qui est dénombrable à l'infini (par exemple, compacte). Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de K par des ouverts de X. Il existe une famille localement finie (θ_i) de fonctions lisses sur X, à support compact, positives, telle que pour tout i, le support de θ_i soit contenu dans U_i et que $\sum \theta_i$ vaille* 1 *au voisinage de F.*

Démonstration. — Comme X est localement différentiellement séparé, cela résulte du corollaire 6.2.8. □

Corollaire 15.2.10. — *Soit X un espace analytique localement holomorphiquement séparé, paracompact. Les faisceaux $\mathscr{A}_X^{p,q}$ de formes lisses sur X sont fins.*

Démonstration. — Comme X est localement différentiellement séparé, cela résulte du corollaire 6.2.9. □

§ 15.3. EXTENSION DES SCALAIRES

Soit X un espace k-analytique de niveau n. On le considère comme un espace G-tropical de niveau n. On a montré au §5.8.5 comment toute (n,n)-forme ω sur X_{G} à coefficients tropicalement boréliens définit une mesure de Borel ω_{Bor} sur X, et lorsque cette G-forme est localement intégrable, une mesure de Radon ω_{Rad}.

Proposition 15.3.1. — *Soit L une extension complète de k, soit $p\colon X_L \to X$ le morphisme de changement de base. Pour toute forme ω de type (n,n) sur X_{G} à coefficients tropicalement boréliens, on a $p_*(\omega_{L,\mathrm{Bor}}) = \omega_{\mathrm{Bor}}$. Lorsque ω est localement intégrable, on a $p_*(\omega_{L,\mathrm{Rad}}) = \omega_{\mathrm{Rad}}$.*

Démonstration. — En revenant aux définitions, on déduit de la compatibilité du calibrage canonique à l'extension des scalaires (proposition 14.3.6) l'égalité $p_*\widetilde{\omega_L} = \omega_L$ de formes-volume n-dimensionnelles. La proposition en résulte. □

Proposition 15.3.2. — *Soit L une extension complète de k, soit $p\colon X_L \to X$ le morphisme de changement de base. Pour toute forme ω de type $(n-1,n)$ sur X_{G} à coefficients tropicalement boréliens, on a $p_*(\omega_{L,\mathrm{Bor}}) = \omega_{\mathrm{Bor}}$. Lorsque ω est localement intégrable, on a $p_*(\omega_{L,\mathrm{Rad}}) = \omega_{\mathrm{Rad}}$.*

Démonstration. — En revenant aux définitions, on déduit de la compatibilité du calibrage canonique à l'extension des scalaires (proposition 14.3.6) l'égalité $p_*\widetilde{\omega_L} = \omega_L$ de formes-volume $(n-1)$-dimensionnelles. La proposition en résulte. □

§ 15.4. INTÉGRALES ET MORPHISMES FINIS

15.4.1. — Soit $n \in \mathbf{N}$ et soit X et Y des espaces k-analytiques de niveau n et soit $f\colon Y \to X$ un morphisme qui est fini au-dessus du complémentaire d'un fermé de Zariski de X de dimension $< n$. On a défini au §14.4.1 une fonction $x \mapsto \mathrm{dc}^x(f)$ de X dans $\mathbf{N}$; nous la noterons dc_f.

Soit $p \in \{n-1, n\}$ et soit ω une G-forme de type (p,n) sur X. Posons $\eta = f^*\omega$.

Lemme 15.4.2. — *Soit Σ un partie squelettique de X qui supporte fortement ω ; notons $\tilde{\omega}$ la forme-volume p-dimensionnelle sur Σ déduite de ω et du calibrage canonique de Σ.*

Alors $p^{-1}(\Sigma)$ est une partie squelettique de Y qui supporte fortement $f^*\omega$; notons $\widetilde{f^*\omega}$ la forme-volume p-dimensionnelle sur $p^{-1}(\Sigma)$ déduite de $f^*\omega$ et du calibrage canonique de $p^{-1}(\Sigma)$. On a l'égalité :

$$f_*\widetilde{f^*\omega} = \mathrm{dc}_f \cdot \tilde{\omega}.$$

Démonstration. — Posons $\mathrm{T} = f^{-1}(\Sigma)$. Notons μ_Σ et μ_T les calibrages canoniques de Σ et T. On a l'égalité $f_*\mu_\mathrm{T} = \mathrm{dc}_f \cdot \mu_\Sigma$ (proposition 14.4.2). L'assertion découle alors de la proposition 4.5.8. □

Compte tenu de la définition des mesures de Borel et, éventuellement de Radon, associées aux formes volumes p-dimensionnelles, on en déduit la proposition suivante.

Proposition 15.4.3. — *Supposons que ω soit localement intégrable. Alors, $f^*\omega$ est localement intégrable et l'on a l'égalité*

$$f_*(f^*\omega)_\mathrm{Rad} = \mathrm{dc}_f \cdot \omega_\mathrm{Rad}$$

de mesures de Radon sur X.

Remarquons que les supports des mesures ω_Rad et $f_*(f^*\omega)_\mathrm{Rad}$ évitent tout fermé de Zariski d'intérieur vide de X ; en particulier, ils sont contenus dans le domaine de définition du degré calibré.

§ 15.5. EXISTENCE DE TROPICALISATIONS (PRESQUE) GLOBALES

La définition d'une forme (resp. d'une G-forme) est locale (resp. G-locale), mais lorsque la source est affinoïde, on peut en donner une version partiellement globale ; c'est l'objet de cette section. On fixe une classe admissible $\mathscr{F}$ de fonctions numériques. Pour la définition d'un système rationnel β d'inéquations, et du système $\mathring{\beta}$ associé, nous renvoyons au paragraphe 11.1.5.

15.5.1. Description des G-formes et des formes. — Soit X un espace k-affinoïde, et soit ω une G-forme sur X à coefficients dans $\mathscr{F}$. Soit E un ensemble de fonctions analytiques sur X. Nous dirons que ω est *G-descriptible au moyen de E* s'il existe :

– un recouvrement affinoïde fini (V_i) de X tel que chaque V_i puisse être décrit par un système rationnel d'inéquations β_i ne mettant en jeu que des fonctions appartenant à E ;

– pour tout i, une famille finie h_i de fonctions appartenant à E dont la restriction à V_i est inversible, et telle que le moment $h_i|_{V_i}$ tropicalise $\omega|_{V_i}$.

Si ω est une forme, nous dirons qu'elle est *descriptible au moyen de E* s'il existe (V_i, β_i, f_i) comme ci-dessus telle que de surcroît le lieu de validité des inéquations strictes $\mathring{\beta}_i$ recouvre X.

Remarque 15.5.2. — Dans la définition ci-dessus, on peut toujours supposer que les V_i sont non vides. On peut alors choisir pour tout i un système β_i ne mettant en jeu que des fonctions non nilpotentes. En effet, fixons i et partons d'un système β_i quelconque décrivant V_i, système que l'on écrit

$$|f_1| \leqslant \lambda_1|g| \text{ et } \ldots \text{ et } |f_n| \leqslant \lambda_n|g|.$$

La fonction g est inversible sur V_i qui est non vide, et elle est par conséquent non nilpotente. Et si l'une des f_j est nilpotente, l'inégalité $|f_j| \leqslant \lambda_j|g|$ est vraie en tout point de X, et peut dès lors être retirée du système β_i sans modifier son lieu de validité.

Lemme 15.5.3. — *Soit X un espace k-affinoïde et soit ω une G-forme (resp. forme) à coefficients dans $\mathscr{F}$ sur X. Soit $f = (f_1, \dots, f_n)$ une famille finie de fonctions* inversibles *sur X. Si ω est G-descriptible (resp. descriptible) au moyen des f_i, il existe une G-forme (*resp. *une forme) α sur $f_{\mathrm{trop}}(X)$ telle que $\omega = f^*\alpha$.*

Démonstration. — Posons $P = f_{\mathrm{trop}}(X)$. Commençons par traiter le cas où ω est une G-forme. Elle est alors tropicalisée par un recouvrement affinoïde fini (V_j) de X, chaque V_j étant défini par un système rationnel d'inéquations β_j ne faisant intervenir que les fonctions f_i.

Par construction, chaque V_j est l'image réciproque par f_{trop} d'un polytope P_j, la forme $\omega|_{V_j}$ provient d'une forme α_j sur P_j, et les P_j recouvrent P. La proposition 3.4.1 garantit que les α_j sont uniquement déterminées, et que $\alpha_j|_{P_j\cap P_\ell} = \alpha_\ell|_{P_j\cap P_\ell}$ pour tout (j,ℓ). En conséquence, les α_j se recollent en une G-forme α, et $\omega = f^*\alpha$ par construction.

Supposons maintenant que ω est une forme. On choisit V_j, β_j, P_j et α_j comme ci-dessus, en supposant de plus que les lieux de validité des $\mathring{\beta}_j$ recouvrent X. Pour tout j, le lieu de validité de $\mathring{\beta}_j$ est l'image réciproque d'un ouvert Q_j de P_j, et les Q_j recouvrent P.

On a $\alpha_j|_{P_j\cap P_\ell} = \alpha_\ell|_{P_j\cap P_\ell}$ pour tout (j,ℓ) ; *a fortiori*, $\alpha_j|_{Q_j\cap Q_\ell} = \alpha_\ell|_{Q_j\cap Q_\ell}$ pour tout (j,ℓ). Les formes $\alpha_j|_{Q_j}$ se recollent donc en une forme α sur P, et on a par construction $\omega = f^*\alpha$. □

Proposition 15.5.4. — *Soit X un espace k-affinoïde et soit ω une G-forme sur X à coefficients dans $\mathscr{F}$. Il existe une famille finie E de fonctions holomorphes sur X telle que ω soit G-descriptible au moyen de E, et descriptible au moyen de E si ω est une forme.*

Démonstration. — Par les définitions respectives d'une G-forme et d'une forme, et en vertu des résultats généraux rappelés au 11.1.5, il existe une famille finie (β_i) de systèmes rationnels d'inéquations sur X satisfaisant les conditions suivantes, en notant V_i le domaine rationnel égal au lieu de validité de β_i :

– chacun des V_i tropicalise ω ;

– l'espace X est la réunion des V_i, et même des lieux de validité des $\mathring{\beta}_i$ si ω est une forme.

Pour tout i, le système β_i est de la forme

$$|f_{i,1}| \leqslant \lambda_{i,1}|g_i| \text{ et } \dots \text{ et } |f_{i,n_i}| \leqslant \lambda_{i,n_i}|g_i|.$$

La fonction $g_i|_{V_i}$ est inversible, et les fonctions de la forme $(a|_{V_i})/(g_i|_{V_i})$, où a est une fonction analytique sur X, sont denses dans l'anneau des fonctions de V_i.

Par hypothèse, $\omega|_{V_i}$ est tropicalisée par une famille finie $(h_{i,\ell})$ de fonctions inversibles sur V_i. Comme cette dernière propriété ne dépend par définition que des fonctions $|h_{i,\ell}|$, on peut supposer que chaque $h_{i,\ell}$ est de la forme $(a_{i,\ell}|_{V_i})/(g_i|_{V_i})$ pour une certaine fonction $a_{i,\ell}$ sur X ; l'invisibilité de $h_{i,\ell}$ entraîne celle de $a_{i,\ell}|_{V_i}$.

Soit E l'ensemble des fonctions de la forme g_i, $f_{i,j}$ et $a_{i,\ell}$ pour i, j et ℓ variables. Par construction, ω est G-descriptible au moyen de E, et si c'est une forme elle est même descriptible au moyen de E. □

Lemme 15.5.5. — *Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme entre espaces k-affinoïdes et soit K un compact contenu dans* $\mathrm{Int}(Y/X)$*. Il existe une famille $(f_1, \dots, f_n)$ de fonctions analytiques non nilpotentes sur Y telle que les propriétés suivantes soient satisfaites, en désignant pour tout i par ρ_i le rayon spectral de f_i :*

a) *Pour tout $y \in K$ et tout i on a $|f_i(y)| < \rho_i$;*
b) *Pour tout $y \in \partial(Y/X)$ il existe i tel que $|f_i(y)| = \rho_i$.*

Démonstration. — Notons $\widetilde{Y}$ et $\widetilde{X}$ les réductions graduées à la Temkin des espaces affinoïdes Y et X (11.7.1) ainsi que $\tilde{f}\colon \widetilde{Y} \to \widetilde{X}$ l'application induite par f. Soit $\pi\colon Y \to \widetilde{Y}$ la flèche de réduction. Notons $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ les algèbres respectivement associées à X et Y, et $\widetilde{\mathscr{A}}$ et $\widetilde{\mathscr{B}}$ leurs réductions graduées.

Soit $\mathbf{y} \in \widetilde{Y}$. Notons $J_{\mathbf{y}}$ (resp $I_{\mathbf{y}}$) l'idéal de $\widetilde{\mathscr{B}}$ (resp. $\widetilde{\mathscr{A}}$) engendré par les éléments homogènes s'annulant sur $\mathbf{y}$ (resp. $\tilde{f}(\mathbf{y})$). Soit E le sous-ensemble de $\widetilde{Y}$ formé des points $\mathbf{y}$ tel que $\widetilde{\mathscr{B}}/J_{\mathbf{y}}$ soit finie sur $\widetilde{\mathscr{A}}/I_{\mathbf{y}}$. En vertu du *going-up* gradué, si $\mathbf{y} \in E$ alors $\overline{\{\mathbf{y}\}} \subset E$.

L'intérieur $\mathrm{Int}(Y/X)$ est précisément égal à $\pi^{-1}(E)$ ([**127**], Proposition 3.1).

Soit $y \in K$. Comme $K \subset \mathrm{Int}(Y/X)$, on a $\pi(y) \in E$. L'image réciproque du fermé $\overline{\{\pi(y)\}}$ de $\widetilde{Y}$ est ouverte, et la compacité de K entraîne alors que $\pi(K)$ est contenu dans une réunion finie $F = \bigcup \overline{\{\mathbf{y}_i\}}$, où les $\mathbf{y}_i$ appartiennent à E ; notons que F est un fermé de $\widetilde{Y}$, qui est contenu dans E.

Par quasi-compacité de $\widetilde{Y}$, il existe une famille $(f_1, \dots, f_n)$ de fonctions analytiques non nilpotentes sur Y, de rayons spectraux respectifs $\rho_1, \dots, \rho_n$, telle que F soit le lieu des zéros des $\widetilde{f}_i$, où $\widetilde{f}_i$ désigne l'image canonique de f_i dans le groupe des éléments homogènes de degré ρ_i de $\widetilde{\mathscr{A}}$. Démontrons que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ vérifie les conditions du lemme.

Soit $y \in K$. Puisque $\pi(y) \in F$, on a pour tout i l'égalité $\tilde{f}_i(\pi(y)) = 0$, ce qui signifie exactement que $|f_i(y)| < \rho_i$.

Soit $y \in \partial(Y/X)$. Le point $\pi(y)$ n'appartient pas à E, et *a fortiori* pas à F. Il s'ensuit qu'il existe i tel que $\tilde{f}_i(\pi(y)) \neq 0$, ce qui signifie exactement que $|f_i(y)|$ est égal à ρ_i. □

Proposition 15.5.6. — *Soit $Y \to X$ un morphisme entre espaces k-affinoïdes, où Y est irréductible de dimension n. Soit $(\omega_1, \dots, \omega_m)$ une famille finie de G-formes (resp. formes) à coefficients mesurables sur Y. Soit K un compact contenu dans* $\mathrm{Int}(Y/X)$ *constitué de points y tels que $d_k(y) = n$.*

Il existe un domaine rationnel V de Y qui est un voisinage affinoïde de K dans $\mathrm{Int}(Y/X)$ *et un moment $g\colon V \to T$ tels que les deux propriétés suivantes soient satisfaites :*

a) *Chacune des $\omega_i|_V$ est G-tropicalisée (resp. est tropicalisée) par g ;*
b) *On a $g_{\mathrm{trop}}(\partial(V/Y)) \cap g_{\mathrm{trop}}(K) = \varnothing$.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{A}$ l'algèbre des fonctions analytiques sur Y. Il résulte de la proposition 15.5.4 qu'il existe un ensemble fini $\{h_1, \dots, h_N\}$ de fonctions appartenant à $\mathscr{A}$ au moyen desquelles chacune des ω_i est G-descriptible (resp. descriptible). On peut par ailleurs supposer qu'aucune des h_j n'est nilpotente (remarque 15.5.2).

Soit $y \in K$. Comme $d_k(y) = n$, le point y n'est situé sur aucun fermé de Zariski de Y de dimension $< n$; comme Y est irréductible de dimension n, cela signifie que y est Zariski-dense dans Y. Il s'ensuit qu'aucune des fonctions h_j ne s'annule sur K.

Le compact K est contenu dans $\mathrm{Int}(Y/X)$. En vertu du lemme 15.5.5, il existe un nombre fini de fonctions analytiques non nilpotentes $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sur Y, de rayons spectraux respectifs $\rho_1, \dots, \rho_r$, telles que :

– pour tout ℓ et tout $y \in K$, $|\lambda_\ell(y)| < \rho_\ell$;
– pour tout $y \in \partial(Y/X)$, il existe ℓ tel que $|\lambda_\ell| = \rho_\ell$.

Choisissons pour tout j un nombre réel strictement positif s_j tel que $|h_j| > s_j$ sur K, et soit W le domaine affinoïde rationnel de Y défini par la conjonction d'inégalités $|h_j| \geqslant s_j$.

Pour tout $\ell \in \{1, \dots, r\}$, la fonction ρ_ℓ est non nilpotente ; comme tout point de K est Zariski-dense dans Y, la fonction ρ_ℓ ne s'annule pas sur K. Il existe dès lors deux nombres réels r_ℓ et R_ℓ tels que $0 < r_\ell < R_\ell < \rho_\ell$ et tels que $r_\ell < |\lambda_\ell| < R_\ell$ sur K. Soit V le domaine affinoïde de W défini par la conjonction des inégalités $r_\ell \leqslant |\lambda_\ell| \leqslant R_\ell$ pour $\ell \in \{1, \dots, r\}$; c'est un domaine rationnel de W et, partant, de Y.

Soit $y \in V$. On a $|\lambda_\ell(y)| \leqslant R_\ell < \rho_\ell$ pour tout ℓ. En conséquence, le point y n'appartient pas à $\partial(Y/X)$; il vient $V \subset \mathrm{Int}(Y/X)$.

Soit $y \in \partial(V/Y)$. Par définition du domaine affinoïde V, on est dans l'un des deux cas suivants, non exclusifs l'un de l'autre.

– *Premier cas :* $y \in \partial(W/Y)$. Il existe alors j tel que $|h_j|(y) = s_j$, et $|h_j(y)| \notin |h_j|(K)$.
– *Second cas :* $y \in \partial(V/W)$. Il existe alors ℓ tel que $|\lambda_\ell(y)| \in \{r_\ell, R_\ell\}$. Par définition de r_ℓ et R_ℓ,, on en déduit que $|\lambda_\ell(y)| \notin |\lambda_\ell|(K)$.

Par construction, les h_j et les λ_ℓ sont inversibles sur V et définissent donc un moment g sur V. Il résulte de ce qui précède que $g_{\mathrm{trop}}(\partial(V/Y)) \cap g_{\mathrm{trop}}(K) = \varnothing$.

Par ailleurs comme pour tout i, la (G-)forme ω_i est G-descriptible (resp. descriptible) au moyen des h_j, il en va de même de sa restriction $\omega_i|_V$. Celle-ci est *a fortiori* G-descriptible (*resp.* descriptible) au moyen des h_j et des λ_ℓ ; en vertu du lemme 15.5.3, la forme $\omega_i|_V$ est alors G-tropicalisée (resp. tropicalisée) par g. □

§ 15.6. HARMONIE INTÉRIEURE

Théorème 15.6.1. — *Soit X un espace analytique de niveau n. L'intérieur de X est harmonieux.*

Démonstration. — Soit U un ouvert de $\mathrm{Int}(X)$, soit $f\colon U \to \mathbf{R}^n$ une carte tropicale et soit $\mathscr{C}$ une décomposition cellulaire de $\Sigma_f^{(n)}$ en f-cellules qui est adaptée au calibrage de $\Sigma_f^{(n)}$. Soit F une $(n-1)$-cellule de $\mathscr{C}$; démontrons que F est harmonieuse relativement à f.

Quitte à remplacer X par U, on peut supposer que f est définie sur X et que X est sans bord.

Par définition de la structure d'espace affiné sur X, il existe un moment $g\colon X \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ sur X et un isomorphisme affine $p\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ tels que $g_{\mathrm{trop}} = p \circ f$. Les discordance de F relativement à f et g_{trop} se déduisent l'une de l'autre par transport de structure, de sorte que l'on peut supposer que la carte tropicale donnée est de la forme f_{trop}, où $f\colon X \to T$ est un moment.

Soit $\mathscr{C}_{>F}$ l'ensemble des n-cellules de $\mathscr{C}$ contenant F ; il est fini et non vide, car $\Sigma_f^{(n)}$ est purement de dimension n. Fixons une orientation o de $f_{\mathrm{trop}}(F)$ et, pour tout $C \in \mathscr{C}_{>F}$, notons o_C l'orientation de $f_{\mathrm{trop}}(C)$ déduite de celle de $f_{\mathrm{trop}}(F)$ par la règle de la normale sortante à $f_{\mathrm{trop}}(F)$. Il existe un unique n-vecteur, $\tilde{\mu}_C$, sur le sous-espace affine de T_{trop} engendré par $f_{\mathrm{trop}}(C)$ tel que $(f_{\mathrm{trop}})_*(\mu_C)$ soit la classe du couple $(\tilde{\mu}_C, o_C)$.

Notons $\tilde{\mu}_F$ la somme des fonctions $\tilde{\mu}_C|_F$ pour C parcourant $\mathscr{C}_{>F}$. Par définition, la discordance de F relativement à f_{trop} est la classe μ_F du couple $(\tilde{\mu}_F, o)$ dans le produit contracté $\Lambda^n \overrightarrow{E} \times^{\{\pm 1\}} \mathrm{Or}(F)$. Il s'agit de démontrer que $\tilde{\mu}_F = 0$.

Soit Ω l'ensemble des applications linéaires u de T_{trop} dans $\mathbf{R}^n$ telles que $u|_{\langle f_{\mathrm{trop}}(C)\rangle}$ soit injectif pour tout $C \in \mathscr{C}_{>F}$. Soit $q\colon T \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ un morphisme de tores tel que $q_{\mathrm{trop}} \in \Omega$.

Pour tout $C \in \mathscr{C}_{>F}$, soit $\sigma_C\colon \mathbf{R}^n \to T_{\mathrm{trop}}$ l'unique section affine de q_{trop} dont l'image est égale à $\langle f_{\mathrm{trop}}(C)\rangle$. Soit $e = e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ le n-vecteur canonique de $\mathbf{R}^n$ et soit $|e|$ le vecteur-volume associé. L'hyperplan $H_0 = \langle (q \circ f)_{\mathrm{trop}}(F)\rangle$ est naturellement orienté par l'image de l'orientation de F. Notons H^+ le demi-espace bordé par H_0 que la règle de la normale sortante munit de l'orientation canonique de $\mathbf{R}^n$; notons H^- l'autre demi-espace. Pour tout $C \in \mathscr{C}_{>F}$, la n-cellule $(q \circ f)_{\mathrm{trop}}(C)$ est contenue dans l'un des deux demi-espaces H^+ et H^-, et l'un d'eux seulement. Posons $\eta_C = 1$ si $(q \circ f)_{\mathrm{trop}}(C) \subset H^+$ et $\eta_C = -1$ sinon.

Soit $C \in \mathscr{C}_{>F}$; comme la cellule C est contenue dans $\mathrm{Int}(X)$, c'est une $q \circ f$-cellule commode. Il existe donc un entier $d_C > 0$ tel que le morphisme $q \circ f$ soit fini et plat de degré d_C en tout point de $\mathring{C}$ (proposition 14.2.2).

Par définition du calibrage canonique, on a $\mu_C = (q \circ f)^*_{\mathrm{trop}}(d_C|e|)$, d'où la relation

$$(q_{\mathrm{trop}})_*(\tilde{\mu}_C) = \eta_C d_C e.$$

Le lemme 15.6.2 ci-dessous entraîne alors que $(q_{\mathrm{trop}})_*(\tilde{\mu}_F) = 0$. Autrement dit, $\tilde{\mu}_F$ appartient au noyau de l'application linéaire $\bigwedge^n (q_{\mathrm{trop}})_*$.

Ceci vaut pour tout morphisme affine q de tores tel que q_{trop} appartienne à Ω. Cet ensemble Ω est un ouvert de Zariski dense de $\mathrm{Hom}(T_{\mathrm{trop}}, \mathbf{R}^n)$, donc l'ensemble $\Omega_{\mathbf{Z}}$ de ses points entiers est aussi Zariski dense, et l'intersection des noyaux des applications linéaires $\bigwedge^n (q_{\mathrm{trop}})_*$, pour $q \in \mathrm{Hom}(T, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)$ tel que $q_{\mathrm{trop}} \in \Omega$ est réduite à 0. On en déduit que $\tilde{\mu}_F = 0$, ainsi qu'il fallait démontrer. □

Lemme 15.6.2. — *On a* $\sum_{C \in \mathscr{C}_{>F}} \eta_C d_C = 0$.

Démonstration. — Soit x un point de $\mathring{F}$. Par définition, $\Sigma_f^{(n)}$ est purement de dimension n, l'ensemble $\mathscr{C}_{>F}$ n'est pas vide, et q a été choisie de sorte que $(q \circ f)_{\mathrm{trop}}$ soit injective sur tout élément de $\mathscr{C}_{>F}$. Par suite, $q \circ f$ est de dimension tropicale n en x, si bien que $q \circ f(x) \in S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n)$. D'après le lemme 11.6.5, le morphisme $q \circ f$ est fini et plat en x, car x n'appartient pas au bord de X.

Soit U un voisinage ouvert et connexe de x dans X et soit V un voisinage ouvert de $q \circ f(x)$ dans $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ tels que $q \circ f$ induise un morphisme fini et plat de U sur V, de degré $d_{q\circ f}(x)$. En particulier, x est le seul point de sa fibre dans U, et $q \circ f(x) = (q \circ f)_{\mathrm{trop}}(x)_{\mathrm{sq}}$. On peut en outre supposer que $U \cap \Sigma_f^{(n)}$ est contenu dans la réunion des cellules C, pour $C \in \mathscr{C}_{>F}$. Notons aussi que $\partial(U) = \varnothing$ car U est un ouvert de X et X est sans bord.

Soit $\mathscr{C}^+_{>F}$ l'ensemble des cellules $C \in \mathscr{C}_{>F}$ telles que $\eta_C = 1$. Pour tout $C \in \mathscr{C}^+_{>F}$, $q \circ f(C)$ est un voisinage de $q \circ f(x)$ dans H^+_{sq} et l'intersection des cellules ouvertes

$q \circ f(\mathring{C})$ rencontre V. Choisissons donc un point $z \in V$ tel que $z \in q \circ f(\mathring{C})$ pour tout $C \in \mathscr{C}^+_{>F}$, et $z \notin H_{0,\mathrm{sq}}$.

Soit $C \in \mathscr{C}^+_{>F}$. Par choix de z, il existe un point $y \in \mathring{C}$ tel que $q \circ f(y) = z$. Comme $q \circ f|_C$ est injective, y est le seul antécédent de z sur C ; notons-le y_C.

Inversement, soit y un point de U tel que $q \circ f(y) = z$; d'après la proposition 12.2.8, on a $y \in \Sigma_f^{(n)}$. Comme $y \in U$, il existe une cellule $C \in \mathscr{C}_{>F}$ telle que $y \in C$; comme $q \circ f(y) \in (H^+ \boldsymbol{-} H_0)_{\mathrm{sq}}$, on a $C \in \mathscr{C}^+_{>F}$. Par suite, $y = y_C$.

Par définition du degré, on donc

$$\sum_{C \in \mathscr{C}^+_{>F}} d_C = \sum_{C \in \mathscr{C}^+_{>F}} d_{q\circ f}(y_C) = d_{q\circ f}(x),$$

puisque $q \circ f$ induit un morphisme fini et plat de degré $d_{q\circ f}(x)$ de V sur U.

Notons $\mathscr{C}^-_{>F}$ l'ensemble des cellules $C \in \mathscr{C}_{>F}$ telles que $\eta_C = -1$. Le même argument démontre que $\sum_{C \in \mathscr{C}^-_{>F}} d_C = d_{q\circ f}(x)$.

On a donc

$$\sum_{C \in \mathscr{C}_{>F}} \eta_C d_C = \sum_{C \in \mathscr{C}^+_{>F}} d_C - \sum_{C \in \mathscr{C}^-_{>F}} d_C = d_{q\circ f}(x) - d_{q\circ f}(x) = 0,$$

d'où le lemme. □

15.6.3. — La formule (5.10.1.1) définit explicitement l'intégrale d'une forme tropicale de type (n, n) ou $(n-1, n)$. On a démontré au §5.10.2 que cette relation dans des cartes tropicales permet de reconstituer la mesure de Radon associée à une G-forme de type (n, n). Démontrons ici qu'il en est de même pour les formes de type $(n-1, n)$, ce qui fournira une définition tropicale alternative de cette intégrale.

Soit X un espace analytique de niveau n, soit ω une forme de type $(n-1, n)$ sur X, à support compact et à coefficients localement bornés. Supposons aussi que X est bon.

Pour tout point x du support de ω, on a $d_k(x) = n$, donc il existe (lemme 11.5.7) deux voisinages affinoïdes irréductibles U_x et V_x de x dans X tels que $V_x \subset \mathrm{Int}(U_x/X)$. Notons que $\mathrm{Int}(V_x/U_x) = \mathrm{Int}(V_x/X)$ est une partie ouverte de chacun des espaces V_x, U_x et X. Le support de ω étant compact, il existe une partie finie S de $\mathrm{supp}(\omega)$ telle que la réunion des $\mathrm{Int}(V_x/X)$, pour $x \in S$, recouvre $\mathrm{supp}(\omega)$. Comme X est supposé bon, il est localement holomorphiquement séparé et le corollaire 15.2.9 entraîne qu'il existe une famille $(\lambda_x)_{x\in S}$ de fonctions lisses sur X telle que, pour tout $x \in S$, le support de λ_x soit une partie compacte de $\mathrm{Int}(V_x/X)$ et telle que $\sum_{x\in S} \lambda_x$ soit égale à 1 au voisinage de $\mathrm{supp}(\omega)$.

On a $\omega = \sum_{x\in S} \lambda_x \omega$, donc

$$\int_X^\partial \omega = \sum_{x\in S} \int_X^\partial \lambda_x \omega.$$

Fixons $x \in S$. Soit K_x le support de $\lambda_x\omega$; c'est une partie compacte de $\mathrm{Int}(V_x/X)$ et l'on a $d_k(y) = n$ pour tout $y \in K_x$. D'après la proposition 15.5.6, appliquée à l'injection de V_x dans U_x, il existe un voisinage affinoïde W_x de K_x dans $\mathrm{Int}(V_x/X)$ sur lequel $\lambda_x\omega$ est tropicale. Comme $\mathrm{Int}(W_x/X)$ est une partie ouverte de X qui contient le support de $\lambda_x\omega$, on a

$$\int_X^\partial \lambda_x \omega = \int_{\mathrm{Int}(W_x/X)}^\partial \lambda_x \omega.$$

Comme $\mathrm{Int}(W_x/X)$ est une partie ouverte de W_x qui contient le support de $\lambda_x\omega$, on a aussi

$$\int_{W_x}^{\partial} \lambda_x\omega = \int_{\mathrm{Int}(W_x/X)}^{\partial} \lambda_x\omega.$$

On a donc

$$\int_{X}^{\partial} \lambda_x\omega = \int_{W_x}^{\partial} \lambda_x\omega,$$

et cette dernière intégrale peut se calculer à l'aide de la formule (5.10.1.1).

A priori, le calcul tropical de l'intégrale $\int_{W_x}^{\partial} \lambda_x\omega$ fait intervenir toute la tropicalisation de $\partial(W_x)$. Remarquons cependant que la pleine force de la proposition 15.5.6 démontre qu'on peut choisir W_x et un moment tropicalisant ω de sorte que ce calcul ne fasse intervenir que la tropicalisation de $\partial(X) \cap W_x$.

Remarque 15.6.4. — Soit X un espace analytique de niveau n. Soit f un moment sur X et soit C une f-cellule commode de dimension n. Alors $\mathring{C}$ est un ouvert de $\Sigma_f^{(n)}$, par définition d'une cellule commode ; comme il ne rencontre le bord de X, il est harmonieux relativement à f (théorème 15.6.1). D'après la remarque 4.6.10, son calibrage est constant relativement à f.

Mais cette propriété résulte directement de la construction du calibrage de C, considérée comme partie squelettique de Σ_f, au moyen d'une décomposition cellulaire de C en f-cellules commodes dont C elle-même est l'unique cellule de dimension n.

§ 15.7. L'ESPACE TROPICAL ASSOCIÉ À UN ESPACE ANALYTIQUE

Soit X un espace analytique purement de dimension n, topologiquement séparé. On le considère comme espace G-tropical calibré de niveau n. Il est riche (théorème 12.10.6).

Théorème 15.7.1. — *Soit X un espace analytique purement de dimension n, topologiquement séparé. Muni de son bord $\partial(X)$ au sens de la théorie des espaces analytiques, l'espace G-tropical affiné et calibré de niveau n associé à X est un espace tropical de niveau n.*

Démonstration. — Vérifions les conditions de la définition 6.6.2.

L'intérieur $\mathrm{Int}(X)$ de X est localement holomorphiquement séparé (15.2.2) ; il est donc localement différentiellement séparé (corollaire 15.2.4). Il est décent (proposition 12.4.7) car il est sans bord, donc bon, donc presque bon. Il est très riche (théorème 12.11.1) et harmonieux (théorème 15.6.1).

Et il résulte du corollaire 12.9.14 que $\Sigma \cap \partial X$ est n-négligeable pour toute partie paralinéaire Σ de X, de même que $\Sigma \cap \partial(V/X)$ pour tout domaine V de X car $\partial(V/X) \subset \partial V$. □

On munit ainsi tout espace analytique X, topologiquement séparé, et purement de dimension n, d'une structure d'espace tropical de niveau n.

15.7.2. — Soit X un espace analytique topologiquement séparé, purement de dimension n et soit V un domaine de X. Le domaine V est muni de deux façons, a priori distinctes, d'une structure d'espace tropical de niveau n, soit comme espace analytique, soit comme domaine de l'espace tropical X. La formule $\partial(V) = (\partial(X) \cap V) \cup \partial(V/X)$ montre que ces deux structures coïncident.

Remarque 15.7.3. — Soit X un espace analytique de niveau n ; pour que l'on puisse le munir d'une structure d'espace tropical de niveau n, il faut et il suffit que X soit purement de dimension n. En effet, dans le cas contraire, il possède un domaine analytique compact non vide V tel que $\dim(V) < n$. L'espace X n'est donc pas riche : la tropicalisation constante de V n'est couverte par aucun squelette de V puisque la seule partie squelettique de V est vide.

CHAPITRE 16

COURANTS SUR LES ESPACES ANALYTIQUES

Soit X un espace k-analytique topologiquement séparé et purement de dimension n. Pour alléger la terminologie, nous dirons plus simplement que X est un n-espace k-analytique. Nous l'avons muni d'une structure d'espace G-tropical de niveau n, calibré et affiné, et démontré (théorème 15.7.1) que muni de son bord au sens de la théorie des espaces k-analytiques, c'est un espace tropical de niveau n.

Il en résulte des notions de formes et G-formes différentielles de type (p, q) sur X, à coefficients dans une classe de coefficients, une théorie de l'intégration des (n, n)-formes et des $(n-1, n)$-formes ainsi qu'une théorie de courants.

Dans ce chapitre, nous explorons plus avant les propriétés spécifiques des courants sur les espaces analytiques qui semblent difficilement formulables dans le contexte des espaces tropicaux.

§ 16.1. QUELQUES FORMULES

Proposition 16.1.1. — *Soit X un n-un espace k-analytique, soit K une extension complète de k et soit $p\colon X_K \to X$ le morphisme de changement de base. On a les égalités de courants $p_*(\delta_{X_K}) = \delta_X$ et $p_*(\delta^\partial_{X_K}) = \delta^\partial_X$.*

Démonstration. — Pour la première relation, il s'agit de démontrer que pour toute forme lisse ω de type (n, n), à support compact, on a $\int_{X_K} p^*\omega = \int_X \omega$; c'est la formule 15.3.1.

La seconde se prouve de même en utilisant la formule 15.3.2. □

Proposition 16.1.2. — *Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme compact de n-espaces k-analytiques.*

a) *Le degré calibré, plus précisément tout prolongement à X, est une fonction localement intégrable sur X.*

b) *On a les égalités de courants $f_*\delta_Y = \mathrm{dc}_f\, \delta_X$ et $f_*\delta^\partial_Y = \mathrm{dc}_f\, \delta^\partial_X$.*

c) *Soit ω une G-forme lisse sur X et soit u une fonction localement intégrable sur X, à valeurs dans $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ (*cf. *§5.8.6). Si f^*u est localement intégrable sur Y, on a $f_*(f^*u \cdot f^*[\omega]) = \mathrm{dc}_f\, u \cdot [\omega]$.*

Notons que pour b), l'assertion que f^*u est localement intégrable est automatique si u est localement bornée, ou si f ne contracte aucune composante de dimension n (car alors f induit une immersion par morceaux entre parties squelettiques).

Démonstration. — a) Il s'agit de démontrer que pour toute forme ω à support compact sur X, de type (n,n) ou $(n-1,n)$, on a $\int_Y f^*\omega = \int_X \mathrm{dc}_f\,\omega$, respectivement $\int_Y^\partial f^*\omega = \int_X^\partial \mathrm{dc}_f\,\omega$. Cela résulte de la proposition 15.4.3.

b) La démonstration est analogue.

c) Notons (p,q) le degré de ω. Soit α une forme lisse à support compact sur X de bidegré $(n-p,n-q)$. Par définition, on a

$$\begin{aligned}\langle f_*(f^*u \cdot f^*[\omega]), \alpha\rangle &= \langle f^*u \cdot f^*[\omega], f^*\alpha\rangle \\ &= \int_Y f^*u f^*[\omega \wedge \alpha] \\ &= \int_Y f^*u(f^*(\omega \wedge \alpha))_{\mathrm{Rad}} \\ &= \int_X u f_*(f^*(\omega \wedge \alpha))_{\mathrm{Rad}} \\ &= \int_X u\,\mathrm{dc}_f(\omega \wedge \alpha)_{\mathrm{Rad}} \\ &= \langle u\,\mathrm{dc}_f\,\delta_X[\omega], \alpha\rangle,\end{aligned}$$

compte tenu de la proposition 15.4.3. □

Proposition 16.1.3. — *Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme propre de n-espaces k-analytiques sans bord. On suppose que f est fini au-dessus du complémentaire d'un fermé de Zariski de dimension $< n$ et que la fonction dc_f est constante de valeur d sur X^{gen}. Soit u une fonction localement intégrable sur X ; si f^*u est localement intégrable, on a*

$$f_*(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, f^*u) = d \cdot \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u.$$

Démonstration. — D'après la proposition précédente, on a

$$f_*(\mathrm{d}'\mathrm{d}''[f^*u]) = \mathrm{d}'\mathrm{d}''(f_*[f^*u]) = \mathrm{d}'\mathrm{d}''(\mathrm{dc}_f[u]).$$

Puisque dc_f est constant de valeur d sur X^{gen}, on peut écrire

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''(\mathrm{dc}_f[u]) = \mathrm{d}'\mathrm{d}''(d \cdot [u]) = d \cdot \mathrm{d}'\mathrm{d}''[u],$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Exemple 16.1.4. — Plaçons-nous sous les hypothèses de la proposition précédente. Soit h une fonction méromorphe sur X dont le lieu de non-inversibilité est de dimension $< n$; supposons que f^*h soit une fonction méromorphe régulière sur Y. Alors, $f^*\log|h|$ est localement intégrable sur Y. La formule de Poincaré–Lelong (théorème 16.7.3) affirme que $\mathrm{d}'\mathrm{d}''[f^*\log|h|] = \delta_{\mathrm{div}(f^*h)}$. On a donc $f_*\delta_{\mathrm{div}(f^*h)} = d \cdot \mathrm{d}'\mathrm{d}''[\log|h|]$.

Donnons deux cas particuliers.

a) Supposons que h soit une fonction méromorphe régulière sur X. On en déduit alors $f_*\delta_{\mathrm{div}(f^*h)} = d\delta_{\mathrm{div}(h)}$. Si X est réduit, le morphisme f est fini et plat au-dessus de X^{gen} de degré constant d. Cela reflète alors la formule $f_*[\mathrm{div}(f^*h)] = d\cdot[\mathrm{div}(h)]$ en théorie de l'intersection.

b) Soit U l'ouvert complémentaire de la réunion des composantes immergées de X, soit Y son adhérence analytique, c'est-à-dire le plus petit sous-espace analytique fermé de X qui contient U (**[53]**, définition 2.17). L'immersion fermée $f\colon Y \to X$ est nilpotente et est un isomorphisme au-dessus de U ; on peut donc prendre $d = 1$. Pour toute fonction localement intégrable u sur X, la fonction f^*u sur Y est localement intégrable et l'on a $f_*(\mathrm{d}'\mathrm{d}''[f^*u]) = \mathrm{d}'\mathrm{d}''[u]$.

Si le lieu d'inversibilité de h est dense, la fonction méromorphe f^*h est régulière et justiciable de la formule de Poincaré–Lelong du théorème 16.7.3, alors que h pourrait ne pas l'être et on obtient $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\log|h| = f_*\delta_{\mathrm{div}(f^*h)}$.

Pour un exemple concret de cette situation, supposons que X soit l'analytifié de $\mathrm{Spec}(k[S,T])/(T^2,ST)$; c'est une droite affine, réduite hors de l'origine 0, de sorte que Y est l'analytifié de $\mathrm{Spec}(k[S])$. La fonction holomorphe S n'est pas régulière sur X, en raison de l'origine, mais sa restriction à Y l'est. On obtient $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\log|S| = \delta_0$, bien que le sous-espace analytique fermé de X défini par S, égal à $\mathscr{M}(k[T]/(T^2))$, soit de multiplicité 2.

Proposition 16.1.5. — *Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme propre de n-espaces k-analytiques sans bord. On suppose que f est fini au-dessus du complémentaire d'un fermé de Zariski de dimension $< n$ et que la fonction dc_f est constante de valeur d sur X^{gen}.*

Soit $u_1,\dots,u_m$ des fonctions continues d-psh sur X. On a

$$f_*(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, f^*u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, f^*u_m) = d\cdot \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_m.$$

Démonstration. — L'assertion est locale sur X ; par multilinéarité, il suffit alors de traiter où les fonctions u_i sont psh. On raisonne alors par récurrence sur m. Le cas $m = 0$ est l'assertion a). Supposons $m \geqslant 1$ et l'assertion vraie pour $m-1$. Compte de la définition du faisceau des fonctions psh, il suffit de vérifier les deux assertions :

a) La formule est vraie si u_1 est lisse ;

b) Le faisceau des fonctions psh continues pour lesquelles cette formule vaut est stable par limite uniforme.

Cette dernière assertion découle de la proposition 8.7.2 ; démontrons a).

Supposons que u_1 est une fonction lisse. Soit ω une forme lisse à support compact de type $(n-m, n-m)$ sur X. On a

$$\begin{aligned}
\langle f_*(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, f^*u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, f^*u_m), \omega\rangle
&= \langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, f^*u_1 \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, f^*u_2 \wedge \dots \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, f^*u_m, f^*\omega\rangle \\
&= \langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''(f^*u_1(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, f^*u_m)), f^*\omega\rangle \\
&= \langle f^*u_1(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, f^*u_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, f^*u_m), \mathrm{d}'\mathrm{d}''(f^*\omega)\rangle \\
&= \langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, f^*u_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, f^*u_m, f^*u_1\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''(f^*\omega)\rangle \\
&= \langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, f^*u_2 \wedge \dots \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, f^*u_m, f^*(u_1\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, \omega)\rangle \\
&= \langle f_*(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, f^*u_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, f^*u_m), u_1\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, \omega\rangle.
\end{aligned}$$

Appliquons maintenant l'hypothèse de récurrence ; on en déduit

$$\begin{aligned}\langle f_*(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, f^*u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, f^*u_m), \omega\rangle &\\ &= \langle d \cdot \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_2 \wedge \ldots \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_m, u_1\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, \omega\rangle.\\ &= d\langle u_1\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_2 \wedge \ldots \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_m, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, \omega\rangle.\\ &= d\langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_2 \wedge \ldots \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_m), \omega\rangle.\end{aligned}$$

Autrement dit,

$$f_*(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, f^*u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, f^*u_m) = d\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_2 \wedge \ldots \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_m),$$

ainsi qu'il fallait démontrer. □

§ 16.2. CONTINUITÉ DES INTÉGRALES FIBRE : CAS DES SQUELETTES

16.2.1. — Dans tout cette section, on considère un m-espace k-analytique X, un n-espace k-analytique Y et un morphisme $p\colon Y \to X$. On pose $d = n - m$; on va étudier le comportement de l'intégrale d'une (d,d)-forme sur Y dans les fibres de p qui sont de dimension d. Ces fibres seront considérées comme espaces analytiques de niveau d.

Proposition 16.2.2. — *Soit X et Y deux espaces k-analytiques paracompacts, purement de dimensions respectives m et n. Posons $d = n - m$. Soit p un morphisme de Y vers X. Soit $\mathscr{B}$ une classe de coefficients qui est ou bien la classe des fonctions boréliennes localement bornées, ou bien la classe $\mathscr{C}^r$ pour un certain $r \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. Soit ω une (d,d)-forme sur Y et soit λ une fonction numérique sur Y, toutes deux G-tropicalement de classe $\mathscr{B}$, telles que le support de $\lambda\omega$ soit relativement propre sur X. Supposons qu'il existe un moment $f\colon X \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$ et un moment $g\colon Y \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$ tels que ω soit G-localement tropicalisée par le moment $(f \circ p, g)$. Pour tout $x \in \Sigma_f$, la fibre Y_x est purement de dimension d ; on pose $u(x) = \int_{Y_x} \lambda\omega$.*

a) *Il existe une décomposition cellulaire $\mathscr{C}$ de Σ_f et, pour toute cellule $C \in \mathscr{C}$, une fonction u_C de classe $\mathscr{B}$ sur C telle que $u(x) = u_C(x)$ pour tout $x \in \mathring{C}$.*

b) *Si $\mathscr{B} \in \{\mathscr{C}^r\}_{0 \leqslant r \leqslant \infty}$, si p est séparé et si ω est faiblement positive, alors u est semi-continue supérieurement.*

c) *Si $\mathscr{B} \in \{\mathscr{C}^r\}_{0 \leqslant r \leqslant \infty}$ et si $p\colon Y \to X$ est sans bord la fonction $u|_{\Sigma_f}$ est G-localement de classe $\mathscr{B}$.*

Démonstration. — Puisqu'il ne s'agit que du comportement d'intégrales dans les fibres de p, l'énoncé est inchangé lorsqu'on remplace X par X_{red}, ce qui permet de supposer que X est réduit. Le morphisme p est alors plat au-dessus de tout point de Σ_f (théorème 10.3.7 de [**52**]) ; quitte à remplacer X par un voisinage analytique de Σ_f, on peut supposer que p est plat. Ses fibres sont alors toutes purement de dimension d.

Soit $h\colon Y \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ le moment $(f \circ p, g)$. Soient p_1 et p_2 les projections de $X \times \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$ vers X et $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$ respectivement. Soit f' le moment $(f \circ p_1, p_2)$ de $X \times \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$ vers $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ et soit g' le morphisme (p,g) de Y vers $X \times \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$. Le lemme 14.2.10 (a) assure qu'un point y de Y d'image x sur X appartient à Σ_h si et seulement si x appartient à Σ_f et y appartient à $\Sigma_{g|_{Y_x}}$. Il assure aussi, lorsqu'on l'applique au morphisme p_2 et aux moments

$f', f \circ p_1$ et p_2 sur l'espace $X \times \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$, qu'un point z de $X \times \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$ de projection x sur X appartient à $\Sigma_{f'}$ si et seulement si x appartient à Σ_f et z appartient au squelette canonique $S(\mathbf{G}_{\mathrm{m},\mathscr{H}(x)}^d)$. Par conséquent, $(p_1, p_{2,\mathrm{trop}})$ identifie $\Sigma_{f'}$ à $\Sigma_f \times \mathbf{R}^d$. De plus, puisque $\Sigma_{g|_{Y_x}} = (g|_{Y_x})^{-1}(S(\mathbf{G}_{\mathrm{m},\mathscr{H}(x)}^d))$, il vient $\Sigma_h = (g')^{-1}(\Sigma_{f'})$. La restriction de g' induit donc une application paralinéaire de Σ_h dans $\Sigma_{f'}$. Comme $f' \circ g' = h$, cette application est injective sur toute h-cellule de Σ_h.

Choisissons une décomposition cellulaire $\mathscr{C}$ de Σ_f en f-cellules telle que la fonction $x \mapsto \deg^x(f)$ est constante sur chaque cellule ouverte (proposition 14.2.3). Choisissons de même une décomposition cellulaire $\mathscr{D}$ de Σ_h en h-cellules telle que la fonction $y \mapsto \deg^y(h)$ est constante sur chaque cellule ouverte. On suppose également, ce qui est loisible, que pour toute cellule D de $\mathscr{D}$, la forme $\omega|_D$ est tropicalisée par h et que la fonction $\lambda|_D$ est de classe $\mathscr{B}$. Quitte à appliquer le corollaire 2.3.6, on peut supposer que le couple $(\mathscr{D}, \mathscr{C})$ est adapté à l'application paralinéaire de Σ_h dans Σ_f déduite de p.

Pour tout $C \in \mathscr{C}$, notons $\mathscr{D}_C$ l'ensemble des cellules $D \in \mathscr{D}$ telles que $p(D) = C$. Pour tout $x \in \mathring{C}$, la famille des $D \cap Y_x$, pour $D \in \mathscr{D}_C$, est une décomposition cellulaire de $\Sigma_h \cap Y_x$ et l'on a $\mathring{D} \cap Y_x = (D \cap Y_x)^\circ$ pour toute $D \in \mathscr{D}_C$ et tout $x \in \mathring{C}$ (corollaire 2.3.7). De plus, pour toute cellule D de $\mathscr{D}_C$ et tout $x \in \mathring{C}$, la dimension de $D \cap Y_x$ est égale à $\dim(D) - \dim(C)$; elle est en particulier indépendante de x. Nous noterons $\mathscr{D}'_C$ l'ensemble des cellules de $\mathscr{D}_C$ de dimension $\dim C + d$.

Soit C une cellule de $\mathscr{C}$. Pour toute cellule $D \in \mathscr{D}$, la fonction $y \mapsto \deg^y(h)$ est constante sur $\mathring{D}$; notons e_D sa valeur. Pour toute cellule $C \in \mathscr{C}$, la fonction $x \mapsto \deg^x(f)$ est constante sur $\mathring{C}$; notons d_C sa valeur. Puisque p est plat, pour tout $x \in \mathring{C}$ et tout $D \in \mathscr{D}_C$, la fonction $y \mapsto \deg^y(g|_{Y_x})$ sur $\mathring{D} \cap Y_x$ est constante, de valeur e_D/d_C (lemme 14.2.10, d)).

Soit $D \in \mathscr{D}$. Par hypothèse, $\omega|_D$ est tropicalisée par h ; soit alors α_D une (d,d)-forme sur $h_{\mathrm{trop}}(D)$ telle que $\omega|_D = h^*\alpha_D$. Soit λ_D une fonction sur $h_{\mathrm{trop}}(D)$ telle que $\lambda|_D = h^*\lambda_D$; elle est de classe $\mathscr{B}$. Définissons alors une fonction v_D sur la cellule $p(D)$ de $\mathscr{C}$ par

$$v_D(x) = \int_{g_{\mathrm{trop}}(D_x)} \lambda_D \alpha_D,$$

l'intégrale de cette (d,d)-forme sur la cellule $g_{\mathrm{trop}}(D_x)$ de $\mathbf{R}^d$ étant prise par rapport au calibrage canonique de $\mathbf{R}^d$. Puisque $g_{\mathrm{trop}}(D_x) = g'_{\mathrm{trop}}(D)_x$, la fonction v_D est G-localement de classe $\mathscr{B}$ sur $p(D)$ (proposition 1.8.13).

Soit C une cellule de $\mathscr{C}$. Pour tout $x \in \mathring{C}$. Les cellules D_x pour D parcourant $\mathscr{D}_C$ forment une décomposition cellulaire de $(\Sigma_h)_x$. On a donc

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{Y_x} \lambda\omega = \sum_{D \in \mathscr{D}'_C} \int_{D_x} \lambda\omega \\ &= \sum_{D \in \mathscr{D}'_C} (e_D/d_C) \int_{g_{\mathrm{trop}}(D_x)} \lambda_D \omega_D = \sum_{D \in \mathscr{D}'_C} (e_D/d_C) v_D(x). \end{aligned}$$

La fonction u_C sur C définie par

$$u_C(x) = \sum_{D \in \mathscr{D}'_C} (e_D/d_C) v_D(x)$$

est G-localement de classe $\mathscr{B}$ et coïncide avec u sur $\mathring{C}$.

Quitte à raffiner la décomposition cellulaire $\mathscr{C}$, l'assertion a) s'en déduit.

Supposons à partir de maintenant que $\mathscr{B}$ est la classe $\mathscr{C}^r$ pour un certain $r \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. Choisissons une décomposition cellulaire $\mathscr{C}$ et des fonctions u_C comme dans la preuve de a).

Soit x un point de Σ_f et soit C l'unique cellule de $\mathscr{C}$ telle que $x \in \mathring{C}$. Soit Γ une cellule de $\mathscr{C}$ contenant C. Nous allons déterminer la limite de $u(\xi)$ lorsque ξ est un point de $\mathring{\Gamma}$ tendant vers x, et la comparer avec $u(\xi)$.

Soit donc ξ un point de $\mathring{\Gamma}$. On a

$$u(\xi) = u_\Gamma(\xi) = \sum_{\Delta \in \mathscr{D}'_\Gamma} (e_\Delta / d_\Gamma) v_\Delta(\xi),$$

tandis que

$$u(x) = u_C(x) = \sum_{D \in \mathscr{D}'_C} (e_D / d_C) v_D(x).$$

Soit Δ une cellule appartenant à $\mathscr{D}'_\Gamma$. La fonction v_Δ étant continue, $v_\Delta(\xi)$ tend vers $v_\Delta(x)$ lorsque ξ tend vers x. La fibre Δ_x est la réunion des cellules D_x pour D parcourant $\mathscr{D}_C$ telles que $D_x \subset \Delta_x$ (proposition 2.3.7 b)). Par définition de $\mathscr{D}_C$, et comme $x \in \mathring{C}$, une cellule D de $\mathscr{D}$ appartient à $\mathscr{D}_C$ si et seulement si $\mathring{D}_x$ est non vide. Par conséquent, si une cellule de D de $\mathscr{D}_C$ est telle que $D_x \subset \Delta_x$ alors Δ rencontre $\mathring{D}$ si bien que Δ contient D. Inversement si $D \subset \Delta$ alors $D_x \subset \Delta_x$. Compte tenu de la définition de v_Δ, il en résulte que

$$v_\Delta(\xi) \to \sum_{\substack{D \in \mathscr{D}'_C \\ D \subset \Delta}} v_D(x)$$

lorsque $\xi \to x$.

Par suite, toujours lorsque $\xi \to x$, on a

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \sum_{\Delta \in \mathscr{D}'_\Gamma} (e_\Delta / d_\Gamma) v_\Delta(\xi) \\ &\to \sum_{\Delta \in \mathscr{D}'_\Gamma} (e_\Delta / d_\Gamma) \sum_{\substack{D \in \mathscr{D}'_C \\ D \subset \Delta}} v_D(x) \\ &= \sum_{D \in \mathscr{D}'_C} \sum_{\substack{\Delta \in \mathscr{D}'_\Gamma \\ D \subset \Delta}} (e_\Delta / d_\Gamma) v_D(x) \\ &= \sum_{D \in \mathscr{D}'_C} v_D(x) \sum_{\substack{\Delta \in \mathscr{D}'_\Gamma \\ D \subset \Delta}} (e_\Delta / d_\Gamma). \end{aligned}$$

Justifions la dernière égalité. Si Δ est une cellule de $\mathscr{D}_\Gamma$ contenant D alors comme la projection de D vers C contient une fibre de dimension d, on a nécessairement $\dim \Delta = \dim \Gamma + d$, c'est-à-dire $\Delta \in \mathscr{D}'_\Gamma$.

Pour tout x dans X et tout $t \in \mathbf{R}^d$, nous noterons (x, t) le point $\mathrm{sq}_x(t)$ de $X \times \mathbf{G}^d_{\mathrm{m}}$. C'est le point η_t de la fibre $\mathbf{G}^d_{\mathrm{m},\mathscr{H}(x)}$ de la projection de $X \times \mathbf{G}^d_{\mathrm{m}}$ sur X.

Lemme 16.2.3. — *Soit D une cellule de $\mathscr{D}'_C$ et soit y un point de l'intérieur de la cellule D_x. Posons $t = g_{\mathrm{trop}}(y)$. On a*

$$\sum_{\substack{\Delta\in\mathscr{D}'_\Gamma\\ D\subset\Delta}} e_\Delta/d_\Gamma = \deg^{(y)}_{(\xi,t)}(g')$$

pour tout $\xi \in \mathring{\Gamma}$ suffisamment proche de x.

Rappelons que $\deg^{(y)}(g')$ est un germe de fonction au voisinage de (x,t), défini en 13.4.5.

Démonstration. — La réunion E des cellules de $\mathscr{D}$ qui contiennent le point y est un voisinage paralinéaire compact de y dans Σ_h. Il existe donc un voisinage analytique compact V de y dans Y tel que $V \cap \Sigma_h = E$ (lemme 3.2.8 (f)). Vérifions que y est le seul antécédent de (x,t) par $g'|_V$. Comme $(g')^{-1}(\Sigma_{f'}) = \Sigma_h$, tout antécédent de x sur Y est situé sur Σ_h. Il suffit donc de s'assurer que y est le seul antécédent de x sur E. Or E est réunion de h-cellules contenant y, et la restriction de g' à chacune de ces cellules est injective, d'où l'assertion.

Soit E' la réunion des $\mathring{\Delta}$ où Δ parcourt l'ensemble des cellules de $\mathscr{D}$ contenant y. C'est un sous-ensemble de E dont le complémentaire dans E est la réunion des cellules de $\mathscr{D}$ contenues dans E et ne contenant pas y. Par conséquent, E' est un ouvert de E. Il existe donc un ouvert V' de V tel que $V' \cap E = E'$ (et on alors $V' \cap \Sigma_h = E'$). Le point y appartient à E' par construction, si bien que V' est un voisinage ouvert de y dans V.

Observons que $y \in \mathring{D}$ car y appartient à l'intérieur de D_x et car D appartient à $\mathscr{D}_C$. Par conséquent, pour toute cellule Δ de $\mathscr{D}$ le point y appartient à Δ si et seulement si Δ contient D.

Par compacité de V, et compte tenu du fait que $(g')^{-1}(x,t) \cap V = \{y\}$, il existe un voisinage ouvert U de x tel que $(g')^{-1}(\xi,t) \cap V$ soit contenu dans V' pour tout ξ appartenant à U.

Soit ξ un point de $\mathring{\Gamma} \cap U$. Par définition, $\deg_{(\xi,t)}(g'|_V)$ est égal à la somme des $\deg^\eta(g'|_V)$ où η parcourt l'ensemble des antécédents de (ξ,t) dans V. Nous allons montrer que tout antécédent η de (ξ,t) dans V appartient à $\bigcup_{\Delta\in\mathscr{D}'_\Gamma} \Delta$, qu'il y a au plus un tel antécédent sur Δ pour une cellule Δ donnée appartenant à $\mathscr{D}'_\Gamma$, et qu'il appartient le cas échéant à $\mathring{\Delta}$.

Soit η un point de V tel que $g'(\eta) = (\xi,t)$. Comme $(g')^{-1}(\Sigma_{f'}) = \Sigma_h$, le point η appartient à Σ_h ; puisque $E = V \cap \Sigma_h$, on a $\eta \in E$. Le point ξ appartenant à U, le point η est situé sur V', et donc sur E' car $V' \cap \Sigma_h = E'$. Il existe en conséquence une cellule Δ contenant y telle que $\eta \in \mathring{\Delta}$. La cellule ouverte $\mathring{\Delta}$ rencontre la fibre Y_ξ (elle contient η) ; d'après le corollaire 2.3.7 c) on a donc $p(\Delta) = \Gamma$, autrement dit, $\Delta \in \mathscr{D}_\Gamma$. Comme Δ contient D, la projection de Δ vers Γ contient une fibre de dimension d, si bien que $\dim\Delta = \dim\Gamma + d$, c'est-à-dire $\Delta \in \mathscr{D}'_\Gamma$. Puisque $h|_\Delta$ est injective, η est le seul antécédent de (ξ,t) sur Δ. Soit Δ' une cellule de $\mathscr{D}'_\Gamma$ contenant η. La cellule Δ' rencontre alors $\mathring{\Delta}$, donc contient Δ. Puisque $\dim\Delta' = \dim\Delta = \dim\Gamma + d$ il vient $\Delta' = \Delta$.

Montrons maintenant que pour tout cellule $\Delta \in \mathscr{D}'_\Gamma$ et tout point $\xi \in \mathring{\Gamma}$ suffisamment proche de x, le point (ξ,t) possède un antécédent η sur Δ. Le point y ayant été choisi dans $\mathring{D}_x$, le point $t = g_{\mathrm{trop}}(y)$ appartient à $g_{\mathrm{trop}}(\mathring{D}_x)$, qui est aussi l'intérieur topologique de $g_{\mathrm{trop}}(D_x)$ dans $\mathbf{R}^d$, car D_x est de dimension d ; le point t appartient *a fortiori* à l'intérieur topologique de $g_{\mathrm{trop}}(\Delta_x)$ dans $\mathbf{R}^d$. En appliquant le corollaire 1.8.6 à la cellule

$h_{\mathrm{trop}}(\Delta)$, à la projection de $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^d$ sur $\mathbf{R}^d$ et au point $h_{\mathrm{trop}}(y)$, on en déduit que pour tout ζ suffisamment proche de $f_{\mathrm{trop}}(x))$ dans $f_{\mathrm{trop}}(\Gamma)$, le point (ζ, t) appartient à $h_{\mathrm{trop}}(\Delta)$. Par suite, pour tout point ξ suffisamment proche de x dans Γ, le point (ξ, t) possède un antécédent sur Δ par g'.

Terminons maintenant la démonstration du lemme. Comme $\mathscr{D}_\Gamma$ est fini, il existe un voisinage W de x dans Γ tel que pour tout $\xi \in \mathring{\Gamma} \cap W$, le point (ξ, t) a un antécédent η, et un seul, dans chaque cellule Δ appartenant à $\mathscr{D}'_\Gamma$; notons-le η_Δ. Si de plus $\xi \in W \cap U$ alors η_Δ appartient à $\mathring{\Delta}$; en conséquence, $\deg^{\eta_\Delta}(g') = e_\Delta/d_\Gamma$ (lemme 14.2.10). Ainsi, pour tout point $\xi \in \mathring{\Gamma} \cap W \cap U$,

$$\deg_{(\xi,t)}(g'|_V) = \sum_{\Delta \in \mathscr{D}'_\Gamma} \deg^{\eta_\Delta}(g'|_V) = \sum_{\Delta \in \mathscr{D}_\Gamma} \deg^{\eta_\Delta}(g') = \sum_{\Delta \in \mathscr{D}_\Gamma} e_\Delta/d_\Gamma,$$

et cela conclut la démonstration car $(\xi, \tau) \mapsto \deg_{(\xi,\tau)}(g'|_V)$ est un représentant du germe $\deg^{(y)}(g')$ en (x, t). □

Reprenons la démonstration de la proposition. On a donc pour tout ξ suffisamment proche de x dans $\mathring{\Gamma}$ les égalités

$$u(\xi) = \sum_{D \in \mathscr{D}'_C} v_D(x) \sum_{\substack{\Delta \in \mathscr{D}'_\Gamma \\ D \subset \Delta}} (e_\Delta/d_\Gamma) = \sum_{D \in \mathscr{D}'_C} v_D(x) \deg^{(y)}_{(\xi,t)}(g').$$

Comme l'ensemble des cellules de $\mathscr{C}$ qui contient x est fini, il s'ensuit que

$$u(\xi) = \sum_{D \in \mathscr{D}'_C} v_D(x) \deg^{(y)}_{(\xi,t)}(g')$$

pour tout ξ dans Σ_f suffisamment proche de x.

Montrons b). On suppose que les fonctions de la classe $\mathscr{B}$ sont continues, que p est séparé et que ω est faiblement positive. Les fonctions v_D sont alors continues et positives, et g' est séparé. Le germe $(\xi, \tau) \mapsto \deg^{(y)}_{(\xi,\tau)}(g')$ est semi-continu supérieurement (13.4.5, c'est ici que sert la séparation de g'). La fonction u est donc semi-continue supérieurement au voisinage de x. Celui-ci ayant été choisi arbitrairement sur Σ_f, la fonction u est semi-continue supérieurement, ce qui montre b).

Montrons enfin c). Supposons que p est sans bord. Et supposons simplement pour le moment que les fonctions de la classe $\mathscr{B}$ sont continues, et démontrons que $u|_{\Sigma_f}$ est continue. Par notre hypothèse sur $\mathscr{B}$ les fonctions v_D sont continues. Le morphisme p est sans bord, et est composé de g' et de la première projection ; par conséquent, g' est sans bord. Il est donc fini en tout point de $(g')^{-1}(\Sigma_{f'})$ (lemme 11.6.5, b)). Par ailleurs, pour tout $x \in X$, le morphisme $g|_{Y_x}$ est (fini et) plat en tout point situé au-dessus du squelette standard de $\mathbf{G}^d_{\mathrm{m},\mathscr{H}(x)}$ (lemme 11.6.5, c)) ; puisque p est plat, le critère de platitude par fibres ([**52**], théorème 8.3.8) assure que g' est plat en tout point de $(g')^{-1}(\Sigma_{f'})$. Le morphisme g' étant fini et plat en tout point de $(g')^{-1}(\Sigma_{f'})$, il résulte de 13.4.5 que le germe $(\xi, \tau) \mapsto \deg^{(y)}_{(\xi,\tau)}(g')$ est constant au voisinage de (x, t). La fonction u est donc continue au voisinage de x. Celui-ci ayant été choisi arbitrairement sur Σ_f, la fonction u est continue.

Supposons maintenant que $\mathscr{B} = \mathscr{C}^r$ pour un certain r appartenant à $[0, \infty]$. Pour toute cellule $C \in \mathscr{C}$, les fonctions u et u_C coïncident sur $\mathring{C}$. Comme $u|_C$ et u_C sont continues, u et u_C coïncident sur C. La fonction u_C étant de classe $\mathscr{C}^r$, la fonction $u|_C$ l'est aussi. Ceci valant quel que soit C, la fonction u est G-localement de classe $\mathscr{C}^r$. □

En application du théorème précédent, nous pouvons donner une variante relative du théorème selon les espaces sans bord sont très riches.

Théorème 16.2.4. — *Soit $p\colon Y \to X$ un morphisme sans bord entre espaces k-analytiques presque bons et topologiquement séparés. On suppose que Y est purement de dimension n et localement holomorphiquement séparé, que X est purement de dimension m, et que les fibres de p sont purement de dimension $d = n - m$. Supposons que l'espace X, vu comme espace G-tropical de niveau m, est très riche. Alors, considéré comme espace G-tropical de niveau n, l'espace Y est très riche.*

Démonstration. — Soit Σ une partie squelettique compacte de V. Il faut démontrer que Σ est contenue dans une partie squelettique compacte de V purement de dimension n, ce qui peut se faire G-localement sur Σ. D'après la proposition 9.18 de **[60]**, ou plutôt sa preuve, il existe un G-recouvrement fini (Σ_i) par des parties squelettiques compactes et, pour tout i, des domaines compacts V_i de X et W_i de $p^{-1}(V_i)$, des moments $f_i\colon V_i \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$ et $g_i\colon W_i \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$, tels que $\Sigma_i \subset \Sigma_{p^*f_i,g_i}$. On peut ainsi supposer qu'il existe des domaines compacts V de X et W de $p^{-1}(V)$, des moments $f\colon V \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$ et $g\colon W \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$, tels que $\Sigma \subset \Sigma_{p^*f,g}$. Alors, $p(\Sigma) \subset \Sigma_f$ et pour tout $x \in \Sigma_f$, $\Sigma \cap Y_x \subset \Sigma_{g|_{Y_x}}$ (lemme 14.2.10).

Soit $y \in \Sigma$ et soit $x = p(y)$. Comme X est presque bon en x, il existe un voisinage ouvert V' de x dans X et un moment $f'\colon V' \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$ tel que $|f_i - f_i'| < |f_i|$ sur $V \cap V'$. Comme Y est presque bon en y, il existe un voisinage ouvert W' de y dans $p^{-1}(V')$ et un moment $g'\colon W' \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$ tel que $|g_j - g_j'| < |g_j|$ sur $W \cap W'$. Alors $\Sigma_{p^*f,g}$ et $\Sigma_{p^*f',g'}$ coïncident sur W'. En remplaçant X par V' et f par f', Y par W' et g par g', Σ par un voisinage compact de y dans Σ, et en utilisant la compacité de Σ, on se ramène ainsi au cas où f et g sont définis sur X et Y.

La partie Σ_f de X est squelettique et l'espace X est supposé très riche. Il existe donc une partie squelettique T de X qui est purement de dimension n et qui contient la partie squelettique compacte $p(\Sigma)$ de Σ_f.

En raisonnant à nouveau localement sur X et en appliquant la proposition 12.9.10, on se ramène au cas où il existe un moment $f'\colon X \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$ sur X tel que $\mathrm{T} \subset \Sigma_{f'}$. Pour tout point $y \in \Sigma$, on a $p(y) \in \mathrm{T} \subset \Sigma_{f'}$ et $y \in \Sigma_{f|_{Y_{p(y)}}}$, donc $y \in \Sigma_{p^*f',g}$ (lemme 14.2.10). Cela démontre que Σ est contenu dans $\Sigma_{p^*f',g}$. Quitte à remplacer f par f', on peut supposer que $p(\Sigma) \subset \mathrm{T} \subset \Sigma_f$.

Notons α la (m,m)-forme sur X image réciproque par f_{trop} de la forme strictement positive $\mathrm{d}'x_1 \wedge \mathrm{d}''x_1 \wedge \dots$ sur $\mathbf{R}^m$. De même, notons ω la (d,d)-forme sur Y, image réciproque par g_{trop} de la forme strictement positive analogue sur $\mathbf{R}^d$.

Lemme 16.2.5. — *Soit λ une fonction positive sur Y, G-tropicalement continue, à support compact, telle que $\lambda|_{\Sigma_{p^*f,g}} \neq 0$. Alors $\int_Y \lambda\omega \wedge p^*\alpha > 0$.*

Démonstration du lemme. — Soit $y \in \Sigma_{p^*f,g}$ tel que $\lambda(y) \neq 0$; posons $x = p(y)$.

Démontrons d'abord que que $\int_{Y_x} \lambda\omega > 0$. La forme $\omega|_{Y_x}$ est tropicalisée par $g|_{Y_x}$; le squelette $\Sigma_{g|_{Y_x}}$ en est un support fort ; il est purement de dimension d car Y_x est sans bord (corollaire 12.8.4). Comme ω est l'image réciproque par g d'une forme strictement positive sur $\mathbf{R}^d$, il en résulte que $\Sigma_{g|_{Y_x}}$ est égal au support de la mesure positive $(\omega|_{Y_x})_{\mathrm{Rad}}$ sur Y_x. Puisque le support de $\lambda(y) > 0$, on en déduit que $\int_{Y_x} \lambda\omega > 0$, comme annoncé.

Le morphisme p est sans bord ; d'après la proposition 16.2.2, la fonction positive $u_{\lambda\omega}$ sur X définie par $u_{\lambda\omega}(t) = \int_{Y_t} \lambda\omega$ est continue sur Σ_f. Elle est donc strictement positive sur un voisinage de x dans Σ_f. Comme α est l'image réciproque par f_{trop} d'une forme

strictement positive sur $\mathbf{R}^m$, le squelette Σ_f est le support de la mesure positive α_{Rad}. Par conséquent, $\int_{\Sigma_f} u_{\lambda\omega}\alpha > 0$, c'est-à-dire $\int_X u_{\lambda\omega}\alpha > 0$. D'après le théorème 16.5.4, on en déduit $\int_Y \lambda\omega \wedge p^*\alpha = \int_Y u_{\lambda\omega}\alpha > 0$, ce qu'il fallait démontrer. □

Terminons maintenant la démonstration du théorème. Soit W un voisinage compact de Σ dans Y et soit $\mathscr{C}$ une décomposition cellulaire en (p^*f, g)-cellules du squelette compact $\Sigma_{p^*f,g} \cap W$ qui est adaptée à Σ. Soit $C \in \mathscr{C}$ une cellule maximale qui contient une cellule de Σ ; il suffit de prouver que $\dim(C) = n$. Soit $y \in \mathring{C}$.

Par maximalité de C, la cellule ouverte $\mathring{C}$ est ouverte dans $\Sigma_{p^*f,g}$; il existe donc un ouvert U de Y tel que $\mathring{C} = \Sigma_{p^*f,g} \cap U$. Il existe alors une fonction lisse λ sur Y, à support compact contenu dans U telle que $\lambda(y) = 1$ (corollaire 15.2.5).

D'après le lemme précédent, $\int_Y \lambda\omega \wedge p^*\alpha > 0$, si bien que $\lambda\omega \wedge p^*\alpha \neq 0$. Par construction, la cellule C est un support fort de la (n, n)-forme $\lambda\omega p^*\alpha$. Cela entraîne $\dim(C) = n$. □

§ 16.3. CONTINUITÉ DES INTÉGRALES FIBRE : CAS GÉNÉRAL

Proposition 16.3.1. — *Soit d un entier et soit $p\colon Y \to X$ un morphisme plat et compact entre espaces k-analytiques, à fibres purement de dimension d. Soit $f\colon Y \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$ un moment. Il existe un G-recouvrement (X_i) de X par des domaines analytiques et, pour tout i, un moment g_i sur X_i tel que pour tout $x \in X_i$, le polyèdre de niveau d calibré $f_{\mathrm{trop}}(Y_x)^{(d)}$ ne dépende que de $g_{i,\mathrm{trop}}(x)$.*

Démonstration. — L'énoncé à montrer est tautologiquement G-local sur X, ce qui permet de supposer ce dernier affinoïde ; l'espace Y est alors compact. En particulier, X et Y sont topologiquement séparés ; les fibres de p sont considérées comme des espaces G-tropicaux de niveau d.

Soit f' le X-morphisme (p, f) de Y vers $X \times_k \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$. Soit x un point de X. Le polyèdre $f_{\mathrm{trop}}(Y_x)^{(d)}$ est égal à $f_{\mathrm{trop}}(\Sigma^{(d)}_{f|_{Y_x}})$. Quant à son calibrage, il est égal au calibrage standard de $\mathbf{R}^d$ multiplié par la fonction qui envoie un point v de $\mathbf{R}^d$ sur l'entier $\deg_{\mathrm{sq}_x(v)}(f|_{Y_x}) = \deg_{\mathrm{sq}_x(v)}(f')$.

Il suffit donc de montrer l'existence d'un G-recouvrement (X_i) de X et, pour tout x, d'un moment g_i sur X_i tel que pour tout $x \in X_i$, l'application de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{N}$ qui envoie v sur $\deg_{\mathrm{sq}_x(v)}(f')$ ne dépende que de $g_{i,\mathrm{trop}}(x)$. Pour tout $x \in X$ notons S_x le squelette standard du tore $\mathbf{G}^d_{\mathrm{m},\mathscr{H}(x)}$; par construction, $\Sigma_{f|_{Y_x}} = (f')^{-1}(S_x)$. Soit S la réunion des S_x pour x parcourant X. Le sous-ensemble S de $X \times_k \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$ est l'image de la section de Shilov de l'application $(\mathrm{Id}, \mathrm{trop})$ de $X \times_k \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$ vers $X \times \mathbf{R}^d$; comme la section de Shilov est continue (lemme 12.1.11) et que $X \times_k \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$ est séparé, S est une partie fermée de $X \times_k \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$.

Soit s un point de S, et soit x son image sur X. Puisque $s \in S_x$, le morphisme $f|_{Y_x}\colon Y_x \to \mathbf{G}^d_{\mathrm{m},\mathscr{H}(x)}$ est plat et de dimension relative nulle en tout point de $f^{-1}(s)$. Le morphisme f' est alors de dimension relative nulle en tout point de $(f')^{-1}(S)$; de plus le morphisme p est plat, et la projection de $X \times_k \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$ sur X est plate ce qui entraîne en vertu du critère de platitude par fibre ([**52**], théorème 8.3.8) que f' est plat en tout

point de $(f')^{-1}(S)$. Le lieu U des points de Y en lesquels f' et plat et de dimension relative nulle est un ouvert de Zariski de Y, qui contient le compact $(f')^{-1}(S)$ d'après ce qui précède. Il est alors loisible de remplacer Y par un voisinage analytique compact de $(f')^{-1}(S)$ dans U, ce qui permet de supposer que f' est plat et de dimension relative nulle.

Soit (Y_j) un recouvrement fini de Y par des domaines affinoïdes. Pour tout ensemble non vide J d'indices, posons $Y_J = \bigcap_{j\in J} Y_j$ et choisissons un recouvrement affinoïde fini $(W_{J,\ell})_\ell$ de Y_J. Pour tout ensemble non vide Λ d'indices, posons $W_{J,\Lambda} = \bigcap_{\ell\in\Lambda} W_{J,\ell}$. Comme Y_J est contenu dans un domaine affinoïde de Y, les $W_{J,\Lambda}$ sont tous affinoïdes. Par conséquent pour tout point z de $X \times_k Z$ on a

$$\deg_z(f') = \sum_{J\neq\varnothing} (-1)^{|J|-1} \deg_z(f'|_{Y_J}) = \sum_{J,\Lambda\neq\varnothing} (-1)^{|J|+|\Lambda|} \deg_z(f'|_{W_{J,\Lambda}}).$$

Il suffit dès lors de savoir démontrer la proposition pour chacun des domaines affinoïdes $W_{J,\Lambda}$ (elle fournira pour chacun de ces domaines W un jeu de cartes tropicales qui G-recouvre X et contrôle les polyèdres calibrés $f_{\mathrm{trop}}(W_x)^{(d)}$, et il suffira alors de prendre un raffinement commun de ces jeux pour contrôler les polyèdres calibrés $f_{\mathrm{trop}}(Y_x)^{(d)}$). Par conséquent, on peut supposer que Y est affinoïde.

Soit $x \in X$ et soit $v \in \mathbf{R}^d$. Soient $y_1, \ldots, y_n$ les antécédents de $\mathrm{sq}_x(v)$ sous f'. Comme f' est plat et de dimension relative nulle, il résulte du théorème 8.4.6 de [**52**] (et du fait qu'un espace de dimension nulle est automatiquement de Cohen-Macaulay) qu'il existe pour tout i un voisinage affinoïde Y_i de y_i dans Y tel que $f'|_{Y_i}$ admette une factorisation $Y_i \to T_i \to X \times_k \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$ où T_i est un espace affinoïde, où $Y_i \to T_i$ est fini et plat de rang constant e_i et où $T_i \to X \times_k \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$ est quasi-étale. Quitte à les restreindre, on peut supposer que les Y_i sont deux à deux disjoints. Il existe alors un voisinage affinoïde X'_v de x dans X et un voisinage paralinéaire compact P_v de $\mathbf{R}^d$ tels que $(f')^{-1}(\mathrm{sq}_\xi(w))$ soit contenu dans $\coprod Y_i$ pour tout $\xi \in X'_v$ et tout $w \in P_v$. Il suffit alors de démontrer l'existence d'un nombre fini de cartes tropicales G-recouvrant X'_v contrôlant les fonctions $w \mapsto \deg_{\mathrm{sq}_\xi(w)}(f')$ de P_v dans $\mathbf{N}$ pour ξ appartenant à X'_v. Supposons en effet l'avoir prouvé. Le compact $f_{\mathrm{trop}}(Y)$ est contenu dans $\bigcup_{v\in\mathscr{V}} P_v$ pour un certain ensemble fini $\mathscr{V}$. Soit X' l'intersection des X'_v pour $v \in \mathscr{V}$; c'est un voisinage affinoïde de x dans X. En prenant un raffinement commun des traces sur X' des jeux fournis sur les différents X'_v pour $v \in \mathscr{V}$, on obtient un jeu fini de cartes tropicales G-recouvrant X' et contrôlant les fonctions $w \mapsto \deg_{\mathrm{sq}_\xi(w)}(f')$ pour $w \in \mathbf{R}^d$ et $\xi \in X'$ (pour le voir, on remarque que $\deg_{\mathrm{sq}_\xi(w)}(f')$ est nul dès que w n'appartient pas à $f_{\mathrm{trop}}(Y)$, et que si w appartient à $f_{\mathrm{trop}}(Y)$ il appartient alors à P_v pour un certain $v \in \mathscr{V}$).

On peut donc supposer, en remplaçant X par X'_v et Y par l'image réciproque sour (p, f_{trop}) de $X'_v \times P_v$, que Y est réunion disjointe de domaines affinoïdes Y_i sur chacun desquels f' admet une factorisation comme ci-dessus. En raisonnant G-localement sur Y comme on l'a fait plus haut (c'est même ici plus simple puisque les Y_i sont deux à deux disjoints), on se ramène au cas où $f' \colon Y \to X \times_k \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$ admet une factorisation $Y \to T \to X \times_k Z$ où T est affinoïde, où $Y \to T$ est fini et plat de degré constant e, et où $T \to X \times_k Z$ est quasi-étale.

Le théorème 5.3 de [**55**] assure que pour tout entier m, le lieu V_m des points de $X \times_k \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$ en lesquels les fibres géométriques du morphisme quasi-étale $T \to X \times_k Z$ sont de cardinal $\geqslant m$ est un domaine analytique compact de $X \times_k \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$ (notons qu'il existe M tel que V_m soit vide dès que $m > M$). Sur le domaine analytique $V_m - V_{m+1}$ de $X \times_k \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$

les fibres géométriques de $T \to X \times_k \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$ sont de cardinal exactement m, et le degré de f' au-dessus d'un point de $V_m - V_{m+1}$ est dès lors égal à me.

La fonction $w \mapsto \deg_{\mathrm{sq}_\xi(w)}(f')$ ne dépend donc que des fonctions $w \mapsto \mathbf{1}_{V_m}(\mathrm{sq}_\xi(w))$ pour $0 \leqslant m \leqslant M$. On conclut alors à l'aide du lemme 16.3.2. □

Lemme 16.3.2. — *Soit X un espace k-affinoïde, soit d un entier et soit V un domaine analytique compact de $X \times_k \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$. Pour tout $x \in X$, soit Υ_x la fonction*

$$\mathbf{R}^d \mapsto \{0,1\}, t \mapsto \mathbf{1}_V(\mathrm{sq}_x(t)).$$

Il existe une famille finie $(a_i)_{i\in I}$ de fonction analytiques sur X et, pour tout $x \in X$, un voisinage affinoïde U_x de x dans X et un sous-ensemble I_x de I tel que $a_i|_{U_x}$ soit inversible pour tout $i \in I_x$ et tel que pour tout $\xi \in U_x$, la fonction Υ_ξ ne dépende que de la famille $(|a_i(\xi)|)_{i\in I_x}$.

Démonstration. — Soit $T = (T_1, \ldots, T_d)$ la famille des fonctions coordonnées sur $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$. Comme V est compact il existe un réel $R > 1$ tel que V soit contenu dans le domaine affinoïde $X \times_k Z$ de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$, où Z désigne la polycouronne compacte défini par la conjonction d'inégalités $R^{-1} \leqslant |T_i| \leqslant R$ pour i variant de 1 à d. Par le théorème de Gerritzen-Grauert, le domaine analytique compact V de $X \times_k Z$ est une union finie $\bigcup_n V_n$ de domaines rationnels non vides. La fonction caractéristique $\mathbf{1}_V$ est égale à $\sup_n \mathbf{1}_{V_n}$. l suffit donc de montrer le lemme pour chacun des V_n, ce qui permet de supposer que V est un domaine rationnel non vide de $X \times_k V$.

Donnons-nous un système d'inégalités

$$|f_1| \leqslant \mu_1|f_0| \text{ et } \ldots \text{ et } |f_p| \leqslant \mu_p|f_0|$$

décrivant le domaine rationnel V où les f_j sont des fonctions analytiques sur $X \times_k Z$ sans zéro commun et où les μ_j sont des réels strictement positifs.

Soit J un ensemble d'entiers compris entre 0 et N, et soit D le lieu d'annulation simultanée des f_j sur $X \times_k Z$. Nous allons montrer que $\mathbf{1}_V$ s'exprime au voisinage de D en fonction des $|f_j|$ pour $j \notin J$. Soit b le minimum de $|f_0|$ sur le domaine V ; c'est un réel strictement positif. Soit W le voisinage affinoïde de D dans $X \times_k Z$ défini par la conjonction d'inégalités $|f_j| \leqslant B_j$ pour $j \in J$ où $B_j = b/2$ si $j = 0$ et $B_j = \mu_j b/2$ sinon. Le domaine affinoïde $V \cap W$ est alors :

– vide si $0 \in J$;
– décrit en tant que domaine de W par les inégalités

$$|f_0| \geqslant b \text{ et } |f_j| \leqslant \mu_j|f_0|$$

pour tous les $j > 0$ tels que $j \notin J$ si $0 \notin J$.

La fonction $\mathbf{1}_V|_W$ s'exprime donc bien en fonction des $|f_j|$ pour $j \notin J$.

Soit $x \in X$. Pour tout j, la fonction analytique f_j sur $X \times_k Z$ s'écrit comme une série $\sum_N a_{j,N}T^N$ en notation multi-indicielle, où les $a_{j,N}$ sont des fonctions analytiques sur X, où N parcourt $\mathbf{Z}^d$ et où $\|a_j, N\| \cdot R^{|N|}$ tend vers zéro quand $|N|$ tend vers l'infini. Soit E l'ensemble des indices j tels que $f_j|_{Z_x} \neq 0$, c'est-à-dire encore tel qu'il existe N vérifiant $a_{j,N}(x) \neq 0$. D'après le paragraphe précédent et par propreté, il existe un voisinage affinoïde U_x de x dans X tel que sur $U_x \times_k Z$ la fonction $\mathbf{1}_V$ s'exprime en fonction des $|f_j|$ pour $j \in E$. Soit Σ l'image de $U_x \times [-\log R, \log R]^d$ par l'application $(z,t) \mapsto \mathrm{sq}_z(t)$, qui est continue (lemme 12.1.11) . C'est une partie compacte de $U_x \times_k Z$, dont la fibre Σ_ξ en tout point ξ de U_x est le squelette standard de la poly-couronne Z_ξ.

Pour tout j appartenant à E, la fonction $f_j|_{Z_x}$ est non nulle et ne s'annule donc pas sur le squelette Σ_x ; elle y est dès lors minorée par un réel strictement positif ε_j. Par propreté topologique on peut supposer, quitte à diminuer les ε_j et à restreindre U_x, qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $|f_j| \geqslant \varepsilon$ identiquement sur Σ pour tout $j \in E$. Pour tout $j \in E$, choisissons un ensemble fini $\mathscr{N}_j$ d'indices tel que $|a_{j,N}| \cdot r^N < \varepsilon$ identiquement sur U_x pour tout $N \notin \mathscr{N}_j$ et tout $r \in [R^{-1}, R]^d$. Si N est un élément de $\mathscr{N}_j$ tel que $a_{j,N}(x) = 0$ on peut restreindre U_x de sorte que $|a_{j,N}| \cdot r^N < \varepsilon$ identiquement sur U_x pour tout $r \in [R^{-1}, R]^d$, puis retirer N de l'ensemble $\mathscr{N}_j$. On se ramène ainsi au cas où $a_{j,N}(x) \neq 0$ pour tout $j \in E$ et tout $N \in \mathscr{N}_j$ puis, en restreignant encore U_x, au cas où $a_{j,N}$ est inversible sur U_x pour tout $N \in \mathscr{N}_j$ et tout $j \in E$. On a

$$\max_N |a_{j,N}| \cdot r^N = \max_{N \in \mathscr{N}_j} |a_{j,N}| \cdot r^N$$

identiquement sur U_x pour tout $r \in [R^{-1}, R]^d$. Par conséquent

$$|f_j(\mathrm{sq}_\xi(t))| = \max_{N \in \mathscr{N}_j} |a_{j,N}(\xi)| \cdot \exp(t)^N$$

pour tout $\xi \in U_x$ et tout $t \in [-\log R, \log R]^d$. Puisque $\mathbf{1}_V(\mathrm{sq}_\xi(t))$ est nul dès que t n'appartient pas à $[-\log R, \log R]^d$, la fonction Υ_ξ peut être décrite, lorsque $\xi \in U_x$, uniquement en termes des $|a_{j,N}(\xi)|$ pour $j \in E$ et $N \in \mathscr{N}_j$. Les fonctions $a_{j,N}$ pour$j \in E$ et $N \in \mathscr{N}_j$ étant inversibles sur U_x, ceci achève la démonstration. □

Théorème 16.3.3. — *Soit d un entier et soit $p\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces k-analytiques, topologiquement séparé, plat et à fibres purement de dimension d. Soit $\mathscr{B}$ une classe de coefficients qui est soit la classe des fonctions boréliennes localement bornées, soit la classe $\mathscr{C}^r$ pour un certain r appartenant à $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$. Soit ω une (d,d)-forme G-tropicalement de classe $\mathscr{B}$ sur Y, à support relativement compact sur X. Soit u_ω l'application $x \mapsto \int_{Y_x} \omega$ de X vers $\mathbf{R}$.*

a) *Il existe un G-recouvrement (X_i) de X par des domaines analytiques compacts et, pour tout i, un moment f_i sur X_i, une décomposition cellulaire $\mathscr{C}_i$ de $f_{i,\mathrm{trop}}(X_i)$, et pour tout $C \in \mathscr{C}_i$ une application u_C de classe $\mathscr{B}$ sur C, tels que pour tout indice i, toute cellule $C \in \mathscr{C}_i$ et tout point $x \in f_{i,\mathrm{trop}}^{-1}(\mathring{C})$, on ait $u_\omega(x) = u_C(f_{i,\mathrm{trop}}(x))$.*

b) *L'application u_ω est G-tropicalement borélienne.*

c) *Si $\mathscr{B} \in \{\mathscr{C}^r\}_{0 \leqslant r \leqslant \infty}$, si p est séparé et si ω est positive, l'application u_ω est semi-continue supérieurement.*

d) *Si p est sans bord et si $\mathscr{B} \in \{\mathscr{C}^r\}_{0 \leqslant r \leqslant \infty}$, l'application u_ω est G-tropicalement de classe $\mathscr{B}$.*

Démonstration. — Commençons par une observation qui nous sera utile pour simplifier la situation à étudier. Supposons que u_ω s'écrive $u_1 + u_2$, où u_1 et u_2 sont deux fonctions sur X satisfaisant les conclusions de a). Alors u_ω les satisfait aussi. En effet, si $(X_i, f_i, \mathscr{C}_i, u_C)_{i,C}$ atteste que u_1 satisfait les conclusions de a), et si $(Y_j, g_j, \mathscr{D}_j, v_D)_{j,D}$ en atteste pour u_2, alors $(X_i \cap Y_j, (f_i, g_j)|_{X_i \cap Y_j}, \mathscr{E}_{i,j}, w_E)_{i,j,E}$ en atteste pour u_ω, où $\mathscr{E}_{i,j}$ est pour tout (i,j) une décomposition cellulaire de $(f_i, g_i)_{\mathrm{trop}}(X_i \cap Y_j)$ raffinant la trace de $\mathscr{C}_i \times \mathscr{D}_j$, et où $w_E = u_{p_1(E)} \circ p_1 + v_{p_2(E)} \circ p_2$.

Nous allons tout d'abord démontrer les assertions (a), (b) et (c). Comme elles sont de nature G-locale, on peut supposer X affinoïde ; la forme ω est alors à support compact. Nous allons maintenant expliquer comment nous ramener au cas où il existe un un moment f sur X et un moment $g\colon Y \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$ tels que ω soit G-localement tropicalisée

par $(f \circ p, g)$ – nous dirons plus brièvement que ω est *bien présentée* relativement au morphisme p, et que le couple (f, g) en atteste. Observons que si l'on exhibe un moment $g\colon Y \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{\delta}$ avec $\delta \leqslant d$ et un moment f sur X tel que ω soit G-localement tropicalisée par $(f \circ p, g)$ alors ω est bien présentée relativement à p : le couple (f', g) en atteste, où f' est le moment obtenu en adjoignant $d - \delta$ fonctions constantes égales à 1 au moment f.

Soit x un point de X. Soit y un antécédent de x sur Y appartenant au support de ω. Puisque ω est G-tropicalement de classe $\mathscr{B}$, il existe une famille finie de domaines affinoïdes de Y contenant y, dont la réunion est un voisinage de y, et sur chacun desquels ω est tropicale. Il s'ensuit, grâce à la proposition 12.2.14 et par compacité de $p^{-1}(x) \cap \mathrm{supp}(\omega)$, qu'il existe une famille finie (W_j) de domaines affinoïdes de Y dont la réunion est un voisinage de $p^{-1}(x) \cap \mathrm{supp}(\omega)$ et, pour tout j, un voisinage un voisinage affinoïde V_j de x contenant $p(W_j)$ tel que $\omega|_{W_j}$ soit bien présentée relativement à $p|_{W_j} : W_j \to V_j$. Par propreté topologique de p il existe un voisinage affinoïde V de x dans X, contenu dans chacun des V_j, et tel que $p^{-1}(V)$ soit contenu dans $\bigcup_j W_j$. En remplaçant chacun des W_j par son intersection avec $p^{-1}(V)$, on se ramène au cas où les V_j sont tous égaux à un même voisinage affinoïde V de x. Pour tout ensemble non vide J d'indices, désignons par u_J l'application de V dans $\mathbf{R}$ qui envoie v sur $\int_{\bigcap_{j\in J} W_{j,v}} \omega$. On a alors $u_\omega|_V = \sum_J (-1)^{|J|} u_J$. À l'aide de l'observation faite en début de preuve, et du caractère G-local sur X des différents énoncés, on voit qu'il suffit de montrer (a) et (b) pour chacun des morphismes $W_j \to V$, ce qui nous ramène bien pour ces deux assertions au cas où ω est bien présentée. Nous allons maintenant vérifier qu'on peut également se ramener au cas bien présenté pour démontrer (c).

Pour tout ensemble non vide d'indices J, posons $W_J = \bigcap_{j\in J} W_j$ et $\Omega_J = W_J - \bigcup_{j\notin J} W_j$; les Ω_J non vides forment une partition de $\bigcup_j W_j$

Pour tout J, choisissons une famille $(K_{Ja})_a$ de domaines analytiques compacts de W_J contenant Ω_J, dont l'intersection est égale à $\overline{\Omega_J}$. Remarquons que pour tout J et tout $v \in V$ on a $\int_{W_{J,v}} \mathbf{1}_{\Omega_J}\omega = \int_{W_{J,v}} \mathbf{1}_{\overline{\Omega_J}}\omega$. En effet, considérons un support fort Σ de $\omega_{W_{J,v}}$. L'intersection $(\overline{\Omega_J} - \Omega_J) \cap \Sigma$ est alors contenus dans $\Sigma \cap \bigcup_{j\notin J} \partial(W_J \cap W_j)$, qui est lui-même inclus dans une partie paralinéaire compacte de dimension $< d$ de Σ, ce qui permet de conclure.

La fonction $u_\omega|_V$ est égale à $\sum_J \mathbf{1}_{\Omega_J} u_\omega$, et donc à $\sum_J \mathbf{1}_{\overline{\Omega_J}} u_\omega$ par ce qui précède. Lorsque ω est positive, on peut par conséquent écrire u_ω comme l'infimum des fonctions de la forme $\sum_J \mathbf{1}_{K_{J,a_J}} u_\omega$, sur toutes les familles $(a_J)_J$ possibles. Il suffit dès lors pour montrer (c) de s'assurer que $\mathbf{1}_{K_{J,a}} u_\omega$ est semi-continue supérieurement pour tout J et tout a, ce qui revient à supposer que Y est l'un des $K_{J,a}$; or tout $K_{J,a}$ est inclus dans W_J et dès lors dans l'un des V_j (prendre j dans l'ensemble non vide J) si bien qu'on s'est également ramené pour l'assertion (c) au cas où ω est bien présentée relativement à p.

On suppose donc désormais ω bien présentée relativement à p et l'on choisit un couple (f, g) en attestant. En vertu de la proposition 16.3.1, on peut (en raisonnant G-localement sur X) supposer qu'il existe une famille finie de fonctions inversibles $h_1, \ldots, h_r$ sur X telles que pour tout $x \in X$, le polyèdre de niveau d calibré $g_{\mathrm{trop}}(Y_x)$ ne dépende que de $h_{\mathrm{trop}}(x)$. Mais alors $\int_{Y_x} \omega$ ne dépend que de $(f_{\mathrm{trop}}, h_{\mathrm{trop}})(x)$.

Posons $P = (f_{\mathrm{trop}}, h_{\mathrm{trop}})(X)$. Soit Z une composante irréductible de X, vue comme un espace analytique réduit de niveau $\dim Z$. Soit P_Z le polyèdre $(f_{\mathrm{trop}}, h_{\mathrm{trop}})(Z)$. Puisque Z est très riche, il existe une partie squelettique compacte Σ_Z de Z telle que

$(f_{\mathrm{trop}}, h_{\mathrm{trop}})(\Sigma_Z) = P_Z$. Soit Σ la réunion des Σ_Z pour Z parcourant l'ensemble des composantes irréductibles de X ; notons que cette réunion est disjointe, puisque Σ_Z est constitué de points Zariski-denses dans Z. On a alors $(f_{\mathrm{trop}}, h_{\mathrm{trop}})(\Sigma) = P$. Les assertions à montrer sont G-locales sur X. Il suffit en particulier de les prouver sur les éléments d'un G-recouvrement de X image réciproque d'un G-recouvrement de P ; on peut par conséquent supposer que l'application paralinéaire surjective $(f_{\mathrm{trop}}, h_{\mathrm{trop}})|_\Sigma \colon \Sigma \to P$ admet une section paralinéaire à valeurs dans Σ_Z pour une certaine composante irréductible Z de X ; en remplaçant Σ par l'image de cette section, on peut supposer que $\Sigma = \Sigma_Z$ et que $(f_{\mathrm{trop}}, h_{\mathrm{trop}})$ induit un isomorphisme de Σ sur P.

Puisque $\int_{Y_x} \omega$ ne dépend que de $(f_{\mathrm{trop}}, h_{\mathrm{trop}})(x)$, il existe une unique application v de P dans $\mathbf{R}$ telle que $u_\omega = v \circ (f_{\mathrm{trop}}, h_{\mathrm{trop}})$. Pour démontrer (a), (b) et (c), il suffit de prouver qu'il existe une décomposition cellulaire $\mathscr{C}$ de P, et pour tout $C \in \mathscr{C}$, une fonction u_C de classe $\mathscr{B}$ sur C telle que v et u_C coïncident sur $\mathring{C}$, et que v est semi-continue supérieurement si ω est positive. Comme $(f_{\mathrm{trop}}, h_{\mathrm{trop}})$ induit un isomorphisme de Σ sur P, il suffit de démontrer les propriétés analogues pour la fonction $u_\omega|_\Sigma$. Mais celles-ci se déduisent de la proposition 16.2.2 appliquée au morphisme de $Y \times_X Z$ vers Z induit par p (notons que $Y \times_X Z$ et Z sont équidimensionnels).

Supposons maintenant que p est sans bord et que $\mathscr{B} \in \{\mathscr{C}^r\}_{0 \leqslant r \leqslant \infty}$, et montrons que u_ω est G-tropicalement de classe $\mathscr{B}$. Nous allons devoir faire un peu de *bootstrapping*. L'assertion (a) déjà démontrée, couplée à un raisonnement G-local sur X, permet de supposer que X est compact et qu'il existe un moment $h \colon X \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ tel que $u_\omega = v \circ h_{\mathrm{trop}}$ pour une certaine fonction v de $h_{\mathrm{trop}}(X)$ vers $\mathbf{R}$. Posons $P = h_{\mathrm{trop}}(X)$. Soit Z une composante irréductible de X, vue comme un espace analytique réduit de niveau $\dim Z$. Soit P_Z le polyèdre $h_{\mathrm{trop}}(Z)$. Puisque Z est très riche, il existe une partie squelettique compacte Σ_Z de Z telle que $h_{\mathrm{trop}}(\Sigma_Z) = P_Z$. Soit Σ la réunion des Σ_Z pour Z parcourant l'ensemble des composantes irréductibles de X ; notons que cette réunion est disjointe, puisque Σ_Z est constitué de points Zariski-denses dans Z. On a alors $h_{\mathrm{trop}}(\Sigma) = P$. L'assertion (c) à montrer est G-locale sur X, et il suffit en particulier de la prouver sur les éléments d'un G-recouvrement de X image réciproque d'un G-recouvrement de P ; on peut par conséquent supposer que l'application paralinéaire surjective $h_{\mathrm{trop}}|_\Sigma \colon \Sigma \to P$ admet une section paralinéaire à valeurs dans Σ_Z pour une certaine composante irréductible Z de X ; en remplaçant Σ par l'image de cette section, on peut supposer que $\Sigma = \Sigma_Z$ et que h_{trop} induit un isomorphisme de Σ sur P.

Pour démontrer (c), il suffit de prouver que $v|_P$ est G-localement de classe $\mathscr{B}$. Comme h_{trop} induit un isomorphisme de Σ sur P, il suffit de démontrer que $u_\omega|_\Sigma$ est G-localement de classe $\mathscr{B}$. Pour ce faire on peut remplacer X par un voisinage analytique compact de Σ ne rencontrant aucune autre composante irréductible de X, ce qui permet de supposer ce dernier équidimensionnel. Enfin, en raisonnant une fois encore G-localement sur X, on peut le supposer affinoïde.

Comme X est affinoïde et comme p est sans bord, l'espace Y est bon. Soit x un point de X et soit y un point de $p^{-1}(x) \cap \mathrm{supp}(\omega)$. Comme Y est bon il est décent en y et il résulte donc de la proposition 6.3.4 qu'il existe un voisinage affinoïde W_y de y, un moment h_y sur W_y et une G-forme α_y de bidegré (d,d) et de classe $\mathscr{B}$ sur $h_{y,\mathrm{trop}}(W_y)$ telle que $\omega|_{W_y} = h_y^* \alpha_y$. En vertu de la proposition 12.2.14 on peut alors supposer, quitte à retreindre W_y, qu'il existe un voisinage affinoïde V_y de x contenant $p(W_y)$ tels que $\omega|_{W_y}$ soit bien présentée relativement à $p|_{W_y} \colon W_y \to V_y$. Par compacité, il existe $y_1, \ldots, y_m$ tels que les intérieurs des W_{y_i} recouvrent $p^{-1}(x) \cap \mathrm{supp}(\omega)$. Choisissons un voisinage

affinoïde V de x contenu dans tous les V_{y_i} tel que $p^{-1}(V) \cap \mathrm{supp}(\omega)$ soit inclus dans la réunion des intérieurs topologiques des W_{y_i}, ce qui est possible par propreté topologique de p. En remplaçant chacun des W_{y_i} par $W_{y_i} \times_{V_{y_i}} V$ on se ramène alors au cas où les V_{y_i} sont tous égaux à un même voisinage affinoïde V de x, et où $p^{-1}(V) \cap \mathrm{supp}(\omega)$ est contenu dans $\bigcup \mathring{W}_{y_i}$. Puisque Y est bon, il existe une partition de l'unité (λ_i) au voisinage de $p^{-1}(x) \cap \mathrm{supp}(\omega)$ subordonnée au recouvrement de $p^{-1}(x)$ par les $\mathring{W}_{y_i}$. Soit u_i l'application de V dans $\mathbf{R}$ qui envoie v sur $\int_{(\mathring{W}_{y_i})_v} \lambda_i \omega$. On a alors $u_\omega|_V = \sum u_i$.

Il suffit donc de démontrer que pour tout i la fonction $u_i|_\Sigma$ est G-localement de classe $\mathscr{B}$. On peut donc supposer que ω est de la forme $\lambda\eta$ où λ est lisse et à support compact et où η est une (d,d)-forme G-tropicalement de classe $\mathscr{B}$ bien présentée relativement à p. Choisissons un couple (f,g) qui atteste de la bonne présentation de η ; quitte à raisonner G-localement sur X et à agrandir le moment f et le squelette Σ on peut supposer que $\Sigma = \Sigma_f$; le résultat voulu découle alors de la proposition 16.2.2. □

Corollaire 16.3.4. — *Soit d un entier et soit $p\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces k-analytiques topologiquement séparés qui est plat et purement de dimension relative d. Soit ω une (d,d)-forme à coefficients tropicalement boréliens localement bornés sur Y, et à support relativement compact sur X. Soit u la fonction numérique $x \mapsto \int_{Y_x} \omega$ sur X.*

a) *Soit Z un fermé de Zariski de X tel que u soit constante sur Z. La fonction u est alors constante au voisinage de Z.*

b) *La fonction u est constante au voisinage de tout point rigide de X.*

Démonstration. — Commençons par montrer (a). L'assertion est G-locale sur X. On peut donc d'après le théorème 16.3.3 (a) supposer que X est compact et qu'il existe un moment f sur X et une application v de $f_{\mathrm{trop}}(X)$ vers $\mathbf{R}$ telle que $u = v \circ f_{\mathrm{trop}}$. Posons $Q = f_{\mathrm{trop}}(Z)$. C'est un polyèdre compact contenu dans P, et v est constante sur Q. L'image réciproque $f_{\mathrm{trop}}^{-1}(Q)$ est alors un domaine analytique de X contenant Z sur lequel u est constante. Comme $Z \hookrightarrow X$ est sans bord, Z est contenu dans $\mathrm{Int}(f_{\mathrm{trop}}^{-1}(Q)/X)$ qui est aussi l'intérieur topologique de $f_{\mathrm{trop}}^{-1}(Q)$ dans X. Autrement dit, $f_{\mathrm{trop}}^{-1}(Q)$ est un voisinage de Z dans X.

Si x est un point rigide de X, le sinlgeton $\{x\}$ est un fermé de Zariski de X. L'assertion (a) assure alors que u est constante au voisinage de x. □

Remarque 16.3.5. — L'hypothèse que p est plat est indispensable dans le théorème 16.3.3 et son corollaire. En effet, dans le cas du morphisme de normalisation d'une singularité double ordinaire en dimension 1 et à la fonction constante $\omega = 1$, l'intégrale dans la fibre vaut 2 au point singulier et 1 ailleurs.

Nous considérons cet énoncé comme l'analogue non archimédien du théorème de [**123**] en géométrie analytique complexe. Il y a cependant plusieurs différences formelles :

– Nous faisons une hypothèse de platitude sur le morphisme p et intégrons exactement dans la fibre, avec sa structure analytique adaptée ;

– L'énoncé en géométrie complexe ne suppose pas de platitude sur p, mais la base X est supposée normale ; de plus, les fibres de p sont considérées comme des espaces analytiques réduits, si bien que les intégrales doivent être pondérées par une multiplicité adéquate.

§ 16.4. LES ESPACES DE BERKOVICH STRICTS SONT TRÈS RICHES

Proposition 16.4.1. — *Soit X un espace k-analytique de niveau m et soit x un point de X tel que $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1$ soit de degré de transcendance m sur $\widetilde{k}^1$. Soit Y un espace k-analytique de niveau n et soit f un morphisme de Y vers X.*

a) *La fibre $f^{-1}(x)$ est de dimension $\leqslant n-m$; considérons-la comme un espace k-analytique de niveau $n-m$.*

b) *Soit d un entier et soit Σ une partie squelettique compacte de $f^{-1}(x)$ purement de dimension d. Il existe une partie squelettique compacte* T *de Y purement de dimension $d+m$ et contenant Σ.*

Démonstration. — Puisque Y est de niveau n il est de dimension $\leqslant n$. Si $t \in f^{-1}(x)$ on a donc $d_k(t) \leqslant n$, soit encore $d_{\mathscr{H}(x)}(t) + m \leqslant n$, et donc $d_{\mathscr{H}(x)}(t) \leqslant n-m$. Ainsi $\dim f^{-1}(x) \leqslant n-m$, d'où a).

Montrons maintenant b). La proposition 12.9.7 assure que le problème est insensible à la présence de nilpotents. On peut donc remplacer Y et X par les espaces réduits associés. Il suffit de montrer l'assertion en remplaçant X par n'importe quel domaine analytique de X contenant x. Cela permet de supposer X affinoïde.

Faisons une remarque générale. Soit (Y_i) une famille finie de domaines analytiques compacts de Y_x. dont la réunion contient Σ. La partie squelettique Σ est alors recouverte par les $(Y_i \cap \Sigma)^{(d)}$, et il suffit de montrer que chacun des $(Y_i \cap \Sigma)^{(d)}$ est contenu dans une partie squelettique compacte de Y purement de dimension n ; il suffit donc de montrer l'énoncé voulu pour chacun des $(Y_i \cap \Sigma)^{(d)}$.

En recouvrant Σ par une famille finie de domaines affinoïdes de Y, cette remarque permet d'abord de supposer que Y est affinoïde. Elle permet également de supposer qu'il existe un domaine analytique compact W de Y_x contenant Σ et un moment $g\colon W \to \mathbf{G}^{n-m}_{\mathrm{m},\mathscr{H}(x)}$ tel que $g_{\mathrm{trop}}|_\Sigma$ soit injectif. La partie paralinéaire compacte Σ est alors contenue dans Σ_g ; elle est donc de la forme $W' \cap \Sigma_g$ pour un certain domaine analytique compact W' de W (lemme 3.2.8 e)) ; quitte à remplacer W par W' on peut supposer que $\Sigma = \Sigma_g$.

Comme Y est affinoïde, il existe pour tout point y de Σ un voisinage affinoïde V_y de y dans Y et un moment g_y sur V_y tel que $|g_y - g| < |g|$ sur $V_y \cap W$; on a alors $g_{\mathrm{trop}} = g_{y,\mathrm{trop}}$ sur $V_y \cap W$, et $\Sigma_g \cap (V_y \cap W) = \Sigma_{g_y} \cap (V_y \cap W)$. Par compacité de Σ, ce dernier est contenue dans une union finie de V_y. Ceci permet au vu de la remarque générale ci-dessus de supposer que g s'étend en un moment défini sur Y tout entier et encore noté g.

Le domaine analytique compact W de Y_x est une union finie de domaines rationnels de Y_x. En appliquant encore la remarque générale, on peut ainsi supposer que W est un domaine rationnel de Y_x. Choisissons un système rationnel d'inégalités $|f_i| \leqslant \lambda_i |h|$ décrivant W. Les f_i et h étant sans zéro commun sur Y_x, la fonction h ne s'annule pas sur W, si bien qu'on peut qu'on peut rajouter une inégalité $|h| \geqslant r$ au système ci-dessus.

Mais alors si les f_i' et h' sont des fonctions analytiques sur Y_x telles que $|f_i' - f_i| < \lambda_i r$ et $|h'| < r$ en tout point de Y_x, le système d'inégalités $\{|f_i'| \leqslant \lambda_i |h'|\}_i, |h'| \geqslant r$ définit encore le domaine W. Quitte à restreindre X, on peut donc supposer que h et les f_i sont toutes des restrictions de fonctions analytiques sur Y ; le domaine W s'écrit alors $V \cap Y_x$ pour un certain domaine affinoïde (rationnel) V de Y. En remplaçant Y par V, on se ramène ainsi au cas où $\Sigma = \Sigma_{g|_{Y_x}}$.

Il résulte du théorème 10.3.7 de **[52]** et du fait que X est réduit que le morphisme f est plat en tout point de Y_x. Comme $\Sigma = \Sigma_{g|_{Y_x}}$, le morphisme $g|_{Y_x} : Y_x \to \mathbf{G}_{\mathrm{m},\mathscr{H}(x)}^{n-m}$ est plat en tout point de Σ ; en vertu du critère de platitude par fibres ([**52**], théorème 8.3.8) le X-morphisme $g : Y \to X \times \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{n-m}$ est plat en tout point de Σ. Quitte à remplacer Y par un voisinage analytique compact de Σ (l'espace Y peut perdre son caractère affinoïde à cette occasion, mais nous n'en aurons plus besoin) on peut supposer que $g : Y \to X \times \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{n-m}$ est plat. L'image $g(Y)$ est alors un domaine analytique compact de $X \times \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{n-m}$ (c'est un théorème dû à Raynaud dans le cas strict, voir **[52]**, théorème 9.2.1 pour le cas général).

Pour tout $u \in X$, notons S_u le squelette standard de $\mathbf{G}_{\mathrm{m},\mathscr{H}(u)}^{n-m}$. D'après le lemme 16.3.2, il existe un voisinage affinoïde U de x dans X et une famille finie $(a_1, \dots, a_\ell)$ de fonctions inversibles sur U telles que pour tout $u \in U$ le polyèdre compact $\mathrm{trop}(g(Y) \cap S_u)$ ne dépende que des $|a_i(u)|$.

Puisque $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1$ est de degré de transcendance m sur $\widetilde{k}^1$ et $d_k(x) \leqslant m$, il s'ensuite que $d_k(x) = m = \dim_x(X)$ et que le groupe $|\mathscr{H}(x)|^\times$ est de torsion modulo $|k^\times|$, et le germe (X, x) est dès lors strict (exemple 11.8.7). Quitte à remplacer chacune des a_i par $a_i^{n_i}/\lambda_i$ pour un entier n_i et un élément λ_i de $k^\times$ convenables, on peut supposer que $|a_i(x)| = 1$ pour tout i.

Soit M un modèle de $\widetilde{(X, x)}^1$; c'est une $\widetilde{k}^1$-variété intègre de corps des fonctions $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1$. Soit M' un ouvert de Zariski non vide de M sur lequel les $\widetilde{a_i(x)}$ sont définies et inversibles. Soit X' un domaine analytique de X contenant x tel que $\widetilde{(X', x)}^1 = \mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1/\widetilde{k}^1}\{M'\}$. Soit ξ un point fermé de M' et soit $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ une suite régulière de paramètres de $\mathscr{O}_{M',\xi}$. On peut supposer, quitte à restreindre M', que les β_i sont définis sur M' et, quitte à restreindre U, qu'il existe pour tout i une fonction analytique inversible b_i sur U telle que $|b_i(x)| = 1$ et $\widetilde{b_i(x)} = 1$; on peut enfin remplacer X' par $X' \cap U$, c'est-à-dire faire en sorte que $X' \subset U$.

Lemme 16.4.2. — *Il existe une $\widetilde{k}^1$-valuation sur $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1$ centrée en ξ et tel que $v(\beta_i)$ soit pour tout i infiniment petit relativement à $\langle v(\beta_j)\rangle_{j<i}$.*

Démonstration. — On procède par récurrence sur m en supposant donc l'énoncé vrai en dimension $< m$. Il n'y rien à faire si $m = 0$. Supposons $m > 0$. On choisit une composante irréductible N du lieu des zéros de β_1 qui contient ξ, puis une composante irréductible N' de l'image réciproque de N sur la normalisée de M'. La composante N' définit une valuation w sur $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1$ centrée en le point générique de N' ; l'hypothèse de récurrence appliquée à la variété N qui est de dimension $m-1$ et a un antécédent ξ' de ξ sur N' fournit une valuation w' sur le corps des fonctions de N', centrée en ξ', et la composée v de w et w' convient alors. □

La remarque 12.2.9 décrit le germe de cône $b_{\mathrm{trop}}(X', x)$ en termes d'un sous-foncteur D de $\mathsf{D}_{\{1\}}^m$ qui par construction contient $(v(\beta_1), \dots, v(\beta_m))$. Comme les $v(\beta_i)$ sont $\mathbf{Z}$-linéairement indépendants, D est de dimension m, si bien que la dimension tropicale de $g|_{X'}$ en x est égale à m, si bien que $x \in \Sigma_{g|_{X'}}(m)$. Il existe en conséquence une g-cellule $C \subset \Sigma_g$ de dimension m contenant x et contenue dans X'. Comme les $\widetilde{a_i(x)}$ sont inversibles sur M', chacune des $|a_i|$ est identiquement égale à 1 sur X' et en particulier sur C.

Pour tout u appartenant à C on a $|a_i(u)| = 1 = |a_i(x)|$ quel que soit i, si bien que $\mathrm{trop}(g(Y) \cap S_u) = \mathrm{trop}(g(Y) \cap S_x) = g_{\mathrm{trop}}(\Sigma)$, où la seconde égalité résulte du fait que $\Sigma = \Sigma_{g|_{Y_x}}$; notons que $g_{\mathrm{trop}}(\Sigma)$ est une partie paralinéaire compacte de $\mathbf{R}^{n-m}$ purement de dimension d.

Il résulte du lemme 14.2.10 que $\Sigma_{g,b}$ est la réunion des $\Sigma_{g|_{Y_u}}$ pour u parcourant Σ_b. Par conséquent la réunion Σ' des $\Sigma_{g|_{Y_u}}$ pour u parcourant C est la partie linéaire compacte de Σ_{g,f^*b} égale à $f^{-1}(C)$. Pour tout $u \in C$ on a donc a $g_{\mathrm{trop}}(\Sigma_{g|_{Y_u}}) = g_{\mathrm{trop}}(\Sigma)$, si bien que $(gf^*, b)_{\mathrm{trop}}(\Sigma') = g_{\mathrm{trop}}(\Sigma) \times b_{\mathrm{trop}}(C)$; c'est une partie paralinéaire purement de dimension $d+m$ de $\mathbf{R}^n$. La surjection paralinéaire $(g, f^*b)_{\mathrm{trop}}$ de Σ' sur $g_{\mathrm{trop}}(\Sigma) \times b_{\mathrm{trop}}(C)$ admet G-localement des sections (proposition 2.1.12). Choisissons un recouvrement fini (Q_i) de $g_{\mathrm{trop}}(\Sigma) \times b_{\mathrm{trop}}(C)$ par des parties paralinéaires compactes, chacune étant munie d'une section σ_i de $(g, f^*b)_{\mathrm{trop}}$. Quitte à remplacer chacune des Q_i par $Q_i^{(d+m)}$, on peut supposer chacune des Q_i purement de dimension $d+m$. Mais alors la réunion T des $\sigma_i(Q_i)$ est une partie paralinéaire de Σ' purement de dimension $d+m$. Il reste pour conclure à s'assurer que T contient Σ. Soit donc $y \in \Sigma$ et soit z son image par $(g, f^*b)_{\mathrm{trop}}$; on a $z = (g_{\mathrm{trop}}(y), b_{\mathrm{trop}}(x))$. Soit i tel que z appartienne à Q_i. On a alors $(f^*b)_{\mathrm{trop}}(\sigma_i(z)) = b_{\mathrm{trop}}(x)$, ce qui entraîne que $\sigma_i(z) \in Y_x$ puisque b_{trop} est injective sur C. Et l'on a $g_{\mathrm{trop}}(\sigma_i(z)) = g_{\mathrm{trop}}(y)$, ce qui entraîne que $\sigma_i(z) = y$ car g_{trop} est injective sur $\Sigma_{g|_{Y_x}} = \Sigma$. En conséquence $y \in \mathrm{T}$, ce qui achève la démonstration. □

Proposition 16.4.3. — *Soit n un entier et soit $r = (r_1, \dots, r_n)$ un polyrayon constitué d'éléments de $|k^\times|^{\mathbf{Q}}$. Le polydisque fermé de polyrayon r est très riche.*

Démonstration. — Soit D ce polydisque. Il est riche (théorème 12.10.6). On raisonne par récurrence forte sur n. Soit Σ une partie paralinéaire compacte de D. Il s'agit de démontrer que Σ est contenue dans une partie paralinéaire compacte de D purement de dimension n. Soit x un point de X. Il existe un voisinage affinoïde V de x dans X et un moment $f\colon V \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ tel que $\Sigma \cap V$ soit contenu dans Σ_f (proposition 12.9.10). Par compacité de Σ, il suffit d'exhiber une partie paralinéaire T de X purement de dimension n contenant un voisinage de x dans Σ_f. Notons $p_1, \dots, p_n$ les n projections de D sur les disques de rayons $r_1, \dots, r_n$. Le bord ∂D est alors la réunion des $p_i^{-1}(\eta_{r_i})$, et la trace de $p_i^{-1}(\eta_{r_i})$ chacun d'eux sur Σ_f est pour tout i une partie paralinéaire de ce dernier de dimension $\leqslant n-1$, et c'est aussi une partie squelettique de $p_i^{-1}(\eta_{r_i})$ (lemme 12.9.13) ; de plus, $\partial V \cap \Sigma_f$ est lui aussi paralinéaire de dimension $\leqslant n-1$ (corollaire 12.9.14). Fixons une décomposition cellulaire $\mathscr{C}$ de Σ_f adaptée à son intersection avec ∂V et avec chacune des $p_i^{-1}(\eta_{r_i})$. Comme V est un voisinage de x, il suffit de montrer que chacune des cellules C de $\mathscr{C}$ contenant x est contenue dans une partie squelettique compacte de X purement de dimension n.

Soit donc C une telle cellule.

Supposons tout d'abord que C n'est contenue dans aucun des $p_i^{-1}(\eta_{r_i})$. La cellule ouverte $\mathring{C}$ est alors contenue dans $\mathrm{Int}(X)$ et comme elle rencontre $\mathrm{Int}(V/X)$ puisque ce dernier contient x, elle rencontre $\mathrm{Int}(V)$. Comme Σ_f est purement de dimension n en tout point de $\mathrm{Int}(V)$, la cellule C est contenue dans une n-cellule de $\mathscr{C}$.

Supposons maintenant qu'il existe i tel que C soit contenue dans $p_i^{-1}(\eta_{r_i})$. Cette fibre étant un polydisque de polyrayon $(r_j)_{j \neq i}$, l'hypothèse de récurrence assure que C est contenue dans une partie squelettique compacte C' de $p_i^{-1}(\eta_{r_i})$ purement de dimension $n-1$. Puisque $r_i \in |k^\times|^{\mathbf{Q}}$, la proposition 16.4.1 garantit que C' est contenue dans

une partie squelettique compacte de D purement de dimension n, ce qui conclut la démonstration. □

Théorème 16.4.4. — *Soit X un espace k-analytique purement de dimension n.*

a) *Soit x un point de X tel que le germe (X,x) soit strict. Soit Σ une partie squelettique de X contenant x. Il existe une partie squelettique de X, purement de dimension n, qui contient un voisinage de x dans Σ.*

b) *Si l'espace X est strict, il est très riche.*

Démonstration. — Il suffit de démontrer la première assertion. On sait déjà que X est riche (théorème 12.10.6). Il existe un voisinage de x dans X qui est réunion finie de domaines affinoïdes dont le germe en x est strict. Comme l'assertion est G-locale sur le germe (X,x), on peut supposer que X est affinoïde. Notons A l'algèbre des fonctions analytiques sur X. Utilisons le symbole $\widetilde{\cdot}$ plutôt que $\widetilde{\cdot}^{\wedge}$ pour les réductions strictes, qui sont les seules dont nous aurons besoin puisque le germe considéré est strict.

Le germe $\widetilde{(X,x)}$ est égal à $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}\{R\}$ où R est la $\widetilde{k}$-algèbre de type fini image de $\widetilde{A}$ dans $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$. D'après le lemme de normalisation de Noether appliqué à la $\widetilde{k}$-algèbre R, il existe une famille finie de fonctions $f_1,\dots,f_d$ sur X de normes spectrales égales à 1 telles que $|f_i(x)|=1$ pour tout i, telles que les $\widetilde{f_i(x)}$ soient algébriquement indépendantes sur $\widetilde{k}$, et telles que l'algèbre R soit entière sur $\widetilde{k}[\widetilde{f_i(x)}]_i$.

Comme un anneau de valuation est intégralement clos, cette dernière condition entraîne que $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}\{R\}=\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}\{\widetilde{f_i(x)}\}$. La famille $(f_1,\dots,f_d)$ induit alors un morphisme $f\colon X\to D$, où D est le d-polydisque unité, car les normes spectrales des f_i sont égales à 1. Comme $|f_i(x)|=1$ et comme les $\widetilde{f_i(x)}$ sont algébriquement indépendants, on a $f(x)=\eta_1$. Comme $\widetilde{(X,x)}=\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}\{\widetilde{f_i(x)}\}$, la réduction du germe $\widetilde{(X,x)}$ est égale à l'image réciproque de la réduction du germe de D en η_1 ; cela démontre que le morphisme f est intérieur en x. D'après le théorème 10.3.7 de **[52]**, f est plat au-dessus de η_1, et en particulier en x. Soit U l'ensemble des points de $\mathrm{Int}(X)$ en lesquels f est plat ; c'est un voisinage ouvert de x.

D'après la proposition 16.4.3, le disque unité D est très riche. Le théorème 16.2.4 assure que U est très riche. Il existe donc une partie squelettique compacte T de U, purement de dimension n, et contenant un voisinage de x dans Σ. □

§ 16.5. FORMULE DE PROJECTION

16.5.1. — Nous reprenons le contexte du paragraphe précédent : $p\colon Y\to X$ est un morphisme d'espaces analytiques équidimensionnels et topologiquement séparés ; on pose $\dim(X)=m$, $\dim(Y)=n$ et $d=n-m$. On considère X comme espace tropical de niveau m et Y comme espace tropical de niveau n.

Remarque 16.5.2. — Notons U le lieu de platitude de p ; c'est un ouvert de Zariski de Y (**[52]**, théorème 10.3.2). Notons aussi V l'ensemble des points $y\in Y$ en lesquels la

dimension relative de p prend sa valeur minimale δ ; c'est également un ouvert de Zariski de Y ([**48**], th. 4.9).

a) Soit y un point de V tel que $d_k(y) = n$; il en existe car V n'est pas vide. Alors, $n = d_k(y) = d_k(p(y)) + d_{\mathscr{H}(p(y))}(y) \leqslant m + \delta$. Par suite, $d \leqslant \delta$.

b) Soit y un point de U. D'après le lemme 4.5.11 de [**52**], la dimension relative de p en y est alors égale à d. Cela prouve que $\delta = d$ si U n'est pas vide ; on a alors $U \subset V$.

c) Soit $x \in X$ tel que $d_k(x) = m$ et soit $y \in Y_x$. On a $d_{\mathscr{H}(p(y))}(y) = d_k(y) - d_k(x) \leqslant n - m = d$; par suite $\dim(Y_x) \leqslant d$. Puisque d est la valeur minimale de la dimension relative, cela prouve que Y_x est purement de dimension d ; on a ainsi $Y_x \subset V$. Cela entraîne également $\delta = d$.

d) On suppose que X est réduit, que $\delta = d$ et que V est dense dans Y. Démontrons alors que U est dense.

Il suffit de démontrer que U contient tout tout point y de V tel que $d_k(y) = n$. Posons $x = p(y)$. Comme les fibres de $p|_V$ sont de dimension d, on a $d_k(x) = n - d = m$ ([**52**], 1.4.14 (4)). L'espace X étant réduit, le morphisme p est alors plat en y par le théorème 10.3.7 de [**52**], c'est-à-dire $y \in U$.

16.5.3. — Soit ω une G-forme de type (d, d) sur Y dont le support est relativement propre sur X. Au paragraphe précédent, nous avons défini l'intégrale $u_\omega(x)$ de ω dans les fibres de p en un point squelettique x de X, ou bien un point x quelconque lorsque p est plat ; dans ces deux cas, la fibre Y_x est purement de dimension d.

Dans ce paragraphe, nous allons faire l'hypothèse que le lieu de platitude de p est dense dans Y. Pour tout $x \in X$ tel que Y_x est de dimension d, on pose $u_\omega(x) = \int_{Y_x} \omega$; sinon, on pose $u_\omega(x) = 0$.

Théorème 16.5.4. — *On suppose que le lieu de platitude de p est dense dans Y. Soit ω une G-forme de type (d, d) sur Y à coefficients tropicalement boréliens localement bornés et dont le support est p-compact. La fonction u_ω définie comme ci-dessus est localement intégrable sur X et l'on a, pour toute (m, m)-forme lisse α à support compact sur X, l'égalité*

$$\int_Y \omega \wedge p^*\alpha = \int_X u_\omega \, \alpha_{\mathrm{Rad}}.$$

Corollaire 16.5.5. — *On a l'égalité de courants $p_*[\omega] = [u_\omega]$.*

Remarque 16.5.6. — Il résulte de la remarque 16.5.2 que les hypothèses du théorème sont satisfaites lorsque X est réduit, $d = \delta$ et V est dense dans Y.

L'énoncé ne vaut pas en général sans hypothèse de platitude sur p. Lorsque X n'est pas réduit, la formule est fausse si p est l'immersion (non plate) de X_{red} dans X, son défaut étant mesuré par les multiplicités génériques de X.

Démonstration. — Considérons une (m, m)-forme lisse α à support compact sur X ; il s'agit de montrer que u_ω est intégrable pour la mesure α_{Rad} et de prouver l'égalité

$$\int_Y \omega \wedge p^*\alpha = \int_X u_\omega \, \alpha_{\mathrm{Rad}}.$$

Pour cela, on peut remplacer X par un voisinage analytique compact du support de α puis, le support de ω étant alors compact, Y par un voisinage analytique compact de ce support. Nous supposons donc que X et Y sont compacts.

Le lieu de Y constitué des points en lesquels p est dimension relative $> d$ est un fermé de Zariski de Y, donc son image dans X est compacte. D'après la remarque 16.5.2, c), cette image est disjointe du support de α. Quitte à remplacer de nouveau X par un voisinage analytique compact du support de α, on suppose que les fibres de p sont toutes purement de dimension d.

L'espace X possède un G-recouvrement fini par des domaines analytiques compacts tropicalisant α ; par additivité des intégrales en jeu, on peut donc supposer que la forme α sur X est tropicale. De même, l'espace Y possède un G-recouvrement fini par des domaines analytiques compacts tropicalisant ω ; par additivité, on peut donc de même supposer que la forme ω est tropicale sur Y.

Soit $f\colon X \to T$ un moment tropicalisant α et $h = (f \circ p, g)\colon Y \to T \times T'$ un moment tropicalisant ω qui prolonge $f \circ p$. En raisonnant G-localement sur X et sur Y, on peut supposer qu'il existe une cellule C de T_{trop} et une cellule D de $(T \times T')_{\mathrm{trop}}$ telles que $f_{\mathrm{trop}}(X) = C$ et $h_{\mathrm{trop}}(Y) = D$. L'image de D dans C par la projection de $(T \times T')_{\mathrm{trop}}$ sur T_{trop} est une cellule C' de T_{trop} contenue dans C. On a $C' = (f \circ p)_{\mathrm{trop}}(Y)$. Distinguons deux cas :

Supposons que $\dim(C') < m$. Dans ce cas, le morphisme p se factorise par le domaine analytique $f_{\mathrm{trop}}^{-1}(C')$ sur lequel la forme α est nulle, ainsi que la mesure α_{Rad}. Comme u est nulle en dehors de $p(Y)$, l'égalité voulue est immédiate.

Supposons que $\dim(C') = m$. En commençant par extraire m fonctions convenables du moment f, on suppose d'abord que $T = \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$; en extrayant $\dim(D) - m$ fonctions du moment g et en complétant au besoin par la fonction constante 1 (répétée $n - \dim(D)$ fois), on suppose que $T' = \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$.

D'après l'assertion *a*) du lemme 14.2.10, on a $p(\Sigma_h) \subset \Sigma_f$ et le morphisme p induit par restriction une application paralinéaire de Σ_h dans Σ_f.

Soit $\mathscr{C}$ une décomposition cellulaire de Σ_f en f-cellules commodes et une décomposition cellulaire de Σ_h en h-cellules commodes (lemme 14.1.5). Quitte à raffiner ces décompositions cellulaires, on suppose que l'image d'une cellule de $\mathscr{D}$ est une cellule de $\mathscr{D}$.

On note $\mathscr{C}_m$ l'ensemble des cellules de dimension m de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}_n$ l'ensemble des cellules de dimension n de $\mathscr{D}$.

Dans la suite du calcul, nous identifierons toute cellule de $\mathscr{C}$ à son image par f_{trop} dans $(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m)_{\mathrm{trop}}$ et toute cellule de $\mathscr{D}$ à son image par h_{trop} dans $(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{m+d})_{\mathrm{trop}}$. De même, les fibres $D \cap p^{-1}(x)$ sont identifiées à leur image par g_{trop} dans $(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d)_{\mathrm{trop}}$. Lorsqu'elles sont de dimension m (resp. n, resp. d), on les munit du calibrage déduit de cette identification ; autrement dit, leur calibrage canonique est ce calibrage multiplié par un degré convenable.

Pour toute n-cellule $D \in \mathscr{D}_n$, il existe un unique entier d_D tel que le morphisme h soit fini et plat de degré d_D en tout point de $\mathring{D}$. On a ainsi

$$\int_Y \omega \wedge p^*\alpha = \sum_{D \in \mathscr{D}_n} d_D \int_D \omega \wedge p^*\alpha.$$

Fixons une telle cellule D et posons $C = p(D)$. Comme les fibres de p sont de dimension $\leqslant d$, on a $\dim(C) \geqslant m$, donc $\dim(C) = m$. On applique alors le théorème de Fubini : pour presque tout $x \in C$, l'intégrale $\int_{D \cap p^{-1}(x)} \omega$ est convergente, la fonction

$u_D\colon x \mapsto \int_{D\cap p^{-1}(x)} \omega$ est intégrable sur C et l'on a

$$\int_D \omega \wedge p^*\alpha = \int_C u_D\alpha.$$

(Lorsque ω est de classe $\mathscr{C}^p$, il découle de la proposition 1.8.13 que la fonction u_D est même G-localement de classe $\mathscr{C}^p$ sur C.) Il existe un unique entier d_C tel que le morphisme f soit fini et plat de degré d_C en tout point de $\mathring{C}$. Ainsi,

$$\int_Y \omega \wedge p^*\alpha = \sum_{C\in\mathscr{C}_m} d_C \int_C \left(\sum_{\substack{D\in\mathscr{D}_n \\ p(D)=C}} (d_D/d_C)u_D \right) \alpha.$$

Fixons maintenant une cellule $C \in \mathscr{C}_m$. Soit $x \in \mathring{C}$ tel que u_D soit définie en x pour tout $D \in \mathscr{D}_n$ tel que $p(D) = C$; cela n'exclut qu'un ensemble de mesure nulle de C. La famille $(D \cap p^{-1}(x))$, pour $D \in \mathscr{D}$ tel que $p(D) = C$, est une décomposition cellulaire de $\Sigma_h \cap p^{-1}(x)$, qui est égal à Σ_{h_x} d'après le lemme 14.2.10. Soit D une telle cellule. Lorsque $\dim(D) < n$, on a $\dim(D \cap p^{-1}(x)) < d$ et cette cellule n'intervient pas dans le calcul de $\int_{Y_x} \omega$. Supposons donc que $\dim(D) = n$. Nécessairement, tout point de $\mathring{D}$ est intérieur à Y, par définition d'une cellule commode. Puisque le lieu de platitude de p est ouvert de Zariski qui est dense, il contient tous les points $y \in Y$ tels que $d_k(y) = n$, et en particulier Σ_h. Le lemme 14.2.10 entraîne alors que $g|_{Y_x}$ est fini et plat en tout point de $\mathring{D} \cap p^{-1}(x)$ et que son degré est égal à d_D/d_C. Cela prouve que l'intégrale $u_\omega(x) = \int_{Y_x} \omega$ converge et que

$$u_\omega(x) = \int_{Y_x} \omega = \sum_{\substack{D\in\mathscr{D}_n \\ p(D)=C}} (d_D/d_C) \int_{D\cap p^{-1}(x)} \omega = \sum_{\substack{D\in\mathscr{D}_n \\ p(D)=C}} (d_D/d_C)u_D(x).$$

De plus, la fonction u_ω définie presque partout sur C est intégrable et l'on a

$$d_C \int_C u_\omega\alpha = d_C \sum_{\substack{D\in\mathscr{D}_n \\ p(D)=C}} (d_D/d_C) \int_D \omega \wedge p^*\alpha = \sum_{\substack{D\in\mathscr{D}_n \\ p(D)=C}} d_D \int_D \omega \wedge p^*\alpha.$$

Cela démontre que la fonction u_ω est localement intégrable sur X et l'on a

$$\begin{aligned}\int_X u_\omega\alpha_{\mathrm{Rad}} &= \sum_{C\in\mathscr{C}_m} d_C \int_C u\alpha = \sum_{\substack{D\in\mathscr{D}_n \\ \dim(p(D))=m}} d_D \int_D \omega \wedge p^*\alpha \\ &= \sum_{D\in\mathscr{D}_n} d_D \int_D \omega \wedge p^*\alpha = \int_Y \omega \wedge p^*\alpha.\end{aligned}$$

Cela termine la démonstration. □

Théorème 16.5.7. — *Soit $p\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces analytiques topologiquement séparés, équidimensionnels et sans bord ; posons $m = \dim(X)$, $n = \dim(Y)$ et $d = n - m$. On suppose que le lieu de platitude de p est dense dans Y. Soit $u_1, \ldots, u_r$ des*

fonctions tropicalement d-convexes sur X, soit ω une forme G-lisse de type (d,d) sur Y dont le support est p-compact et soit $u_\omega\colon X \to \mathbf{R}$ la fonction définie par l'intégrale

$$u_\omega(x) = \int_{Y_x} \omega$$

de la forme de type (d,d) induite par ω sur l'espace $\mathscr{H}(x)$-analytique Y_x si cet espace est de dimension d, et par $u_\omega(x) = 0$ sinon. Soit α une $(m-r, m-r)$-forme lisse à support compact sur X.

Les fonctions $p^*u_1, \dots, p^*u_r$ sur Y sont tropicalement d-convexes et l'on a

$$\langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''(p^*u_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(p^*u_r), \omega \wedge p^*\alpha\rangle = \langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_r, u_\omega \cdot \alpha\rangle.$$

Pour justifier l'existence du membre de gauche de cette dernière formule, notons que le support de $\omega \wedge p^*\alpha$ est compact dans Y. D'autre part, l'application $\varphi \mapsto \langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_r, \varphi\alpha\rangle$ est une mesure de Radon sur X dont le support est contenu dans une partie squelettique compacte Σ (remarque 8.8.6) et le membre de droite de la formule est obtenu en intégrant la fonction $u_\omega|_\Sigma$ contre cette mesure ; observons que $u_\omega|_\Sigma$ est G-lisse car u_ω est G-lisse (théorème 16.3.3).

Démonstration. — Le théorème est de nature locale sur X. Par multilinéarité, on peut alors supposer qu'il existe un moment $f\colon X \to T$ et des fonctions convexes $v_1, \dots, v_r$ sur un voisinage polyédral convexe compact P de $f_{\mathrm{trop}}(X)$ dans T_{trop} telles que $u_j = f^*v_j$ pour tout j. Quitte à étendre le moment f, on peut enfin supposer que la forme α s'écrit $\rho f^*\eta$, où η est une forme lisse sur T_{trop} et ρ une fonction lisse à support compact sur X.

Il existe des familles (v_j^ε) de fonctions lisses convexes sur P qui convergent uniformément vers les v_j. Les $u_j^\varepsilon = f^*v_j^\varepsilon$ sont psh lisses et convergent uniformément vers u_j ; alors le courant

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_r)$$

est limite des courants associés aux formes lisses $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1^\varepsilon) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_r^\varepsilon)$, et la mesure

$$\varphi \mapsto \langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_r), \varphi\alpha\rangle$$

est limite des mesures

$$\varphi \mapsto \langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1^\varepsilon) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_r^\varepsilon), \varphi\alpha\rangle.$$

Ces mesures sont toutes supportées par Σ_f. La fonction $u_\omega|_{\Sigma_f}$ est $\mathscr{C}^\infty$ par morceaux (théorème 16.3.3), si bien que $\langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_r), u_\omega\alpha\rangle$ est la limite des intégrales

$$\langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1^\varepsilon) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_r^\varepsilon), u_\omega\alpha\rangle.$$

D'après le théorème 16.5.4, on a

$$\langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1^\varepsilon) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_r^\varepsilon), u_\omega\alpha\rangle = \langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''(p^*u_1^\varepsilon) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(p^*u_r^\varepsilon), \omega \wedge p^*\alpha\rangle$$

pour tout ε, qui convergent vers

$$\langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''(p^*u_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(p^*u_r), \omega \wedge p^*\alpha\rangle,$$

d'où le théorème. □

Corollaire 16.5.8. — *On a l'égalité de courants*

$$p_*(\mathrm{d}'\mathrm{d}''(p^*u_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(p^*u_r) \wedge \omega) = \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_r \cdot u_\omega.$$

§ 16.6. COURANTS ET CYCLES

Soit X un n-espace k-analytique, considéré comme espace tropical de niveau n.

16.6.1. — Soit Y un sous-espace analytique fermé de X, purement de dimension p. On le considère comme un espace tropical de niveau p et on note $j\colon Y \to X$ l'immersion fermée canonique. Le courant $j_*\delta_Y$ sur X est de bidimension (p,p) ; on le note plus simplement δ_Y.

16.6.2. — Soit p un entier et soit $z = \sum z(Y)Y$ un cycle purement p-dimensionnel sur X. Soit $\omega \in \mathscr{A}_{\mathrm{c}}^{p,p}(X)$; posons

$$\langle \delta_z, \omega \rangle = \int_z \omega = \sum_Y z(Y) \int_Y \omega.$$

C'est une somme finie : en effet, comme ω est à support compact et la famille $(z(Y))$ est localement finie, l'ensemble des fermés de Zariski intègres Y de X tels que $z(Y) \neq 0$ et $\omega|_Y \neq 0$ est fini. L'application $\omega \mapsto \int_z \omega$ est un courant : si l'on se restreint aux formes à support dans un domaine analytique compact donné V, il s'agit de la somme finie des courants $z(Y)\delta_Y$, où Y parcourt l'ensemble fini des fermés de Zariski intègres Y de X qui rencontrent V et tels que $z(Y) \neq 0$.

Lorsqu'on se donne un sous-espace analytique fermé de X, purement de dimension p, on peut considérer d'une part l'intégration sur ce sous-espace et d'autre part l'intégration sur le cycle associé. La proposition suivante affirme que ces deux opérations coïncident.

Proposition 16.6.3. — *Soit Y un sous-espace analytique fermé de X, purement de dimension p. On a $\delta_Y = \delta_{[Y]}$.*

Démonstration. — Notons j l'immersion de Y dans X. Soit ω une (p,p)-forme à support compact sur X. On a donc $\langle \delta_Y, \omega \rangle = \int_Y j^*\omega$, ce qui permet de supposer que $Y = X$.

Soit (X_i) la famille des composantes irréductibles de X et, pour tout i, soit m_i la multiplicité de X le long de X_i. Soit X' l'ouvert de Zariski de X constitué des points qui sont situés sur une unique composante irréductible de X ; il contient le support de ω. Pour tout i, posons $X'_i = X' \cap X_i$; c'est un ouvert de X et l'on a

$$\int_{X_{i,\mathrm{red}}} \omega = \int_{X'_{i,\mathrm{red}}} \omega = \frac{1}{m_i} \int_{X'_i} \omega,$$

en vertu de la proposition 15.4.3 appliquée à l'immersion de $X'_{i,\mathrm{red}}$ dans X'_i, dont le degré calibré est $1/m_i$ (proposition 13.3.7). Alors, on a

$$\langle \delta_X, \omega \rangle = \int_X \omega = \int_{X'} \omega = \sum_i \int_{X'_i} \omega = \sum_i m_i \int_{X'_{i,\mathrm{red}}} \omega = \sum_i m_i \int_{X_{i,\mathrm{red}}} \omega = \langle \delta_{[X]}, \omega \rangle,$$

comme il fallait démontrer. □

16.6.4. — Si $z = \sum z(Y)Y$, on définit aussi $\delta_z^\partial = \sum z(Y)\delta_Y^\partial$. Si Y est un sous-espace analytique fermé de X, on démontre comme pour la proposition 16.6.3 que $\delta_Y^\partial = \delta_{[Y]}^\partial$.

§ 16.7. LA FORMULE DE POINCARÉ–LELONG

16.7.1. — Soit X un n-espace k-analytique sans bord ; on le considère comme un espace tropical de niveau n.

Soit f une fonction méromorphe régulière f sur X. Le courant d'intégration $\delta_{\mathrm{div}(f)}$ sur le cycle $\mathrm{div}(f)$ est un courant symétrique de bidimension $(n-1, n-1)$ sur X, donc de bidegré $(1,1)$; il est d'-fermé et d''-fermé (proposition 7.7.9).

La formule de Poincaré–Lelong (théorème 16.7.3) va entraîner qu'il est $\mathrm{d}'\mathrm{d}''$-exact.

16.7.2. — Soit f une fonction méromorphe régulière sur X. Soit U le sous-espace de X formé des points au voisinage desquels f est définie et non nulle ; c'est un ouvert de Zariski de X sur lequel la fonction $\log|f|$ est lisse, et il est Zariski dense. Pour tout point x du fermé complémentaire, on a $d_k(x) < \dim(X)$. D'après le paragraphe 7.1.12, le courant $[\log|f|]$ sur U se prolonge un unique courant de bidegré $(0,0)$ sur X que nous noterons encore $[\log|f|]$.

***Théorème 16.7.3* (Formule de Poincaré–Lelong).** — *Soit X un n-espace k-analytique sans bord et soit f une fonction méromorphe régulière sur X. On a l'égalité*

$$\delta_{\mathrm{div}(f)} = \mathrm{d}'\mathrm{d}''[\log|f|].$$

L'exemple 16.1.4 montre que l'hypothèse de régularité sur f est nécessaire, même si le complémentaire de son lieu d'inversibilité est de dimension $< n$.

Lemme 16.7.4. — *L'égalité ci-dessus est vraie sur l'ouvert d'inversibilité de f.*

Démonstration. — On peut supposer f inversible. On a alors $\mathrm{div}\, f = 0$ et le terme de gauche de l'égalité est donc nul. On a par ailleurs $\mathrm{d}'\,\mathrm{d}''\,x = 0$ dans $\mathscr{A}^{1,1}(\mathbf{R})$; il vient $\mathrm{d}'\,\mathrm{d}''\log|f| = 0$. □

Lemme 16.7.5. — *Il suffit de démontrer le théorème 16.7.3 si l'on suppose de plus que X satisfait à la propriété* (S_1) *et que f est une fonction holomorphe régulière qui définit un morphisme purement de dimension relative $n-1$ de X vers $\mathbf{A}^1$.*

Démonstration. — Le théorème est local sur X ; il suffit donc de prouver que tout point x de X a un voisinage sur lequel cette égalité de courant est vérifiée. On peut ainsi commencer par supposer que f est quotient de deux fonctions holomorphes régulières. Par additivité des deux termes de l'égalité à établir, on peut donc supposer que f est holomorphe. Pour alléger les notations, nous noterons encore f le morphisme $X \to \mathbf{A}^1$ qu'elle induit.

Si $f(x) \neq 0$, il existe un voisinage U de x sur lequel f est inversible, et l'égalité à établir vaut sur U en vertu du lemme 16.7.4.

Supposons que $f(x) = 0$. Comme la fonction f est régulière, le morphisme f qu'elle induit est de dimension relative $n-1$ en x. Par suite, ce morphisme est de dimension $\leqslant n-1$ au voisinage de x ([**48**], th. 4.9). En vertu du *Hauptidealsatz* (lemme 11.5.2), le morphisme f est donc purement de dimension relative $n-1$ au voisinage de x.

Démontrons que l'espace X a la propriété (S_1) en x. Soit V un domaine affinoïde de X contenant x. Le germe de $f|_V$ en x est un élément de l'idéal maximal de $\mathscr{O}_{V,x}$ et est un élément régulier de cet anneau. En conséquence, l'anneau local $\mathscr{O}_{V,x}$ a la propriété (S_1), si bien que X a la propriété (S_1) en x. Il existe dès lors un voisinage ouvert U de x

dans X tel que U satisfasse la propriété (S_1) et tel que $f|_U$ soit purement de dimension relative $n-1$. □

Le lemme précédent permet de supposer à partir de maintenant que X a la propriété (S_1) et que f est une fonction holomorphe régulière induisant un morphisme purement de dimension relative $n-1$ de X dans $\mathbf{A}^1$.

Les deux courants $\delta_{\operatorname{div} f}$ et $\mathrm{d}'\mathrm{d}''[\log|f|]$ sont symétriques ; pour s'assurer de leur égalité, il suffit de les appliquer à une forme test symétrique.

Soit donc ω une forme lisse de type $(n-1,n-1)$ sur X, symétrique et à support compact. Comme le support de ω est compact, il existe une famille finie $(V_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ de domaines analytiques compacts de X tropicalisant ω et telle tout point du support de ω soit contenu dans l'intérieur de l'un des V_i. Notons V la réunion des V_i. C'est un domaine analytique compact de X. Par construction, le support de ω est contenu dans l'intérieur topologique $\overset{\circ}{V}$ de V dans X, qui coïncide avec $\operatorname{Int}(V/X)$.

Pour toute partie non vide E de $\{1,\dots,m\}$ et tout $s>0$, on pose $V_E=\bigcap_{i\in E}V_i$, $V_0=V\cap\{f=0\}$, $V_{\geqslant s}=V\cap\{|f|\geqslant s\}$, $V_{E,0}=V_E\cap V_0$ et $V_{E,\geqslant s}=V_E\cap V_{\geqslant s}$. L'espace analytique V_E est intersection d'une famille non vide de domaines analytiques compacts de X qui tropicalisent ω ; il possède en particulier la propriété (S_1). De plus ω est tropicale sur V_E ; soit $g_E\colon V_E\to T$ un moment et soit α_E une $(n-1,n-1)$-forme sur $g_{E,\mathrm{trop}}(V_E)$ telle que $\omega|_{V_E}=g^*\alpha_E$; posons aussi $h_E=(g_E,f)\colon V_E\to T\times\mathbf{A}^1$. Choisissons un nombre réel $r>0$ pour lequel les conclusions du théorème 14.7.2 sont satisfaites par chacun des couples (V_E,g_E).

Soit (u_1,u_2) une partition de l'unité lisse de $\mathbf{R}$, subordonnée au recouvrement ouvert $(]-\infty,\log r[,]\log r-1,+\infty[)$. Soit $t\in\,]0,r[$ tel que le support de u_1 soit disjoint de $[\log t,\log r[$. On note v_1 (resp. v_2) la fonction lisse sur X égale à $u_1(\log|f|)$ (resp. $u_2(\log|f|)$) sur l'ouvert d'inversibilité de f, et à 1 (resp. 0) au voisinage de $\{f=0\}$. Posons $\omega_1=v_1\omega$ et $\omega_2=v_2\omega$. Il suffit de démontrer que

$$\langle \mathrm{d}'\,\mathrm{d}''\log|f|,\omega_1\rangle=\int_{\{f=0\}}\omega_1\ \text{ et }\ \langle \mathrm{d}'\,\mathrm{d}''\log|f|,\omega_2\rangle=\int_{\{f=0\}}\omega_2.$$

Par construction, le support de ω_2 est contenu dans l'ouvert $\{f\neq 0\}$ sur lequel $\mathrm{d}'\,\mathrm{d}''\log|f|$ s'annule ; les deux termes de la seconde égalité sont donc nuls, et il suffit désormais d'établir la première.

Comme $\mathrm{d}''\,\omega_1$ est une forme de type $(n-1,n)$, son support ne rencontre aucun fermé de Zariski de dimension $<n$ (proposition 3.3.6) ; en particulier, il ne rencontre pas $f^{-1}(0)$. Comme ce support est compact et la fonction $|f|$ continue, on a $\inf_{\operatorname{supp}(\mathrm{d}''\,\omega_1)}(|f|)>0$; soit $s\in\,]0,t[$ tel que $|f|>s$ en tout point du support de $\mathrm{d}''\,\omega_1$. On suppose aussi que $u_1\equiv 1$ dans un voisinage de $]-\infty,\log(s)]$. En particulier, le support de $\mathrm{d}''\,\omega$ est contenu dans l'intérieur $\operatorname{Int}(V_{\geqslant s}/X)=\operatorname{Int}(V_{\geqslant s})$ du domaine analytique fermé $V_{\geqslant s}$ de V.

Par définition du courant $\log|f|$ et compte-tenu du fait que $V_{\geqslant s}$ contient le support de $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\omega_1$ on a

$$\langle \mathrm{d}'\,\mathrm{d}''\log|f|,\omega_1\rangle=\int_{V_{\geqslant s}}\log|f|\ \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\omega_1.$$

Puisque ω_1 est symétrique, la formule de Green (proposition 5.11.1) assure que

$$\int_{V_{\geqslant s}}\log|f|\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\omega_1=\int_{V_{\geqslant s}}(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\log|f|)\wedge\omega_1+\int^{\partial}_{V_{\geqslant s}}\log|f|\,\mathrm{d}''\,\omega_1-\int^{\partial}_{V_{\geqslant s}}(\mathrm{d}''\log|f|)\wedge\omega_1.$$

Comme f est inversible sur $V_{\geqslant s}$, on a $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\log|f| = 0$ sur $V_{\geqslant s}$; de plus, le support de $\mathrm{d}''\omega_1$ ne rencontre pas $\partial(V_{\geqslant s})$; les deux premiers termes du membre de droite de l'égalité précédente sont donc nuls, d'où l'égalité

$$\int_X \log|f|\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\omega_1 = -\int_{V_{\geqslant s}}^{\partial} (\mathrm{d}''\log|f|)\wedge\omega_1.$$

Comme le support de $\omega_1|_{X_0}$ est contenu dans V_0 et comme $\omega_1 = \omega$ au voisinage de V_0, on a $\int_{V_0}\omega = \int_{X_0}\omega_1$. Pour terminer la preuve de la formule de Poincaré–Lelong, il suffit donc de démontrer que l'on a

$$\int_{V_{\geqslant s}}^{\partial} \mathrm{d}''(\log|f|)\wedge\omega_1 = -\int_{V_0}\omega.$$

La famille $(V_{i,0})$ est un G-recouvrement fini de V_0 ; on a donc l'égalité

$$\int_{V_0}\omega = \sum_{E\neq\varnothing}(-1)^{\mathrm{Card}(E)+1}\int_{V_{E,0}}\omega.$$

Par ailleurs, la famille $(V_{i,\geqslant s})$ est un G-recouvrement fini de $V_{\geqslant s}$; la proposition 5.9.5 entraîne alors l'égalité :

$$\int_{V_{\geqslant s}}^{\partial} \mathrm{d}''(\log|f|)\wedge\omega_1 = \sum_{E\neq\varnothing}(-1)^{\mathrm{Card}(E)+1}\int_{V_{E,\geqslant s}}^{\partial} \mathrm{d}''(\log|f|)\wedge\omega_1.$$

Comme il n'y a qu'un nombre fini de telles parties E, il suffit de démontrer que pour toute partie non vide E de $\{1,\dots,m\}$, on a

$$\int_{V_{E,\geqslant s}}^{\partial} \mathrm{d}''(\log|f|)\wedge\omega_1 = -\int_{V_{E,0}}\omega.$$

Fixons donc une telle E. Posons $V_{E,[s,t]} = V_E\cap\{s\leqslant|f|\leqslant t\}$; comme le support de $\omega_1|_{V_{E,\geqslant s}}$ est contenu dans l'intérieur de $V_{E,[s,t]}$ relativement à $V_{E,\geqslant s}$, on a

$$\int_{V_{E,\geqslant s}}^{\partial} \mathrm{d}''\log|f|\wedge\omega_1 = \int_{V_{E,[s,t]}}^{\partial} \mathrm{d}''\log|f|\wedge\omega_1.$$

Nous allons calculer cette dernière intégrale par voie tropicale. Posons $\sigma = \log(s)$ et $\tau = \log(t)$. La restriction de h à $V_{E,[s,t]}$ est un moment ; on a $\omega_1|_{V_{E,[s,t]}} = h_E^*(u_1\alpha_E)$ et $\mathrm{d}''\log|f|\wedge\omega_1|_{V_{E,[s,t]}} = h_E^*(\mathrm{d}''t\wedge u_1\alpha_E)$.

Notons (P,μ) le polyèdre calibré $g_{\mathrm{trop}}(V_{E,0})^{(n-1)}$ et e le vecteur $(0,1)$ de $T_{\mathrm{trop}}\times\mathbf{G}_{\mathrm{m,trop}}$; notons (Q,ν) le polyèdre calibré $h_{\mathrm{trop}}(V_{E,[s,t]})^{(n)}$. Par le choix de r fait au début de la preuve, on a $(Q,\nu) = (P\times[\sigma,\tau],\mu\times\lambda)$ où λ désigne le calibrage standard de $[\sigma,\tau]$. En conséquence $\int_{V_{E,[s,t]}}^{\partial}\mathrm{d}''\log|f|\wedge\omega_1 = \int_Q^{\partial}\langle\mathrm{d}''t\wedge u_1\alpha,\nu\rangle$.

Choisissons une décomposition cellulaire $\mathscr{C}$ de P adaptée à son calibrage. L'ensemble des partie de la forme $C\times\{\sigma\}$, $C\times\{\tau\}$ et $C\times[\sigma,\tau]$, où $C\in\mathscr{C}$, est une décomposition cellulaire de $P\times[\sigma\tau]$ adaptée à son calibrage. est la réunion de $P\times\{\sigma\}$, Si F est une $(n-1)$-cellule de P la discordance $\partial\nu_{F\times\{\sigma\}}$ s'identifie au produit de $(-\mu_F)$ par le vecteur-volume $|e|$; comme $\mathrm{d}''t\wedge\alpha = \alpha\wedge\mathrm{d}''t$ et $u_1(\sigma) = 1$, la contribution de $F\times\{\sigma\}$

à $\int_Q^\partial \langle \mathrm{d}'' t \wedge u_1\alpha, \mu\rangle$ est égale à

$$-\int_{F\times\{\sigma\}} \langle u_1\alpha \wedge \mathrm{d}'' t, \mu_F \cdot |e|\rangle = -\int_F \langle \alpha, \mu_F\rangle,$$

si bien que la contribution totale de $P \times \{\sigma\}$ à l'intégrale étudiée est égale à $-\int_P \langle \alpha, \mu\rangle$ soit encore à $-\int_{V_{E,0}} \omega$.

La contribution de $P \times \{\tau\}$ est quant à elle nulle car la fonction u_1 est nulle au voisinage de τ. Enfin, la contribution de $\partial(P) \times [\sigma, \tau]$ elle est également nulle : elle est en effet égale par construction à une somme d'intégrales de la forme $\int_{F\times[\sigma,\tau]} u_1\eta$ où F est une $(n-2)$-cellule orientée de $\mathscr{C}$ et η une $(n-1)$-forme différentielle sur $F \times [\sigma, \tau]$ qui provient en réalité d'une $(n-1)$-forme différentielle sur F (l'élément différentiel $\mathrm{d}'' t$ ayant été contracté) et est dès lors nulle.

Il vient

$$\int_{V_{\geqslant s}}^\partial \mathrm{d}''(\log|f|) \wedge \omega_1 = -\int_{V_{E,0}} \omega,$$

ce qui conclut la démonstration du théorème 16.7.3.

§ 16.8. SUPPORT DES COURANTS POSITIFS FERMÉS

16.8.1. — Soit X un n-espace analytique, considéré comme espace tropical de niveau n. Le support d'une (n,n)-forme α sur X est contenu dans une partie squelettique et possède une densité par rapport aux mesures de Lebesgue n-dimensionnelles. En particulier, la mesure de Radon associée ne charge pas des parties squelettiques de dimension de Hausdorff $< n$.

Cette section vise à étendre cette propriété à certains courant de la forme $T \wedge \alpha$, où T est un courant positif fermé de bidimension (p,p) et α est une forme lisse de bidegré (p,p).

Proposition 16.8.2. — *Soit X un n-espace analytique, sans bord. Soit K une extension valuée de k, universellement multiplicative ; soit $p\colon X_K \to X$ le morphisme de changement de base et soit $\sigma\colon X \to X_K$ sa section de Shilov.*

Soit $u^1, \dots, u^p$ des fonctions dpsh sur X, soit $T = \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u^1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u^p)$ et soit $T_K = \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u^1_K) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u^p_K)$. Soit α une forme lisse sur X de bidegré (u,v), où $\max(u,v) \geqslant n-p$. Le support du courant $T_K \wedge p^*\alpha$ est contenu dans $\sigma(X)$.

La proposition s'applique par exemple lorsque K est le corps $\mathscr{H}(\eta_r)$ où $r = (r_1, \dots, r_d)$ est une suite de nombres réels strictement positifs et η_r est le point de Gauss correspondant de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$. Il s'applique également lorsque k est algébriquement clos et K arbitraire.

Rappelons aussi la proposition 8.7.5 selon laquelle $\pi_*(T_K) = T$.

Démonstration. — Le résultat est local sur X ; par multilinéarité on peut donc se ramener au cas où les u_i sont psh. Considérons les suites $(u^1, \dots, u^p)$ de fonctions psh, définies sur un ouvert de X, pour lesquelles le support de $T_K \wedge \pi^*\alpha$ est contenu dans $\sigma(X)$. Elles forment un sous-faisceau en $\mathbf{R}_+$-modules du faisceau $(\mathrm{CPsh}_X)^p$ qui est stable par limite uniforme, d'après la continuité du produit des courants à la Bedford–Taylor. Il suffit donc de prouver qu'il contient toute suite $(u^1, \dots, u^p)$ de fonctions lisses psh définies sur un ouvert de X. La propriété est locale sur X, ce qui permet de supposer que α et

les u_i sont tropicalisées par un moment commun f. Dans ce cas, $T_K \wedge \pi^*\alpha$ est le courant associé à la forme lisse $\pi^*(\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_p) \wedge \alpha)$. Son support est donc contenu dans $\Sigma_{f_K}^{(n)}$, lequel est égal à $\sigma(\Sigma_f^{(n)})$ en vertu du corollaire 12.7.5. En particulier, il est contenu dans $\sigma(X)$, ce qu'il fallait démontrer. □

Définition 16.8.3. — *Soit X un espace G-tropical et soit A une partie fermée de X. Soit p un nombre réel $\geqslant 0$. On dit que A est tropicalement de mesure de Hausdorff p-dimensionnelle nulle, ou tropicalement $\mathscr{H}^p$-négligeable, si pour toute carte G-tropicale $f\colon V \to \mathbf{R}^m$ sur un domaine compact V de X, l'ensemble $f(A \cap V)$ de $\mathbf{R}^m$ est de mesure de Hausdorff p-dimensionnelle nulle.*

C'est une propriété G-locale sur X.

Exemple 16.8.4. — Lorsque X est un espace analytique topologiquement séparé, toute partie faiblement analytique de dimension $< p$ est tropicalement $\mathscr{H}^p$-négligeable, puisque la tropicalisation d'un espace analytique compact de dimension $< p$ est une partie paralinéaire de dimension $< p$.

Théorème 16.8.5. — *On suppose que la valeur absolue de k est non triviale. Soit X un n-espace analytique sans bord et soit T un courant positif fermé de bidimension (p,p) sur X. Soit A une partie fermée de X qui est tropicalement $\mathscr{H}^p$-négligeable. Pour toute forme $\alpha \in \mathscr{A}^{p,p}(X)$, l'ensemble A est négligeable pour la mesure $T \wedge \alpha$ sur X.*

Démonstration. — L'assertion à prouver est locale sur X. On peut ainsi supposer que X est paracompact et que la forme α est tropicale. Soit $x \in X$. Soit V un voisinage analytique compact de X et soit $f\colon V \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ un moment tel que $f_{\mathrm{trop}}(x) \notin f_{\mathrm{trop}}(\partial(V))$; il en existe d'après le lemme 12.3.6. Quitte à concaténer f avec un moment tropicalisant α, on peut supposer que f tropicalise $\alpha|_V$. Soit ω une forme tropicale au voisinage de $f_{\mathrm{trop}}(V)$ telle que $\alpha|_V = f^*\omega$. En la multipliant par une fonction-plateau convenable, on se ramène au cas où ω est une forme de type (p,p) sur $\mathbf{R}^n$, à support compact.

Posons $\Omega = \mathbf{R}^n \mathbin{-} f_{\mathrm{trop}}(\partial(V))$; c'est un ouvert de $\mathbf{R}^n$ car $\partial(V)$ est compact. Posons alors $U = f_{\mathrm{trop}}^{-1}(\Omega) = V \mathbin{-} f_{\mathrm{trop}}^{-1}(f_{\mathrm{trop}}(\partial(V)))$; c'est un ouvert de V qui est disjoint de $\partial(V)$; il est donc contenu dans $\mathrm{Int}(V)$ et est donc ouvert dans X. Il contient aussi x. Par construction, l'application $f_{\mathrm{trop}}|_U\colon U \to \Omega$ est propre, puisqu'elle se déduit de $f_{\mathrm{trop}}\colon V \to \mathbf{R}^n$ par changement de base. On définit alors un courant tropical de type (p,p), T_Ω, sur Ω, par la formule $\beta \mapsto \langle T|_U, f^*\beta\rangle$, pour $\beta \in \mathscr{A}_{\mathrm{c}}^{p,p}(\Omega)$. Ce courant est positif et fermé, car il en est de même de T. L'hypothèse faite sur A entraîne que $f_{\mathrm{trop}}(A \cap U)$ est de mesure de Hausdorff p-dimensionnelle nulle dans $\mathbf{R}^n$. D'après [**92**, corollary 4.1], la mesure $T_\Omega \wedge \omega$ sur Ω ne charge pas $f_{\mathrm{trop}}(A \cap U)$. Cela entraîne que la mesure $T \wedge \alpha$ sur U ne charge pas $f_{\mathrm{trop}}^{-1}(f_{\mathrm{trop}}(A \cap U))$, donc ne charge pas $A \cap U$.

Précisons cet argument. L'ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$ est réunion dénombrable de parties compactes ; comme $f_{\mathrm{trop}}\colon U \to \Omega$ est propre, l'espace U est réunion dénombrable de parties compactes et il en est de même de son sous-espace fermé $A \cap U$. Il suffit de démontrer que pour toute partie compacte B de $A \cap U$, la mesure $T \wedge \alpha$ ne charge pas B. Comme $f_{\mathrm{trop}}(B)$ est une partie compacte de $f_{\mathrm{trop}}(A \cap U)$, elle est de mesure de Hausdorff p-dimensionnelle nulle dans $\mathbf{R}^n$. Considérons une suite (u_n) de fonctions continues et positives sur Ω, à supports compact, à valeurs dans $[0;1]$, qui converge simplement vers la fonction indicatrice de $f_{\mathrm{trop}}(B)$. On peut, par exemple, prendre la fonction $u_n = \sup(1 - d(\cdot, f_{\mathrm{trop}}(B)/c)^{1/n}, 0)$, où c est assez petit pour que le c-voisinage de $f_{\mathrm{trop}}(B)$ soit contenu dans Ω. Par densité

des fonctions lisses dans les fonctions continues, il existe une suite de fonctions lisse à support compacts contenus dans Ω telle que $|v_n - u_n| \leqslant 1/n$. Alors, la suite bornée (v_n) converge vers la fonction indicatrice de $f_{\mathrm{trop}}(B)$, donc l'intégrale $\langle T_\Omega \wedge \omega, v_n\rangle$ tend vers 0. Par définition, on a donc $\langle T \wedge \alpha, f^* v_n\rangle \to 0$. Hors, $(f^* v_n)$ est est une suite bornée qui converge vers la fonction indicatrice de $f_{\mathrm{trop}}^{-1}(f_{\mathrm{trop}}(B))$; par suite, $f_{\mathrm{trop}}^{-1}(f_{\mathrm{trop}}(B))$ est négligeable pour la mesure $T \wedge \alpha$, et c'est a fortiori le cas de B. □

Corollaire 16.8.6. — *Soit X un n-espace analytique sans bord, soit p un entier naturel et soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de fonctions dpsh sur X. Soit A une partie fermée de X qui est tropicalement $\mathscr{H}^p$-négligeable. Pour toute forme $\alpha \in \mathscr{A}^{n-p,n-p}(X)$, l'ensemble A est négligeable pour la mesure $\mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_p \wedge \alpha$ sur X.*

Démonstration. — Lorsque la valuation de k est non triviale, ce résultat est un cas particulier du théorème 16.8.5 ; ce qui suit n'est donc intéressant que si la valuation de k est triviale, ce qu'on suppose désormais.

L'assertion est locale sur X. Par multilinéarité, on peut supposer que les u_i sont des fonctions psh. Notons T le courant $\mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_p$; il est positif et fermé.

Soit r un nombre réel tel que $0 < r < 1$ et soit k_r l'extension complète $k(\!(T)\!)$ de k munie de la valeur absolue T-adique telle que $|T| = r$. Soit X_r l'espace k_r-analytique déduit de X par changement de base, soit $\pi\colon X_r \to X$ sa projection et soit $\sigma\colon X \to X_r$ sa section de Shilov.

L'image $\sigma(A)$ est une partie fermée de X_r (car X est topologiquement séparé). Démontrons qu'elle est tropicalement $\mathscr{H}^p$-négligeable. On peut raisonner G-localement et supposer que X est affinoïde. Soit W un domaine analytique compact de X_L et soit f un moment sur W. En utilisant le lemme 16.8.7 et en utilisant un recouvrement fini de $\sigma^{-1}(W)$, on se ramène au cas où il existe un moment g au voisinage de A tel que $f_{\mathrm{trop}} \circ \sigma = g_{\mathrm{trop}} + e \log(r)$, où $e \in \mathbf{Z}^m$. Par hypothèse, $g_{\mathrm{trop}}(A)$ est $\mathscr{H}^p$-négligeable ; il en est donc de même de $f_{\mathrm{trop}}(\sigma(A))$.

Pour tout j, posons $u_{j,r} = \pi^* u_j$ et notons T_r le courant $\mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_{1,r} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_{p,r}$ sur X_r ; il est positif fermé. Posons aussi $\alpha_r = \pi^* \alpha$.

D'après la remarque 16.8.2, on a l'égalité de courants $\pi_*(T_r) = T$ et et l'égalité de mesures $\pi_*(T_r \wedge \alpha_r) = T \wedge \alpha$. Toujours d'après cette remarque, le support de $T_r \wedge \alpha_r$ est contenu dans l'image $\sigma(X)$ de la section de Shilov. D'après le théorème 16.8.5, cette mesure sur X_r ne charge pas $\sigma(A)$. Elle ne charge donc pas $\pi^{-1}(A)$. Par suite, $T \wedge \alpha$ ne charge pas A, ce qu'il fallait démontrer. □

Lemme 16.8.7. — *Soit $X = \mathscr{M}(\mathscr{A})$ un espace k-affinoïde, soit W un domaine analytique compact de X_L et soit $f \in \mathscr{A}_L^\times$ une fonction analytique sur W, inversible. Il existe une suite finie $(K_1, \dots, M_m)$ de parties compactes de $\sigma^{-1}(W)$ et pour tout j, une fonction analytique g_j sur X et un entier e_j, telle que $|f| \circ \sigma = |g_j| r^{e_j}$ sur K_j.*

Démonstration. — En utilisant le théorème de Gerritzen–Grauert, on se ramène au cas où W est un domaine rationnel de X_L. Il existe donc deux fonctions analytiques φ et ψ sur X_L telles que ψ ne s'annule pas sur W et telles que $|f| = |\varphi|/|\psi|$ sur W. On est ainsi ramené au cas où f est la restriction d'une fonction analytique φ sur X_L puis, par approximation, au cas où $\varphi \in \mathscr{A}[T, T^{-1}]$. Écrivons $\varphi = \sum_j f_j T^j$, où $f_j \in \mathscr{A}$ pour tout j. Pour tout $x \in X$, on a $|\varphi| \circ \sigma(x) = \max(|f_j|(x) r^j)$. On peut ainsi prendre pour partie compacte K_j l'ensemble des points $x \in \sigma^{-1}(W)$ tels que $|\varphi| \circ \sigma(x) = |f_j(x)| r^j$. □

§ 16.9. NÉGLIGEABILITÉ DES ENSEMBLES POLAIRES

Proposition 16.9.1. — *Soit X un n-espace analytique sans bord sur un corps complet non archimédien k. On suppose que X est bon. Tout point de X possède une base de voisinages ouverts U sur lesquels il existe une fonction psh lisse $\rho\colon U \to \mathbf{R}$ telle que $\rho < 0$ sur U et $\{\rho \leqslant 0\}$ est compact.*

Démonstration. — Comme tout ouvert de X est bon, il suffit de démontrer que tout point x de X possède un voisinage ouvert comme dans l'énoncé. Comme X est bon, il existe un domaine affinoïde V de X qui est un voisinage de x. Soit W un voisinage affinoïde de x contenu dans $\mathrm{Int}(V/X)$ qui est un domaine rationnel : il existe des fonctions holomorphes $f_1, \ldots, f_n, g$ sur V sans zéro commun et des nombres réels strictement positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ strictement tel que W soit défini par les conditions $|f_i| \leqslant \lambda_i |g|$ ([**8**], §2.2). Soit U l'ouvert d'inversibilité de V. Pour tout nombre réel $\mu \geqslant 1$, $W_\mu = \{|f_i| \leqslant \lambda_i \mu |g|\}$ est un voisinage rationnel de x dans V qui est contenu dans U, car les f_i et g sont sans zéro commun.

Pour tout i, posons $u_i = \log(|f_i/g|/\lambda_i)$; c'est une fonction psh sur U, qui vaut $-\infty$ sur $\{f_i = 0\} \cap U$ est est paralinéaire en dehors. La fonction $u = \max(u_1, \ldots, u_n)$ sur U est paralinéaire et psh, et pour tout $t \geqslant 0$, l'ensemble $\{u \leqslant t\}$ est un voisinage de x dans U. Nous allons en construire une approximation psh lisse.

Soit θ une fonction lisse sur $\mathbf{R}$, positive, de support contenu dans $[-1; 1]$ et d'intégrale 1. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $s \in \mathbf{R}^m$, posons

$$M_\varepsilon(s_1, \ldots, s_m) = \int_{\mathbf{R}^m} \max(s_1 + t_1, \ldots, s_m + t_m) \prod_{i=1}^{m} \theta(t_i/\varepsilon)\, dt_1 \cdot dt_m.$$

D'après le lemme 5.18 de [**45**], la fonction M_ε sur $\mathbf{R}^m$ est lisse, convexe, croissante en chaque variable, vérifie

$$\max(s_1, \ldots, s_m) \leqslant M_\varepsilon(s_1, \ldots, s_m) \leqslant \max(s_1, \ldots, s_m) + \varepsilon.$$

En outre, si s' est la famille déduite de s en enlevant les coordonnées x_i telles que $s_i \leqslant \max(s_1, \ldots, s_m) - 2\varepsilon$, on a $M_\varepsilon(s) = M_\varepsilon(s')$. Par suite, la fonction u_ε sur U définie par $u_\varepsilon = M_\varepsilon(u_1, \ldots, u_n)$ est lisse et psh, et vérifie $u \leqslant u_\varepsilon \leqslant u + \varepsilon$.

Prenons $\varepsilon = 1$ et posons $\tilde{u} = u_1 - u_1(x) - 1$. La fonction $\tilde{u}$ sur U est psh et lisse ; on a $\tilde{u}(x) = -1 < 0$. L'ensemble de U défini par $\tilde{u} \leqslant 0$ est contenu dans l'ensemble fermé $\{u \leqslant u_1(x) + 1\}$ de U. Or, ce dernier ensemble est aussi le domaine rationnel de V défini par $|f_i| \leqslant e^{u_1(x)+1} \lambda_i |g|$, car les f_i et g sont sans zéro commun ; il est donc compact. □

Théorème 16.9.2. — *Soit X un n-espace k-analytique sans bord. Soit $u_1, \ldots, u_m$ des fonctions psh continues sur X qui sont localement approchables, soit V une fonction psh localement approchable sur X, soit α une forme lisse sur X. Si V est localement intégrable sur X, est elle est localement intégrable pour la mesure $\mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_1 \wedge \ldots \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_m \wedge \alpha$ sur X.*

Démonstration. — D'après la proposition 16.9.1, l'espace tropical associé à X est justiciable du corollaire 8.12.2. □

Corollaire 16.9.3. — *Soit X un n-espace k-analytique sans bord. Soit $u_1, \ldots, u_m$ des fonctions psh continues sur X qui sont localement approchables, soit α une forme lisse*

de type $(n-m, n-m)$ sur X et soit V une fonction psh localement approchable sur X. Si V est localement intégrable sur X, la mesure $\mathrm{d'd''}\, u_1 \wedge \ldots \mathrm{d'd''}\, u_m \wedge \alpha$ sur X ne charge pas le lieu polaire de V.

Démonstration. — D'après la proposition 16.9.1, l'espace tropical associé à X est justiciable du corollaire 8.12.3. □

Corollaire 16.9.4. — *Soit X un n-espace k-analytique sans bord. Soit $u_1, \ldots, u_m$ des fonctions psh continues sur X qui sont localement approchables, soit α une forme lisse de type $(n-m, n-m)$ sur X. La mesure $\mathrm{d'd''}\, u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d'd''}\, u_m \wedge \alpha$ sur X ne charge aucun fermé de Zariski de dimension $< n$.*

Démonstration. — Soit Y un fermé de Zariski de X tel que $\dim(Y) < \dim(X)$. L'assertion est locale au voisinage de tout point y de Y. Soit W un voisinage affinoïde de y. La trace $Y \cap W$ ne contient aucune composante irréductible de W de dimension n. D'après le lemme d'évitement des idéaux premiers, il existe une fonction analytique f sur W telle que $Y \subset V(f)$ et telle que f ne s'annule identiquement sur aucune composante irréductible de W de dimension n. Quitte à remplacer X par l'intérieur de W, on peut supposer qu'il existe une fonction analytique f sur X qui ne s'annule identiquement sur aucune composante irréductible de dimension n et X et telle que $Y \subset V(f)$.

La fonction $\log|f|$ est alors continue sur toute partie squelettique de X, donc est localement intégrable sur X. Par ailleurs, c'est la limite décroissante des fonctions $\log\max(|f|, t)$, pour $t \to 0$. Comme ces fonctions sont psh et continues sur X, il en résulte que $\log|f|$ est psh approchable. Comme son lieu polaire contient Y, le corollaire en découle. □

Corollaire 16.9.5. — *Reprenons les hypothèses du corollaire précédent. Soit Y un n-espace k-analytique et soit $f\colon Y \to X$ un morphisme topologiquement compact qui est fini au-dessus d'un ouvert de Zariski dense. Pour toute fonction δ de X dans $\mathbf{R}$ qui prolonge la fonction dc_f, on a l'égalité de courants de bidegré (m, m)*

$$f_*(\mathrm{d'd''}(f^*u_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d'd''}(f^*u_m)) = \delta \cdot \mathrm{d'd''}\, u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d'd''}\, u_m$$

sur X.

Démonstration. — Dans la formule précédente, le membre de gauche est l'image directe d'un courant positif sur Y, donc est un courant positif sur X. Quant à lui, le membre de doite est le produit d'un courant positif $\mathrm{d'd''}\, u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d'd''}\, u_m$ par la fonction δ ; nous allons prouver qu'il s'agit d'un courant en démontrant que pour toute forme lisse α à support compact, de type $(n-m, n-m)$, la fonction δ est localement intégrable contre la mesure signée $\mu_\alpha = \mathrm{d'd''}\, u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d'd''}\, u_m \wedge [\alpha]$, et que l'on a

$$\langle \mathrm{d'd''}(f^*u_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d'd''}(f^*u_m), f^*\alpha \rangle = \int_X \delta \cdot \mathrm{d'd''}\, u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d'd''}\, u_m \wedge [\alpha].$$

Par partition de l'unité, on peut supposer que le support de α est contenu dans un ouvert de X sur lequel les u_i sont limite uniforme de suites de fonctions lisses psh. Quitte à remplacer X par un tel ouvert, on suppose donc que les u_i sont limite uniforme de suites de fonctions lisses psh sur X.

La forme α est différence de deux formes positives à support compact, si bien qu'on peut également supposer que α est positive. La mesure μ_α est alors positive.

La réunion Z_1 des intersections deux à deux des composantes irréductibles de X est de dimension $< n$. Soit Z_2 un fermé de Zariski de X de dimension $< n$, de complémentaire U, tel que f soit fini au-dessus de U. Posons $Z = Z_1 \cup Z_2$ et soit U son complémentaire ; on a $\dim(Z) < n$ et f est fini au-dessus de U.

La formule voulue est vraie lorsque les u_i sont lisses. En effet, μ_α est alors la mesure associée à la (n,n)-forme positive lisse $\omega = \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_m \wedge \alpha$; elle possède un support fort S qui est contenu dans X^{gen}. Alors,

$$\int_X \delta\mu_\alpha = \int_X \mathrm{dc}_f\, \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_m \wedge \alpha.$$

Soit U un voisinage ouvert de S dont chaque point n'appartient qu'à une seule composante irréductible de X et soit (U_i) la famille de ses composantes connexes. On a donc

$$\int_X \delta\mu_\alpha = \int_U \mathrm{dc}_f\, \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_m \wedge \alpha = \sum_i \int_{U_i} \mathrm{dc}_f\, \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_m \wedge \alpha.$$

Pour tout i, posons $V_i = f^{-1}(U_i)$; posons aussi $V = f^{-1}(U)$; on a

$$\int_{U_i} \mathrm{dc}_f\, \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_m \wedge \alpha = \int_{V_i} \mathrm{d}'\mathrm{d}'' f^* u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' f^* u_m \wedge f^*\alpha,$$

de sorte que

$$\int_X \delta\mu_\alpha = \int_V \mathrm{d}'\mathrm{d}'' f^* u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' f^* u_m \wedge f^*\alpha,$$

La (n,n)-forme lisse $\mathrm{d}'\mathrm{d}'' f^* u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' f^* u_m \wedge f^*\alpha = f^*\omega$ sur Y possède un support fort T. Si une n-cellule C de T est contractée par f, alors $f^*\omega$ est identiquement nulle sur C. On peut donc supposer qu'aucune n-cellule de T n'est contractée par f, si bien que $T \subset V$ et

$$\int_V \mathrm{d}'\mathrm{d}'' f^* u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' f^* u_m \wedge f^*\alpha = \int_X \mathrm{d}'\mathrm{d}'' f^* u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' f^* u_m \wedge f^*\alpha.$$

Cela prouve l'assertion voulue quand les u_i sont lisses.

Dans le cas général, on considère des suites $(u_{i,p})_p$ de fonctions lisses psh sur X qui convergent uniformément vers X. Pour tout p, on a l'égalité

$$\langle f_*(\mathrm{d}'\mathrm{d}''(f^* u_{1,p}) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(f^* u_{m,p})), \alpha\rangle = \int_X \delta \cdot \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_{1,p} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_{m,p} \wedge [\alpha].$$

En vertu du la proposition 8.7.2, le membre de gauche converge vers

$$\langle f_*(\mathrm{d}'\mathrm{d}''(f^* u_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''(f^* u_m)), \alpha\rangle.$$

Le membre de droite est de la forme $\int_X \delta\mu_p$, où (μ_p) est une suite de mesures positives sur X qui converge vers la mesure μ_α ; les supports de ces mesures sont compacts, contenus dans celui de α. La fonction δ est localement constante, donc continue, sur U. D'après le corollaire 16.9.4, le complémentaire de U est négligeable pour la mesure μ_α. On a donc (proposition 22 de **[35]**, chap. IV, §5, n° 12) $\int_X \delta\mu_p \to \int_X \delta\mu_\alpha$; cela conclut la démonstration. □

PARTIE III

FIBRÉS MÉTRISÉS ET COURBURES

CHAPITRE 17

FIBRÉS VECTORIELS MÉTRISÉS

---

§ 17.1. MÉTRIQUES

17.1.1. Fibrés vectoriels. — Un fibré vectoriel de rang n sur un espace k-analytique X est un faisceau en modules localement libres de rang n constant sur le site annelé X_{G} (à savoir X muni de sa G-topologie et de son faisceau structural).

Il définit par restriction à l'espace topologique X un faisceau en $\mathscr{O}_X$-modules, dont on ne sait pas s'il est en général localement libre de rang n C'est toutefois toujours le cas lorsque X est bon, et notamment lorsque X est sans bord. Dans cette situation, cette construction fournit une équivalence entre la catégorie des $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}}}$-modules localement libres de rang fini et celle des $\mathscr{O}_X$-modules localement libres de rang fini (**[9]**, prop. 1.3.4).

Soit X un espace analytique et soit E un fibré vectoriel sur X. Notons $\mathbf{V}(E)$ l'espace total de E : c'est un espace analytique muni d'un morphisme π vers X dont les sections au-dessus d'un domaine analytique de X s'identifient canoniquement aux sections de E sur ce domaine. Si $E = \mathscr{O}_X^n$, alors $\mathbf{V}(E) = \mathbf{A}_X^n$ est l'espace affine (analytique) au-dessus de X ; dans le cas général, on le construit par recollement.

Définition 17.1.2 **(Métriques).** — *Soit X un espace analytique et soit E un fibré vectoriel sur X. Une* semi-métrique *sur E est une application continue $\|\cdot\| : \mathbf{V}(E) \to \mathbf{R}_+$ qui est une norme dans chaque fibre, au sens suivant : pour tout point $x \in X$, toute extension valuée complète L de $\mathscr{H}(x)$, l'application de $E(x) \otimes L$ dans $\mathbf{R}$ donnée par la composition*

$$E(x) \otimes_{\mathscr{H}(x)} L \hookrightarrow \mathbf{V}(E)_L \to \mathbf{V}(E) \xrightarrow{\|\cdot\|} \mathbf{R}_+$$

est une semi-norme ultramétrique sur le L-espace vectoriel de dimension finie $E(x) \otimes L$.

On dit que cette semi-métrique est une métrique si ces semi-normes sont des normes et qu'elle est continue si l'application $\|\cdot\| : \mathbf{V}(E) \to \mathbf{R}_+$ ci-dessus est continue.

On notera souvent $\overline{E}$ la donnée d'un fibré vectoriel E sur X et d'une semi-métrique sur ce fibré. Inversement, si F est un fibré semi-métrisé sur X, on notera $\underline{F}$ le fibré vectoriel sous-jacent.

Remarque 17.1.3. — L'exigence d'une telle condition après produit tensoriel par toute extension valuée complète L de $\mathscr{H}(x)$ peut sembler superflue. Que nenni ! Prenons par exemple le fibré de rang 1 trivial E sur l'espace $\mathscr{M}(k)$ d'un corps trivialement valué k. Toute fonction continue de $\mathbf{V}(E)$ dans $\mathbf{R}_+$ qui applique tout k-point non nul sur 1 et l'origine sur 0 induit une norme sur $E(k)$. Si c'est le cas de la fonction $|T|$, c'est également le cas de la fonction $|T|^2$ qui n'induit pas de norme sur $E(x) \otimes L$ dès que L n'est plus trivialement valuée.

Exemple 17.1.4. — Soit X un espace analytique, soit L un fibré en droites sur X.

Soit ε une section globale *inversible* de L. Pour toute semi-métrique $\|\cdot\|$ sur L, on dispose d'une fonction $\|\varepsilon\|$ sur X. Inversement, pour toute fonction $u\colon X \to \mathbf{R}_+$, il existe une unique semi-métrique sur L telle que $u = \|\varepsilon\|$. En effet, ε identifie $\mathbf{V}(L)$ à $\mathbf{A}^1_X$ et la semi-métrique est alors donnée par $v \mapsto |T(v)|u(p(v))$, où $p\colon \mathbf{A}^1_X \to X$ est la projection naturelle. Les métriques correspondent ainsi aux fonctions à valeurs strictement positives, et les métriques continues aux fonctions continues à valeurs strictement positives.

Soit (U_i) un G-recouvrement de X trivialisant L ; pour tout i, soit s_i une section inversible de L sur U_i ; pour tout couple (i, j), soit f_{ij} la fonction inversible s_i/s_j sur $U_i \cap U_j$. Soit $\|\cdot\|$ une semi-métrique sur L. Pour tout i, soit u_i la fonction $\|s_i\|$ sur U_i ; on a $u_i = |s_i/s_j|u_j$ pour tout couple (i, j). Inversement, si (u_i) est une famille de fonctions sur les domaines U_i vérifiant cette relation de cocycle, il existe une unique semi-métrique $\|\cdot\|$ sur L telle que $\|s_i\| = u_i$ pour tout i.

Cette semi-métrique est une métrique si les fonctions u_i sont à valeurs strictement positives, et est une métrique continue si ces fonctions sont de plus continues. Dans ce cas, les fonctions continues $\log\|s_i\|^{-1}$ sur les U_i ne se recollent pas a priori mais c'est le cas de leurs images dans le faisceau quotient $\mathscr{C}_X/\log(|\mathscr{O}_X^\times|)$.

Remarque 17.1.5. — Soit X un espace analytique, soit E un fibré vectoriel sur X muni d'une métrique continue $\|\cdot\|$.

Soit Y un espace analytique, $f\colon Y \to X$ un morphisme et s une section globale de f^*E. On déduit de $\|\cdot\|$ une application continue, notée $\|s\|$, de Y dans $\mathbf{R}_+$: c'est la composition

$$Y \xrightarrow{s} \mathbf{V}(f^*E) \to \mathbf{V}(E) \xrightarrow{\|\cdot\|} \mathbf{R}_+.$$

Cette application vérifie les propriétés suivantes :

– Si $u \in \Gamma(Y, \mathscr{O}_Y)$ et $s \in \Gamma(Y, f^*E)$, alors $\|us\| = |u| \cdot \|s\|$;

– Si $s_1, s_2 \in \Gamma(Y, f^*E)$, alors $\|s_1 + s_2\| \leqslant \max(\|s_1\|, \|s_2\|)$;

– La fonction $\|s\|$ est à valeurs positives et s'annule en un point y de Y si et seulement si $s(y) = 0$;

– Soit $g\colon Z \to Y$ un morphisme d'espace analytiques, on a $\|g^*s\| = \|s\| \circ g$.

Inversement, donnons-nous, pour tout espace analytique Y, tout morphisme $f\colon Y \to X$, et toute section s de f^*E, une application $\|s\|\colon Y \to \mathbf{R}_+$ vérifiant les propriétés ci-dessus. Elle est induite par une unique métrique continue sur le fibré E : elle se retrouve en prenant pour espace Y l'espace total $\mathbf{V}(E)$ et pour s la section tautologique.

Plus généralement, supposons donné un G-recouvrement (X_i) de X ainsi que de telles applications $\|s\|$, pour tout triplet (Y, f, s) comme ci-dessus lorsque $f(Y)$ est contenu dans l'un des X_i. Ces données fournissent d'abord une métrique sur le fibré $E|_{X_i}$, pour

tout i ; ces métriques coïncident sur les intersections et se recollent en une métrique sur E.

Notons $\mathscr{C}^0_X$ (resp. $\mathscr{C}^0_{X_{\mathrm{G}}}$) le faisceau $U \mapsto \mathscr{C}^0(U, \mathbf{R})$ sur l'espace topologique X (resp. le site X_{G}). En se restreignant aux domaines analytiques de X, on voit en particulier qu'une métrique continue sur E donne lieu à un morphisme de faisceaux $E \to \mathscr{C}^0_{X_{\mathrm{G}}}$.

***Définition 17.1.6* (Métriques lisses).** — *On dit qu'une métrique sur un fibré vectoriel E est lisse si l'application de $\mathbf{V}(E) - \{0\}$ dans $\mathbf{R}^*_+$ déduite par restriction au complémentaire de la section nulle est lisse.*

C'est une propriété locale sur X.

Proposition 17.1.7. — *Soit L un fibré en droites qui est localement trivial pour la topologie usuelle de X. Pour qu'une métrique continue sur L soit lisse, il faut et il suffit que pour toute section inversible s sur un ouvert U de X, la fonction $\log\|s\|$ soit lisse sur U.*

Comme dans l'exemple, on déduit d'une métrique lisse sur L une section globale du faisceau $\mathscr{A}^0_X / \log(|\mathscr{O}^\times_X|)$.

Démonstration. — La nécessité de la condition est évidente, car $\|s\|$ est la composition de la norme et de la section $U \to \mathbf{V}(E)$ déduite de s, l'image de cette section étant contenue dans le complémentaire de la section nulle. Inversement, soit $\|\cdot\|$ une métrique continue sur X vérifiant la condition indiquée. Pour démontrer qu'elle est lisse, on peut raisonner localement sur X. Par hypothèse, X est recouvert par des ouverts U sur lesquels L possède une section inversible s. La section s fournit un isomorphisme de $\mathbf{V}(E)|_U$ avec $\mathbf{A}^1 \times U$; par cet isomorphisme, la métrique est transformée en l'application $(t, x) \mapsto |t| \cdot \|s(x)\|$; sa restriction au complémentaire $\mathbf{G}_{\mathrm{m}} \times U$ de la section nulle est donc lisse. Par suite, la métrique donnée est lisse. □

Proposition 17.1.8. — *Soit X un espace k-analytique paracompact. Si X est localement holomorphiquement séparé, tout fibré en droites sur X qui est localement trivial pour la topologie usuelle de X possède une métrique lisse. En particulier, si X est bon (par exemple, sans bord), tout fibré en droites sur X possède une métrique lisse.*

De plus, toute métrique continue sur un tel fibré peut-être approchée par une métrique lisse pour la topologie de la convergence compacte.

Démonstration. — Soit L un fibré en droites sur X. Par hypothèse, il existe un recouvrement (U_i) de X par des ouverts sur lesquels L est trivialisable ; pour tout i, soit s_i une section inversible de $L|_{U_i}$. Soit (λ_i) une partition de l'unité lisse subordonnée au recouvrement ouvert (U_i) ; il en existe, car X est paracompact. Il existe une unique métrique sur L pour laquelle,

$$\log\|s\|(x) = \sum_i \lambda_i(x) \log|s/s_i|(x)$$

pour tout espace analytique Y, tout morphisme $f\colon Y \to X$ et toute section inversible s de f^*L sur Y, la somme étant réduite aux indices i tels que $f(x) \in U_i$.

Lorsque s est une section inversible sur un ouvert U de X, la fonction $\log\|s\|$ est lisse sur U, si bien que la métrique ainsi définie sur L est lisse.

Soit $\|\cdot\|$ une métrique lisse arbitraire sur L et soit $\|\cdot\|'$ une métrique continue sur L ; soit K une partie compacte de X et soit $\varepsilon > 0$. Il existe une unique fonction continue f sur X telle que $\|\cdot\|' = \|\cdot\| e^f$. Soit u une fonction lisse sur X telle que $|u(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$

pour tout $x \in K$ (corollaire 15.2.7). La métrique $\|\cdot\|e^u$ sur L est lisse et approche la métrique continue donnée $\|\cdot\|'$ comme voulu. □

Remarque 17.1.9. — En revanche, un fibré vectoriel de rang $n > 1$ sur un espace analytique X n'admet pas de métrique lisse : ce n'est déjà pas le cas lorsque $X = \mathscr{M}(k)$. En effet, une métrique sur le fibré vectoriel trivial $\mathscr{O}_X^n$ est une application $\|\cdot\|$ de $\mathbf{A}_k^n$ dans $\mathbf{R}_+$ qui, pour toute extension valuée L de k, induit une norme ultramétrique sur L^n. Supposons, ce n'est pas restrictif, que k soit algébriquement clos et sphériquement complet. Dans ce cas, on sait ([**108**], Theorem 2.3.25 ; [**74**], prop. 2) que l'espace vectoriel k^n, muni de la norme induite par $\|\cdot\|$, possède une base $(e_1, \dots, e_n)$ qui est « orthogonale », au sens où $\|\sum x_i e_i\| = \max(|x_i|\|e_i\|)$ pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in k^n$. Autrement dit, il existe des formes linéaires linéairement indépendantes $f_1, \dots, f_n$ sur k^n et des nombres réels strictement positifs $a_1, \dots, a_n$ tels que $\|x\| = \max(a_i|f_i(x)|)$ pour tout $x \in \mathbf{A}^n(k)$. Comme $\mathbf{A}^n(k)$ est dense dans $\mathbf{A}_k^n$, cette formule vaut pour tout $x \in \mathbf{A}_k^n$.

Cela entraîne que la norme $\|\cdot\|$ est PL au sens du paragraphe suivant mais n'est pas lisse. Supposons en effet par l'absurde que $\|\cdot\|$ soit une métrique lisse. La $(1,1)$-forme $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\log\|\cdot\|$ sur $\mathbf{A}_k^n - \{0\}$ descend en une $(1,1)$-forme lisse sur $\mathbf{P}_k^{n-1}$. Sa puissance $(n-1)$-ième est alors une $(n-1, n-1)$-forme lisse, contredisant la proposition 1.7.7 qui affirme que $(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\log\|\cdot\|)^{n-1}$ est une masse de Dirac.

C'est donc probablement par la géométrie de Finsler qu'il conviendra d'étudier les formes de Chern des fibrés vectoriels en géométrie non archimédienne.

17.1.10. — Le produit tensoriel $L \otimes L'$ de deux fibrés en droites métrisés L et L' possède une unique métrique continue pour laquelle $\|s \otimes s'\| = \|s\| \cdot \|s'\|$.

De même, l'inverse d'un fibré en droites métrisé L possède une unique métrique continue pour laquelle $\|s^{-1}\| = \|s\|^{-1}$ quand s est inversible.

Si L et L' sont des fibrés en droites munis de métriques lisses, la métrique naturelle sur $\underline{L} \otimes \underline{L}'$ est lisse, de même que la métrique naturelle de $\underline{L}^{-1}$.

§ 17.2. MÉTRIQUES PARALINÉAIRES

Nous allons maintenant introduire une classe importante de fibrés métrisés, dont nous verrons plus bas (17.7) qu'elle contient notamment les fibrés métrisés issus de modèles formels. Nous allons utiliser dans ce qui suit les différentes classes d'applications paralinéaires introduites en 12.5.2.

17.2.1. — Soit X un espace k-analytique, soit E un fibré vectoriel sur X et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Pour toute famille $(u_1, \dots, u_n)$ de fonctions continues à valeurs strictement positives sur X, il existe une unique métrique continue $\|\cdot\|$ sur E telle que

$$\|(\sum f_i \varphi^* e_i)(y)\| = \max u_i(\varphi(y))|f_i(y)| \tag{17.2.1.1}$$

pour tout espace analytique Y, tout morphisme $\varphi\colon Y \to X$, toute famille (f_i) de fonctions analytiques sur Y et tout $y \in Y$; nous noterons $\max u_i \cdot |e_i^\vee|$ cette métrique.

Si $\|\cdot\|$ est une métrique sur E, nous dirons que la base (e_i) est orthogonale pour $\|\cdot\|$ s'il existe une famille (u_i) comme ci-dessus telle que $\|\cdot\| = \max u_i \cdot |e_i^\vee|$. La famille u_i est

alors uniquement déterminée : on a en effet nécessairement $u_i = \|e_i\|$ pour tout i. Si u_i est identiquement égale à 1 pour tout i on dit que (e_i) est orthonormée.

17.2.2. — Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthogonale de E et soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une famille de sections telle que pour tout i, l'inégalité $\|\varepsilon_i\| < \|e_i\|$ soit vérifiée en tout point de X. On vérifie immédiatement que la famille $(e_i + \varepsilon_i)$ est une base orthogonale ; notons que la fonction $\|e_i + \varepsilon_i\|$ est égale à $\|e_i\|$ pour tout i.

Définition 17.2.3. — *On dit qu'un fibré vectoriel métrisé E est paralinéaire (*resp. *paralinéaire entier) ou que la métrique de E est paralinéaire (*resp. *paralinéaire entière) s'il existe un G-recouvrement (X_i) de X et, pour tout i, une base orthogonale (e_{ij}) telle que les fonctions* $\log\|e_{ij}\|$ *soient paralinéaires (resp. paralinéaires entières). Si X est strict, on dit que E est paralinéaire strict (*resp. *paralinéaire strictement entier) ou que sa métrique est paralinéaire stricte (*resp. *paralinéaire strictement entière) s'il existe un G^{str}-recouvrement (X_i) de X et, pour tout i, une base orthogonale (e_{ij}) telle que les fonctions* $\log\|e_{ij}\|$ *soient paralinéaires strictes (resp. paralinéaires strictement entières).*

Notons que par définition, les fibrés paralinéaires stricts et strictement entiers n'existent que sur les espaces stricts. Soit E un fibré vectoriel muni d'une métrique paralinéaire ; pour toute section globale s de E, la fonction $\log\|s\|$ est paralinéaire sur l'ouvert de non-annulation de s. L'énoncé analogue vaut pour les métriques paralinéaires entières, paralinéaires strictes, et paralinéaires strictement entières.

Remarque 17.2.4. — Soit E un fibré vectoriel muni d'une métrique paralinéaire entière. Donnons-nous des familles (X_i) et (e_{ij}) comme dans la définition. Les fonctions $\log\|e_{ij}\|$ sont paralinéaires entières. Pour i fixé il y a un nombre fini de telles fonctions, et il existe donc un G-recouvrement $(X_{i\ell})$ de X_i et, pour tout ℓ, des fonctions analytiques inversibles $g_{ij\ell}$ sur $X_{i\ell}$ et des nombres réels strictement positifs $c_{i\ell}$ tels que $\|e_{ij}\|_{X_{i\ell}} = c_{i\ell}|g_{ij\ell}|$ pour tout j. La famille des $g_{ij\ell}^{-1} e_{ij}|_{X_{i\ell}}$ est alors une base orthogonale de $E|_{X_{i\ell}}$ dont chaque élément est de norme constante. Par conséquent on peut, dans la définition d'un fibré métrisé paralinéaire entier, exiger que les $\|e_{ij}\|$ soient constantes. On montre *mutatis mutandis* qu'on peut, dans la définition d'un fibré paralinéaire strictement entier, exiger que les $\|e_{ij}\|$ soient toutes identiquement égales à 1, c'est-à-dire que les bases (e_{ij}) soient orthonormées.

17.2.5. — La métrique naturelle sur le fibré en droites $\mathscr{O}_X$, pour laquelle $\|f\| = |f|$ universellement (c'est-à-dire pour tout morphisme $Y \to X$ et toute $f \in \mathscr{O}(Y)$) est paralinéaire entière, et strictement entière si X est strict. Le fibré $\mathscr{O}_X$ muni de cette métrique sera appelé le fibré en droites métrisé trivial.

Plus généralement, soit u une fonction continue à valeurs réelles sur X. La métrique sur $\mathscr{O}_X$ pour laquelle $\|f\| = e^{-u} \cdot |f|$ universellement est alors paralinéaire (*resp.* paralinéaire entière, *resp.* paralinéaire stricte, *resp.* paralinéaire strictement entière) si et seulement si c'est le cas de u.

17.2.6. — Soit E et E' des fibrés vectoriels métrisés sur X. On munit la somme directe $\underline{E} \oplus \underline{E}'$ des fibrés vectoriels sous-jacents de la métrique définie universellement par $(e, e') \mapsto \max(\|e\|, \|e'\|)$; on dit que c'est la somme directe orthogonale et on note $E \oplus E'$ le fibré vectoriel correspondant.

Cette métrique est paralinéaire (*resp.* paralinéaire entière, *resp.* paralinéaire stricte, *resp.* paralinéaire strictement entière) dès que les métriques sur E et E' le sont.

Un fibré vectoriel métrisé E sur X est paralinéaire strictement entier si et seulement s'il existe un $\mathrm{G}^{\mathrm{str}}$-reouvrement (X_i) de X de X tel que $E|_{X_i}$ soit pour tout i isomorphe à une somme directe orthogonale finie de copies du fibré en droites trivial.

17.2.7. — Soit L et L' deux fibrés métrisés paralinéaires sur X ; les fibrés métrisés $L \otimes L'$ et L^{-1} sont alors paralinéaires. Un énoncé analogue vaut pour les fibrés métrisés paralinéaires entiers, paralinéaires stricts, et paralinéaires strictement entiers.

Soient maintenant E et F deux fibrés vectoriels métrisés de rangs arbitraires. Supposons que E et F possèdent des bases orthogonales (e_i) et (f_j) ; on peut alors munir $E \otimes F$ de la métrique $\|\cdot\|$ pour laquelle la base $(e_i \otimes f_j)$ est orthogonale et vérifie les égalités $\|e_i \otimes f_j\| = \|e_i\| \cdot \|f_j\|$. Cette métrique ne dépend pas du choix des bases orthonormées fixées (e_i) et (f_j) : c'est en effet l'unique métrique telle que pour tout $x \in X$, la norme induite sur le $\mathscr{H}(x)$-espace vectoriel $(E \otimes F)(x) = E(x) \otimes F(x)$ soit la norme produit tensoriel définie par exemple dans [**8**, p. 12].

Cette construction permet par recollement G-local ou $\mathrm{G}^{\mathrm{str}}$-local de munir le produit tensoriel de deux fibrés métrisés paralinéaires (*resp.* paralinéaires stricts, *resp.* paralinéaires entiers, *resp.* paralinéaires strictement entiers) d'une métrique paralinéaire (*resp.* ...).

De même, si E est un fibré métrisé possédant une base orthogonale (e_i) la métrique sur $E^\vee$ pour laquelle la base duale $(e_i^\vee)$ est orthogonale et vérifie les égalités $\|e_i^\vee\| = \|e_i\|^{-1}$. Cette construction permet par recollement G-local ou $\mathrm{G}^{\mathrm{str}}$-local de munir le dual d'un fibré métrisé paralinéaire (*resp.* ...) d'une métrique paralinéaire (*resp.* ...).

17.2.8. — Soit X un espace k-analytique, soit Y un espace analytique sur une extension complète L de k, soit $f\colon Y \to X$ un k-morphisme et soit E un fibré vectoriel métrisé sur X. Si E est paralinéaire (*resp.* paralinéaire entier) il en va de même de f^*E. Si X et Y sont stricts et si E est paralinéaire strict (*resp.* paralinéaire strictement entier), il en va de même de f^*E.

17.2.9. — Soit E un fibré muni d'une métrique paralinéaire, soit s une section de E et soit r un réels strictement positif. L'ensemble des point x de X tels que $\|s(x)\| \leqslant r$ est alors un domaine analytique de X. En effet, on peut pour le voir raisonner G-localement sur X, et donc supposer que E possède une base orthogonale (e_i). On peut alors écrire $s = \sum a_i e_i$ où les e_i sont des fonctions analytiques sur X. Par définition d'une métrique paralinéaire il existe une famille (g_i) de fonctions à valeurs réelles sur X, dont les logarithmes sont paralinéaires, et telles que $\|s\| = \sup_i |a_i| \cdot g_i$ identiquement sur X. L'assertion s'en déduit immédiatement.

Si X est strict, si E est strictement paralinéaire et si r est de torsion modulo $|k^\times|$ on démontre *mutatis mutandis* que l'ensemble des point x de X tels que $\|s(x)\| \leqslant r$ est un domaine strictement analytique de X.

§ 17.3. FIBRÉ RÉSIDUEL D'UN FIBRÉ PARALINÉAIRE ENTIER

Soit X un espace k-analytique séparé (au sens analytique), soit x un point de X et soit E un fibré vectoriel métrisé paralinéaire entier sur X dont on note n le rang.

17.3.1. — La tige $E(x)$ est un $\mathscr{H}(x)$-espace vectoriel normé de dimension finie. Elle possède à ce titre un espace vectoriel gradué résiduel $\widetilde{E(x)}$ sur le corps gradué $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ (10.8.1).

Puisque E est paralinéaire entier, il existe un domaine analytique V de X contenant x, une base orthogonale $(e_1, \dots, e_n)$ de $E|_V$ et une famille $(r_1, \dots, r_n)$ de réels strictement positifs telle que $\|e_i\| = r_i$ identiquement sur V pour tout i (remarque 17.2.4). Les $e_i(x)$ forment alors une base du $\mathscr{H}(x)$-espace vectoriel normé $E(x)$ et l'on a $\|\sum \lambda_i e_i(x)\| = \sup_i |\lambda_i| r_i$ pour toute famille (λ_i) d'éléments de $\mathscr{H}(x)^n$. Il s'ensuit que les $\widetilde{e_i(x)}$ forment une base du $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$-espace vectoriel gradué $\widetilde{E(x)}$ (10.8.2). En particulier, $\widetilde{E(x)}$ est de dimension n.

Lemme 17.3.2. — *Supposons que X est presque bon en x et que E est engendré par ses sections globales sur X en tant que $\mathscr{O}_X$-module.*

a) *Soit σ un élément homogène de $\widetilde{E(x)}$. Il existe un voisinage analytique U de x dans X et une section s de E sur U telle que $\sigma = \widetilde{s(x)}$.*

b) *Soit F un autre fibré vectoriel métrisé paralinéaire entier sur X engendré par ses sections globales comme $\mathscr{O}_X$-module, et soit θ un isomorphisme de $\widetilde{E(x)}$ sur $\widetilde{F(x)}$. Il existe un voisinage analytique U de x dans X et un isomorphisme $u\colon E|_U \to F|_U$ de fibrés vectoriels tel que l'isomorphisme $u(x)\colon E(x) \to F(x)$ soit une isométrie dont la réduction $\widetilde{u(x)}$ est égale à θ.*

Démonstration. — Montrons d'abord (a). L'assertion est évidente si σ est nulle. Supposons $\sigma \neq 0$ et soit r son degré. Il existe alors un élément t de $E(x)$ tel que $\|t\| = r$ et $\sigma = \widetilde{t}$. Comme E est engendré par ses sections globales, il existe $s_1, \dots, s_m$ dans $E(X)$ et des éléments $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ de $\mathscr{H}(x)$ tels que $t = \sum \lambda_i s_i(x)$. Puisque X est presque bon en x, il existe un voisinage analytique U de x et des fonctions analytiques $\mu_1, \dots, \mu_m$ sur U telles que $|\lambda_i - \mu_i(x)| \cdot \|s_i(x\| < r$ pour tout i. Notons s la section $\sum \mu_i s_i|_U$ de E sur U. On a par construction $\|s(x) - t\| < r$, si bien que $\widetilde{s(x)} = \widetilde{t} = \sigma$.

Montrons maintenant (b). Choisissons uen base de $\widetilde{E(x)}$. Il résulte de (a) qu'il existe une famille $(e_1, \dots, e_n)$de sections de E sur un voisinage analytique U de x telle que la base en question soit égale à $(\widetilde{e_i(x)})$. On a alors l'égalité $|\sum \lambda_i e_i(x)| = \sup_i |\lambda_i| \|e_i(x)\|$ pour toute famille (λ_i) d'éléments de $\mathscr{H}(x)$ (10.8.2), ce qui implique que la famille des $e_i(x)$ est libre, puis qu'elle est une base de $E(x)$ pour des raisons de dimension, et finalement une base de E au voisinage de x puisque E est trivialisable au voisinage de x. On peut donc restreindre U de sort que les e_i forment une base de $E|_U$.

Comme θ est un isomorphisme, la famille des $\theta(\widetilde{f_i(x)})$ est une base de $\widetilde{F(x)}$. En utilisant à nouveau (a) et en raisonnant comme ci-dessus on voit que quitte à restreindre U on peut supposer qu'il existe une base (f_i) de $F|_U$ telle que $\widetilde{f_i(x)} = \theta(\widetilde{u_i(x)})$ pour tout i, et que l'on a $|\sum \lambda_i f_i(x)| = \sup_i |\lambda_i| \|f_i(x)\|$ pour toute famille (λ_i) d'éléments de $\mathscr{H}(x)$; remarquons que comme θ préserve les degrés on a $\|f_i(x)\| = \|e_i(x)\|$. Soit u l'isomorphisme de $E|_U$ sur $F|_U$ qui envoie e_i sur f_i pour tout i. Comme on a pour toute famille (λ_i) d'éléments de $\mathscr{H}(x)$ les égalités

$$\left|u\left(\sum \lambda_i e_i(x)\right)\right| = \left|\sum \lambda_i f_i(x)\right| = \sup_i |\lambda_i| \cdot \|f_i(x)\| = \sup_i |\lambda_i| \cdot \|e_i(x)\| = \left|\sum \lambda_i e_i(x)\right|,$$

le morphisme $u(x)$ est bien une isométrie, et comme $\widetilde{u(x)}$ envoie $\widetilde{e_i(x)}$ sur $\widetilde{f_i(x)}$ par construction il vient $\widetilde{u(x)} = \theta$, d'où (b). □

Proposition 17.3.3. — *Soit σ une section homogène non nulle de $\widetilde{E}(x)$, soit r son degré et soit v un élément de $\widetilde{(X,x)}$.*

a) *Il existe un domaine analytique V de X contenant x tel que $v \in \widetilde{(V,x)}$, une base orthogonale (e_i) de $|_V$ telle que $\|e_i\|$ soit constante pour tout i, et une section s de E sur V vérifiant l'égalité $\widetilde{s(x)} = \sigma$.*

b) *Soit $(V,(e_i),s)$ comme en (a) ; pour tout i, notons r_i la valeur constante de $\|e_i\|$ sur V. Écrivons $s = \sum a_i e_i$ et désignons par I l'ensemble des indices i tels que $|a_i(x)| \cdot r_i = r$. L'élément $\sup_{i\in I} v(\widetilde{a_i(x)})$ de $v(\widetilde{\mathscr{H}(x)}^\times)$ ne dépend alors pas du choix de $(V,(e_i),s)$. Notons-le $v(\sigma)$.*

c) *Soit W un domaine analytique de X contenant x et tel que $v \in \widetilde{(W,x)}$, soit a une fonction analytique sur W ne s'annulant pas en x et soit t une section de E sur W telle que $\widetilde{t(x)} = \sigma$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$v(\widetilde{a(x)})v(\sigma) \leqslant 1$;*

(ii) *le domaine analytique W' de W défini par l'inégalité $\|at\| \leqslant r \cdot |a(x)|$ vérifie la condition $\widetilde{(W',x)} \ni v$.*

Notons que W' est bien un domaine analytique de W d'après 17.2.9.

Démonstration. — Comme la métrique de E est paralinéaire entière, il existe un G-recouvrement (V_i) de X tel que $E|_{V_i}$ possède pour tout i une base orthogonale dont les vecteurs sont de norme constante (17.2.4). Quitte à raffiner ce recouvrement, on peut supposer que les V_i sont affinoïdes. Soit I l'ensemble des indices tels que $x \in V_i$. Les (V_i,x) pour $i \in I$ constituent un G-recouvrement du germe (X,x), si bien que $\widetilde{(X,x)}$ est la réunion des $\widetilde{(V_i,x)}$. Il existe donc $i \in I$ tel que $v \in \widetilde{(V_i,x)}$. Et comme V_i est affinoïde et en particulier presque bon en x, il résulte du lemme 17.3.2 qu'il existe un voisinage analytique V de x dans V_i et une section s de E sur V telle que $\widetilde{s(x)} = \sigma$, ce qui achève de prouver (a).

Prenons $V,(e_i),(r_i),s,(a_i),I$ comme dans (b), et posons $v(\sigma) = \max_{i\in I} v(\widetilde{a_i(x)})$. Avant de montrer que que $v(\sigma)$ ne dépend effectivement que de v et de σ, nous allons montrer qu'il satisfait (c). Soit donc W et t comme dans (c). Pour établir l'équivalence entre (i) et (ii) on peut remplacer W par n'importe lequel de ses domaines contenant x et dont la réduction contient v, et en particulier par $V \cap W$; et l'on peut aussi remplacer V par $V \cap W$, ce qui permet finalement de supposer que $W = V$. Les égalités $\widetilde{t(x)} = \sigma = \widetilde{s(x)}$ entraînent que $\|s(x) - t(x)\| < r$ si bien que pour toute fonction a sur W non nulle en x les inégalités $\|as\| \leqslant r|a(x)|$ et $\|at\| \leqslant r|a(x)|$ définissent le même domaine analytique au voisinage de x dans V. On peut donc également pour établir l'équivalence voulue remplacer t par s, c'est-à-dire supposer que $t = s$. On a $\|s\| = \max_i |a_i| r_i$ identiquement sur V ; quitte à remplacer V par un voisinage convenable de x dans V, on peut supposer que $\|s\| = \max_{i\in I} |a_i| r_i$ identiquement sur V.

Soit a une fonction analytique sur V ne s'annulant pas en x. Pour harmoniser les notations, désignons par V' (plutôt que W') le domaine analytique de V défini par

l'inégalité $\|as\| \leqslant r|a(x)|$. On peut également définir V' par la conjonction d'inégalités

$$\bigwedge_{i\in I} |aa_i|r_i \leqslant r \cdot |a(x)| = |a(x)a_i(x)| \cdot r_i,$$

c'est-à-dire encore par la conjonction d'inégalités

$$\bigwedge_{i\in I} |aa_i| \leqslant |a(x)a_i(x)|.$$

Il s'ensuit que $\widetilde{(V', x)}$ est égal à $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}\{\widetilde{a_i(x)}\widetilde{a(x)}\}_{i\in I}$. Par conséquent, v appartient à $\widetilde{(V', x)}$ si et seulement si $\max_{i\in I} v(\widetilde{a_i(x)})v(\widetilde{a(x)}) \leqslant 1$, c'est-à-dire encore si et seulement si $v(\widetilde{a(x)}v(\sigma) \leqslant 1$, ce qui montre (c).

Il reste à prouver (b). Pour ce faire, fixons un domaine affinoïde W de X contenant x et une section t de E sur W telle que $\widetilde{t(x)} = \sigma$ (l'existence d'un tel (W, t) est assuré par (a)).

Soit $(V, (e_i), s, (a_i))$ comme en (b) ; posons $v(\sigma) = \max_{i\in I} v(\widetilde{a_i(x)})$. Soit γ un élément de $v(\widetilde{\mathscr{H}(x)}^\times)$. Comme W est affinoïde, il existe une fonction analytique a définie sur un voisinage analytique U de x dans W tel que $v(\widetilde{a(x)}) = \gamma$. Soit U' le domaine analytique de U défini par l'inégalité $\|at\| \leqslant r \cdot |a(x)|$. D'après l'assertion (c) déjà établie, on a $\gamma v(\sigma) \leqslant 1$ si et seulement si v appartient à $\widetilde{(U', x)}$. Cette dernière condition ne dépend pas du choix de $(V, (e_i), s)$. Par conséquent, l'ensemble Γ des éléments γ de $v(\widetilde{a_i(x)})$ tels que $\gamma v(\sigma) \leqslant 1$ est indépendant de $(V, (e_i), s)$; or $v(\sigma)$ est l'inverse du plus grand élément de Γ, ce qui montre (b). □

17.3.4. — La donnée pour tout élément homogène non nul σ de $\widetilde{E(x)}$ de l'application $v \mapsto v(\sigma)$ définit (en posant en plus $v(0) = 0$) une métrique au-dessus de $\widetilde{(X, x)}$ sur le $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$-espace vectoriel gradué $\widetilde{E(x)}$ (10.6.4).

Soit V un domaine analytique de X contenant x et sur lequel E possède une base orthogonale (e_i) dont les vecteurs sont de norme constante. La famille des $\widetilde{e_i(x)}$ est alors une base de $\widetilde{E(x)}$ (10.8.2), et il résulte de l'assertion (b) de la proposition 17.3.3 que cette base est orthonormée au-dessus de $\widetilde{(V, x)}$.

Puisque E est paralinéaire entier, il existe une famille finie (V_i) de domaines analytiques contenant x et dont la réunion est un voisinage de x tel que chacun des V_i possède une base orthogonale constituée de vecteurs de norme constante. Les $\widetilde{(V_i, x)}$ recouvrent $\widetilde{(X, x)}$, et il résulte de ce qui précède que $\widetilde{E(x)}$ possède pour tout i une base orhonormée au-dessus de $\widetilde{(V_i, x)}$. Ceci entraîne que $(\widetilde{E(x)}, s \mapsto (v \mapsto v(s)))$ est associé à un fibré vectoriel de rang n sur $\widetilde{(X, x)}$, que nous noterons $\widetilde{E_x}$. Nous l'appelons le *fibré résiduel* de E en x.

17.3.5. — Rappelons ici les liens entre $\widetilde{E_x}$ et $\widetilde{E(x)}$:

– le faisceau $\widetilde{E_x}$ est un sous-faisceau du faisceau constant $\underline{\widetilde{E(x)}}$; pour tout ouvert non vide U de $\widetilde{(X, x)}$ et tout $r > 0$ le groupe $\widetilde{E_x}(U)_r$ est le sous-groupe de $\widetilde{E(x)}_r$ formé des sections s telles que $v(s) \leqslant 1$ pour tout $v \in U$;

– l'espace vectoriel gradué $\widetilde{E(x)}$ est la fibre générique du fibré vectoriel $\widetilde{E_x}$; pour toute section homogène s de $\widetilde{E(x)}$, tout $v \in U$ et tout $a \in \widetilde{\mathscr{H}(x)}^\times$ on a $v(s) \leqslant v(a)^{-1}$ si et seulement si $as \in (\widetilde{E_x})_v$;

– si $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de $\widetilde{E(x)}$ et si U est un ouvert de $\widetilde{(X,x)}$, la base (ε_i) est orthonormée au-dessus de U si et seulement si les $\varepsilon_i|_U$ constituent une base de $\widetilde{E_x}|_U$.

On déduit alors de 17.3.4 que si V est un domaine analytique de X contenant x tel que $E|_V$ possède une base orthognale (e_i) dont les vecteurs sont de norme constante sur V, les $\widetilde{e_i(x)}|_{\widetilde{(V,x)}}$ forment une base de $\widetilde{E_x}|_{\widetilde{(V,x)}}$.

17.3.6. — Supposons que X est presque bon en x et que E est trivialisable comme fibré vectoriel au voisinage de x. Soit V un domaine analytique de X contenant x. Il résulte du lemme 17.3.2 que pour tout réel $r > 0$ le groupe des sections homogènes de degré r de $\widetilde{E_x}$ sur $\widetilde{(V,x)}$ est le quotient du groupe des sections s de E sur le germe (X,x) telles que $\|s\| \leqslant r$ sur le germe (V,x) par son sous-groupe formé des sections s telles que $\|s(x)\| < r$.

§ 17.4. PROPRIÉTÉS DU FONCTEUR DE RÉDUCTION DES FIBRÉS MÉTRISÉS

On conserve les notations de la section précédente : X est un espace k-analytique séparé, x un point de X et E un fibré vectoriel métrisé paralinéaire entier sur X dont on note n le rang.

17.4.1. — Il résulte de la construction que ni la métrique sur $\widetilde{E(x)}$ au-dessus de $\widetilde{(X,x)}$ ni (par conséquent) $\widetilde{E_x}$ ne sont modifiés si l'on remplace X par un voisinage analytique U de x dans X, et E par $E|_U$: le fibré résiduel de E en x ne dépend donc que du germe de E en x.

Cette dépendance est fonctorielle : si U est un voisinage analytique de x dans X et si F un fibré vectoriel sur U muni d'une métrique paralinéaire entière, toute isométrie de $E|_U$ sur F induit une isométrie de $\widetilde{E(x)}$ sur $\widetilde{F(x)}$, et donc un isomorphisme de $\widetilde{E_x}$ sur $\widetilde{F_x}$.

Si V est un domaine analytique de X contenant x, on a par construction $\widetilde{(E|_V)_x} = \widetilde{E_x}|_{\widetilde{(V,x)}}$. Plus généralement, pour tout espace analytique séparé Y sur une extension de k, tout morphisme $p\colon Y \to X$ et tout $y \in p^{-1}(x)$, le fibré résiduel $\widetilde{(p^*E)_y}$ est égal à $q^*\widetilde{E_x}$ où q est l'application de $\widetilde{(Y,y)}$ vers $\widetilde{(X,x)}$ induite par p.

17.4.2. — Soit F un fibré métrisé paralinéaire entier sur X. Soit G le fibré métrisé $E \otimes F$. Soit σ un élément homogène de $\widetilde{E(x)}$ et soit τ un élément homogène de $\widetilde{F(x)}$. Relevons-les respectivement en des éléments s et t de $E(x)$ et $F(x)$. Un calcul explicite dans des bases orthogonales de $E(x)$ et $F(x)$ montre que $\widetilde{(s \otimes t)(x)}$ ne dépend que de σ et τ. On définit ainsi une application bilinéaire de $\widetilde{E(x)} \times \widetilde{F(x)}$ vers $\widetilde{G(x)}$ et donc une application linéaire de $\widetilde{E(x)} \otimes \widetilde{F(x)}$ vers $\widetilde{G(x)}$ dont on vérifie (en utilisant là encore des

bases orthogonales de $E(x)$ et $F(x)$) que c'est un isomorphisme.Cet isomorphisme est en fait une isométrie, comme on le voit en se ramenant par un raisonnement G-local sur le germe (X, x) au cas où E et F possèdent chacun une base orthogonale dont les vecteurs sont de norme constante.

On dispose donc d'un isomorphisme naturel entre $\widetilde{E_x} \otimes \widetilde{F_x}$ et $\widetilde{G_x}$.

17.4.3. — Soit $r > 0$ et soit σ une section de $\widetilde{E^\vee(x)}^\vee$ homogène de degré r. Soit τ une section homogène de $\widetilde{E(x)}$. Relevons σ en un élément s de $\mathrm{Hom}(E(x), \mathscr{H}(x)[r])$ et τ en un élément t de $E(x)$. Un calcul explicite dans une base orthogonale de $E(x)$ montre que l'élément homogène $\widetilde{s(t)(x)}$ de $\widetilde{\mathscr{H}(x)}[r]$ ne dépend que de σ et τ, et pas des relèvements s et t. On obtient ainsi une application linéaire de $\widetilde{E^\vee(x)}$ dans $\widetilde{E(x)}^\vee$ dont on vérifie (en utilisant là encore une base orthogonale de $E(x)$) que c'est un isomorphisme.Cet isomorphisme est en fait une isométrie, comme on le voit en se ramenant par un raisonnement G-local sur le germe (X, x) au cas où E possèdent une base orthogonale dont les vecteurs sont de norme constante.

On dispose donc d'un isomorphisme naturel entre $\widetilde{E_x^\vee}$ et $\widetilde{E_x}^\vee$.

Lemme 17.4.4. — *Soit F un fibré vectoriel métrisé paralinéaire entier sur X. Soit V un domaine analytique de X contenant x. Soit u un isomorphisme de fibrés vectoriels de E sur F tel que le morphisme induit $u(x)\colon E(x) \to F(x)$ soit une isométrie ; soit θ l'isomorphisme de $\widetilde{E(x)}$ sur $\widetilde{F(x)}$ induit par $u(x)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe un voisinage analytique U de x dans X tel que $u|_{U\cap V}$ soit une isométrie ;*

(ii) *l'application θ est une isométrie au-dessus de $\widetilde{(V, x)}$, c'est-à-dire que l'on a $v(\theta(s)) = v(s)$ pour toute section homogène s de $\widetilde{E(x)}$ et toute $v \in \widetilde{(V, x)}$;*

(iii) *l'application θ induit un isomorphisme de $\widetilde{E_x}|_{\widetilde{(V,x)}}$ sur $\widetilde{F_x}|_{\widetilde{(V,x)}}$.*

Démonstration. — L'équivalence de (ii) et (iii) résulte des généralités rappelées en 17.3.5, et l'implication (i)⇒(ii) provient de la fonctorialité de la construction du fibré résiduel, et de son bon comportement par restriction à un domaine analytique. Supposons maintenant que (ii) est vraie, et montrons (i). Pour ce faire on peut remplacer X par n'importe quel voisinage analytique de x dans X. On peut ainsi supposer que X et V sont compacts. Il existe alors un recouvrement fini (V_j) de V par des domaines analytiques compacts tels que $E|_{V_j}$ et $F|_{V_j}$ admettent pour tout j une base orthogonale dont les vecteurs sont de norme constante sur V_j. Il suffit alors d'exhiber pour chaque j un voisinage ouvert U_j de x dans X tel que $u|_{V_j\cap U_j}$ soit une isométrie : en effet dans ce cas la restriction de u à $U := \bigcap U_j$ induira une isométrie sur $V \cap U$, par vérification sur le G-recouvrement de $V \cap U$ par les $V_j \cap U$. On se ramène ainsi au cas où $E|_V$ et $F|_V$ possèdent chacun une base orthogonale à vecteurs de norme constante. Il suffit dès lors de montrer l'existence d'un voisinage analytique U de x tel que $u|_{V\cap U}$ diminue les normes (au sens large). En effet l'application de ce résultat à u^{-1} montrera que U peut être choisi de sorte que $u^{-1}|_{V\cap U}$ diminue également les normes, auquel cas $u|_{V\cap U}$ sera une isométrie.

Choisissons une base orthogonale (s_i) pour de $E|_V$ tel que $\|s_i\|$ soit pour tout i de norme constante ρ_i.

Par hypothèse sur u on a pour tout indice i les égalités $\|u(s_i)(x)\| = \|s_i(x)\| = \rho_i$ et $\widetilde{u(s_i)}(x) = \theta(\widetilde{s_i(x)})$. Soit $v \in \widetilde{(V,x)}$. Par choix de s_i on a $\|s_i\| = \rho_i$ identiquement sur V, si bien que $v(\widetilde{s_i(x)}) = 1$. Comme on travaille sous l'hypothèse (ii) on en déduit que $v(\theta(\widetilde{s_i(x)})) = 1$. Ceci valant pour tout v appartenant à $\widetilde{(V,x)}$, on a l'égalité $\|u(s_i)\| = \rho_i$ au voisinage de x sur V. Comme il y a un nombre fini d'indices i, on en déduit l'existence d'un voisinage analytique U de x dans X tel que $\|u(s_i)\| = \rho_i$ identiquement sur $V \cap U$ pour tout i. Pour toute famille (b_i) de fonctions analytiques définies sur un domaine analytique W de $V \cap U$ on a alors $\|\sum b_i s_i\| = \max_i \|b_i\|\rho_i$ identiquement sur W, et

$$\|u(\sum b_i s_i)\| = \|\sum b_i u(s_i)\| \leqslant \max_i \|b_i\|\rho_i$$

identiquement sur W. Par conséquent u diminue les normes sur $V \cap U$, ce qui achève la démonstration. □

Corollaire 17.4.5. — *Soit (e_i) une base de E telle que les $\widetilde{e_i(x)}$ forment une base de $\widetilde{E(x)}$ et soit V un domaine analytique de X contenant x. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe un voisinage analytique U de x tel que les $e_i|_{V\cap U}$ soient de norme constante et constituent une base orthogonale de $E|_{V\cap U}$;*

(ii) *la base $(\widetilde{e_i(x)})$ est orthonormée au-dessus de $\widetilde{(V,x)}$;*

(iii) *les $\widetilde{e_i(x)}|_{\widetilde{(V,x)}}$ constituent une base de $\widetilde{E_x}|_{\widetilde{(V,x)}}$.*

Démonstration. — L'équivalence de (ii) et (iii) résulte des propriétés générales rappelées en 17.3.5. L'implication (i)⇒(ii) découle de 17.3.4.

Supposons que (iii) soit vraie. Soit n le rang de E. Pour tout i, posons $r_i = \|e_i(x)\|$. Soit F le fibré vectoriel $\mathscr{O}_X^n$ muni de la métrique paralinéaire entière $(a_i) \mapsto \sup_i \|a_i\| \cdot r_i$. Soit u le morphisme de F vers E qui envoie (a_i) sur $\sum a_i e_i$. L'hypothèse faite sur les e_i signifie précisément que $u(x)\colon F(x) \to E(x)$ est une isométrie (10.8.2). Soit (f_i) la base canonique de F. Elle est par construction orthogonale et constituée de vecteurs de norme constante. En utilisant (pour le fibré métrisé paralinéaire entier F) l'implication (i)⇒(iii) déjà établie, on en déduit que les $\widetilde{f_i(x)}$ forment une base de $\widetilde{F_x}$. Puisqu'on suppose que (iii) est vraie (pour le fibré métrisé paralinéaire entier E), le morphisme $\widetilde{u(x)}$ induit un isomorphisme de $\widetilde{F_x}|_{\widetilde{(V,x)}}$ sur $\widetilde{E_x}|_{\widetilde{(V,x)}}$. Le lemme 17.4.4 assure alors l'existence d'un voisinage analytique U de x dans X tel que $u|_{V\cap U}$ soit une isométrie ; mais cela signifie précisément que les $e_i|_{V\cap U}$ sont de norme constante et constituent une base orthogonale de $E|_{V\cap U}$.

□

Corollaire 17.4.6. — *Supposons que X est presque bon en x et que E est trivialisable au voisinage de x comme fibré vectoriel. Soit F un fibré vectoriel métrisé paralinéaire entier sur X, lui aussi trivialisable comme fibré vectoriel au voisinage de X. Soit V un domaine analytique de X contenant x et soit θ un isomorphisme de $\widetilde{E(x)}$ sur $\widetilde{F(x)}$ induisant un isomorphisme de $\widetilde{E_x}|_{\widetilde{(V,x)}}$ sur $\widetilde{F_x}|_{\widetilde{(V,x)}}$. Il existe alors un voisinage analytique U de x dans X et un isomorphisme de fibrés vectoriels $u\colon E_U \simeq F|_U$ tel que $u|_{V\cap U}$ soit une isométrie et tel que $\widetilde{u(x)} = \theta$.*

Démonstration. — Il existe par hypothèse un voisinage analytique U de x dans X tel que $E|_U$ et $F|_U$ soient libres et en particulier engendré par leurs sections globales. Le lemme 17.3.2 assure alors qu'on peut supposer, quitte à restreindre U, qu'il existe un isomorphisme u de fibrés vectoriels de $E|_U$ sur $F|_U$ tel que $u(x)$ soit une isométrie dont la réduction $\widetilde{u(x)}$ est égale à θ. Il résulte alors du lemme 17.4.4 qu'on peut restreindre U de sorte que $u|_{V\cap U}$ soit une isométrie. □

Proposition 17.4.7. — *Supposons que X est presque bon en x. Soit M un fibré vectoriel sur $\widetilde{(X,x)}$. Il existe un voisinage analytique U de x dans X et un fibré vectoriel métrisé paralinéaire entier F sur X, trivialisable au voisinage de x comme fibré vectoriel, tel que $\widetilde{F_x} \simeq M$.*

Démonstration. — Soit m le rang de M. Il existe une famille finie (V_α) de domaines analytiques contenant x tel que les germes (V_α, x) recouvrent (X, x) et, pour tout i, un isomorphisme θ_α de $M|_{\widetilde{(V_\alpha,x)}}$ sur $\mathscr{O}_{\widetilde{(V_\alpha,x)}}[r_\alpha]$ pour un certain polyrayon $r_\alpha = (r_{\alpha i})_i$ de longueur m. Nous notons encore θ_α l'isomorphisme $M_\eta \simeq \widetilde{\mathscr{H}(x)}[r_\alpha]$ d'espaces vectoriels gradués induit par localisation au point générique.

Pour tout α, désignons par F_α le fibré vectoriel $\mathscr{O}_X^m$ muni de la métrique paralinéaire entière $(a_i) \mapsto \sup_i |a_i| \cdot r_{\alpha i}$; on a $\widetilde{F_{\alpha,x}} = \mathscr{O}_{\widetilde{(X,x)}}[r_\alpha]$.

Fixons un indice α. En vertu du corollaire 17.4.6 et de la finitude de la famille $(V_\beta)_\beta$ il existe un voisinage analytique U de x dans X et, pour tout $\beta \neq \alpha$, un automorphisme $u_{\alpha\beta}$ de $\mathscr{O}_U^m$ induisant une isométrie de $F_\beta|_{V_\alpha\cap V_\beta\cap U}$ sur $F_\alpha|_{V_\alpha\cap V_\beta\cap U}$; on pose par ailleurs $u_{\alpha\alpha} = \mathrm{Id}^m_{\mathscr{O}_U}$.

Pour tout couple (β,γ) on pose alors $u_{\beta\gamma} = u_{\alpha\beta}^{-1} u_{\alpha\gamma}$ (la notation $u_{\alpha\gamma}$ dans ce sens coïncide avec celle introduite précédemment). Chacun des $u_{\beta\gamma}$ est un automorphisme de $\mathscr{O}_U^m$ induisant une isométrie de $F_\gamma|_{V_\beta\cap V_\gamma\cap U}$ sur $F_\beta|_{V_\beta\cap V_\gamma\cap U}$. La famille des $(u_{\beta\gamma})$ satisfait visiblement les relations de cocycle et l'on peut donc l'utiliser pour recoller les fibrés métrisés $F_\beta|_{U\cap V_\beta}$ en un fibré métrisé F ; par définition, F est paralinéaire entier, et il résulte de sa construction que l'on dispose pour tout β d'un isomorphisme composé

$$\lambda_\beta \colon \widetilde{F_x}|_{\widetilde{(V_\beta,x)}} \simeq \widetilde{F_{\beta,x}}|_{\widetilde{(V_\beta,x)}} = \mathscr{O}_{\widetilde{(V_\beta,x)}}[r_\beta] \xrightarrow[\theta_\beta^{-1}]{\sim} M|_{\widetilde{(V_\beta,x)}}$$

et que $\lambda_\beta = \lambda_\gamma$ sur $\widetilde{(V_\beta,x)} \cap \widetilde{(V_\gamma,x)}$ pour tout (β,γ). Ainsi, les λ_β se recollent en un isomorphisme de $\widetilde{F_x}$ sur M. □

17.4.8. — Soit X un espace k-analytique séparé et soit $x \in X$. Notons $\mathsf{F}(X,x)$ le groupoïde des germes de fibrés vectoriels paralinéaires entiers en x, défini comme suit. On part de la catégorie $\mathsf{C}(X,x)$ dont les objets sont les couples (U,E) où U est un voisinage analytique de x dans X et E un fibré vectoriel métrisé paralinéaire entier sur U, et dans laquelle l'ensemble des morphismes de (V,F) vers (U,E) est vide si V n'est pas contenu dans U, et est l'ensemble des isométries de F sur $E|_U$ sinon ; on définit alors $\mathsf{F}(X,x)$ comme la localisation de $\mathsf{C}(X,x)$ par la collection de toutes ses flèches ; un objet de $\mathsf{F}(X,x)$ possède un rang (le rang en x du fibré vectoriel d'où il provient), invariant par isomorphismes de $\mathsf{F}(X,x)$. On note $\breve{\mathsf{F}}(X,x)$ la sous-catégorie de $\mathsf{F}(X,x)$ formée des objets qui sont triviaux en tant que germe de fibré vectoriel (sans métrique), c'est-à-dire isomorphes à un objet (U,E) où E est libre comme fibré vectoriel. Si le germe (X,x)

est bon on a $\breve{\mathsf{F}}(X,x) = \mathsf{F}(X,x)$. Enfin nous noterons $\widetilde{\mathsf{F}}(X,x)$ le groupoïde des fibrés vectoriels sur $\widetilde{(X,x)}$) (on ne considère donc comme flèches que les isomorphismes de fibrés vectoriels).

On peut récapituler ce qui précède à travers le théorème suivant.

Théorème 17.4.9. — *Soit X un espace k-analytique séparé et soit x un point de X. Soit n un entier.*

a) *La formule $E \mapsto \widetilde{E_x}$ définit un foncteur de $\mathsf{F}(X,x)$ vers $\widetilde{\mathsf{F}}(X,x)$ qui préserve le rang, commute au produit tensoriel, à la formation du dual, et au changement de base.*

b) *Supposons que le germe (X,x) est presque bon. Le foncteur $E \mapsto \widetilde{E_x}$ est essentiellement surjectif, et c'est déjà le cas de sa restriction à $\breve{\mathsf{F}}(X,x)$; cette dernière est également pleine.*

c) *Supposons que le germe (X,x) est bon. Le foncteur $E \mapsto \widetilde{E_x}$ est plein.*

Démonstration. — L'énoncé (a) résulte de 17.4.1, 17.4.2 et 17.4.3. Supposons que (X,x) est presque bon. La proposition 17.4.7 assure précisément que la restriction à $\breve{\mathsf{F}}$ du foncteur $E \mapsto \widetilde{E_x}$ est essentiellement surjective. Montrons qu'elle est pleine. Soit donc E et F deux objets de $\breve{\mathsf{F}}_n$, et supposons donné un isomorphisme θ entre $\widetilde{E_x}$ et $\widetilde{F_x}$; soit θ' le morphisme induit de $\widetilde{E(x)}$ sur $\widetilde{F(x)}$. Le corollaire 17.4.6 assure qu'il existe un isomorphisme u entre les germes en x de fibrés vectoriels (non métrisés) E et F qui induit une isométrie de $E(x)$ sur $F(x)$ dont la réduction $\widetilde{u(x)}$ coïncide avec θ'. Puisque θ'induit l'isomorphisme θ entre $\widetilde{E_x}$ et $\widetilde{F_x}$, le lemme 17.4.4 garantit que u est en réalité une isomorphisme entre germes de fibrés vectoriels métrisés sur (X,x), ce qui montre la plénitude attendue, et achève la preuve de (b).

L'assertion (c) résulte de (b) et du fait que $\breve{\mathsf{F}}(X,x) = \mathsf{F}(X,x)$ lorsque (X,x) est bon. □

Lemme 17.4.10. — *Soit X un espace k-analytique séparé, soit x un point de X, et soit E un fibré vectoriel métrisé paralinéaire entier sur X. Soit s une section de E sur X ne s'annulant pas en x et soit $(a_1,\dots,a_n)$ une famille non vide de fonctions analytiques sur X inversibles en x. Pour tout i, posons $r_i = |a_i(x)| \cdot \|s(x)\|^{-1}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe un voisinage analytique U de x dans X tel que $\|s\|^{-1} = \max_i |a_i| \cdot r_i$ identiquement sur U ;*

(ii) *on a $v(\widetilde{s(x)})^{-1} = \max_i v(\widetilde{a_i(x)})$ pour tout $v \in \widetilde{(X,x)}$.*

Démonstration. — Pour tout i, notons V_i le domaine analytique de X défini par l'égalité $\|s\|^{-1} = |a_i| \cdot r_i$, et soit W le domaine de X décrit par la conjonction d'inégalités $\|s\|^{-1} \leqslant |a_i| \cdot r_i$ pour i variant de 1 à n. Par définition des r_i, le point x appartient à W et à chacun des V_i. Posons $V = W \cap (\bigcup_i V_i)$. C'est un domaine analytique de X contenant x, et c'est précisément le lieu de validité de l'égalité $\|s\|^{-1} = \max_i |a_i| \cdot r_i$.

La réduction $\widetilde{(V,x)}$ est l'intersection de $\widetilde{(W,x)}$ et de la réunion des $\widetilde{(V_i,x)}$. Par construction, $\widetilde{(W,x)}$ est l'ensemble des $v \in \widetilde{(X,x)}$ telles que $v(\widetilde{s(x)})^{-1} \leqslant v(\widetilde{a_i(x)})$ pour tout i, et $\widetilde{(V_i,x)}$ est l'ensemble des $v \in \widetilde{(X,x)}$ telles que $v(\widetilde{s(x)})^{-1} = v(\widetilde{a_i(x)})$. Il s'ensuit que $\widetilde{(V,x)}$ est l'ensemble des $v \in \widetilde{(X,x)}$ telles que $v(\widetilde{s(x)}) = \max_i v(\widetilde{a_i(x)})$.

L'équivalence requise résulte alors du fait que $\widetilde{(V,x)} = \widetilde{(X,x)}$ si et seulement si V est un voisinage de x dans X. □

Corollaire 17.4.11. — *Soit L un fibré en droites métrisé paralinéaire entier sur X, trivialisable comme fibré vectoriel au voisinage de x. Soit s une section inversible de L au voisinage de x et soit (a_i) une famille finie d'éléments de $\mathscr{O}_{X,x}^{\times}$. Pour tout i, posons $r_i = |a_i(x)| \cdot \|s(x)\|^{-1}$.*

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *Les $\widetilde{a_i s(x)}$ sont des sections globales de $\widetilde{L_x}$ qui l'engendrent.*

ii) *On a $\|s\|^{-1} = \max_i |a_i| \cdot r_i$ au voisinage de x.*

Démonstration. — Cela découle immédiatement du lemme 17.4.10 et du lemme 10.6.15. □

Corollaire 17.4.12. — *Soit L un fibré en droites métrisé paralinéaire entier sur X, trivialisable comme fibré vectoriel au voisinage de x. Soit s une section inversible de L au voisinage de x. Supposons le germe (X,x) presque bon. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le fibré résiduel $\widetilde{L_x}$ est engendré par ses sections globales.*

ii) *Il existe une famille finie finie (a_i) de fonctions appartenant à $\mathscr{O}_{X,x}^{\times}$ telles que $\|s\|^{-1} = \max_i |a_i| \cdot r_i$ au voisinage de x, où $r_i = |a_i(x)| \cdot \|s(x)\|^{-1}$.*

De plus si elles sont satisfaites et si Λ désigne un corps gradué de définition de $\widetilde{L_x}$, on peut choisir les a_i de sorte que $\widetilde{a_i(x)/a_j(x)} \in \Lambda$ pour tout (i,j).

Démonstration. — L'équivalence entre (i) et (ii) résulte du corllaire 10.6.16, du lemme 17.4.10, et du fait que comme X est presque bon en x, l'application naturelle de $\mathscr{O}_{X,x}^{\times}$ vers $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^{\times}$ est surjective. La dernière affirmation découle de la remarque 10.6.17 et, là encore, de la surjectivité de $\mathscr{O}_{X,x}^{\times} \to \widetilde{\mathscr{H}(x)}^{\times}$. □

Proposition 17.4.13. — *Soit (X,x) un germe d'espace k-analytique séparé et presque bon. Soit L un fibré en droites métrisé paralinéaire entier sur (X,x), localement trivialisable comme fibré en droites. La métrique sur L est alors lisse au voisinage de x si et seulement si $\widetilde{L_x}$ est de torsion.*

Démonstration. — Supposons que $\widetilde{L}_x$ soit de torsion. Soit n un entier $\geqslant 1$ tel que $\widetilde{L}(x)^{\otimes n}$ soit trivial. D'après le théorème 17.4.9, le germe de fibré métrisé $L^{\otimes n}$ est trivial, si bien que sa métrique est lisse au voisinage de x. Par suite, la métrique de L est lisse au voisinage de x.

Réciproquement, supposons que la métrioque de L soit lisse au voisinage de x. Soit s une section inversible de L au voisinage de x. La fonction $\log(\|s\|)$ est à la fois paralinéaire entière et lisse au voisinage de x. D'après la proposition 12.5.4, il existe un entier $n \geqslant 1$ et une fonction holomorphe inversible f sur (X,x) tels que $n\log(\|s\|) = \log(|f|)$. La base locale $f^{-1}s^{\otimes n}$ de $L^{\otimes n}$ est alors de norme constante 1. Le fibré résiduel de $L^{\otimes n}$ est alors trivial, si bien que $\widetilde{L_x}^{\otimes n}$ est trivial. □

§ 17.5. FIBRÉS RÉSIDUELS : LE CAS STRICT

On reprend les notations des sections précédentes : X est un espace k-analytique séparé, x un point de X et E un fibré vectoriel métrisé paralinéaire entier sur X dont on note n le rang. On suppose de plus que X est strict.

Lemme 17.5.1. — *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La métrique de E est strictement paralinéaire entière au voisinage de x.*
(ii) *Le fibré résiduel $\widetilde{E_x}$ est strict.*

Démonstration. — Supposons (i). Soit (V_i) une famille finie de domaines strictement k-analytiques, contenant x et dont la réunion est un voisinage de x, et tels que E_{V_i} possède pour tout i une base orthonormée $(e_{ij})_j$. Il résulte de la construction de 17.3.5 que $(\widetilde{e_{ij}(x)})_j$ est pour tout i une base de $\widetilde{E_x}|_{\widetilde{(V_i,x)}}$, dont les éléments sont homogènes de degré 1 ; puisque les $\widetilde{(V_i,x)}$ recouvrent $\widetilde{(X,x)}$, le fibré $\widetilde{E_x}$ est strict.

Réciproquement, supposons que $\widetilde{E_x}$ est strict. Il existe un recouvrement fini (U_i) de $\widetilde{(X,x)}$ par des ouverts quasi-compacts stricts et, pour tout i, une base (ϵ_{ij}) de $\widetilde{E_x}|_{U_i}$ constituée de sections de degré 1. On peut supposer que les U_i sont affines. Chacun des U_i est alors égal à $\widetilde{(V_i,x)}$ pour un bon domaine strictement k-analytique V_i de X contenant x, et la réunion des V_i est un voisinage de x. Puisque V_i est bon (ce qui entraîne que $E|_{V_i}$ est engendré par ses sections globales au voisinage de x dans V_i), il résulte du lemme 17.3.2 que chaque ϵ_{ij} se relève en une section e_{ij} de E au voisinage de x, et l'on déduit du corollaire 17.4.5 que les e_{ij} forment une base orthonormée de E sur un voisinage de x dans V_i. On peut donc restreindre les V_i de sorte que chacun des $E|_{V_i}$ possède une base orthonormée. Par conséquent, la métrique paralinéaire de E est strictement entière au voisinage de x. □

17.5.2. — Supposons que les assertions équivalentes ci-dessus soient satisfaites. Rappelons que pour tout domaine analytique strict V de X contenant x, nous désignons par $\widetilde{(V,x)}^1$ l'ouvert quasi-compact de $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1/\widetilde{k}^1}$ dont il provient (qui est aussi l'image de $\widetilde{(V,x)}^1$ sur $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1/\widetilde{k}^1}$). Nous noterons $\widetilde{E_x}^1$ le fibré vectoriel sur $\widetilde{(X,x)}^1$ d'où $\widetilde{E_x}$ provient. Cette notation est cohérente avec le fait que pour tout domaine analytique strict V de X contenant x, les sections de $\widetilde{E_x}^1$ sur $\widetilde{(V,x)}^1$ sont précisément les sections homogènes de degré 1 de $\widetilde{E_x}$ sur $\widetilde{(V,x)}$.

Il résulte de nos constructions que le fibré résiduel strict $\widetilde{E_x}^1$ peut être directement décrit comme suit, en termes de $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1$-espace vectoriel gradué métrisé.

Le $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1$-espace vectoriel gradué sous-jacent à $\widetilde{E_x}^1$ est $\widetilde{E(x)}^1$, c'est-à-dire le quotient du groupe des éléments de $E(x)$ de norme $\leqslant 1$ par son sous-groupe formé des éléments de norme < 1. La métrique sur $\widetilde{E(x)}^1$ définissant le fibré vectoriel $\widetilde{E_x}^1$ est caractérisé par la propriété suivante. Soit V un domaine strictement k-analytique de X contenant x

et soit s une section de E sur V telle que $\|s(x)\| = 1$. Soit W le domaine strictement k-analytique de X défini par l'inégalité $\|s\| \leqslant 1$. Alors $\widetilde{(W,x)}^1$ est l'ensemble des valuations $v \in \widetilde{(V,x)}^1$ telles que $v(\widetilde{s(x)}) \leqslant 1$.

Chacun des énoncés vus à la section précédente admet une déclinaison stricte, qui peut soit être déduite de l'énoncé en question *via* l'équivalence de catégories de 10.6.2, soit être démontrée directement en suivant *mutatis mutandis* la preuve de l'énoncé original. Nous allons indiquer ci-dessous ces différentes variantes strictes, sans preuve. On suppose à partir de maintenant que le fibré métrisé paralinéaire E est strictement entier.

***Lemme 17.5.3* (variante stricte du lemme 17.4.4).** — *Soit F un fibré vectoriel métrisé paralinéaire strictement entier sur X. Soit V un domaine strictement analytique de X contenant x. Soit u un isomorphisme de fibrés vectoriels de E sur F tel que le morphisme induit $u(x)\colon E(x) \to F(x)$ soit une isométrie ; soit θ l'isomorphisme de $\widetilde{E(x)}^1$ sur $\widetilde{F(x)}^1$ induit par $u(x)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe un voisinage analytique U de x dans X tel que $u|_{U\cap V}$ soit une isométrie ;*

(ii) *l'application θ est une isométrie au-dessus de $\widetilde{(V,x)}^1$, c'est-à-dire que l'on a $v(\theta(s)) = v(s)$ pour toute section s de $\widetilde{E(x)}^1$ et toute $v \in \widetilde{(V,x)}^1$;*

(iii) *l'application θ induit un isomorphisme de $\widetilde{E_x}^1|_{\widetilde{(V,x)}^1}$ sur $\widetilde{F_x}^1|_{\widetilde{(V,x)}^1}$.*

***Corollaire 17.5.4* (variante stricte du corollaire 17.4.5)**

Soit (e_i) une base de E telle que $\|e_i(x)\| = 1$ pour tout i et telle que les $\widetilde{e_i(x)}$ forment une base de $\widetilde{E(x)}^1$ et soit V un domaine strictement analytique de X contenant x. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *il existe un voisinage analytique U de x tel que les $e_i|_{V\cap U}$ constituent une base orthonormée de $E|_{V\cap U}$;*

(ii) *la base $(\widetilde{e_i(x)})$ est orthonormée au-dessus de $\widetilde{(V,x)}^1$;*

(iii) *les $\widetilde{e_i(x)}|_{\widetilde{(V,x)}^1}$ constituent une base de $\widetilde{E_x}^1|_{\widetilde{(V,x)}^1}$.*

***Corollaire 17.5.5* (variante stricte du corollaire 17.4.6)**

Supposons que X est presque bon en x et que E est trivialisable au voisinage de x comme fibré vectoriel. Soit F un fibré vectoriel métrisé paralinéaire strictement entier sur X, lui aussi trivialisable comme fibré vectoriel au voisinage de X. Soit V un domaine strictement analytique de X contenant x et soit θ un isomorphisme de $\widetilde{E(x)}^1$ sur $\widetilde{F(x)}^1$ induisant un isomorphisme de $\widetilde{E_x}^1|_{\widetilde{(V,x)}^1}$ sur $\widetilde{F_x}^1|_{\widetilde{(V,x)}^1}$. Il existe alors un voisinage analytique U de x dans X et un isomorphisme de fibrés vectoriels $u\colon E_U \simeq F|_U$ tel que $u|_{V\cap U}$ soit une isométrie et tel que $\widetilde{u(x)} = \theta$.

***Proposition 17.5.6* (variante stricte de la proposition 17.4.7)**

Supposons que X est presque bon en x. Soit M un fibré vectoriel sur $\widetilde{(X,x)}^1$. Il existe un voisinage analytique U de x dans X et un fibré vectoriel métrisé paralinéaire strictement entier F sur X, trivialisable au voisinage de x comme fibré vectoriel, tel que $\widetilde{F_x}^1 \simeq M$.

Notons $\mathsf{F}(X,x)^{\mathrm{str}}$, $\widetilde{\mathsf{F}}(X,x)^{\mathrm{str}}$ et $\breve{\mathsf{F}}^{\mathrm{str}}(X,x)$ les variantes strictes des catégories introduites en 17.4.8.

Théorème 17.5.7. — *Soit X un espace strictement k-analytique séparé et soit x un point de X. Soit n un entier.*

a) *La formule $E \mapsto \widetilde{E_x}^1$ définit un foncteur de $\mathsf{F}^{\mathrm{str}}(X,x)$ vers $\widetilde{\mathsf{F}}^{\mathrm{str}}(X,x)$ qui préserve le rang, commute au produit tensoriel, à la formation du dual, et au changement de base.*

b) *Supposons que le germe (X,x) est presque bon. Le foncteur $E \mapsto \widetilde{E_x}^1$ est essentiellement surjectif, et c'est déjà le cas de sa restriction à $\breve{\mathsf{F}}^{\mathrm{str}}(X,x)$; cette dernière est également pleine.*

c) *Supposons que le germe (X,x) est bon. Le foncteur $E \mapsto \widetilde{E_x}^1$ est plein.*

Lemme 17.5.8 **(variante stricte du lemme 17.4.10).** — *Soit X un espace strictement k-analytique séparé, soit x un point de X, et soit E un fibré vectoriel métrisé paralinéaire strictement entier sur X. Soit s une section de E sur X telle que $\|s(x)\| = 1$ soit $(a_1,\dots,a_n)$ une famille non vide de fonctions analytiques sur X telles que $|a_i(x)| = 1$ pour tout i. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe un voisinage analytique U de x dans X tel que $\|s\|^{-1} = \max_i |a_i|$ identiquement sur U ;*

(ii) *on a $v(\widetilde{s(x)})^{-1} = \max_i v(\widetilde{a_i(x)})$ pour tout $v \in \widetilde{(X,x)}^1$.*

Corollaire 17.5.9 **(variante stricte du corollaire 17.4.11)**

Soit L un fibré en droites métrisé paralinéaire strictement entier sur X, trivialisable comme fibré vectoriel au voisinage de x. Soit s une section de L au voisinage de x telle que $\|s(x)\| = 1$ et et soit (a_i) une famille finie d'éléments de $\mathscr{O}_{X,x}^\times$ tels que $|a_i(x)| = 1$ pour tout i.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *Les $\widetilde{a_i s(x)}$ sont des sections globales du fibré en droites $\widetilde{L_x}^1$ qui l'engendrent.*

ii) *On a $\|s\|^{-1} = \max_i |a_i|$ au voisinage de x.*

Corollaire 17.5.10 **(variante stricte du corollaire 17.4.12)**

Soit L un fibré en droites métrisé paralinéaire strictement entier sur X, trivialisable comme fibré vectoriel au voisinage de x. Soit s une section de L au voisinage de x telle que $\|s(x)\| = 1$. pposons le germe (X,x) presque bon. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *Le fibré en droites résiduel $\widetilde{L_x}^1$ est engendré par ses sections globales.*

ii) *Il existe une famille finie finie (a_i) de fonctions appartenant à $\mathscr{O}_{X,x}^\times$ telles que $|a_i(x)| = 1$ pour tout i et que $\|s\|^{-1} = \max_i |a_i|$ au voisinage de x.*

De plus si elles sont satisfaites et si Λ désigne un corps de définition de $\widetilde{L_x}^1$, on peut choisir les a_i de sorte que $\widetilde{a_i(x)/a_j}(x) \in \Lambda$ pour tout (i,j).

Proposition 17.5.11 **(variante stricte de la proposition 17.4.13)**

Soit (X,x) un germe d'espace strictement k-analytique séparé et presque bon. Soit L un fibré en droites métrisé paralinéaire strictement entier sur (X,x), localement trivialisable comme fibré en droites. La métrique sur L est alors lisse au voisinage de x si et seulement si $\widetilde{L_x}^1$ est de torsion.

§ 17.6. DIMENSION DE DÉFINITION D'UN FIBRÉ MÉTRISÉ PARALINÉAIRE ENTIER

Définition 17.6.1. — *Soit (X,x) un germe d'espace k-analytique séparé et soit (E_i) une famille de fibrés vectoriels métrisés paralinéaires entiers sur X. La* dimension de définition résiduelle simultanée *des E_i est le plus petit entier d tel qu'il existe un corps gradué de définition de $(\widetilde{(X,x)},(\widetilde{E}_{i,x}))$ de degré de transcendance d.*

Ctte dimension de définition résiduelle est aussi la dimension minimale d'un pré-modèle de $(\widetilde{(X,x)},(\widetilde{E}_{i,x}))$. Elle est inférieure ou égale au degré de transcendance de $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ sur $\tilde{k}$ et en particulier, elle est inférieure ou égale à $\dim_x(X)$. Lorsqu'il y a égalité, le point x est d'Abhyankar : l'extension $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ de $\tilde{k}$ est de degré de transcendance $\dim_x(X)$, elle est de type fini et le groupe $|k^\times|$ est d'indice fini dans $|\mathscr{H}(x)^\times|$ (§11.5.4).

Lorsque (E_i) est une famille de fibrés vectoriels métrisés paralinéaires entiers sur un espace k-analytique presque bon X, on définit sa dimension de définition résiduelle simultanée des E_i en un point x en la restreignant au germe (X,x).

Proposition 17.6.2. — *Soit X un espace k-analytique séparé de dimension $\leqslant n$. Soit d un entier naturel. Soit (E_i) une famille finie de fibrés vectoriels métrisés paralinéaires entiers sur X. L'ensemble W^d des points x de X en lesquels la dimension de définition résiduelle simultanée des E_i est supérieure ou égale à d est contenu dans une partie faiblement analytique de X, de dimension $\leqslant n-d$. En particulier, si $d=n$, cet ensemble est fermé et discret.*

Démonstration. — Soit $x\in X$. Soit $(X_j)_{j\in J}$ une famille finie de domaines affinoïdes de X contenant x, dont la réunion est un voisinage de x, et telle que pour tout (i,j) le fibré métrisé $E_i|_{X_j}$ possède une base orthogonale $(e_{ij\alpha})_\alpha$ dont les vecteurs sont de norme constante. Pour toute partie non vide P de J, notons X_P l'intersection des X_j pour j dans P, et $\rho_P\colon X_P\to\widetilde{X_P}$ l'application de spécialisation. Soit U l'intérieur topologique (dans X) de la réunion des X_i. Il suffit de démontrer que $W^d\cap U$ est faiblement analytique de dimension $\leqslant n-d$.

Soit y un point de U et soit $J(y)$ l'ensemble des indices j tels que $y\in X_j$. Posons $A=\mathscr{O}(X_{J(y)})$, $M_i=E_i(X_{J(y)})$, et $\eta=\rho_{J(y)}(y)$; soit $\kappa(\eta)$ le corps résiduel gradué de η.

L'évaluation en y définit un morphisme contractant de A vers $\mathscr{H}(y)$, qui induit un morphisme de $\widetilde{A}$ vers $\widetilde{\mathscr{H}(y)}$ qui par définition se factorise par $\kappa(\eta)$.

Pour tout i, la semi-norme spectrale $s\mapsto\sup_{z\in X_{J(y)}}\|s(x)\|$ fait de M_i un A-module semi-normé, et l'évaluation définit un morphisme contractant de A-modules normés de M_i vers $E(y)$, d'où un morphisme de $\widetilde{A}$-modules gradués de $\widetilde{M_i}$ vers $\widetilde{E_i(y)}$, qui se factorise par $N_i:=\widetilde{M_i}\otimes_{\widetilde{A}}\kappa(\eta)$. Choisissons $j\in J(y)$.

Quel que soit l'indice i, on a l'égalité $\|\sum\lambda_\alpha e_{ij\alpha}\|=\sup_\alpha\|\lambda_\alpha\|\cdot\|e_{ij\alpha}\|$ pour toute famille (λ_α) d'éléments de A ; il en résulte que les $\widetilde{e_{ij\alpha}}$ forment une base du $\widetilde{A}$-module $\widetilde{M_i}$, puis que leurs images dans N_i (que nous noterons $\widetilde{e_{ij\alpha}}(\eta)$) forment une base de ce dernier comme $\kappa(\eta)$-espace vectoriel gradué. Et comme les $e_{ij\alpha}(y)$ forment une base orthogonale de $E_i(y)$, les $\widetilde{e_{ij\alpha}(y)}$ forment une base de $\widetilde{E_i(y)}$. Le morphisme naturel de $N_i\otimes_{\kappa(\eta)}\widetilde{\mathscr{H}(y)}$ dans $\widetilde{E_i(y)}$ envoyant $1\otimes\widetilde{e_{ij\alpha}}(\eta)$ sur $\widetilde{e_{ij\alpha}(y)}$ pour tout α, c'est un isomorphisme.

Dans ce qui suit, nous nous permettrons de considérer $\kappa(\eta)$ comme un sous-corps gradué de $\widetilde{\mathscr{H}(y)}$, et chacun des N_i comme un sous-$\kappa(\eta)$-espace vectoriel de $\widetilde{M_i}$. Avec ces conventions, chacun des $\widetilde{e_{ij\alpha}(y)}$ appartient à N_i.

Comme y appartient à l'intérieur de $\bigcup_{j\in J} X_j$, la réunion des X_j pour $j \in J(y)$ est un voisinage de y dans X, si bien que $\widetilde{(X,y)} = \bigcup_{j\in J(y)} \widetilde{(X_j,y)}$. Pour tout $j \in J(y)$, posons $B_j = \mathscr{O}(X_j)$. L'ouvert $\widetilde{(X_j,y)}$ est égal à $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(y)}/\widetilde{k}}\{\mathsf{B}_j\}$, où B_j désigne l'image de $\widetilde{B_j}$ dans $\widetilde{\mathscr{H}(y)}$, et $\{\widetilde{e_{ij\alpha}(y)}\}_\alpha$ est une base de $\widetilde{E_{i,y}}|_{\widetilde{(X_j,y)}}$. De plus, le morphisme de B_j vers $\mathscr{H}(y)$ se factorise par A ; en passant aux réductions graduées, on en déduit que le morphisme de $\widetilde{B_j}$ vers $\widetilde{\mathscr{H}(y)}$ se factorise par $\widetilde{A}$, puis par $\kappa(\eta)$; par conséquent, $\mathsf{B}_j \subset \kappa(\eta)$ pour tout j. Joint au fait que les $\{\widetilde{e_{ij\alpha}(y)}\}_\alpha$ appartiennent à N_i pour tout (i,j,α) ceci entraîne au vu du lemme 10.6.11 que $\widetilde{(X,x)}$ est l'image réciproque d'un ouvert V de $\mathbf{P}_{\kappa(\eta)/\widetilde{k}}$ par la projection canonique $\pi\colon \mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(y)}/\widetilde{k}}$ et que chacun des $\widetilde{E_{i,y}}$ est isomorphe à π^*F_i pour un certain fibré vectoriel F_i sur U. Par conséquent, la dimension de définition résiduelle simultanée des E_i en y est majorée par le degré de transcendance de $\kappa(\eta)$ sur $\widetilde{k}$.

Il résulte de ce qui précède que $W_d \cap U$ est contenu dans

$$\bigcup_{\varnothing\subset P\subset J} \{z \in X_P, \text{deg. tr. } (\kappa(\rho_P(z))/\widetilde{k}) \geqslant d\}.$$

En vertu de la proposition 11.10.4, l'ensemble ci-dessus est une partie faiblement analytique de dimension majorée par $n-d$. Il en va dès lors de même de son intersection avec U, ce qui achève la démonstration.

□

Définition 17.6.3. — *Soit (X,x) un germe presque bon d'espace k-analytique. Soit (E_i) une famille de fibrés vectoriels métrisés paralinéaires entiers sur (X,x) dont les fibrés vectoriels sous-jacents sont trivialisables. La dimension de définition analytique simultanée des E_i est le plus petit entier d tel qu'il existe un germe presque bon (Y,y) de dimension d, une famille (F_i) de fibrés vectoriels métrisés paralinéaires entiers (Y,y) dont les fibrés sous-jacents sont trivialisables et un morphisme plat et sans bord $f\colon (X,x) \to (Y,y)$ tel que $E_i \simeq f^*F_i$ pour tout i.*

Cette dimension est bien sûr inférieure ou égale à $\dim_x(X)$, et supérieure ou égale à celle de définition résiduelle simultanée.

Proposition 17.6.4. — *Soit (X,x) un germe presque bon, soit (E_i) une famille finie de fibrés vectoriels métrisés paralinéaires entiers sur (X,x) dont les fibrés sous-jacents sont trivialisables, et soit d la dimension de définition résiduelle simultanée des E_i.*

a) *Supposons qu'il existe un sous-corps gradué L de $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$, contenant $\widetilde{k}$, de type fini et de degré de transcendance d sur $\widetilde{k}$, tel que le module des différentielles graduées $\Omega_{L/\widetilde{k}}$ soit de dimension d comme L-espace vectoriel, et tel que L soit un corps gradué de définition de $(\widetilde{(X,x)}, (\widetilde{E_{i,x}})_i)$. La dimension de définition analytique simultanée de la famille (E_i) est alors égale à d. Plus précisément, on peut trouver (Y,y) comme dans la définition 17.6.3 tel que $\widetilde{\mathscr{H}(y)}$ soit égal à L lorsqu'on le voit comme sous-corps gradué de $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ via $f\colon (X,x) \to (Y,y)$.*

b) *Si le corps $\widetilde{k}$ est parfait, la dimension de définition analytique simultanée de la famille (E_i) est égale à d.*

c) *Si les E_i sont des fibrés en droites et si la famille (E_i) est finie, il existe un entier naturel q, puissance de l'exposant caractéristique p de $\widetilde{k}$, tel que la famille $(E_i^{\otimes p^N})$ soit de dimension de définition analytique simultanée inférieure ou égale à d.*

Pour les notions relatives au module des différentielles ou à la notion de corps parfait et d'extension séparable dans le contexte gradué, on pourra se reporter à la première section de [**51**]. Précisons juste que $\widetilde{k}$ est toujours parfait en caractéristique résiduelle nulle ; en caractéristique résiduelle $p > 0$ il l'est si et seulement si $\widetilde{k}^p = \widetilde{k}$, ce qui revient à demander que le corps $\widetilde{k}_1$ soit parfait et que $|\widetilde{k}^\times| = |k^\times|$ soit p-divisible.

Démonstration. — Montrons tout d'abord l'énoncé 1). Soit $(f_1, \dots, f_d)$ une famille de fonctions analytiques sur (X, x) inversibles en x et telles que les $\widetilde{f_i(x)}$ appartiennent à L et que leurs différentielles forment une base de $\Omega_{L/k}$; leur existence résultent des hypothèses faites sur L et du caractère presque bon de (X, x). Les $\widetilde{f_i(x)}$ forment alors une base de transcendance de L sur $\widetilde{k}$, et L est finie séparable sur son sous-corps engendré par $\widetilde{k}$ et les $\widetilde{f_i(x)}$.

Posons $r = (|f_1(x)|, \dots, |f_d(x)|)$ et $f = (f_1, \dots, f_d)$; par construction, f est un morphisme de (X, x) vers $(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d, \eta_r)$, *via* lequel $\widetilde{\mathscr{H}(\eta_d)}$ s'identifie à $\widetilde{k}(\widetilde{f_1(x)}, \dots, \widetilde{f_d(x)})$.

Soit Λ l'extension modérément ramifiée de $\mathscr{H}(\eta_r)$ dont le corps résiduel gradué est l'extension finie séparable L de $\widetilde{\mathscr{H}(\eta_d)}$ (voir la section 2 [**51**] pour une présentation de la théorie de la ramification modérée en termes de réductions graduées). Par la proposition 3.4.1 de [**9**], l'extension $\mathscr{H}(\eta_r) \hookrightarrow \Lambda$ est induite par un morphisme étale de germes $(Y, y) \to (\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d, \eta_r)$. Puisque $(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d, \eta_r)$ est sans bord, (Y, y) est sans bord, ce qui veut dire que $\widetilde{(Y, y)} = \mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(y)}/\widetilde{k}}$. Le produit tensoriel $\mathscr{H}(x) \otimes_{\mathscr{H}(\eta_r)} \mathscr{H}(y)$ est une $\mathscr{H}(x)$-algèbre étale modérément ramifiée, d'algèbre étale résiduelle graduée $\widetilde{\mathscr{H}(x)} \otimes_{\widetilde{k}(\widetilde{f_1(x)}, \dots, \widetilde{f_d(x)})} L$, et le plongement de L dans $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ fournit un quotient de cette algèbre étale égal à $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$; ce dernier correspond à un quotient de $\mathscr{H}(x) \otimes_{\mathscr{H}(\eta_d)} \mathscr{H}(y)$ isomorphe à $\mathscr{H}(x)$, c'est-à-dire en vertu une fois encore de la proposition 3.4.1 de [**9**], à une section du morphisme étale $(Y, y) \times_{(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d, \eta_r)} (X, x) \to (X, x)$; cette section induit alors une factorisation de f par un morphisme $g \colon (X, x) \to (Y, y)$. Par construction, le plongement $\widetilde{\mathscr{H}(y)} \hookrightarrow \widetilde{\mathscr{H}(x)}$ induit par g s'identifie au plongement initialement donné de L dans $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$. Nous n'utiliserons désormais plus la notation L, mais uniquement $\widetilde{\mathscr{H}(y)}$. L'image de $\widetilde{(X, x)}$ sur $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(y)}/\widetilde{k}}$ est un ouvert quasi-compact, donc est de la forme $\widetilde{(Y', y)}$ pour un certain domaine analytique Y' de Y contenant y. En tant que domaine d'un bon germe, (Y', y) est presque bon. Et puisque $\widetilde{\mathscr{H}(y)}$ est un corps gradué de définition de $(\widetilde{(X, x)}, (\widetilde{E_{ix}})_i)$, on a l'égalité $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}} \times_{\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(y)}/\widetilde{k}}} \widetilde{(Y', y)} = \widetilde{(X, x)}$, et chacun des fibrés $\widetilde{E_{ix}}$ est l'image réciproque d'un fibré vectoriel G_i sur $\widetilde{(Y', y)}$. Le morphisme $(X, x) \to (Y, y)$ se factorise dès lors par un morphisme sans bord $h \colon (X, x) \to (Y', y)$. Le germe (Y', y) étant quasi-étale sur $(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d, \eta_1)$ il est quasi-lisse et en particulier réduit, et y en est un point d'Abhyankar. Ceci entraîne que h est plat, par exemple en invoquant le théorème 10.3.7 de [**52**].

Pour tout i, le fibré G_i sur $\widetilde{(Y', y)}$ se relève d'après d'après le théorème 17.4.9 en un fibré métrisé paralinéaire entier F_i sur (Y', y) dont le fibré sous-jacent est trivialisable. Par fonctorialité, chacun des fibrés métrisés paralinéaires entiers h^*F_i sur (X, x) admet $\widetilde{E_{ix}}$ comme fibré résiduel. En utilisant une fois encore le théorème 17.4.9, on voit que $h^*F_i \simeq E_i$, ce qui achève de montrer l'assertion (a).

Lorsque le corps $\widetilde{k}$ est parfait, la dimension du L-espace $\Omega_{L/\widetilde{k}}$ espace vectoriel gradué est égale au degré de transcendance de L sur $\widetilde{k}$. En effet, il suffit pour le voir de montrer que c'est le cas lorsqu'on remplace $\widetilde{k}$ par $\widetilde{k}(T_i/r_i)_i[T_i^{1/p^\infty}]_i$ et L par $L(Ti/r_i)_i[T_i^{1/p^\infty}]$ où (r_i) est un polyrayon donné et où p est l'exposant caractéristique de $\widetilde{k}$ – observons que comme $\widetilde{k}$ est parfait, $\widetilde{k}(T_i/r_i)_i[T_i^{1/p^\infty}]_i$ l'est encore. On peut donc, en choisissant convenablement la famille (r_i), se ramener au cas où $|L^\times| = |\widetilde{k}^\times|$; dans ce cas L est égal à $L_1 \otimes_{\widetilde{k}_1} \widetilde{k}$, et le degré de transcendance de L sur $\widetilde{k}$ est égal à celui de L_1 sur $\widetilde{k}_1$. Et comme $\widetilde{k}$ est parfait, $\widetilde{k}_1$ est parfait, et notre assertion résulte alors de son analogue non gradué bien connu. On en déduit au vu de (a) que la dimension de définition analytique simultanée des E_i est au plus d, et comme elle est par ailleurs majorée par d, elle vaut exactement d.

Supposons enfin que les E_i sont de rang 1. Comme la dimension de définition résiduelle simultanée des E_i est d et comme la famille (E_i) est finie, la remarque 10.6.13 entraîne l'existence d'un corps gradué de définition L de $(\widetilde{(X, x)}, (\widetilde{E_{i,x}})_i)$ de type fini et de degré de transcendance d sur $\widetilde{k}$.

Fixons une base de transcendance $(t_1, \dots, t_d)$ de L sur $\widetilde{k}$ et notons Λ la clôture séparable de $\widetilde{k}(t_1, \dots, t_d)$ dans L. Il existe un entier q, puissance de l'exposant caractéristique de $\widetilde{k}$, tel que $t^q \in \Lambda$ pour tout $t \in L$. Il résulte alors du lemme 10.6.14 que Λ est un corps gradué de définition de $(\widetilde{(X, x)}, (\widetilde{E_{i,x}^{\otimes q}})_i)$. En vertu de (1) il s'ensuit que la dimension de définition analytique simultanée de la famille $(E_i^{\otimes q})$ est au plus égale à d. □

17.6.5. Variantes strictes. — Si (X, x) est séparé et strict, et si (E_i) est une famille de fibrés vectoriels paralinéaires strictement entiers, on définit la dimension de définition résiduelle simultanée stricte des E_i en x comme le degré de transcendance minimal sur $\widetilde{k}^1$ d'un corps de définition de $(\widetilde{(X, x)}^1, (\widetilde{(E_{i,x})^1})_i$. La définition 17.6.3 et les propositions 17.6.2, et 17.6.4 ainsi que leurs preuves se déclinent alors dans ce contexte : il suffit de modifier les définitions, énoncés et démonstrations originels en imposant partout que les espaces soient stricts et les fibrés paralinéaires strictement entiers, et l'en remplaçant toutes les réductions graduées (de germes, de fibrés...) par les réductions strictes correspondantes. Notons que si la famille (E_i) supposée finie, l'avatar strict de l'assertion (a) de la 17.6.4 peut se reformuler en demandant que $(\widetilde{(X, x)}^1, (\widetilde{(E_{i,x})^1})_i)$ admette un pré-modèle $(V, (F_i))$ où V est une $\widetilde{k}^1$-variété intègre et génériquement lisse.

§ 17.7. MÉTRIQUES FORMELLES

17.7.1. — Soit E un fibré vectoriel de rang n sur un espace k-analytique X. Considérons un *modèle formel* $(\mathfrak{X}, \mathfrak{E})$ de (X, E) : cela signifie que $\mathfrak{X}$ est k°-schéma formel, plat

et localement topologiquement de type fini muni d'un isomorphisme $\mathfrak{X}_\eta \simeq X$ et que $\mathfrak{E}$ est un fibré vectoriel sur $\mathfrak{X}$ muni d'un isomorphisme $\mathfrak{E}_\eta \simeq E$.

Nous ne supposons pas que la valeur absolue de k est non triviale ; au contraire, nous appliquerons ces considérations sur le corps résiduel (trivialement valué) de k. Le lecteur trouvera dans l'article **[134]** les définitions essentielles concernant les schémas formels dans le cas trivialement valué.

17.7.2. — On associe au modèle formel $(\mathfrak{X}, \mathfrak{E})$ une métrique sur E de la façon suivante.

Soit $(\mathfrak{U}_i)$ un recouvrement formel de $\mathfrak{X}$ qui trivialise $\mathfrak{E}$ et soit, pour tout i, une trivialisation $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathfrak{E}|_{\mathfrak{U}_i}$. Pour tout i, $\mathfrak{U}_{i,\eta}$ est un domaine analytique de X.

Soit Y un espace analytique, $\varphi\colon Y \to X$ un morphisme et s une section de φ^*E ; supposons qu'il existe un ouvert $\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{X}$ trivialisant $\mathfrak{E}$ tel que $\varphi(Y)$ soit contenu dans $\mathfrak{U}_\eta$.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathfrak{E}$ sur $\mathfrak{U}$. Il existe une unique famille $(f_1, \dots, f_n)$ de fonctions holomorphes sur Y telles que $s = \sum f_i \varphi^* e_i$; posons alors $\|s\| = \max(|f_1|, \dots, |f_n|)$; c'est une fonction continue.

Soit $\mathfrak{U}'$ un ouvert de $\mathfrak{X}$ trivialisant $\mathfrak{E}$ contenant $\varphi(Y)$; choisissons une base $(e'_1, \dots, e'_n)$ de $\mathfrak{E}$ sur $\mathfrak{U}'$ et définissons $\|s\|'$ de façon analogue.

Prouvons que l'on a $\|s\| = \|s\|'$. il existe une matrice inversible $A \in \mathrm{GL}_n(\mathfrak{U} \cap \mathfrak{U}')$ telles que $(e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_n) \cdot A$. Si $s = \sum f_i \varphi^* e_i = \sum f'_i \varphi^* e'_i$, cela entraîne la relation $(f'_1, \dots, f'_n)^{\mathrm{t}} = \varphi^* A \cdot (f_1, \dots, f_n)^{\mathrm{t}}$. Pour tout point $x \in \mathfrak{U} \cap \mathfrak{U}'$, les coefficients de $A(x)$ et de $A^{-1}(x)$ sont de normes $\leqslant 1$, si bien que l'on a $\max(|f_i(y)|) = \max(|f'_i(y)|)$ pour tout $y \in Y$. Cela démontre que $\|s\| = \|s\|'$.

D'après la remarque 17.1.5, on a ainsi défini une métrique sur E.

De telles métriques seront appelées *formelles*. Elles sont par construction paralinéaires strictement entières toute base de $\mathfrak{E}$ fournissant une base orthonormée.

Exemple 17.7.3. — Soit n un entier $\geqslant 0$. L'exemple le plus important de métrique formelle est fourni par le fibré en droites $\mathscr{O}(1)$, sur l'espace projectif $\mathbf{P}^n_k$, et, plus généralement, par ses puissances tensorielles $\mathscr{O}(m)$, pour $m \in \mathbf{Z}$.

L'espace projectif relatif $\operatorname{Proj} k^\circ[T_0, \dots, T_n]$ sur k° et le fibré $\mathscr{O}(m)$ en fournissent un modèle formel après complétion. On dira que la métrique formelle associée est la métrique formelle canonique sur $\mathscr{O}(m)$, ou la métrique de Weil.

Donnons-en une description explicite. Pour $i \in \{0, \dots, n\}$, soit $\mathfrak{U}_i$ l'ouvert affine défini par la condition $T_i \neq 0$. Sa fibre générique est le domaine analytique de $(\mathbf{P}^n_k)^{\mathrm{an}}$ formé des points dont les coordonnées homogènes $(x_0 : \dots : x_n)$ vérifient $|x_i| = \max(|x_0|, \dots, |x_n|)$. Si $P \in k[T_0, \dots, T_n]$ est un polynôme homogène de degré m, notons s_P la section globale correspondante de $\mathscr{O}(m)$ sur $\mathbf{P}^n_k$. Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, la section s_{T_i} provient d'une trivialisation de $\mathscr{O}(1)$ sur $\mathfrak{U}_i$. On a donc $\|s_{T_i}\|(x) = 1$ pour tout $x \in \mathfrak{U}_{i,\eta}$. Cela entraîne la formule familière

$$\|s_P\|(x) = \frac{|P(x_0, \dots, x_n)|}{\max(|x_0|, \dots, |x_n|)^m}$$

pour tout point $x \in (\mathbf{P}^n_k)^{\mathrm{an}}$ de coordonnées homogènes $(x_0 : \dots : x_n)$ et tout polynôme $P \in k[T_0, \dots, T_n]$ qui est homogène de degré m.

Exemple 17.7.4. — Considérons deux fibrés vectoriels $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{E}'$ sur $\mathfrak{X}$, et notons E et E' leurs fibres génériques. Alors $\mathfrak{E} \otimes \mathfrak{E}'$ est un modèle formel de $E \otimes E'$ et la métrique formelle correspondante se déduit par produit tensoriel des métriques formelles sur E et sur E'.

Proposition 17.7.5. — *Soit k un corps complet pour une valuation non triviale, soit X un espace strictement k-analytique paracompact et soit E un fibré vectoriel sur X.*

a) *Le fibré vectoriel E possède des métriques paralinéaires strictement entières.*

b) *Une métrique sur E est formelle si et seulement si elle est paralinéaire strictement entière.*

Dans le cas des fibrés en droites, cette proposition avait été démontrée par Gubler (prop. 7.5, [**75**]) sous l'hypothèse supplémentaire que le corps k est algébriquement clos et que X est réduit, quasi-compact et quasi-séparé, puis dans [**81**] (prop. 2.10) sans hypothèse. La preuve ci-dessous s'inspire de leurs arguments.

Démonstration. — La première assertion résulte de ce que (X, E) possède un modèle formel $(\mathfrak{X}, \mathfrak{E})$, où $\mathfrak{E}$ est localement libre (corollaire B.1.6 et théorème B.1.8). En effet, la métrique formelle associée est paralinéaire strictement entière.

Démontrons la seconde. Puisque toute métrique formelle est paralinéaire strictement entière il suffit de prouver qu'une métrique paralinéaire strictement entière sur E est formelle. Soit (X_i) un G-recouvrement de X tel que pour tout i, le fibré métrisé $E|_{X_i}$ possède une base orthonormée ; comme X est paracompact, on peut supposer ce recouvrement localement fini. Soit (g_{ij}) le GL_n°-cocycle associé à ces données, où GL_n° est le G-faisceau qui envoie un domaine V sur le sous-ensemble de $\mathrm{M}_n(\mathscr{O}(V))$ formé des matrices inversibles M telles que tous les coefficients de M et de M^{-1} soient partout de norme $\leqslant 1$; en d'autres termes, c'est le faisceau des automorphismes isométriques du fibré $\mathscr{O}_X^n$ muni de la métrique pour laquelle la base canonique est orthonormée.

Pour tout couple (i, j), choisissons un modèle $\mathfrak{X}_{ij}$ de $X_i \cap X_j$ tel que les coefficients de la matrice g_{ij} et de son inverse appartiennent à $\mathscr{O}(\mathfrak{X}_{ij})$ (corollaire B.1.7).

Appliquons le théorème B.1.3 à l'espace analytique X, au G-recouvrement localement fini (X_{ij}) et à la famille $(\mathfrak{X}_{ij})$. On obtient ainsi un modèle $\mathfrak{X}'$ de X et un recouvrement ouvert $(\mathfrak{X}'_{ij})$ de $\mathfrak{X}$, tel que $\mathfrak{X}'_{ij}$ domine $\mathfrak{X}_{ij}$ pour tout couple (i, j).

Pour tout i, posons $\mathfrak{X}'_i = \mathfrak{X}'_{ii}$. Par construction, le cocycle (g_{ij}) fournit un GL_n-cocycle sur $\mathfrak{X}'$ subordonné au recouvrement $(\mathfrak{X}'_i)$. Ce cocycle définit un faisceau localement libre $\mathfrak{E}'$ de rang n sur $\mathfrak{X}'$. Comme sa fibre générique est encore définie par (g_{ij}), le fibré formé $\mathfrak{E}$ est un modèle de E et la métrique formelle correspondante sur E coïncide avec la métrique paralinéaire strictement entière donnée initialement. □

Corollaire 17.7.6. — *Soit k un corps complet pour une valuation non triviale, soit X un espace strictement k-analytique paracompact et soit L un fibré en droites sur X. Si X est localement holomorphiquement séparé, toute métrique continue sur L peut être approchée par une métrique paralinéaire strictement entière, pour la topologie de la convergence compacte.*

Démonstration. — Soit $\|\cdot\|$ une métrique continue sur L, soit K une partie compacte de X et soit $\varepsilon > 0$. Il faut démontrer qu'il existe une métrique strictement PL $\|\cdot\|'$ sur L telle que $\|s\|(x)e^{-\varepsilon} \leqslant \|s\|'(x) \leqslant \|s\|(x)e^{\varepsilon}$ pour toute section G-locale s de L et tout $x \in K$. D'après la proposition 17.7.5, il existe une métrique paralinéaire strictement entière $\|\cdot\|'$ sur L. Soit f l'unique fonction continue sur X telle que $\|\cdot\|' = \|\cdot\| \cdot e^f$. D'après le corollaire 12.5.8, il existe une fonction strictement PL u sur X telle que $|u(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in K$. La métrique $\|\cdot\|'e^u$ sur L répond alors à la condition de l'énoncé. □

17.7.7. — Pour $* \in \{\mathscr{C}^0, \mathrm{PL}, \text{lisse}\}$, notons $\widehat{\mathrm{Pic}}(X, *)$ l'ensemble des classes d'isométrie de fibrés en droites sur X munis d'une métrique $*$. Le produit tensoriel le munit d'une structure de groupe abélien. De plus, l'oubli de la métrique définit un homomorphisme de groupes $\widehat{\mathrm{Pic}}(X, *) \to \mathrm{Pic}(X)$.

Son noyau est le groupe des métriques $*$ sur le fibré en droites trivial, c'est-à-dire le groupe des fonctions $*$ sur X modulo le sous-groupe des fonctions (qui sont à la fois continues, lisses et PL) de la forme $\log|u|$, pour $u \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X^*)$.

Supposons X paracompact. Lorsque $* = \mathscr{C}^0$ ou lisse, cet homomorphisme est surjectif dès que X est bon (proposition 17.1.8). Il est aussi surjectif lorsque $* = \mathrm{PL}$, $|k^\times| \neq 1$ et X est strict.

17.7.8. — Soit E un fibré vectoriel métrisé sur X. Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces k-analytiques. On dispose alors d'un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{V}(f^*E) & \xrightarrow{f'} & \mathbf{V}(E) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array} .$$

Si E est libre, identifié à $\mathscr{O}_X^n$, f^*E est identifié à $\mathscr{O}_Y^n$, le morphisme f' s'identifie à l'application (id, f) de $\mathbf{V}(f^*E) = \mathbf{A}^n \times Y$ dans $\mathbf{V}(E) = \mathbf{A}^n \times X$. On définit alors une métrique sur le fibré vectoriel f^*E par la composition $\mathbf{V}(f^*E) \xrightarrow{f'} \mathbf{V}(E) \xrightarrow{\|\cdot\|} \mathbf{R}_+$.

Si la métrique de E est lisse, resp. PL, il en est de même de la métrique de f^*E ainsi définie. Par passage aux classes d'isométrie de fibrés en droites métrisés PL, on en déduit un homomorphisme de groupes $f^*\colon \widehat{\mathrm{Pic}}(X, *) \to \widehat{\mathrm{Pic}}(Y, *)$.

17.7.9. Fibré résiduel d'un fibré formel. — Soit $\mathfrak{X}$ un k°-schéma formel séparé, topologiquement localement de type fini et quasi-paracompact et soit $\mathfrak{E}$ un fibré vectoriel sur $\mathfrak{X}$, partout de rang n. Soit X la fibre générique de $\mathfrak{X}$ et soit $\pi\colon X \to \mathfrak{X}_\mathrm{s}$ le morphisme de spécialisation. Comme $\mathfrak{X}$ est séparé, X est séparé. Soit E le fibré vectoriel sur X fibre générique de $\mathfrak{E}$, muni de la métrique formelle correspondante. Soit $x \in X$ et soit V la $\tilde{k}$-variété $\overline{\{\pi(x)\}}$ (munie de sa structure réduite) ; le lemme 11.9.2 assure que V est de type fini et que $\widetilde{(X,x)}^1 = \mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1/\tilde{k}^1}\{V\}$. Par ailleurs, le fibré métrisé E est paralinéaire strictement entier. Il possède donc un fibré résiduel strict $\widetilde{E_x}^1$ en x.

Lemme 17.7.10. — *Le couple $(V, \mathfrak{E})$ est un pré-modèle de $(\widetilde{(X,x)}^1, \widetilde{E_x}^1)$.*

Démonstration. — Choisissons un recouvrement ouvert localement fini $(\mathfrak{X}_i)$ de $\mathfrak{X}$ tel que $\mathfrak{E}|_{\mathfrak{X}_i}$ possède pour tout i une base $(e_{ij})_j$; désignons pour tout i par X_i la fibre générique de $\mathfrak{X}_i$, et notons encore e_{ij} l'image de e_{ij} dans $\mathscr{O}(X_i)$. Pour i fixé, les e_{ij} forment par construction une base orthonormée du fibré métrisé $E|_{X_i}$. Soit I l'ensemble fini des indices i tels que $x \in X_i$. La réunion des X_i pour $i \in I$ est un voisinage ouvert de x. (En particulier, I est non vide). Pour tout $i \in I$, notons V_i l'ouvert $\mathfrak{X}_{i,s}$ de V. Par construction, (V_i) est un recouvrement ouvert de V.

Soit $\mathfrak{U}$ un ouvert affine de $\mathfrak{X}$ contenant $\pi(x)$ et soit σ une section de $\mathfrak{E}|_{\mathfrak{U}_\mathrm{s}}$. Relevons σ en une section s de $\mathfrak{E}$ sur $\mathfrak{U}$, que nous voyons également comme une section de E sur $\mathfrak{U}_\eta$. Si t est une section de $\mathfrak{E}$ dont la restriction τ à $\mathfrak{U}_s$ est telle que $\tau - \sigma$ s'annule en $\pi(x)$ alors $\|(t-s)(x)\| < 1$ si bien que $\widetilde{t(x)}^1 = \widetilde{s(x)}^1$ dans $\widetilde{E(x)}^1$. L'élément $\widetilde{s(x)}^1$ ne dépend

donc que de $\sigma(\pi(x))$, et sa construction est compatible à la restriction à un ouvert $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{U}$ contenant encore $\pi(x)$. On a ainsi construit un morphisme naturel de $F := \mathfrak{E}\otimes\kappa(\pi(x))$ vers $\widetilde{E(x)}^1$, qui induit un morphisme de $F\otimes_{\kappa(\pi(x))}\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1$ vers $\widetilde{E(x)}^1$. Choisissons $i\in I$. Par construction, les $e_{ij}(\pi(x))$ pour j variable forment une base de F ; et comme les (e_{ij}) forment une base orthonormée de $E(x)$, les $\widetilde{e_{ij}(x)}$ forment une base de $\widetilde{E(x)}^1$. Par conséquent, le morphisme de $F\otimes_{\kappa(\pi(x))}\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1$ vers $\widetilde{E(x)}^1$ construit ci-dessus est un isomorphisme ; nous l'utiliserons pour identifier F à un sous $\kappa(\pi(x))$-espace vectoriel de $\widetilde{E(x)}^1$.

On a $\widetilde{(X,x)}^1 = \bigcup_{i\in I}\widetilde{(X_i,x)}^1$, et il résulte du lemme 11.9.2 que $\widetilde{(X_i,x)}^1$ est égal à $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1/\widetilde{k}^1}\{V_i\}$ pour tout $i\in I$; c'est donc l'image réciproque de l'ouvert quasi-compact $\mathbf{P}_{\kappa(\pi(x))/\widetilde{k}^1}\{V_i\}$ de $\mathbf{P}_{\kappa(\pi(x))/\widetilde{k}^1}$.

Pour tout $i\in I$, la famille (e_{ij}) étant une base orthonormée de $E|_{X_i}$, la famille des $\widetilde{e_{ij}(x)}$ est une base de $\widetilde{E_x}^1|\widetilde{(X_i,x)}^1$. Comme $\widetilde{e_{ij}(x)} = e_{ij}(\pi(x))$ pour tout (i,j), le lemme 10.6.11 assure que $\widetilde{E_x}^1$ est l'image réciproque sur $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}_1/\widetilde{k}_1}$ d'un fibré vectoriel G sur $\mathbf{P}_{\kappa(\pi(x))/\widetilde{k}^1}\{V\}$, caractérisé par le fait que sa fibre générique est F et que pour tout i, la famille des $e_{ij}(\pi(x))$ forme une base de G au-dessus de $\mathbf{P}_{\kappa(\pi(x))/\widetilde{k}^1}\{V_i\}$. Mais comme l'image réciproque de $\mathfrak{E}|_V$ sur $\mathbf{P}_{\kappa(\pi(x))/\widetilde{k}^1}\{V\}$ satisfait ces deux conditions, elle coïncide avec G. Ainsi, $(V,\mathfrak{E})$ est bien un pré-modèle de $(\widetilde{(X,x)}^1, \widetilde{E_x}^1)$.

□

Exemple 17.7.11 **(Fibré sur une variété propre en valuation triviale)**

Supposons que la valuation de k est triviale. Soit X une k-variété algébrique et soit E un fibré vectoriel sur X ; le paragraphe précédent s'applique et munit le fibré vectoriel E_η sur X_η d'une métrique formelle. Supposons de plus que X soit propre ; alors on a $X_\eta = X^{\mathrm{an}}$ et $E_\eta = E^{\mathrm{an}}$.

Soit x un point de $X^{\mathrm{an}}\simeq\mathfrak{X}_\eta$ et soit $\tilde{x}$ son image sur $X\simeq\mathfrak{X}_{\mathrm{s}}$. Le couple $(\overline{\{\tilde{x}\}}, E|_{\overline{\{\tilde{x}\}}})$ est un est alors un prémodèle de $(\widetilde{(X^{\mathrm{an}},x)}^1, \widetilde{E_x^{\mathrm{an}}}^1)$ (où $\overline{\{\tilde{x}\}}$ est muni de sa structure réduite).

Notons un cas particulier important. Supposons X intègre, soit ξ son point générique, et soit x le point de X^{an} correspondant à la flèche $\mathrm{Spec}(k(\xi),|\cdot|_0)\to X$. Le poitn x est alors l'unique point de X^{an} se spécialisant en ξ ; par ce qui précède, (X,E) est alors un prémodèle, et même un modèle, de $(\widetilde{(X^{\mathrm{an}},x)}^1, \widetilde{E_x^{\mathrm{an}}}^1)$.

§ 17.8. MÉTRIQUES PSH

Définition 17.8.1. — *Soit X un espace k-analytique topologiquement séparé, considéré comme espace G-tropical affiné, et soit L un fibré en droites sur X, localement trivial pour la topologie usuelle de X.*

*On dit qu'une métrique continue sur L est psh (*resp. *dpsh,* resp. *tropicalement convexe,* resp. *tropicalement dconvexe) si, pour toute section inversible locale s de L,*

la fonction continue $\log\|s\|^{-1}$ *est psh (définition 8.1.1) (*resp. *dpsh,* resp. *tropicalement convexe, définition 8.2.6,* resp. *tropicalement d-convexe).*

Pour qu'il en soit ainsi, il suffit que L possède une telle section au voisinage de tout point de X.

Il découle de ces définitions qu'une métrique tropicalement convexe est tropicalement d-convexe, qu'une métrique psh est d-psh, et qu'une métrique tropicalement convexe, *resp.* tropicalement d-convexe, est psh, *resp.* d-psh.

Si la métrique de L est psh, sa courbure $c_1(\overline{L})$ est un courant positif.

Comme toute fonction lisse sur $\mathbf{R}^n$ est localement différence de deux fonctions psh lisses (proposition 1.10.2, *b*)), toute métrique lisse sur L est tropicalement d-convexe.

Si X est presque bon, toute fonction G-lisse est localement différence de deux fonctions tropicalement d-convexes (proposition 8.8.2, *b*)), de sorte que toute métrique G-lisse est tropicalement d-convexe. C'est en particulier le cas des métriques paralinéaires.

Proposition 17.8.2. — *Soit X un espace k-analytique séparé et presque bon, et soit L un fibré en droites sur X muni d'une métrique paralinéaire entière. On suppose que L est localement trivial pour la topologie usuelle de X.*

Soit $x \in X$ tel qu'il existe une puissance strictement positive du fibré résiduel $\widetilde{L_x}$ engendrée par ses sections globales. Alors la métrique de L est tropicalement convexe (et donc psh) au voisinage de x.

Démonstration. — Quitte à remplacer L par une puissance strictement positive, on suppose que $\widetilde{L_x}$ est engendré par ses sections globales. D'après le corollaire 17.4.12, il existe donc une famille finie $(a_1, \dots, a_m)$ d'éléments de $\mathscr{O}_{X,x}^{\times}$ telle que la fonction $\|s\|^{-1}$ soit égale à $\max(|a_1|, \dots, |a_m|)$ au voisinage de x. Il découle alors de la proposition 8.2.1 que la métrique de L est tropicalement convexe au voisinage de x. □

Remarque 17.8.3. — Voyons comment la proposition précédente permet de redémontrer le fait rappelé après la définition 17.8.1 que les métriques paralinéaires strictement entières sont tropicalement d-convexes (et donc d-psh).

L'assertion est locale. Soit $x \in X$. La proposition 10.7.9 assure qu'il existe deux fibrés en droites M_1 et M_2 sur $\widetilde{(X,x)}$, engendrés par leurs sections globales, tels que $\widetilde{L_x} \simeq M_1 \otimes M_2^{\vee}$.

Relevons M_1 et M_2 en deux fibrés métrisés paralinéaires L_1 et L_2 sur (X,x), strictement entiers, et triviaux comme fibrés en droites au voisinage de x (théorème 17.4.9) ; on dispose aussi d'après ce théorème d'un isomorphisme $L \simeq L_1 \otimes L_2^{\vee}$ de fibrés en droites métrisés au voisinage de x. D'après le premier cas, les métriques de L_1 et L_2 sont tropicalement convexes au voisinage de x. Par conséquent, la métrique de L est tropicalement d-convexe au voisinage de x.

Proposition 17.8.4. — *Soit X un k-espace analytique séparé et sans bord, et soit L un fibré en droites sur X muni d'une métrique paralinéaire strictement entière.*

Soit $x \in X$ tel que le fibré résiduel $\widetilde{L_x}$ soit numériquement effectif (10.4.11). Alors la métrique de L est psh au voisinage de x.

Démonstration. — Soit (V, M) un prémodèle du fibré résiduel $\widetilde{L}(x)$; comme X est sans bord, V est propre ; par le lemme de Chow, on peut supposer que V est projective. Soit M' un fibré ample sur V ; il existe un voisinage compact U de x dans X et une

métrique strictement PL sur le fibré trivial $\mathscr{O}_U$ dont le fibré résiduel en x est M' ; notons $h = \log(\|1\|^{-1})$ pour M' ; d'après la fonction précédente, c'est une fonction psh (et même tropicalement convexe) sur X.

Pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, on peut munir le fibré en droites $L|_U$ de la métrique $\|\cdot\|_\varepsilon$ qui est le produit de sa métrique initiale par la fonction $\exp(-\varepsilon h)$. Lorsque ε tend vers 0, cette métrique tend uniformément vers celle de L sur U. Il suffit donc d'observer que cette métrique est psh lorsque ε est un nombre rationnel (a posteriori, elle sera psh pour tout nombre réel positif ε).

Supposons donc ε rationnel ; écrivons $\varepsilon = m/n$ avec $m, n \geqslant 1$. Alors la métrique $\|\cdot\|_\varepsilon$ est strictement $\mathbf{Q}$-PL ; la métrique $(\|\cdot\|_\varepsilon)^N$ sur $L^{\otimes N}|_U$ est strictement PL ; il suffit de prouver qu'elle est psh. Or, le fibré résiduel associé est donné par le prémodèle $(V, M^{\otimes n} \otimes (M')^{\otimes m})$. Comme M est numériquement effectif et M' est ample, il résulte du critère de Nakai-Moishezon que ce fibré en droites sur V est ample. D'après la proposition précédente, la métrique considérée est psh. □

17.8.5. — On dit qu'une métrique continue $\|\cdot\|$ sur L est globalement psh s'il existe une suite $(\|\cdot\|_n)$ de métriques psh lisses sur L telles que les fonctions continues $\log(\|\cdot\|/\|\cdot\|_n)$ sur X convergent uniformément vers 0.

On dit qu'une métrique continue sur L est globalement dpsh s'il existe deux fibrés en droites L_1 et L_2 sur X, munis de métriques globalement psh, tels que $\overline{L} \simeq \overline{L}_1 \otimes \overline{L}_2^{-1}$.

Proposition 17.8.6. — *Sur l'espace projectif $\mathbf{P}^n$, le fibré en droites $\mathscr{O}(1)$ muni de sa métrique formelle canonique est globalement psh et tropicalement convexe.*

Plus précisément, il existe une famille $(\|\cdot\|_\eta)_{\eta>0}$ de métriques psh lisses sur $\mathscr{O}(1)$, qui converge uniformément vers sa métrique formelle canonique quand $\eta \to 0$, vérifiant de plus la propriété suivante : soit $x \in \mathbf{P}^n$, soit I l'ensemble des $i \in \{0, \dots, n\}$ tels que $x \in D(T_i)$; il existe un voisinage U de x dans $\bigcap_{i\in I} D(T_i)$ tel que, pour $i \in I$ et $\eta < 1$, la fonction $\|T_i\|_\eta$ est tropicalisée par le moment $(T_j/T_i)_{j\in I}$ sur U.

Démonstration. — Tout fibré résiduel de ce fibré en droites admet un prémodèle qui est le fibré $\mathscr{O}(1)$ d'une sous-variété de $\mathbf{P}^n_{\bar{k}}$; il est en particulier semi-ample. D'après la proposition 17.8.2, la métrique de Weil est tropicalement convexe. Démontrons qu'elle est globalement psh.

Pour tout entier $p \geqslant 0$ et tout nombre réel $\eta > 0$, Demailly définit dans **[45]**, lemme 5.18, une fonction $M_\eta \colon \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

a) La fonction M_η est lisse, convexe et croissante en chaque variable ;

b) Pour tout $(t_1, \dots, t_p) \in \mathbf{R}^p$,

$$\max(t_1, \dots, t_p) \leqslant M_\eta(t_1, \dots, t_p) \leqslant \max(t_1, \dots, t_p) + \eta;$$

c) Si $t_j + \eta \leqslant \max_{i\neq j}(t_i - \eta)$, on a

$$M_\eta(t_1, \dots, t_p) = M_\eta(t_1, \dots, \widehat{t_j}, \dots, t_p) \ ;$$

d) Pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$M_\eta(t_1 + t, \dots, t_p + t) = M_\eta(t_1, \dots, t_p) + t.$$

Il résulte de la lissité de la fonction M_η et de la propriété d) que l'on définit une métrique lisse $\|\cdot\|_\eta$ sur $\mathscr{O}(1)$ en posant

$$\log\|s_P\|_\eta^{-1}([x_0 : \dots : x_n]) = -\log|P(x_0, \dots, x_n)| + M_\eta(\log|x_0|, \dots, \log|x_n|)$$

pour tout polynôme P homogène de degré 1. Comme

$$\log\|s_P\|_\eta^{-1} - \log\|s_P\|^{-1} = M_\eta(\log|x_0|, \dots, \log|x_n|) - \max(\log|x_0|, \dots, \log|x_n|),$$

la propriété b) ci-dessus entraîne que $\log\|s_P\|_\eta^{-1} - \log\|s_P\|^{-1}$ appartient à l'intervalle $[0, \eta]$. Par suite, la métrique $\|\cdot\|_\eta$ converge uniformément vers $\|\cdot\|$ lorsque $\eta \to 0$.

Soit $x = [x_0 : \dots : x_n]$ un point de $\mathbf{P}^n$; supposons pour fixer les idées que $x_0, \dots, x_p \neq 0$ mais $x_{p+1} = \cdots = x_n = 0$, et prenons pour P le polynôme X_0. Pour $j \in \{1, \dots, n\}$, soit $f_j = T_j/T_0$; c'est une fonction holomorphe sur $D(T_j)$. Les fonctions $f_1, \dots, f_p$ sont inversibles sur tout voisinage U de x contenu dans $D(T_0 \dots T_p)$. Dans un tel voisinage, on a

$$\begin{aligned}\log\|s_P\|_\eta^{-1}(x) &= -\log|x_0| + M_\eta(\log|x_0|, \dots, \log|x_n|)\\ &= M_\eta(0, \log|f_1(x)|, \dots, \log|f_p(x)|)\end{aligned}$$

si $\eta < 1$ et si U est pris assez petit pour que l'on ait

$$\sup_U \sup_{j>p} \log|f_j| + 1 \leqslant \inf_U \max_{i\leqslant p} \log|f_i| - 1.$$

Comme M_η est lisse et convexe sur $\mathbf{R}^{p+1}$, cette formule prouve que la métrique $\|\cdot\|_\eta$ est lisse et psh sur U, tropicalisée par le moment $(f_1, \dots, f_p)$.

La proposition en résulte. □

Corollaire 17.8.7. — *Soit X un espace strictement k-analytique propre, soit $\mathfrak{X}$ un k°-modèle propre de X, soit $\mathfrak{L}$ un fibré en droites sur $\mathfrak{X}$ et soit $\overline{L}$ sa fibre générique, muni de sa métrique formelle canonique. Si $\mathfrak{L}$ est semi-ample, par alors $\overline{L}$ est globalement psh.*

Démonstration. — Par hypothèse, il existe un entier $d \geqslant 1$ et un morphisme $p\colon \mathfrak{X} \to \mathbf{P}^N_{k^\circ}$ tel que $p^*\mathscr{O}(1)$ soit isomorphe à $\mathfrak{L}^{\otimes d}$. Cela prouve que la métrique sur $L^{\otimes d}$ déduite de la métrique formelle de L est l'image réciproque par p de la métrique de Weil sur $\mathscr{O}(1)$. Le lemme en résulte. □

Corollaire 17.8.8. — *Soit L un fibré en droites sur un espace k-analytique topologiquement séparé X. Si L est semiample, alors L possède une métrique lisse psh.*

Démonstration. — Par hypothèse, il existe un entier $d \geqslant 1$ et un morphisme $p\colon X \to \mathbf{P}^n_k$ tel que $p^*\mathscr{O}(1)$ soit isomorphe à $L^{\otimes d}$. L'image réciproque d'une métrique lisse psh sur $\mathscr{O}(1)$ induit une métrique lisse psh sur $L^{\otimes d}$, et donc aussi sur L. □

Corollaire 17.8.9. — *Soit X l'analytifié d'une k-variété projective et soit $\overline{L}$ un fibré en droites sur X muni d'une métrique paralinéaire. Alors $\overline{L}$ est globalement d-psh.*

Démonstration. — Soit $(\mathfrak{X}, \mathfrak{L})$ un modèle formel de (X, L) induisant la métrique formelle donnée de $\overline{L}$. Comme X possède un modèle formel qui est projectif, on peut supposer que $\mathfrak{X}$ est projectif sur k°. Il résulte alors du théorème de comparaison géométrie algébrique/géométrie formelle (théorème 2.13.8 de [**1**]) que $\mathfrak{L}$ est un fibré en droites algébrique sur $\mathfrak{X}$. Dans ces conditions, il existe deux fibrés en droites amples $\mathfrak{L}_1$ et $\mathfrak{L}_2$ sur $\mathfrak{X}$ tels que $\mathfrak{L} \simeq \mathfrak{L}_1 \otimes \mathfrak{L}_2^{-1}$. Pour $i \in \{1, 2\}$, soit $\overline{L}_i$ la fibre générique de $\mathfrak{L}_i$, muni de sa métrique formelle canonique ; c'est une métrique globalement psh-approchable et tropicalement psh-approchable d'après le corollaire 17.8.7. L'isomorphisme $\mathfrak{L} \simeq \mathfrak{L}_1 \otimes \mathfrak{L}_2^{-1}$ induit un isomorphisme $L \simeq L_1 \otimes L_2^{-1}$. C'est même une isométrie, d'où le corollaire. □

Remarque 17.8.10. — Il serait intéressant de prouver que toute métrique psh continue sur une variété projective est globalement psh. Cela est vrai en analyse complexe, cf. [**100**], théorème 4.6.1, ou aussi [**15**], théorème 1.

Par ailleurs, on pourrait vouloir généraliser le corollaire 17.8.9 à un espace strictement k-analytique propre possédant un modèle formel à fibre spéciale projective. Dans [**121**], Scholze propose en effet de considérer les espaces analytiques non archimédiens satisfaisant cette condition comme les analogues des variétés complexes kählériennes.

CHAPITRE 18

PRODUITS DE COURANTS DE COURBURE

---

§ 18.1. COURBURE D'UN FIBRÉ EN DROITES MÉTRISÉ

18.1.1. — Soit X un n-espace k-analytique sans bord et soit L un fibré en droites sur X muni d'une métrique continue.

Soit U un ouvert de X sur lequel L admet une section inversible s. La fonction $\log\|s\|^{-1}$ est alors continue sur U. Si t est une autre section inversible de L sur U, le quotient t/s est une fonction inversible f sur U et l'on a $\log\|s\|^{-1} = \log\|t\|^{-1} + \log|f|$.

Ainsi, ces fonctions continues $(\log\|s\|^{-1})$ se recollent en une section globale du faisceau quotient $\mathscr{C}_X/\log(|\mathscr{O}_X^\times|)$.

Lorsque la métrique est lisse, on obtient une section globale du sous-faisceau $\mathscr{A}_X^0/\log(|\mathscr{O}_X^\times|)$.

Lorsqu'elle est PL, on obtient une section globale du sous-faisceau $\mathrm{PL}_X/\log(|\mathscr{O}_X^\times|)$.

18.1.2. — Soit X un n-espace k-analytique sans bord et soit $\overline{L}$ un fibré en droites sur X muni d'une métrique continue.

L'application $u \mapsto \mathrm{d}'\mathrm{d}''[u]$ de $\mathscr{C}_X$ dans l'espace des courants de bidegré $(1,1)$ sur X passe au quotient par le sous-espace $\log(|\mathscr{O}_X^\times|)$ qui sont lisses et vérifient $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u = 0$. On déduit donc de la section globale du faisceau quotient $\mathscr{C}_X/\log(|\mathscr{O}_X^\times|)$ associée à $\overline{L}$ un courant de bidegré $(1,1)$ sur X que l'on note $c_1(\overline{L})$.

Sur un ouvert U de X sur lequel L admet une section inversible s, ce courant est donné par $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\log\|s\|^{-1}$.

Définition 18.1.3. — *On dit que ce courant $c_1(\overline{L})$ est le courant de courbure du fibré inversible métrisé $\overline{L}$.*

Sa formation est compatible à la restriction.

Le courant de courbure d'un fibré inversible métrisé $\overline{L}$ est d'-fermé et d''-fermé.

Si la métrique de L est lisse, son courant de courbure est une *forme* lisse.

Si la métrique de L est psh, son courant de courbure est positif.

18.1.4. — En géométrie complexe, il est souvent important d'utiliser des métriques singulières. Les constructions précédentes s'étendent naturellement dans ce cadre, pour peu qu'on considère des semi-métriques localement intégrables.

Soit X un n-espace k-analytique sans bord et soit L un fibré en droites sur X muni d'une semi-métrique. On dit que cette semi-métrique est localement intégrable si pour toute section inversible s de L sur un ouvert U de X, la fonction $\log\|s\|$ sur U (à valeurs dans $\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$) est localement intégrable.

Par analogie avec la définition 17.8.1, on dit que cette semi-métrique est psh si, pour toute section inversible s de L sur un ouvert U de X, la fonction $\log\|s\|$ sur U est psh.

Dans les deux cas, il suffit qu'il existe, au voisinage de tout point de X, une section inversible de ce type, car les fonctions du type $\log|f|$, pour une fonction analytique inversible f, sont continues et psh.

On déduit de même une section globale du faisceau quotient $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc},X}/\log(|\mathscr{O}_X^\times|)$, respectivement du faisceau quotient $\mathrm{Psh}_X/\log(|\mathscr{O}_X^\times|)$, ainsi que le courant de courbure $c_1(\overline{L})$ du fibré en droites semi-métrisé $\overline{L}$, à semi-métrique localement intégrable. Lorsque cette semi-métrique est psh, ce courant est positif.

18.1.5. — Soit X un n-espace k-analytique sans bord et soit L un fibré en droites sur X. Comme en géométrie algébrique ([**72**], 20.1.8), le $\mathscr{M}_X$-module $L\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{M}_X$ est inversible ; ses sections sont appelées sections méromorphes ; ses sections inversibles sont appelées sections méromorphes régulières.

Si s est une section méromorphe (régulière) de L, alors pour tout ouvert U et toute section inversible ε de L sur U, le quotient $s|_U/\varepsilon$ est une fonction méromorphe (inversible) sur U.

Une section méromorphe régulière s possède un diviseur $\mathrm{div}(s)$, construit localement dans des cartes trivialisantes. Son support est un fermé de Zariski purement de codimension 1, sur le complémentaire U duquel s fournit une trivialisation de L.

Supposons maintenant que L soit muni d'une semi-métrique localement intégrable. Alors la fonction $\log\|s\|^{-1}$ est définie et localement intégrable sur U ; d'après le paragraphe 7.1.12, elle définit alors un courant sur X que l'on note $[\log\|s\|^{-1}]$.

Théorème 18.1.6 **(Formule de Poincaré–Lelong).** — *Soit X un n-espace k-analytique sans bord et soit $\overline{L}$ un fibré en droites sur X muni d'une semi-métrique localement intégrable. Soit s une section méromorphe régulière de L sur X. On a l'égalité*

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''[\log\|s\|^{-1}]+\delta_{\mathrm{div}(s)}=c_1(\overline{L}).$$

Démonstration. — Cette égalité de courants se vérifie localement, sur un ouvert U sur lequel L possède une section inversible ε. Soit f l'unique fonction méromorphe inversible sur U telle que $s|_U=f\varepsilon$. La formule indiquée résulte alors des définitions et de la formule de Poincaré–Lelong (théorème 16.7.3) pour les fonctions méromorphes régulières. □

Corollaire 18.1.7. — *Soit X une k-courbe analytique propre et soit L un fibré en droites sur X muni d'une semi-métrique localement intégrable. La masse totale du courant $c_1(\overline{L})$ est égale au degré du fibré en droite L.*

Rappelons que X est algébrisable, de même que L, plus précisément qu'il existe, à isomorphisme près, une unique k-courbe algébrique muni d'un fibré en droite redonnant (X,L) après analytification. (Pour une démonstration de l'algébrisation d'une courbe,

voir **[56]**, théorème 3.7.2. L'algébrisation de L et la propriété d'unicité se déduisent alors du théorème GAGA dans ce contexte ; voir l'appendice A de **[109]** pour une démonstration détaillée.)

Démonstration. — Commençons par traiter le cas où X est intègre. Le fibré en droites L possède alors une section méromorphe globale non nulle s, et cette section est régulière car X est intègre. D'après la formule de Poincaré–Lelong, on a alors

$$\langle c_1(\overline{L}), 1\rangle = \langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''[\log\|s\|^{-1}], 1\rangle + \langle \delta_{\mathrm{div}(s)}, 1\rangle = \langle [\log\|s\|^{-1}], \mathrm{d}'\mathrm{d}''(1)\rangle + \langle \delta_{\mathrm{div}(s)}, 1\rangle.$$

Le premier terme est nul, car $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(1) = 0$. Si $\mathrm{div}(s) = \sum n_i[P_i]$, alors $\deg(L) = \sum n_i[k(P_i) : k]$ et $\langle \delta_{P_i}, 1\rangle = [k(P_i) : k]$. Cela prouve l'égalité $\langle c_1(\overline{L}), 1\rangle = \deg(L)$ dans le cas où X est intègre.

Traitons maintenant le cas général. Soit (X_i) la famille finie des composantes irréductibles (intègres) de X et, pour tout i, soit m_i la multiplicité générique de X_i dans X. Soit Y la courbe somme disjointe des X_i et soit $p\colon Y \to X$ le morphisme fini canonique ; on considère les X_i comme des sous-espaces ouverts et fermés de Y.

Le fibré en droites semi-métrisé $\overline{L}$ définit par image inverse un fibré en droites semi-métrisé $\overline{M}$ sur Y. Soit (U_j) un recouvrement ouvert fini de X tel que pour tout j, le fibré en droites $L|_{U_j}$ possède une section inversible s_j. Soit (λ_j) une partition de l'unité lisse subordonnée à ce recouvrement. Alors

$$\langle c_1(\overline{L}), 1\rangle = \sum_j \langle c_1(\overline{L}), \lambda_j\rangle = \sum_j \int_{U_j} \log\|s_j\|^{-1}\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, \lambda_j.$$

Pour tout i, soit V_i l'ouvert de X complémentaire de la réunion des autres composantes composantes que X_i ; ces ouverts sont disjoints et le complémentaire de leur réunion est un ensemble fini de points rigides. De plus, $p^{-1}(V_i)$ est un ouvert de X_i, dont le complémentaire est un ensemble fini de points rigides ; il s'identifie à $V_{i,\mathrm{red}}$. Comme la $(1,1)$-forme lisse $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\lambda_j$ est nulle au voisinage des points rigides, on a

$$\int_{U_j} \log\|s_j\|^{-1}\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, \lambda_j = \sum_i \int_{U_j\cap V_i} \log\|s_j\|^{-1}\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, \lambda_j.$$

Pour tout j et tout i, on a

$$\int_{U_j\cap V_i} \log\|s_j\|^{-1}\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, \lambda_j = m_i \int_{p^{-1}(U_j)\cap X_i} \log\|p^*s_j\|\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''(p^*\lambda_j).$$

Alors,

$$\langle c_1(\overline{L}), 1\rangle = \sum_{j,i} m_i \int_{p^{-1}(U_j)\cap X_i} \log\|p^*s_j\|^{-1}\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''(p^*\lambda_j) = \sum_i m_i \langle c_1(\overline{L}|X_i), 1\rangle,$$

en renversant les calculs. Par le cas intègre, on a $\langle c_1(\overline{L}|_{X_i}), 1\rangle = \deg(L|_{X_i})$. Par suite,

$$\langle c_1(\overline{L}), 1\rangle = \sum_i m_i \deg(L|_{X_i}) = \deg(L).$$

Cela conclut la démonstration. □

§ 18.2. LE COURANT CANONIQUE D'UNE COURBE

Dans ce paragraphe, on appelle *courbe k-analytique* un espace k-analytique séparé, purement de dimension 1. Une telle courbe peut donc être considérée comme espace tropical de niveau 1.

18.2.1. — Dans [**131**], M. Temkin a défini, pour tout espace espace k-analytique S et tout S-espace analytique quasi-lisse X la « semi-norme de Kähler » sur le fibré vectoriel $\Omega^1_{X/S}$. Sa construction fournit, pour tout domaine V de X et toute section $\omega \in \Omega^1_{X/S}(V)$, une fonction $x \mapsto \|\omega(x)\|$ sur V. Rappelons sa construction. Soit $x \in X$ et soit s son image sur S. L'application du module des différentielles de Kähler algébriques $\Omega^1_{\mathscr{H}(x)/\mathscr{H}(s)}$ vers $\mathbf{R}_+$ qui envoie η sur la borne inférieure des $\sup|a_i| \cdot |b_i|$ pour toutes les expressions $\eta = \sum a_i\, db_i$, où $a_i, b_i \in \mathscr{H}(x)$, est une semi-norme ; notons $\widehat{\Omega^1}_{\mathscr{H}(x)/\mathscr{H}(x)}$ le séparé-complété correspondant. Pour tout domaine analytique V de X contenant x et tout $\omega \in \Omega^1_{V/S}$, on obtient par tiré en arrière le long du morphisme $x\colon \mathscr{M}(\mathscr{H}(x)) \to V$ un élément $\omega(x)$ du $\mathscr{H}(x)$-espace de Banach $\widehat{\Omega^1}_{\mathscr{H}(x)/k\mathscr{H}(s)}$, et c'est sa norme que l'on note $\|\omega(x)\|$.

C'est une notion différente de la notion de semi-métrique au sens du présent travail, car elle n'est pas invariante par extension des scalaires. Toutefois, il résulte de l'exemple 17.1.4 qu'elle fournit, au moins dans le cas des courbes, une semi-métrique canonique (en notre sens) sur le fibré canonique. Nous allons voir que cette semi-métrique est localement intégrable et, lorsque la courbe est lisse, calculer son courant de courbure.

Exemple 18.2.2. — Prenons l'exemple de la droite affine $X = \mathbf{A}^1_k = \mathscr{M}(k[T])$ sur un corps algébriquement clos k. La forme différentielle dT est une base de $\Omega^1_{X/k}$. D'après l'exemple 6.2.1 de [**131**], pour tout point x de X, sa norme en x est le *rayon* $r(x)$ de x, borne inférieure des rayons des disques de X qui contiennent x, ou encore la distance, dans $\mathscr{H}(x)$, de $T(x)$ à k.

On voit déjà que $\|\mathrm{d}T\|$ s'annule exactement sur l'ensemble $X(k)$ des points rigides ; comme cet ensemble n'est pas fermé, car tout voisinage ouvert du point de Gauss η_1 contient des points rigides, la semi-métrique de Temkin n'est pas continue. (Néanmoins, cette fonction $\|\mathrm{d}T\|$ est semi-continue supérieurement.)

Soit $a \in k$ et soit r un nombre réel strictement positif ; on a

$$\|\mathrm{d}T(\eta_{a,r})\| = r = |T-a|(\eta_{a,r})$$

puisque $|T(\eta_{a,r}) - b| = \sup(|b-a|, r)$ pour tout $b \in k$. Ainsi, la fonction $r \mapsto \log(\|\mathrm{d}T(\eta_{a,r}))\|$ est affine sur la partie squelettique de X formée des points du type $\eta_{a,r}$, pour $r > 0$. En particulier, en restriction à toute partie squelettique de X, la fonction $\log(\|\mathrm{d}T\|)$ est paralinéaire et donc continue. Cela démontre dans ce cas que la semi-métrique de Temkin est localement intégrable.

18.2.3. — Soit X une courbe k-analytique et soit W un domaine analytique de X. On dit qu'une fonction $t \in \mathscr{O}_X(W)$ est un paramètre si le morphisme de W vers $\mathbf{A}^1$ induit par t est quasi-étale. Cela entraîne que pour tout point $x \in W$ l'extension $\mathscr{H}(t(x)) \to \mathscr{H}(x)$ est finie séparable. On dit que t est un paramètre modéré (resp. non ramifié) si, de plus, ces extensions sont toutes modérément ramifiées (resp. non ramifiées). Par exemple, la fonction coordonnée de la droite affine en est un paramètre non ramifié.

On dit que le paramètre t est *monomial* en un point x de W si $t(x)$ appartient au squelette canonique de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$.

Proposition 18.2.4. — *Soit k un corps ultramétrique complet, non trivialement valué et algébriquement clos k. Soit X une courbe k-analytique quasi-lisse, soit V un domaine connexe de X, et soit $\omega \in \Omega^1_{X/k}(V)$ une forme différentielle non nulle.*

a) *Pour tout point $x \in V$, on a $\|\omega(x)\|$ si et seulement si x est un point rigide de V.*

b) *Pour toute partie squelettique Σ de V, la restriction à Σ de la fonction* $\log(\|\omega\|)$ *est paralinéaire.*

c) *En particulier, la semi-métrique canonique est localement intégrable.*

Démonstration. — On peut déduire du théorème de réduction semi-stable que V possède un G-recouvrement par des domaines sur lesquels il existe un paramètre non ramifié. Voir aussi le théorème 6.3.1 de [**130**] et le lemme 3.6.14 de [**42**] pour une approche plus ponctuelle, mais qui repose également sur le théorème de réduction semi-stable.

Comme ω n'est pas nulle et comme V est connexe, la restriction de ω à tout domaine analytique connexe non vide de V est encore non nulle (et son lieu des zéros est un ensemble fermé et discret de points rigides). Pour démontrer la proposition, on peut donc se restreindre aux domaines d'un G-recouvrement donné de V,et en conséquence supposer qu'il existe un paramètre non ramifié t sur V.

Puisque t est quasi-étale, dt est une base du fibré en droites $\Omega^1_{V/k}$; il existe donc une unique fonction $f \in \mathscr{O}_X(V)$ telle que $\omega = f\,\mathrm{d}t$. Comme $\omega \neq 0$ et que V est connexe, la fonction f n'est pas nulle sur V. Si x est un point rigide, $\|\omega(x)\| = 0$ par construction de la semi-métrique de Temkin, car $\Omega_{\mathscr{H}(x)/k} = 0$. Sinon, on a $f(x) \neq 0$; de plus, le théorème 2.3.2 de [**42**] affirme que $\|\mathrm{d}t\|(x)$ est la distance, notée r_{t_x} de $t(x)$ à k dans $\mathscr{H}(x)$; en particulier, $\|\mathrm{d}t(x)\| > 0$, si bien que $\|\omega(x)\| > 0$. L'assertion a) est donc démontrée.

Soit Σ une partie squelettique de V. Puisque f est inversible au voisinage de Σ, la fonction $\log\|f\|_\Sigma$ est paralinéaire. D'autre part, $\|\mathrm{d}t\|$ est la composée de la fonction rayon sur $\mathbf{A}^1$ et du morphisme f induit par le paramètre t. Comme $f(\Sigma)$ est une partie squelettique de $\mathbf{A}^1_k$ (lemme 3.6.8 de [**42**]), l'assertion découle du fait que le logarithme de la fonction rayon induit une fonction paralinéaire sur toute partie squelettique. Cela démontre l'assertion b).

L'assertion c) découle de b) puisque les fonctions paralinéaires sur un squelette sont continues. □

18.2.5. — Soit k un corps ultramétrique complet, non trivialement valué, algébriquement clos. Soit X une courbe analytique quasi-lisse sur k. Soit Σ une partie squelettique compacte de k.

On sait que Σ possède une *triangulation*, c'est-à-dire une décomposition cellulaire finie $\mathscr{C}$ telle que, pour toute arête $e \in \mathscr{C}_1$ de $\mathscr{C}$, il existe un ouvert U_e de X isomorphe à une couronne $\{r < |T| < R\}$ qui identifie l'arête ouverte au squelette canonique de cette couronne, c'est-à-dire à l'ensemble des points η_t, pour $t \in]r;R[$. Pour tout point x de type II de X, le corps $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1$ est le corps des fonctions d'une unique courbe projective lisse C_x sur le corps algébriquement clos $\tilde{k}^1$; on note $g(x)$ le genre de cette courbe. Si x est un point de type III, on pose $g(x) = 0$.

Cet énoncé peut déduire du théorème de réduction semi-stable, il peut également être démontré directement (voir [**56**]) et servir de base à une démonstration de ce théorème.

Pour tout sommet $x \in \mathscr{C}_0$, on note $v(x)$ le nombre d'arêtes de $\mathscr{C}$ qui contiennent x.

On définit un « diviseur » sur Σ par la formule

$$K_{\mathscr{C}} = \sum_{x \in \mathscr{C}_0} (2g(x) - 2 + v(x))\delta_x,$$

où x est la mesure de Dirac en x. Raffinons $\mathscr{C}$ en une décomposition $\mathscr{C}'$ par adjonction d'un point x à l'intérieur d'une arête. Si le point x est de type III, on a $g(x) = 0$ par définition ; sinon il appartient au squelette canonique d'une couronne ouverte, de sorte que le corps $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ est isomorphe à $\tilde{k}^1(T)$, si bien que $C_x = \mathbf{P}^1_{\tilde{k}^1}$ et que $g(x) = 0$. Et puisque x est situé à l'intérieure d'une arête, on a $v(x) = 2$. Par conséquent $2g(x) - 2 + v(x) = 0$, d'où il résulte que le diviseur $K_{\mathscr{C}'}$ est égal au diviseur $K_{\mathscr{C}}$.

Il s'ensuit que le diviseur $K_{\mathscr{C}}$ ne dépend pas du choix de la triangulation $\mathscr{C}$. On notera K_Σ ce diviseur, et on dira que c'est le diviseur canonique de Σ.

Si Σ' est une partie squelettique compacte qui contient Σ, on a $K_\Sigma \leqslant K_{\Sigma'}|_\Sigma$, mais l'inégalité n'est pas une égalité en général.

18.2.6. — Soit k un corps valué complet, non trivialement valué, algébriquement clos et soit X une courbe analytique lisse sur k. Soit ω une forme différentielle méromorphe régulière sur X.

18.2.7. — Soit $x \in X$ un point de type II et soit $e \subset X$ une 1-cellule dont x est une extrémité.

Il existe un point $y \in e$ et un ouvert U de X tel que U soit isomorphe à une couronne ouverte et ait pour squelette l'intervalle $]x; y[$ de e. Soit t une fonction coordonnée sur U qui est croissante vers x (c'est-à-dire $\lim_x |t| > \lim_y |t|$). Il existe une fonction analytique f sur U telle que $\omega|_U = f\,\mathrm{d}t/t$, et f n'a qu'un nombre fini de zéros et de pôles sur U car ω n'a qu'un nombre fini de zéros et de pôles au voisinage de la partie compacte $\overline{U} = U \cup \{x; y\}$. On peut dès lors, quitte à prendre pour y un point plus proche de x, supposer que f est inversible sur U. Dans ce cas, il existe un entier n tel que $|f| = |t|^n$ sur U. Alors, $\|\omega\| = |t|^n$ sur $]x; y[$. L'entier n ne dépend pas du choix de y, donc ne dépend que du germe en x de la cellule e ; on le note $n_e(\omega)$; c'est la pente de ω en x le long de e. (Elle est positive ou nulle si $\|\omega\| \leqslant \|\omega\|(x)$ au voisinage de x sur e.)

18.2.8. — Soit $x \in X$ un point de type II ou III et soit (e_i) une famille finie de germes de 1-cellules dont x est une extrémité.

Il existe une famille finie (y_i), où $y_i \in e_i$ pour tout i, une famille finie (U_i) d'ouverts de X, chaque U_i étant isomorphe à une couronne ouverte de squelette l'intervalle $]x; y_i[$, et une fonction analytique t au voisinage de x, telles que pour tout i, $t|_{U_i}$ soit une fonction coordonnée sur la couronne U_i, croissante vers x, et qui induit un paramètre modéré monomial en x.

En effet, supposons tout d'abord que x est de type II. Il suffit alors de prendre une fonction analytique t de valeur absolue 1 en x telle que $\widetilde{t(x)}$ ait un zéro d'ordre exactement 1 en chacun des points fermés de la courbe C_x correspondant aux cellules e_i issues de x dans $\mathscr{C}$, et un unique pôle en un point fermé auxiliaire, choisi d'ordre premier à p si $\tilde{k}$ est de caractéristique $p > 0$.

Supposons maintenant x de type III. Il possède alors un voisinage ouvert U qui est une couronne ouverte telle que $U \cap e_i$ soit contenu dans le squelette de U. En particulier, les e_i ne définissent au plus que deux germes de cellule en x. Toute fonction coordonnée sur U est un paramètre modéré et monomial en x.

On dira que t est un paramètre adapté aux cellules e_i.

18.2.9. — Soit $x \in X$ un point de type II. Comme k est algébriquement clos, il existe $a \in k^\times$ tel que $\|\omega\|(x) = |a|$. Alors ω/a possède une réduction au sens de Temkin, qui est une forme différentielle *méromorphe* sur la courbe $C_{\widetilde{x}}$ que nous noterons $\widetilde{\omega(x)}$. Elle est bien définie à multiplication près par un élément de $\widetilde{k}^\times$.

Par ailleurs, chaque 1-cellule e dont x est une extrémité correspond à un point fermé P de la courbe $C_{\widetilde{x}}$; on notera $\mathrm{ord}_e(\widetilde{\omega(x)})$ le coefficient de P dans le diviseur de $\widetilde{\omega(x)}$; cet entier relatif ne dépend pas du choix de l'élément a.

Lemme 18.2.10. — *Soit k un corps valué complet, non trivialement valué, algébriquement clos et soit X une courbe k-analytique lisse. Soit ω une forme différentielle méromorphe régulière sur X. Soit $x \in X$ un point de type II et soit $e \subset X$ une 1-cellule dont x est une extrémité. On a $n_e(\omega) = 1 + \mathrm{ord}_e(\widetilde{\omega(x)})$.*

Démonstration. — L'assertion résulte essentiellement du théorème 4.3.3 (ii) de [**42**]. Donnons néanmoins quelques précisions. Quitte à multiplier ω par un scalaire, on suppose que $\|\omega(x)\| = 1$. Soit t une fonction analytique au voisinage de x qui fournit un paramètre en x, adapté à la cellule e ; soit U un ouvert de X qui est une couronne ouverte dont le squelette est un intervalle $]x; y[$ de en et sur laquelle ω n'a ni zéro ni pôle. Il existe une fonction méromorphe régulière régulière φ au voisinage de x telle que $\omega = \varphi \cdot \mathrm{d}t/t$ au voisinage de x.

Quitte à multiplier t par un scalaire, on peut supposer que $|t(x)|$; on a alors $|\varphi(x)| = 1$.

Posons $\tau = \widetilde{t(x)} \in \widetilde{\mathscr{H}(x)}^1$; il a un zéro simple au point v de $C_{\widetilde{x}}$ qui correspond à la branche e. Par construction, $\mathrm{d}t/t$ se réduit en $\mathrm{d}\tau/\tau$, et $\widetilde{\omega(x)} = \widetilde{\varphi(x)}\mathrm{d}\tau/\tau$.

On a alors $|\varphi(t)| = |t|^{n_e(\omega)}$ sur U, si bien que $\widetilde{\varphi(x)}$ est d'ordre n_e en v. Il s'ensuit que $\mathrm{ord}_e(\widetilde{\omega(x)}) = n_e - 1$, d'où le lemme. □

Lemme 18.2.11. — *Soit x un point de type II ou III de X et soit D une partie ouverte de X qui est isomorphe à un disque ouvert et dont le bord topologique dans X est égal à $\{x\}$. Soit $e \subset X$ une cellule dont x est une extrémité et telle que $e - \{x\} \subset D$. La forme ω n'a qu'un nombre fini de zéros et de pôles sur D, et l'on a $n_e(\omega) = 1 + \deg(\omega|_D)$.*

Démonstration. — Comme $\overline{D} = D \cup \{x\}$, c'est une partie compacte de X, de sorte que ω n'a qu'un nombre fini de zéros et de pôles sur D.

Soit $t \in \mathscr{O}(D)$ une coordonnée sur ce disque (qui induit un isomorphisme de D sur un disque ouvert). Comme $\mathrm{d}t$ est une base de Ω_D, il existe une unique fonction analytique f sur D telle que $\omega = f\,\mathrm{d}t$. Comme le diviseur de $\omega|_D$ est fini, il existe une fonction inversible u sur D et une fonction rationnelle $g \in k(t)$ telle que $f = ug$. La fonction $|u|$ est constante sur D. Pour $y \in D$ assez proche de x, on a donc $|f(y)| = |u(0)| \cdot |t(y)|^d$, où d est le nombre de zéros et de pôles de g dans D, comptés avec leur multiplicités, c'est-à-dire $\deg(\omega|_D)$. Par suite,

$$\|\omega(y)\| = |f(y)| \cdot |t(y)| \cdot \left\|\frac{\mathrm{d}t}{t}(y)\right\| = |u(0)| \cdot |t(y)|^{1+d} \cdot \left\|\frac{\mathrm{d}t}{t}(y)\right\|.$$

Si $t(y)$ appartient au squelette canonique de $\mathbf{G}_\mathrm{m}$, on a $\|(\mathrm{d}t/t\|(y)) = 1$ et donc $\|\omega\|(y) = |u(0)| \cdot |t(y)|^{1+d}$. Autrement dit, $n_e(\omega) = 1 + d$, comme il fallait démontrer. □

Définition 18.2.12. — *Soit k un corps ultramétrique complet algébriquement clos et non trivialement valué, soit X une courbe k-analytique lisse et soit f une fonction tropicalement continue à support compact sur X. Nous dirons qu'une partie squelettique Σ de X est* f-admissible *si elle satisfait les conditions suivantes :*

– *Σ est compacte ;*
– *f est localement constante sur $X - \Sigma$;*
– *toute composante connexe U de $X - \Sigma$ ou bien est contenue dans le lieu d'annulation de f, ou bien est un disque ouvert relativement compact dans X.*

Si F est un ensemble de fonctions tropicalement continues à support compact, nous dirons que Σ est F-admissible s'il est f-admissible pour toute $f \in F$.

Exemple 18.2.13. — Soit k et X comme ci-dessus, soit Γ une partie squelettique compacte de X et soit F un ensemble fini de fonctions tropicalement continues à support compact sur X. Soit V un domaine analytique compact de X contenant Γ et le support de f pour toute $f \in F$. Soit (V_i) un recouvrement fini de V par des domaines analytiques compacts tels qu'il existe pour tout i un moment g_i sur V_i tropicalisant $f|_{V_i}$ pour toute $f \in F$. Soit Δ la réunion de Γ, des Σ_{g_i}, de ∂V, de l'ensemble des points x de V tels que $g(x) > 0$, et de l'ensemble des boucles tracées sur V ; soit Δ' la partie squelettique obtenue à partir de Δ en lui adjoignant, pour toute composante connexe W de V telle que $\Delta \cap W = \varnothing$, un point de type II ou III arbitrairement choisi sur W.

Si C et D sont deux composantes connexes distinctes de Δ', il existe au plus un segment $[x, y]$ tracé sur V avec $x \in C, y \in D$ et $]x, y[\subset V - \Delta'$: en effet s'il existait deux tels segment $[x, y]$ et $[x', y']$ distincts, la concaténation d'un segment $[x, x']$ tracé sur C, de $[x', y']$, d'un segment $[y', y]$ tracé sur D et de $[y, x]$ contiendrait nécessairement une boucle non incluse dans Δ'. Notons $I_{C,D}$ cet unique segment lorsqu'il existe, et désignons par Σ la réunion de Δ' et des différents $I_{C,D}$ pour C et D variables. Par construction, Σ est une partie squelettique de V qui contient $\Gamma, \bigcup \Sigma_{g_i}$, ∂V tous les point x de V tels que $g(x) > 0$, et toutes les boucles de V, et dont l'intersection avec toute composante connexe de V est non vide et connexe.

Si W est une composante connexe de $V - \Sigma$ alors W est un arbre (puisqu'elle ne contient aucune boucle) et n'est pas compacte (sinon ce serait une composante connexe de V ne rencontrant pas Σ). Le bord topologique de W dans V est alors un singleton : il est en effet non vide car W n'est pas compacte, et s'il contenait deux points distincts x et y ceux-ci seraient deux points de Σ situés sur la même composante connexe de V et seraient donc à ce titre joints par un segment tracé sur Σ, mais ils le seraient aussi par un intervalle ouvert tracé sur l'arbre W, ce qui fournirait une boucle de V non située sur Σ. Ainsi W est un arbre à un bout relativement compact sur V, qui n'en rencontre pas le bord et ne contient aucun point de genre strictement positif. C'est en conséquence un disque ouvert.

Soit maintenant U une composante connexe de $X - \Sigma$. Supposons que U rencontre V. Comme $\partial V \subset \Sigma$, on a $U \cap V = U \cap \int(V)$, et $U \cap V$ apparaît ainsi comme une partie non vide, ouverte et fermée de U, qui est donc égale à U par connexité. Autrement dit, la composante U est contenue dans V, et c'est dès lors une composante connexe de $V - \Sigma$. C'est en conséquence par ce qui précède un disque ouvert relativement compact, et f est constante sur U pour toute $f \in F$ puisque Σ contient $\bigcup_i \Sigma_{g_i}$. Et si U ne rencontre pas V alors $f|_U$ est identiquement nulle pour toute $f \in F$ puisque V contient le support de f. On en conclut que Σ est F-admissible.

Lemme 18.2.14. — *Soit k et X comme dans la définition ci-dessus, et soit F un ensemble fini de fonctions tropicalement continues à support compact sur X.*

a) *Pour toute partie squelettique compacte Γ de X, il existe une partie squelettique de X qui est F-admissible et contient Γ ;*

b) *Soit Σ une partie squelettique F-admissible de X et soit T une partie squelettique compacte de X contenant Σ ; les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *la partie squelettique T est F-admissible ;*

(ii) *toute composante connexe de T qui ne rencontre pas Σ est contenue dans le lieu d'annulation de f pour chaque $f \in F$;*

c) *Soit Σ et T comme dans b) telles que les conditions équivalentes (i) et (ii) soient satisfaites ; on a pour toute $f \in F$ l'égalité*

$$\langle K_{\mathrm{T}}, f|_{\mathrm{T}} \rangle = \langle K_{\Sigma}, f|_{\Sigma} \rangle.$$

d) *Soit Σ une partie F-admissible de X et soit U un voisinage ouvert de Σ contenant la réunion des supports des éléments de F. Alors Σ est une partie $(F|_U)$-admissible de U.*

Démonstration. — L'exemple 18.2.13 fournit un exemple explicite de partie squelettique F-admissible de X contenant Γ, d'où *a*).

Prouvons *b*). Supposons tout d'abord que T est F-admissible. Soit Θ une composante connexe de T ne rencontrant pas Σ et soit $f \in F$; montrons que $f|_\Theta = 0$. La partie squelettique compacte Θ est contenue dans une composante connexe U de $X - \Sigma$; il suffit de vérifier que la valeur constante de f sur U est nulle. On suppose par l'absurde que ce n'est pas le cas. Dans ce cas U est un disque ouvert, et son bord contient un unique point x situé sur Σ. Soit y l'image de x sur Θ par la rétraction canonique de l'arbre compact $U \cup \{x\}$ sur son sous-arbre compact non vide Θ. La composante connexe V de $]y, x[$ dans $U - \Theta$ est alors une composante connexe de $X - \mathrm{T}$, et donc un disque ouvert relativement compact puisque T est f-admissible et que la valeur constante de f sur V n'est pas nulle. Le bord topologique de V dans X est dès lors un singleton, ce qui absurde puisque ce bord est égal à $\{x, y\}$ par construction.

Réciproquement, supposons que (ii) est satisfaite. Comme $\mathrm{T} \supset \Sigma$, toute fonction f appartenant à F est localement constante sur $X - \mathrm{T}$. Soit U une composante connexe de $X - \mathrm{T}$. Supposons qu'il existe $f \in F$ dont la valeur constante sur U est non nulle, et soit V la composante connexe de $X - \Sigma$ contenant U. Nous allons montrer que V est un disque ouvert relativement compact dans X, ce qui prouvera (i). Par construction, V est un disque ouvert dont l'unique point x du bord est situé sur Σ. Soit E une composante connexe de $\mathrm{T} \cap (V \cup \{x\})$. Elle est compacte, et si elle ne contient pas x c'est une composante connexe de T ne rencontrant pas Σ, ce qui est absurde au vu de l'hypothèse (ii) et puisque la valeur constante de f sur V est non nulle. Par conséquent, $\mathrm{T} \cap (V \cup \{x\})$ est un arbre compact contenant x. On distingue dès lors deux cas. Si $\mathrm{T} \cap V$ est vide alors $U = V$, et U est donc un disque ouvert relativement compact de X. Et si $\mathrm{T} \cap V$ est non vide, c'est un sous-arbre fermé de V contenant un intervalle ouvert aboutissant à x ; en conséquence $V - \mathrm{T}$ est une union disjointe $\coprod V_i$ de disques ouverts relativement compacts dans V. Les V_i sont alors à la fois ouverts et fermés dans $X - \mathrm{T}$, si bien que ce sont des composantes connexes de $X - \mathrm{T}$, et U est dès lors nécessairement l'un des V_i, ce qui termine la preuve de *b*).

Montrons enfin c). Soit $f \in F$. Soit $\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_m$ les composantes connexes de $\mathrm{T} - \Sigma$. Pour tout i, soit U_i la composante connexe de $X - \Sigma$ qui contient T_i. Soit I l'ensemble des indices tels que la valeur constante a_i de f sur U_i soit non nulle. Si $i \notin I$, aucun point de $\overline{\mathrm{T}_i}$ ne contribue à $\langle K_\mathrm{T}, f|_\mathrm{T}\rangle$ ni à $\langle K_\Sigma, f|_\Sigma\rangle$. Si $i \in I$ alors U_i est un disque ouvert relativement compact dans X, et T_i n'est pas compacte (sans quoi ce serait une composante connexe de T, ce qui contredirait (ii)). L'adhérence de T_i dans X est donc égale à $\mathrm{T}_i \cup \{x_i\}$, où x_i est l'unique point du bord de U_i (remarquons que si i et j sont deux indices différents de I alors U_i et U_j sont disjoints, sans quoi T_i et T_j coïncideraient à l'approche de x_i). La valence de T en un point x de Σ en lequel f ne s'annule pas est donc égale à la somme de la valence de Σ en x et du cardinal de $\{in I, x_i = x\}$. Il s'ensuit que

$$\langle K_\mathrm{T}, f|_\mathrm{T}\rangle = \langle K_\Sigma, f|_\Sigma\rangle + \sum_{i\in I} a_i \left(1 + \sum_{x\in S_i}(v(x)-2)\right),$$

où S_i désigne l'ensemble des sommets de T_i, où la valence $v(x)$ est calculée relativement à T_i, et où l'on a utilisé le fait que $g(x) = 0$ pour tout $x \in S_i$ puisque U_i est un disque. Pour tout i, notons T'_i l'arbre compact $\mathrm{T}_i \cup \{x_i\}$, $S'_i = S_i \cup \{x_i\}$ l'ensemble de ses sommets et E_i l'ensemble de ses arêtes. On a alors

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{x\in S_i}(v(x)-2) &= \sum_{x\in S'_i} v(x) - 2\,\mathrm{Card}(S_i) \\ &= 2\,\mathrm{Card}(E_i) - 2\,\mathrm{Card}(S'_i) + 2 \\ &= 2(1-\chi(\mathrm{T}'_i)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

si bien que $\langle K_\mathrm{T}, f|_\mathrm{T}\rangle = \langle K_\Sigma, f|_\Sigma\rangle$.

Montrons enfin (d). Comme Σ est F-admissible, Σ est une partie squelettique compacte de U et $f|_U$ est localement constante sur $U - \Sigma$. Soit maintenant V une composante connexe de $U - \Sigma$ telle qu'il existe une fonction $f \in F$ dont la valeur constante sur V est non nulle. Soit V' la composante connexe de $X - \Sigma$ qui contient V. La valeur constante de f sur V' est alors non nulle, ce qui entraîne que V' est un disque ouvert relativement compact dans X, dont l'unique point du bord x est situé sur Σ ; et cela entraîne aussi que V' est contenu dans le support de f, et a fortiori dans U. Il vient $V = V'$, si bien que V est un disque ouvert dont l'adhérence dans U est le compact $V \cup \{x\}$ (puisque $\Sigma \subset U$). □

18.2.15. — Si F est un ensemble fini de fonctions tropicalement continues à support compact, il résulte du lemme 18.2.14 que l'ensemble $\mathscr{S}$ des parties squelettiques F-admissibles de X est non vide, et même filtrant, et que si $\Sigma \in \mathscr{S}$ et $f \in F$ le nombre réel $\langle K_\Sigma, f|_\Sigma\rangle$ ne dépend pas de Σ.

Il est donc licite de définir pour toute fonction tropicalement continue f à support compact $\langle K_X^{\mathrm{sq}}, f\rangle$ comme étant égal à $\langle K_\Sigma, f|_\Sigma\rangle$ pour n'importe quelle partie squelettique f-admissible Σ de X. Si g est une autre fonction tropicalement continue à support compact on montre en utilisant une partie squelettique $\{f, g\}$-admissible que

$$\langle K_X^{\mathrm{sq}}, f + \lambda g\rangle = \langle K_X^{\mathrm{sq}}, f\rangle + \lambda\langle K_X^{\mathrm{sq}}, g\rangle$$

pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$. Ainsi K_X^{sq} apparaît-il comme une forme linéaire sur l'espace des applications tropicalement continues à support compact sur X. En le restreignant à $\mathscr{A}_{\mathrm{c}}(X)$, on obtient un courant d'ordre 0 sur X.

Théorème 18.2.16. — *Soit k un corps valué complet, non trivialement valué, algébriquement clos et soit X une courbe analytique lisse sur k. Soit $c_1(X)$ le courant de courbure du fibré canonique de X, muni de sa semi-métrique de Temkin. Soit f une fonction lisse et à support compact sur X. On a*

$$\langle c_1(X), f\rangle = \langle K_X^{\mathrm{sq}}, f\rangle.$$

Démonstration. — Soit V un domaine analytique compact de X contenant le support de f et soit Σ une partie squelettique f-admissible de X contenue dans V et contenant ∂V (il en existe par l'exemple 18.2.13). Il s'agit de démontrer que

$$\langle c_1(X), f\rangle = \langle K_\Sigma, f|_\Sigma\rangle.$$

Il existe un voisinage ouvert U de V dans X qui est de la forme $V \cup \bigcup_i X_i$ où chaque X_i est une couronne ouverte contenue dans $X - V$ dont le bord est une paire $\{x_i, y_i\}$ avec $x_i \in \partial V$ et $y_i \notin V$, et où les X_i sont deux à deux disjointes. En prolongeant chacune des X_i en un disque ouvert de bord $\{x_i\}$ on obtient une courbe k-analytique propre et donc projective lisse Y munie d'une immersion ouverte $U \hookrightarrow Y$; comme Y est une courbe projective, le fibré en droites $\Omega_{Y/k}$ possède une section méromorphe régulière ω, dont la restriction à U est une section méromorphe régulière de $\Omega_{U/k}$. Les deux termes de l'égalité à démontrer $\langle c_1(X), f\rangle = \langle K_\Sigma, f|_\Sigma\rangle$ peuvent être calculés en remplaçant X par U puisque U contient Σ et le support de f et que Σ est encore $f|_U$-admissible d'après le lemme 18.2.14 (d). On peut donc supposer qu'il existe une forme différentielle méromorphe régulière ω sur X.

Le théorème 18.1.6 affirme alors que $c_1(X) = \mathrm{d}'\mathrm{d}''[\log\|\omega\|^{-1}] + \delta_{\mathrm{div}(\omega)}$. Par suite, on a

$$\langle c_1(X), f\rangle = \int_X \log\|\omega\|^{-1}\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, f + \langle \delta_{\mathrm{div}(\omega)}, f\rangle.$$

On commence par calculer le premier terme. Soit $\mathscr{C}$ une triangulation de Σ. Puisque la fonction lisse f est localement constante en dehors de Σ, ce dernier est un support fort de $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, f$, si bien que

$$\int_X \log\|\omega\|^{-1}\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, f = \sum_{e\in\mathscr{C}_1} \int_e \log\|\omega^{-1}\|\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, f.$$

Pour toute arête $e \in \mathscr{C}_1$, soit U_e la couronne ouverte de X dont le squelette est la cellule ouverte $\mathring{e}$. Choisissons une coordonnée t_e sur cette couronne ; la fonction $\tau_e = \log|t_e|$ identifie $\mathring{e}$ à un intervalle $]a_e; b_e[$ de $\mathbf{R}$, de manière compatible aux calibrages. (Par convention, on a choisi $a_e < b_e$.)

Pour tout sommet $x \in \mathscr{C}_0$, il existe un paramètre t_x adapté à toutes les arêtes aboutissant à x (18.2.8). On peut dès lors raffiner la triangulation $\mathscr{C}$ de sorte que, pour chaque arête e, le paramètre t_e choisi plus haut se prolonge en un paramètre encore noté t_e sur un voisinage analytique de $\overline{U_e}$; et l'on peut aussi faire en sorte que $\omega_e|_{U_e}$ n'ait ni zéro ni pôle, et que $f|_e$ soit égale à $f_e \circ \tau_e$ pour une certaine fonction indéfiniment dérivable f_e sur le segment $[a_e; b_e]$.

Notons que le choix des paramètres t_e fournit une orientation du graphe Σ : l'arête e est orientée de sorte que la fonction τ_e y soit croissante. Une arête e contenant un point $x \in \mathscr{C}_e$ sera ainsi dite sortante si $a_e = \tau_e(x)$, et entrante si $b_e = \tau_e(x)$.

Soit $e \in \mathscr{C}_1$. Puisque $\mathrm{d}t_e/t_e$ est une base de $\Omega^1_{U_e/k}$, c'est une une forme différentielle méromorphe régulière au voisinage de $\overline{U_e}$, et il existe dès lors une fonction méromorphe régulière φ_e au voisinage de $\overline{U_e}$ telle que ω s'écrive $\varphi_e\,\mathrm{d}t_e/t_e$ sur le voisinage en question. Et comme $\omega|_{U_e}$ n'a ni zéro ni pôle, la fonction $\varphi_e|_{U_e}$ est inversible. Alors, pour tout $x \in \mathring{e}$, on a

$$\|\omega(x)\| = |\varphi_e(x)| \cdot \|\mathrm{d}t_e/t_e(x)\| = |\varphi_e(x)|.$$

Comme φ_e est inversible sur U_e il existe une fonction affine ψ_e sur l'intervalle $[a_e; b_e]$ telle que $\psi_e(\tau_e(x)) = \log|\varphi_e(x)|$ pour tout $x \in e$; notons n_e la pente de ψ_e (c'est un entier relatif). S On a alors

$$\int_e \log\|\omega\|^{-1}\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,f = -\int_{a_e}^{b_e} \psi_e(\tau) f_e''(\tau)\,d\tau.$$

En intégrant par parties, il vient

$$\begin{aligned}\int_e \log\|\omega\|^{-1}\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,f &= -\left[\psi_e(\tau)f_e'(\tau)\right]_{a_e}^{b_e} + \int_{a_e}^{b_e} n_e f_e'(\tau)\,d\tau \\ &= \psi_e(a_e)f_e'(a_e) - \psi_e(b_e)f_e'(b_e) + n_e(f_e(b_e) - f_e(a_e)).\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}\int_U \log\|\omega\|^{-1}\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,f &= \sum_{e\in\mathscr{C}_1} \left(\psi_e(a_e)f_e'(a_e) - \psi_e(b_e)f_e'(b_e) + n_e(f_e(b_e) - f_e(a_e))\right) \\ &= \sum_{x\in\mathscr{C}_0} \sum_{e \text{ est sortante en } x} \left(\log|\varphi_e(x)| \cdot f_e'(\tau_e(x)) - n_e f(x)\right) \\ &\qquad - \sum_{e \text{ est entrante en } x} \left(\log|\varphi_e(x)| \cdot f_e'(\tau_e(x)) - n_e f(x)\right) \\ &= \sum_{x\in\mathscr{C}_0} \sum_{e\ni x} \varepsilon_e(x) \left(\log|\varphi_e(x)| \cdot f_e'(\tau_e(x)) - n_e f(x)\right),\end{aligned}$$

où $\varepsilon_e(x)$ vaut 1 si l'arête e est sortante en x, et -1 sinon. Par suite,

$$\int_U \log\|\omega\|^{-1}\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,f = \sum_{x\in\mathscr{C}_0} \log\|\omega(x)\| \left(\sum_{e\ni x} \varepsilon_e(x) f_e'(\tau_e(x))\right) - f(x)\left(\sum_{e\ni x} \varepsilon_e(x) n_e\right).$$

Lemme 18.2.17. — *Pour tout $x \in \mathscr{C}_0$, on a $\sum_{e\ni x} \varepsilon_e(x) f_e'(\tau_e(x)) = 0$.*

Démonstration. — Soit g une fonction lisse sur X, égale à 1 en x et dont le support est compact et ne rencontre aucune arête de $\mathscr{C}$ autre que celles contenant x. La forme lisse $g\,\mathrm{d}''\,f$ sur X est de type $(0,1)$ et à support compact. La réunion des arêtes contenant x est un support fort de la forme $g\,\mathrm{d}''\,f$; par suite, son intégrale de bord vaut

$$\int_X^{\partial} g\,\mathrm{d}''\,f = \sum_{e\ni x} \int_e^{\partial} g\,\mathrm{d}''\,f.$$

Or, pour toute arête e, on a

$$\int_e^{\partial} g\,\mathrm{d}''\,f = g(a_e)f_e'(a_e) - g(b_e)f_e'(b_e) = -\varepsilon_e(x) f_e'(\tau_e(x)),$$

si bien que

$$\int_X^{\partial} g\,\mathrm{d}''f = -\sum_{e\ni x}\varepsilon_e(x)f'_e(\tau_e(x)).$$

Comme X est sans bord, on a $\int_X^{\partial} g\,\mathrm{d}''f = 0$, d'où le lemme. □

Ainsi,

$$\int_X \log\|\omega\|^{-1}\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''f = \sum_{x\in\mathscr{C}_0} f(x)\left(\sum_{e\ni x}\varepsilon_e n_e\right).$$

Fixons un point $x\in\mathscr{C}_0$; il est de type II. Compte-tenu des conventions d'orientations, on a $\varepsilon_e n_e = n_e(\omega)$ pour toute arête $e\in\mathscr{C}_1$ qui contient x. Par suite,

$$\sum_{e\ni x}\varepsilon_e n_e = \sum_{e\ni x}(1+\mathrm{ord}_e(\widetilde{\omega(x)})) = v(x) + \sum_{e\ni x}\mathrm{ord}_e(\widetilde{\omega(x)}).$$

Supposons que $f(x)\neq 0$. Dans ce cas la valeur constante de f sur toute composante connexe de $X-\Sigma$ dont le bord contient x est non nulle, si bien qu'une telle composante est un disque ouvert. Soit $\mathscr{D}_x$ l'ensemble des composantes connexes de $X-\Sigma$ qui sont des disques ouverts de bord $\{x\}$, et soit U_x le domaine analytique compact $\{x\}\cup\bigcup_{D\in\mathscr{D}_x} D$ de X. Le degré de $\omega|_{U_x}$ est la somme (presque nulle) des degrés $\deg(\omega|_D)$, lorsque D parcourt $\mathscr{D}_x$. Soit $D\in\mathscr{D}_x$. Le disque D définit un germe d'arête e aboutissant à x et il résulte des lemmes 18.2.10 et 18.2.11 que $\mathrm{ord}_e(\widetilde{\omega(x)}) = n_e(\omega)-1 = \deg(\omega|_D)$. La section méromorphe $\widetilde{\omega(x)}$ de $\Omega^1_{C_x/\widetilde{k}^1}$ est de degré $2g(x)-2$. Supposons que $f(x)\neq 0$. Dans ce cas pour toute composante connexe U de $X-\Sigma$ dont le bord contient x, la valeur constante de f sur U est non nulle, ce qui force U à être un disque ouvert de bord $\{x\}$, par f-admissibilité de Σ. Tout point fermé de C_x est donc associé ou bien à une arête de Σ, ou bien à l'un des disques $D\in\mathscr{D}_x$. Par conséquent,

$$\sum_{e\in\mathscr{C}_1,e\ni x}\mathrm{ord}_e(\widetilde{\omega(x)}) = 2g(x)-2-\sum_{D\in\mathscr{D}_x}\deg(\omega|_D).$$

Il vient

$$\begin{aligned}
\int_X \log\|\omega\|^{-1}\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''f &= \sum_{x\in\mathscr{C}_0} f(x)\left(\sum_{e\in\mathscr{C}_1,e\ni x}\varepsilon_e n_e\right)\\
&= \sum_{x\in\mathscr{C}_0} f(x)\left(v(x)+\sum_{e\in\mathscr{C}_1,e\ni x}\mathrm{ord}_e(\widetilde{\omega(x)})\right)\\
&= \sum_{x\in\mathscr{C}_0,f(x)\neq 0} f(x)\left(v(x)+\sum_{e\in\mathscr{C}_1,e\ni x}\mathrm{ord}_e(\widetilde{\omega(x)})\right)\\
&= \sum_{x\in\mathscr{C}_0,f(x)\neq 0} f(x)\,(2g(x)-2+v(x)-\deg(\omega|_{U_x}))\\
&= \sum_{x\in\mathscr{C}_0} f(x)\,(2g(x)-2+v(x)) - \sum_{x\in\mathscr{C}_0,f(x)\neq 0} f(x)\deg(\omega|_{U_x})\\
&= \langle K_X^{\mathrm{sq}},f\rangle \sum_{x\in\mathscr{C}_0,f(x)\neq 0} -f(x)\deg(\omega|_{U_x}).
\end{aligned}$$

Il suffit pour conclure de s'assurer que $\sum_{x\in\mathscr{C}_0,f(x)\neq 0} f(x)\deg(\omega|_{U_x}) = \langle\delta_{\mathrm{div}(\omega)}, f\rangle$. Soit a un pont situé sur $\mathrm{div}(\omega)$ et soit U la composante connexe de $X-\Sigma$ contenant a. Comme ω est sans zéro ni pôle sur chacune des couronnes U_e, le bord de U est contenu dans $\mathscr{C}_0$. Si $f(a)=0$ alors f est identiquement nulle sur U et donc en tout point de ∂U. Sinon la valeur constante de f sur U est non nulle et U est dès lors un disque ouvert ; son bord est un singleton $\{x\}$ et $f(x)=f(a)\neq 0$. On a par conséquent

$$\begin{aligned}\langle\delta_{\mathrm{div}(\omega)}, f\rangle &= \sum_{a\in\mathrm{div}(\omega)} f(a)\,\mathrm{ord}_a(\omega)\\ &= \sum_{a\in\mathrm{div}(\omega),f(a)\neq 0} f(a)\,\mathrm{ord}_a(\omega)\\ &= \sum_{x\in C_0,f(x)\neq 0} f(x)\sum_{D\in\mathscr{D}_x}\deg(\omega|_D)\\ &= \sum_{x\in C_0,f(x)\neq 0} f(x)\deg(\omega|_{U_x}).\end{aligned}$$

□

§ 18.3. PRODUITS DE COURANTS DE COURBURE

Soit X un n-espace k-analytique sans bord.

18.3.1. — Considérons des fibrés en droites $\overline{L_1},\dots,\overline{L_m}$ sur X munis de métriques dpsh. On dispose ainsi de courants de courbure $c_1(\overline{L_i})$, localement différences de courants positifs fermés.

Les métriques dpsh sur les L_i fournissent des sections globales u_i du faisceau $\mathrm{CPsh}^{\pm}_X/\log|\mathscr{O}^{\times}_X|$ et donc aussi des sections globales du faisceau $\mathrm{CPsh}^{\pm}_X/\mathrm{Harm}_X$. On a expliqué au paragraphe 8.8.5 comment la construction $(v_1,\dots,v_m)\mapsto \mathrm{d}'\mathrm{d}''(v_1)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''(v_p)$ sur $(\mathrm{CPsh}^{\pm}_X)^m$ passe au quotient en un morphisme m-linéaire de $(\mathrm{CPsh}^{\pm}_X/\mathrm{Harm}_X)^m$ dans l'espace des courants de bidegré (m,m). On définit alors le courant $c_1(\overline{L_1})\wedge\cdots\wedge c_1(\overline{L_m})$ comme l'image de la suite $(u_1,\dots,u_m)$ par ce morphisme quotient.

Plus généralement, si T est un courant positif fermé sur X, on définit de même $c_1(\overline{L_1})\wedge\cdots\wedge c_1(\overline{L_m})\wedge T$.

Sur un ouvert U de X sur lequel chacun des L_i possède une section inversible s_i, ces courants sont donnés par l'expression

$$c_1(\overline{L_1})\wedge\cdots\wedge c_1(\overline{L_m})\wedge T|_U = \mathrm{d}'\mathrm{d}''\log\|s_1\|^{-1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''\log\|s_m\|^{-1}\wedge T.$$

Il est localement $\mathrm{d}'\mathrm{d}''$-exact si $m\geqslant 1$. Sa formation est multilinéaire en les $\overline{L_i}$.

Ce courant $c_1(\overline{L_1})\wedge\cdots\wedge c_1(\overline{L_m})\wedge T$ est :

– de Bedford–Taylor, si T est est de Bedford–Taylor (§8.7.1) ;

– positif, si les métriques des $\overline{L_i}$ sont psh (§8.7.1) ;

– squelettique si les métriques des $\overline{L_i}$ sont PL et si le courant T est squelettique (corollaire 8.10.5).

Si les métriques de L_i sont tropicalement d-convexes, le support du courant $c_1(\overline{L_1}) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L_m}) \wedge T$ est localement contenu dans une partie squelettique de X (remarque 8.8.6).

Proposition 18.3.2. — *Soit $j\colon Y \to X$ un morphisme topologiquement propre entre espaces analytiques sans bord et topologiquement séparés, et soit S un courant positif fermé sur Y. Le courant j_*S sur X est positif fermé et l'on a l'égalité*

$$c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_m) \wedge j_*S = j_*(c_1(j^*\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(j^*\overline{L}_m) \wedge S).$$

Démonstration. — L'assertion est locale sur X ; par multilinéarité, on peut supposer que les métriques des fibrés considérées sont psh. Compte tenu des définitions l'assertion se déduit alors de la proposition 8.5.6, par récurrence sur m. □

Corollaire 18.3.3. — *Soit X un n-espace k-analytique sans bord.*

a) *Soit K une extension complète de k et soit $p\colon X_K \to X$ le morphisme de changement de base. On a*

$$p_*(c_1(p^*\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(p^*\overline{L}_m)) = c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_m).$$

b) *Soit Y un n-espace k-analytique sans bord, et soit $f\colon Y \to X$ un morphisme fini dont le degré calibré $\deg_f$ est constant de valeur d sur X^{gen}. On a*

$$f_*(c_1(f^*\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(f^*\overline{L}_m)) = d \cdot c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_m).$$

Démonstration. — Compte tenu de la proposition précédente, cela découle des propositions 16.1.5 et 16.1.1. □

Proposition 18.3.4. — *Soit X un n-espace k-analytique sans bord. Soit K une extension valuée de k, universellement multiplicative ; soit $\pi\colon X_K \to X$ le morphisme de changement de base et soit $\sigma\colon X \to X_K$ sa section de Shilov.*

Soit $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_p$ des fibrés en droites sur X munis de métriques d-psh, soit $T = c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_p)$ et soit $T_K = \mathrm{d'd''}(\pi^*\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d'd''}(\pi^*\overline{L}_p)$. Soit α une forme lisse sur X de bidegré (u, v), où $\max(u, v) \geqslant n - p$. Le support du courant $T_K \wedge \pi^*\alpha$ est contenu dans $\sigma(X)$.

Démonstration. — Le résultat est local sur X. On peut ainsi supposer que les fibrés en droites considérés sont triviaux et les courants de courbures $c_1(\overline{L}_m)$ de la forme $\mathrm{d'd''}\, u_m$, où u_m est une fonction d-psh sur X. L'assertion résulte alors de la proposition 16.8.2. □

Proposition 18.3.5. — *Soit $p\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces analytiques équidimensionnels, topologiquement séparés et sans bord ; posons $m = \dim(X)$, $n = \dim(Y)$ et $d = n - m$. On suppose que le lieu de platitude de p est dense dans Y. Soit $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_r$ des fibrés en droites sur X munis de métriques tropicalement d-convexes, soit ω une forme G-lisse de type (d, d) sur Y dont le support est p-compact et soit $u_\omega\colon X \to \mathbf{R}$ la fonction définie par l'intégrale*

$$u_\omega(x) = \int_{Y_x} \omega$$

de la forme de type (d, d) induite par ω sur l'espace $\mathscr{H}(x)$-analytique Y_x si cet espace est de dimension d, et par $u_\omega(x) = 0$ sinon.

Pour toute $(m-r, m-r)$-forme lisse α à support compact sur X,

$$\langle c_1(p^*\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(p^*\overline{L}_r), \omega \wedge p^*\alpha \rangle$$

est l'intégrale de la fonction u_ω contre la mesure $c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_r) \wedge \alpha$ sur X.

Démonstration. — En considérant une partition de l'unité sur X, on se ramène au cas où les fibrés en droites L_m sont triviaux et les courants de courbures $c_1(\overline{L}_i)$ sont différences de deux courants de la forme $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_i$, où u_i est une fonction d-convexe sur X. Par multilinéarité, l'assertion résulte alors du théorème 16.5.7. □

Corollaire 18.3.6. — *Avec les notations de la proposition, on a l'égalité de mesures*

$$p_*(c_1(p^*\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(p^*\overline{L}_r) \wedge p^*\alpha \wedge \omega) = u_\omega \cdot c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_r) \wedge \alpha.$$

Proposition 18.3.7. — *Soit X un n-espace analytique sans bord, soit p un entier naturel et soit $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_m$ des fibrés en droites sur X munis de métriques d-psh. Soit A une partie fermée de X qui est tropicalement $\mathscr{H}^p$-négligeable. Pour toute forme $\alpha \in \mathscr{A}^{n-p,n-p}(X)$, l'ensemble A est négligeable pour la mesure $c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_p) \wedge \alpha$ sur X.*

Démonstration. — L'assertion est locale sur X. On peut donc supposer que les fibrés en droites $\overline{L}_m$ sont triviaux et les courants de courbure $c_1(\overline{L}_m)$ de la forme $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, u_m$, où u_m est une fonction d-psh sur X. L'assertion résulte alors du corollaire 16.8.6. □

Lemme 18.3.8. — *Soit $\overline{L_1}, \ldots, \overline{L_m}$ des fibrés en droites sur X munis de métriques tropicalement d-convexes. Soit U un ouvert de X tel que $d_k(x) < n$ pour pour tout $x \in X - U$, et soit h une fonction mesurable sur U, localement bornée. Le courant $hc_1(\overline{L_1}|_U) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L_m}|_U)$ sur U se prolonge par zéro à X.*

Démonstration. — Démontrons que pour toute forme lisse α de bidegré $(n-m, n-m)$ sur X, à support compact, le support du courant $c_1(\overline{L_1}|_U) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L_m}|_U) \wedge \alpha|_U$ sur U est compact. Ce support est l'intersection avec U du support du courant $c_1(\overline{L_1}) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L_m}) \wedge \alpha$. Comme les métriques de $\overline{L_i}$ sont dpsh et comme le support de α est compact, le support de ce dernier courant est contenu dans une partie squelettique compacte Σ de X (§18.3.1). On a $d_k(x) = n$ pour tout $x \in \Sigma$, si bien que Σ est contenu dans U. □

Proposition 18.3.9. — *Soit $\overline{L}, \overline{L_1}, \ldots, \overline{L_m}$ des fibrés en droites sur X munis de métriques tropicalement d-convexes. Soit s une section méromorphe régulière de L sur X, soit U son ouvert de définition. Le courant $\log\|s\|^{-1} c_1(\overline{L_1}) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L_m})$ sur U possède un prolongement par zéro à X ; notons-le $[\log\|s\|^{-1} c_1(\overline{L_1}) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L_m})]$. On a l'égalité*

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''[\log\|s\|^{-1} c_1(\overline{L_1}) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L_m})] + c_1(\overline{L_1}) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L_m}) \wedge \delta_{\mathrm{div}(s)} = c_1(\overline{L}) \wedge c_1(\overline{L_1}) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L_m})$$

de courants sur X.

Démonstration. — L'existence de ce prolongement par zéro résulte du lemme précédent. Pour démontrer l'égalité de courants indiquée, on peut raisonner localement sur X ; on suppose donc que chaque L_i possède une section inversible s_i ; posons $u_i = \log\|s_i\|^{-1}$.

Raisonnant encore localement, un argument de multilinéarité et la définition des fonctions tropicalement d-convexes permettent de supposer que les u_i sont tropicalement convexes. Il s'agit alors de démontrer l'égalité de courants

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''[\log\|s\|^{-1}\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_m)]+\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_m)\wedge\delta_{\mathrm{div}(s)}$$
$$=c_1(\overline{L})\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_m).$$

Commençons par traiter le cas où les u_i sont lisses. Soit α une forme de bidegré $(n-m,n-m)$ sur X, à support compact. Par définition, on a

$$\begin{aligned}\langle\mathrm{d}'\mathrm{d}''[\log\|s\|^{-1}\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_m)],\alpha\rangle&\\
&=\langle\log\|s\|^{-1}\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_m),\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\alpha|_U\rangle\\
&=\langle\log\|s\|^{-1},\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_m)\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\alpha|_U\rangle\\
&=\langle\log\|s\|^{-1},\mathrm{d}'\mathrm{d}''(\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_m)\wedge\alpha|_U)\rangle\\
&=\langle\mathrm{d}'\mathrm{d}''\log\|s\|^{-1},\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_m)\wedge\alpha|_U\rangle\\
&=\langle-\delta_{\mathrm{div}(s)}+c_1(\overline{L}),\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_m)\wedge\alpha|_U\rangle,\end{aligned}$$

d'après la formule de Poincaré–Lelong pour $\overline{L}$ (théorème 18.1.6). La formule voulue s'en déduit.

Traitons maintenant le cas général. On peut encore raisonner localement sur X et supposer qu'il existe un moment $f\colon X\to T$ sur X, un polyèdre compact P de T_{trop} contenant $f_{\mathrm{trop}}(X)$, des fonctions convexes lisses (v_i^k) sur P telles que pour tout i, la suite (v_i^k) converge uniformément vers une fonction v_i sur P telle que $u_i=f^*v_i$; pour tout i, notons $u_i^k=f_{\mathrm{trop}}^*v_i^k$. Pour tout k, on a la formule

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''[\log\|s\|^{-1}\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1^k)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_m^k)]+\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1^k)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_m^k)\wedge\delta_{\mathrm{div}(s)}$$
$$=c_1(\overline{L})\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1^k)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_m^k).$$

D'après la proposition 8.7.2 le second terme du membre de gauche et le membre de droite convergent, comme courants, vers l'expression correspondante. Il suffit de justifier que les courants $[\log\|s\|^{-1}\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1^k)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_m^k)]$ convergent vers $[\log\|s\|^{-1}\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_m)]$. Soit α une forme lisse à support compact sur X, de bidegré $(n-m,n-m)$. Soit Σ une partie squelettique compacte de X, réunion de polyèdres caractéristiques de moments obtenus en concaténant la restriction de f et des moments tropicalisant α sur des domaines compacts de X dont les intérieurs recouvrent le support de α. Alors Σ est un support fort des formes $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1^k)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_m^k)\wedge\alpha$ (lemme 5.3.4). Comme $d_k(x)<n$ pour tout $x\in X\smallsetminus U$, on a $\Sigma\subset U$.

Le support des courants $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1^k)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_m^k)\wedge\alpha$ sur X est contenu dans Σ, et ces courants convergent vers le courant $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1^k)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_m^k)\wedge\alpha$, d'après la proposition 8.7.2. Comme Σ est compact et contenu dans U, la fonction $\log\|s\|^{-1}$ est bornée sur Σ ; par convergence dominée, on en déduit la convergence de $\langle[\log\|s\|^{-1}\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1^k)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_m^k)],\alpha\rangle$ vers $\langle[\log\|s\|^{-1}\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_m)],\alpha\rangle$. □

Proposition 18.3.10. — *Soit X un n-espace analytique sans bord, soit $L_1,\dots,L_n$ des fibrés en droites sur X ; pour tout i, soit $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ des métriques lisses (resp. dpsh) sur L_i. Il existe une $(n-1,n-1)$-forme lisse α (resp. un $(n-1,n-1)$-courant α) sur X*

vérifiant

$$c_1(\overline{L}_1') \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_n') - c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_n) = \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\alpha.$$

En particulier, si X est propre et de dimension n, le nombre réel

$$\int_X c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_n)$$

ne dépend que des fibrés en droites $L_1, \ldots, L_n$ sur X, et pas des métriques dpsh dont ils sont munis.

Démonstration. — Pour tout i, soit u_i la fonction lisse (resp. dpsh) sur X telle que $\log\|s\| = u_i + \log\|s\|'$ pour toute section inversible locale s de L_i. On a $c_1(\overline{L}_i') = \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u_i + c_1(\overline{L}_i)$. Par suite, $c_1(\overline{L}_1') \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_n') - c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_n)$ est somme de termes de la forme $T_1 \wedge T_2 \wedge \ldots T_n$ où chacun chacun des T_i est un courant ou bien égal à $c_1(\overline{L}_i)$ ou bien à $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u_i$, le second cas se présentant pour au moins un indice i. Considérons un tel terme, et soit j tel que $T_j = \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u_j$. Alors $T_1 \wedge T_2 \wedge \ldots T_n$ est égal à $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_j \wedge T_1 \wedge T_2 \wedge T_{j-1} \wedge T_{j+1} \wedge \ldots \wedge T_n)$. C'est donc une forme lisse, resp. un courant symétrique fermé, de bidegré $(n-1, n-1)$. Il en résulte que $c_1(\overline{L}_1') \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_n') - c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_n)$ est bien de la forme $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\alpha$ où α est une forme lisse, resp. un courant symétrique fermé, de bidegré $(n-1, n-1)$.

Par conséquent

$$\int_X c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_n) = \int_X c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_n) + \int_X \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\alpha$$

et l'on conclut en remarquant que comme X est propre

$$\int_X \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\alpha = \langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\alpha, 1\rangle = \langle \alpha, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,1\rangle = 0.$$

Cela conclut la démonstration. □

Théorème 18.3.11. — *Soit X une k-variété algébrique propre, purement de dimension n. Soit $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_n$ une famille de fibrés en droites munis de métriques dpsh sur X^{an} (par exemple, des métriques lisses ou formelles). On a*

$$\int_{X^{\mathrm{an}}} c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_n) = \int_X c_1(L_1) \cdots c_1(L_n).$$

Remarquons que les hypothèses entraînent que X^{an} est un n-espace k-analytique sans bord. Précisons également que comme X est propre, chacun des L_i est l'analytifié d'un fibré en droites canonique sur X ([**109**], Appendice A) que l'on note encore L_i, ce qui donne un sens au membre de droite. Cela prouve en particulier que le membre de gauche de la relation précédente est un entier relatif, positif ou nul si les L_i sont nef, ce qui n'est pas évident a priori. Nous étendrons cette propriété d'intégralité au cas des espaces analytiques propres arbitraires, non nécessairement algébriques (corollaire 18.4.10).

Démonstration. — D'après les propositions 18.3.10 et 17.1.8, on peut supposer que les métriques des fibrés L_i sont lisses. Soit (X_j) la famille des composantes irréductibles réduites de X, et pour tout j soit m_j la multiplicité générique de X le long de X_j. Les X_j^{an}

sont alors les composantes irréductibles de X^{an} et X^{an} est de multiplicité générique m_j le long de X_j^{an} (11.2.5 et lemme 13.2.7). On a alors

$$\int_{X^{\mathrm{an}}} c_1(\overline{L}_1)\cdots c_1(\overline{L}_n) = \sum_j m_j \int_{X_j^{\mathrm{an}}} c_1(\overline{L}_1)\cdots c_1(\overline{L}_n)$$

et

$$\int_X c_1(L_1)\cdots c_1(_n) = \sum_j m_j \int_{X_j} c_1(L_1)\cdots c_1(L_n),$$

la première de ces égalités résultant de la proposition 14.4.2, et la seconde de la théorie de la théorie de l'intersection standard. Il suffit donc de prouver l'égalité voulue pour chacune des X_j, ce qui permet de se ramener au cas où X est intègre. On raisonne alors par récurrence sur n.

Si $n = 0$ alors X est le spectre d'une extension finie L de k, et les deux termes de l'égalité à démontrer sont alors égaux à $[L : k]$: cela découle de la proposition 14.4.2 du côté analytique, et de la définition du degré d'intersection du côté algébrique. Le théorème est donc vrai lorsque $n = 0$.

Supposons $n > 0$ et le résultat vrai en dimension $n - 1$. Choisissons une section rationnelle non nulle s de L_n. Soit D le diviseur de s vue comme section rationnelle inversible de L_n sur le schéma X, et soit et soit D^{an} le diviseur de s vue comme section méromorphe inversible de L_n sur l'espace analytique X^{an}. Écrivons $D = \sum m_j D_j$ où les D_j sont irréductibles et réduits ; par les mêmes arguments que plus haut, on a $D^{\mathrm{an}} = \sum m_j D_j^{\mathrm{an}}$.

Alors, $\log\|s\|$ est un courant sur X^{an} et l'on a la formule de Poincaré–Lelong (théorème 18.1.6)

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''[\log\|s\|^{-1}] + \delta_{D^{\mathrm{an}}} = c_1(\overline{L}_n).$$

Notons α la forme lisse $c_1(\overline{L}_1)\ldots c_1(\overline{L}_{n-1})$, et appliquons-lui cette égalité de courants. Il vient

$$\langle[\log\|s\|^{-1}], \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\alpha\rangle + \int_{D^{\mathrm{an}}} \alpha = \int_X c_1(\overline{L}_1)\ldots c_1(\overline{L}_n).$$

On a par ailleurs

$$\begin{aligned}\int_{D^{\mathrm{an}}} \alpha &= \sum m_i \int_{D_i^{\mathrm{an}}} \alpha \\ &= \sum m_i \int_{D_i} c_1(L_1)\cdots c_1(L_{n-1}) \\ &= \int_X c_1(L_1)\cdots c_1(L_n),\end{aligned}$$

la première égalité résultant de la définition de l'intégrale sur un cycle, la seconde de l'hypothèse de récurrence, et la troisième du fait que $c_1(L_n)\cap[X] = D$. D'autre part, la forme α s'écrit localement

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_1)\ldots\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_{n-1}),$$

où $u_i = \log\|s_i\|^{-1}$, $s_1, \ldots, s_{n-1}$ étant des sections inversibles de $L_1, \ldots, L_{n-1}$. Il s'ensuit que $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\alpha = 0$, ce qui permet de conclure. □

§ 18.4. OPÉRATEUR DE MONGE-AMPÈRE (MÉTRIQUES PARALINÉAIRES)

18.4.1. — Le théorème principal de cette section affirme que l'opérateur de Monge-Ampère que nous avons défini dans cet article coïncide avec celui défini par le premier auteur dans [**38**]. La théorie construite dans ce dernier article partait du cas des métriques formelles, alors considérées comme métriques « lisses » : la théorie de l'intersection sur la fibre spéciale fournissait des mesures atomiques pour des fibrés en droites munis de métriques formelles nef ; un argument d'approximation permettait de construire des mesures pour des fibrés en droites munis de métriques limites uniformes de métriques nef. Dans le présent article, le point de vue est renversé : les métriques formelles sont singulières mais (lorsqu'elles sont nef) sont limites uniformes de métriques psh lisses, et leurs mesures de Monge-Ampère se calculent par approximation.

18.4.2. — Soit X un espace k-analytique purement de dimension n. Rappelons que nous désignons par $X^{\#}$ l'ensemble des points x de X tels que $d_k(x) = n$; nous noterons $X^{\#}_{\mathrm{str}}$ le sous-ensemble de $X^{\#}$ formé des points tels que $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1$ soit de degré de transcendance n sur $\widetilde{k}^1$. Si $x \in X^{\#}$ alors $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ est de type fini sur $\widetilde{\mathscr{H}(k)}$ (lemme 11.5.4) ; si $x \in X^{\#}_{\mathrm{str}}$ alors $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ est fini sur $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1 \otimes_{\widetilde{k}^1} \widetilde{k}$, de degré $(|\widetilde{\mathscr{H}(x)}|^\times : |k^\times|)$.

Proposition 18.4.3. — *Soit X un n-espace k-analytique sans bord. Soit $(L_1, \dots, L_n)$ une famille de fibrés en droites métrisés paralinéaires entiers sur X et soit S le sous-ensemble de X formé des points x tels que la dimension de définition simultanée des $\widetilde{L_{i,x}}$ soit égale à n. Il est fermé et discret dans X, et contenu dans $X^{\#}$. Les fibrés métrisés L_i sont dpsh et il existe une famille $(\lambda_x)_{x\in S}$ de nombres réels telle que*

$$\bigwedge_{i=1}^{n} c_1(L_i) = \sum_{x\in S} \lambda_x \delta_x.$$

Dans la suite de ce paragraphe, nous donnerons une formule pour les nombre réels λ_x en fonction des fibrés résiduels $\widetilde{L_{i,x}}$. Ces formules montreront notamment que ce sont des nombres entiers.

Démonstration. — La proposition 17.6.2 garantit que l'ensemble des points x tels que la dimension de définition simultanée des $\widetilde{L_{i,x}}$ soit égale à n est fermé et discret dans X, et sa définition même assure qu'il est inclus dans $X^{\#}$. De plus, les fibrés métrisés L_i sont tropicalement d-convexes d'après la proposition 17.8.2, et en particulier dpsh.

Soit $x \in X$. Démontrons qu'au voisinage de x, le courant indiqué est de la forme $\lambda_x \delta_x$.

Choisissons une famille $(V, M_1, \dots, M_n)$ où, pour pour i, (V, M_i) est un prémodèle de $\widetilde{L_{i,x}}$, et V est de dimension minimale, c'est-à-dire la dimension de définition simultanée des $\widetilde{L}_{i,x}$.

Par multilinéarité, on se ramène au cas où les M_i sont tous engendrés par leurs sections globales (grâce à 10.3.7) puis, par polarisation, au cas où les M_i sont tous égaux à un même fibré en droites M. Alors, au voisinage de x, les fibrés métrisés L_i sont égaux à un même fibré métrisé L.

Soit s une section inversible de L au voisinage de x . D'après le corollaire 17.4.12, $\|s\|^{-1}$ est au voisinage de x de la forme $\max(r_1|a_1|, \dots, r_m|a_m|)$ où les r_i sont des réels

strictement positifs et les a_i des éléments de $\mathscr{O}_{X,x}^{\times}$ tels que $\widetilde{a_i/a_j} \in \tilde{k}(V)$ pour tout couple (i,j). D'après la prop. 8.9.4, le courant $c_1(L)^n$ est donc de la forme $\lambda_x \delta_x$ au voisinage de x.

Il reste à vérifier que $\lambda_x = 0$ si $x \notin S$. Dans ce cas, le choix de V entraîne que sa dimension est strictement inférieure à n. D'après le théorème 3.4 de **[50]**, la dimension tropicale en x de la famille $(a_i/a_1)_i$ est strictement inférieure à n. D'après la proposition 8.9.4, la mesure $c_1(L)^n$ est nulle au voisinage de x. □

Remarque 18.4.4. — Supposons que les fibrés métrisés paralinéaires entiers L_i sont stricts. Soit $x \in S$. Les fibrés $\widetilde{L_{i,x}}$ sont stricts. Si F désigne un sous-corps gradué de $\widetilde{\mathscr{H}(x)}_1$ contenant $\widetilde{k}^1$ et sur lequel tous les $\widetilde{L_{i,x}}^1$ sont définis, alors tous les $\widetilde{L_{i,x}}$ sont définis sur $F \otimes_{\widetilde{k}^1} \widetilde{k}$. Ce dernier est donc de degré de transcendance n sur $\widetilde{k}$, ce qui force F à être de degré de transcendance n sur $\widetilde{k}^1$. Ainsi l'ensemble S est contenu dans l'ensemble des points x tels que la dimension de définition simultanée des $\widetilde{L_{i,x}}^1$ soit égale à n.

Proposition 18.4.5. — *Supposons k algébriquement clos. Soit X un n-espace k-analytique sans bord et génériquement réduit, et soit $(L_1, \dots, L_n)$ une famille de fibrés en droites métrisés paralinéaires strictement entiers sur X. Le support de la mesure discrète $\bigwedge c_1(L_j)$ est contenu dans $X_{\mathrm{str}}^{\#}$. La masse d'un point x de $X_{\mathrm{str}}^{\#}$ pour cette mesure est égale à*

$$\int_{\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1/\widetilde{k}^1}} c_1(\widetilde{L_{1,x}}^1) \cdots c_1(\widetilde{L_{n,x}}^1)$$

Rappelons que sous nos hypothèses les fibrés en droites résiduels $\widetilde{L_{i,x}}$ sont stricts que $\widetilde{L_{i,x}}^1$ désigne le fibré en droites sur $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1/\widetilde{k}^1}$ dont provient $\widetilde{L_{i,x}}$. Pour une description directe de ces fibrés en droites, voir le §17.5.2.

Démonstration. — On sait d'après la proposition 18.4.3, que le support de cette mesure est fermé et discret. On sait aussi que si x est un point de ce support, la dimension de définition résiduelle simultanée des $\widetilde{L_{i,x}}$ est égale à n. Comme les $\widetilde{L_{i,x}}$ sont par ailleurs stricts, ils sont tous définis sur $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1 \cdot \widetilde{k}$, ce qui implique que $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1$ est de degré de transcendance n sur $\widetilde{k}^1$.

Comme nous n'allons manipuler dans la preuve que des réductions strictes et des objets homogènes de degré 1 *nous nous permettons exceptionnellement dans ce qui suit de ne plus noter le* 1 *en exposant : nous écrirons ainsi $\widetilde{k}, \widetilde{\mathscr{H}(x)}, \widetilde{L_{i,x}}$, etc. au lieu de $\widetilde{k}^1, \widetilde{\mathscr{H}(x)}^1, \widetilde{L_{i,x}}^1$, etc.*

Soit $x \in X_{\mathrm{str}}^{\#}$. Avec les notations de la proposition 18.4.3, il s'agit de démontrer l'égalité $\lambda_x = \int_{\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}} c_1(\widetilde{L_{1,x}}) \cdots c_1(\widetilde{L_{n,x}})$. Comme dans le début de la preuve de la proposition 18.4.3, on se ramène au cas où tous les fibrés métrisés L_i sont égaux à un même fibré métrisé L (paralinéaire strictement entier) dont le fibré résiduel $\widetilde{L_x}$ est engendré par ses sections globales. La métrique de L étant paralinéaire strictement entière, L possède une section s inversible au voisinage de x telle que $\|s(x)\| = 1$. D'après le corollaire 17.5.10, il existe une famille finie $(f_1, \dots, f_m)$ d'éléments de $\mathscr{O}_{X,x}^{\times}$

telle que $|f_i(x)| = 1$ pour tout i et telle que

$$\log(\|s\|^{-1}) = \max(|f_1|, \dots, |f_m|) \tag{18.4.5.1}$$

au voisinage de x. Comme le calcul est local, il n'est pas restrictif de supposer que les f_i sont définies sur X ; notons $f\colon X \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$ le moment $(f_1, \dots, f_m)$. D'après la proposition 8.9.4, λ_x est égal à l'invariant λ du cône tropical $\Pi_{f,x}$ du moment f en x.

Par choix de x on a $d_k(x) = n$, si bien que l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est artinien ; l'espace X étant génériquement réduit, l'anneau $\mathscr{O}_{X,x}$ est réduit et est donc un corps ; en particulier, l'anneau $\mathscr{O}_{X,x}$ est régulier. L'espace X est dès lors géométriquement régulier en x, donc lisse au voisinage de x (puisqu'il est sans bord). Quitte à remplacer X par un voisinage ouvert de x, on peut alors supposer qu'il existe un k-schéma de type fini affine intègre lisse $\mathscr{X}$ et un ouvert de $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ qui est isomorphe à X (voir par exemple le lemme (0.21) de [**50**]). Comme $k(\mathscr{X})$ est dense dans $\mathscr{H}(x)$, on peut également supposer que les f_i appartiennent à l'anneau $\mathscr{O}(\mathscr{X})^\times$, et donc que $X = \mathscr{X}^{\mathrm{an}}$. Alors, le moment f considéré ci-dessus provient d'un moment algébrique $f\colon \mathscr{X} \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$.

Le lemme 10.6.15 assure alors que les $\widetilde{f_i(x)s(x)}$ sont des sections globales de $\widetilde{L_x}$ qui engendrent ce dernier. Soit (M, V) un modèle propre de $(\widetilde{(X, x)}, \widetilde{L_x})$. On a par définition

$$\int_{\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}} c_1(\widetilde{L_x})^n = \int_V c_1(M)^n.$$

Munissons le corps résiduel $\widetilde{k}$ de la valeur absolue triviale ; cela permet de considérer l'analytifiée V^{an} de la $\widetilde{k}$-variété propre V. Notons ξ le point de V^{an} qui correspond à la valeur absolue triviale sur $\widetilde{k}(V)$; on a $\widetilde{\mathscr{H}(\xi)} = \widetilde{\mathscr{H}(x)}$. Pour tout i, on considère $\widetilde{f_i(x)}$ comme une fonction analytique sur le germe (V^{an}, ξ) ; soit $\widetilde{f}\colon (V^{\mathrm{an}}, \xi) \to \mathbf{G}_{\mathrm{m},\tilde{k}}^m$ le moment défini par ces fonctions. On considère aussi $\widetilde{s}(x)$ comme une section du fibré analytique M^{an} sur le germe (V^{an}, ξ).

En considérant V comme un schéma formel sur l'anneau topologique discret $\widetilde{k}$, on peut voir M^{an} comme la fibre générique M_η du fibré formel M, fibre générique qui hérite d'une métrique paralinéaire strictement entière (exemple 17.7.11) ; et le fibré résiduel correspondant $\widetilde{M_{\eta,\xi}}$ sur $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(\xi)}/\widetilde{k}} = \mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}$ possède alors comme prémodèle M lui-même (lemme 17.7.10) ; il résulte des constructions que pour toute section rationnelle u non nulle de M sur un ouvert de Zariski de V on a $\|u(\xi)\| = 1$ et $\widetilde{u(\xi)} = u$, lorsqu'on identifie $\widetilde{M_{\eta,\xi}}$ au fibré en droites de modèle M. Puisque les $\widetilde{s(x)f_i(x)}$ sont des sections globales de $\widetilde{L_x} = \widetilde{M_{\eta,\xi}}$ qui engendrent ce dernier, on déduit alors du corollaire 17.5.9 que

$$\log(\|\widetilde{s}(x)\|^{-1}) = \max(|\widetilde{f_1(x)}|, \dots, |\widetilde{f_m(x)}|) \tag{18.4.5.2}$$

au voisinage de ξ sur V^{an}.

D'après le théorème 14.6.2, les cônes tropicaux $\Pi_{f,x}$ et $\Pi_{\tilde{f},\xi}$ sont égaux. D'après la proposition 8.9.4, on a donc $\lambda_x = \lambda_\xi$, où λ_ξ est le coefficient de δ_ξ apparaissant dans la mesure discrète $c_1(M_\eta)^n$.

Observons maintenant que le point ξ est le seul point de V^{an} qui ait un corps résiduel de degré de transcendance égal à n sur $\widetilde{k}$. En effet, si ω est un tel point, on a $d_{\tilde{k}}(\omega) = n$; comme $\dim(V) = n$, le point ω est situé au-dessus du point générique de V^{an} et $|\mathscr{H}(\omega)^\times|$ est de torsion modulo $|\tilde{k}^\times|$; ainsi, ω correspond à la valeur absolue triviale sur $\tilde{k}(V)$,

donc $\omega = \xi$. On a en conséquence l'égalité

$$c_1(\overline{M_\eta})^n = \lambda_\xi \delta_\xi$$

de mesures sur V^{an}, où λ_ξ est l'invariant λ du cône tropical $\Pi_{\tilde{f},\xi}$. D'autre part, la masse totale de $c_1(\overline{M_\eta})^n$ est égale au degré $\int_V c_1(M)^n$ en vertu du théorème 18.3.11 (et du fait que $M_\eta = M^{\mathrm{an}}$ comme fibré en droites). Cela conclut la démonstration de la proposition. □

Remarque 18.4.6. — Conservons les hypothèses de la proposition 18.4.5. Soit $x \in X^{\#}_{\mathrm{str}}$. Le groupe $|\widetilde{\mathscr{H}(x)}|^\times/|k^\times|$ est alors de torsion, et est dès lors trivial puisque $|k^\times|$ est divisible. On a donc $\widetilde{\mathscr{H}(x)} = \widetilde{\mathscr{H}(x)}^1 \otimes_{\tilde{k}^1} \tilde{k}$, si bien que

$$\int_{\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1/\tilde{k}^1}} c_1(\widetilde{L_{1,x}}^1) \cdots c_1(\widetilde{L_{n,x}}^1) = \int_{\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\tilde{k}}} c_1(\widetilde{L_{1,x}}) \cdots c_1(\widetilde{L_{n,x}}).$$

Nous avons préféré donner la description non graduée de cet entier dans l'énoncé de la proposition car sa définition est plus élémentaire, et car c'est sous cette forme qu'elle apparaît au cours de la démonstration.

Mais nous nous proposons maintenant de décrire la mesure $c_1(L_1) \wedge \ldots \wedge c_1(L_n)$ (autrement dit, de calculer les coefficients λ_x de la proposition 18.4.3) dans le cas général, c'est-à-dire sans supposer que k est algébriquement clos, ni que X est génériquement réduit, ni que les métriques paralinéaires entières en jeu sont strictes. L'expression naturelle des λ_x se fera alors au moyen des nombres d'intersections gradués, et sera établie en se ramenant par extension des scalaires au cas particulier que nos venons de traiter dans la proposition 18.4.5 ; il sera en conséquence utile d'avoir remarqué que les nombres d'intersections non gradués de cette proposition peuvent tout aussi bien s'interpréter comme des nombres d'intersection gradués.

Théorème 18.4.7. — *Soit X un n-espace k-analytique sans bord et soit $(L_1, \ldots, L_n)$ une famille de fibrés en droites métrisés paralinéaires entiers sur X. Le support de la mesure discrète $\bigwedge c_1(L_j)$ est contenu dans $X^{\#}$. La masse de tout $x \in X^{\#}$ pour cette mesure est égale à l'entier*

$$m(x) \cdot \mathrm{def}_k(x) \cdot \int_{\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\tilde{k}}} c_1(\widetilde{L_{1,x}}) \cdots c_1(\widetilde{L_{n,x}}),$$

où $m(x)$ désigne la multiplicité de l'unique composante irréductible de X qui contient x.

Démonstration. — D'après la proposition 18.4.3, le support de cette mesure est contenu dans l'ensemble discret S des points $x \in X$ tels que la dimension de définition simultanée des $\widetilde{L_{i,x}}$ soit égale à n, et a fortiori dans $X^{\#}$. Il suffit donc de vérifier l'assertion au voisinage de tout point x de $X^{\#}$.

Soit x un point de $X^{\#}$; notons λ_x sa masse du point x pour la mesure $\bigwedge c_1(L_j)$. Comme x est situé sur $X^{\#}$, il appartient à une unique composante irréductible X' de X. Soit X'' l'ouvert de Zariski de X constitué des points de X' qui n'appartiennent à aucune autre composante. C'est un espace irréductible (*cf.* [**54**], Lemme 1.11) ; pour calculer λ_x on peut remplacer X par X'', et donc supposer X irréductible. Choisissons une famille finie de domaines affinoïdes (V_j) de X, contenant x et dont la réunion est un voisinage de x, et tel que pour tout i le fibré $L_i|_{V_j}$ possède sur V_j une section dont la norme

appartient à $\rho_{ij} \cdot |\mathscr{O}_X(V_j)^\times|$ pour un certain réel strictement positif ρ_{ij}. Soit $r = (r_\ell)$ un polyrayon de longueur finie contenant tous les ρ_{ij} ainsi qu'un système générateur de $(|\mathscr{H}(x)|^\times/|k^\times|) \otimes \mathbf{Q}$, et soit k_r l'extension complète $\mathscr{H}(\eta_r)$ de k. Soit S le support de $\bigwedge c_1(L_j)$ et soit σ la section de Shilov de l'application naturelle $p\colon X_r \to X$ (où $X_r = X \times_k k_r$). Posons $M_i = p^*L_i$. La proposition 16.8.2, couplée à la déifnition des courants $c_1(L_i)$, assure que le support de $\bigwedge c_1(M_i)$ (vue comme mesure sur l'espace k_r-analytique X_r) coïncide avec $\sigma(S)$. Au vu de la proposition 18.3.2, ceci entraîne que λ_x est égal au poids de la mesure $\bigwedge c_1(M_i)$ en $\sigma(x)$. Et puisque $\widetilde{\mathscr{H}(\sigma(x))}$ est simplement égal au corps (gradué) des fractions de $\widetilde{\mathscr{H}(x)} \otimes_{\widetilde{k}} \widetilde{k_r}$, on a

$$\int_{\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}} c_1(\widetilde{L_{1,x}}) \cdots c_1(\widetilde{L_{n,x}}) = \int_{\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(\sigma(x))}/\widetilde{k_r}}} c_1(\widetilde{M_{1,\sigma(x)}}) \cdots c_1(\widetilde{M_{n,\sigma(x)}}).$$

Il suffit donc de montrer que la masse de $\bigwedge c_1(M_i)$ en $\sigma(x)$ est égale à

$$m(x) \cdot \mathrm{def}_k(x) \cdot \int_{\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(\sigma(x))}/\widetilde{k_r}}} c_1(\widetilde{M_{1,\sigma(x)}}) \cdots c_1(\widetilde{M_{n,\sigma(x)}}).$$

Par ailleurs $m(x) = m(\sigma(x))$ car l'extension k_r de k est analytiquement séparable, donc ne fait pas apparaître de nouvelles multiplicités (corollaire 13.2.2). Et $\mathrm{def}_{k_r}(\sigma(x)) = \mathrm{def}_k(x)$ d'après 13.8.12. Il suffit donc de démontrer la formule de l'énoncé pour les fibrés métrisés M_i sur l'espace k_r-analytique X_r en le point $\sigma(x)$. Autrement dit, on s'est ramené au cas où les L_i sont paralinéaires strictement entiers au voisinage de x et où $x \in X^{\#}_{\mathrm{str}}$.

Soit K le complété d'une clôture algébrique de k. Soit $j\colon X_{K,\mathrm{red}} \to X_K$ l'immersion fermée canonique et $q\colon X_K \to X$ le morphisme de changement de base ; posons $p = q \circ j$.

Notons m la multiplicité générique de X ; c'est l'entier $m(x)$ du théorème. Le groupe $\mathrm{Aut}(K/k)$ permute transitivement les composantes irréductibles de X_K, si bien qu'elles ont toute même multiplicité générique m_K. Par suite, le degré calibré de j est identiquement égal à $1/m_K$. Appliquant la proposition 16.1.5 à l'immersion fermée de X_{red} dans X et à $d = 1/m_K$, on en déduit

$$\bigwedge c_1(q^*L_j) = m_K j_*(\bigwedge c_1(p^*L_j)).$$

De plus, par changement de base, on a l'égalité de mesures

$$\bigwedge c_1(L_j) = q_*(\bigwedge c_1(q^*L_j)).$$

Ainsi, on a

$$\bigwedge c_1(L_j) = m_K p_*(\bigwedge c_1(p^*L_j)).$$

Appliquons la proposition 18.4.5 aux fibrés p^*L_j sur $X_{K,\mathrm{red}}$; on obtient

$$\bigwedge c_1(p^*L_j) = \sum_{y \in X^{\#}_{K,\mathrm{red,str}}} \left(\int_{\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(y)}^1/\widetilde{K}^1}} c_1(\widetilde{M_{1,y}}^1) \cdots c_1(\widetilde{M_{n,y}}^1) \right) \delta_y.$$

Compte de la remarque 18.4.6, on a donc

$$\bigwedge c_1(p^*L_j) = \sum_{y \in X^{\#}_{K,\mathrm{red,str}}} \left(\int_{\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(y)}/\widetilde{K}}} c_1(\widetilde{M_{1,y}}) \cdots c_1(\widetilde{M_{n,y}}) \right) \delta_y.$$

Puisque les antécédents de x par p appartienennt à tous à $X^{\#}_{K,\mathrm{red,str}}$, il vient

$$\lambda_x = m_K \sum_{y\in p^{-1}(x)} \int_{\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(y)}/\widetilde{K}}} c_1(\widetilde{M_{1,y}})\cdots c_1(\widetilde{M_{n,y}}).$$

Notons $\widetilde{\ell}$ la longueur de l'algèbre artinienne $\widetilde{\mathscr{H}(x)}\otimes_{\widetilde{k}}\widetilde{K}$ et ν le cardinal de $q^{-1}(x)$. Fixons $y\in p^{-1}(x)$. Le corps gradué $\widetilde{\mathscr{H}(y)}$ est fini sur $\widetilde{\mathscr{H}(x)}\otimes\widetilde{K}$; son degré sur l'extension composée $\widetilde{\mathscr{H}(x)}\cdot\widetilde{K}$ dans $\widetilde{\mathscr{H}(y)}$ ne dépend que de x ; on le note $\widetilde{d}$. Dans la suite, nous écrirons $\widetilde{L}_i$ au lieu de $\widetilde{L_{i,x}}$ et $\widetilde{M}_i$ au lieu de $\widetilde{M_{i,y}}$, et nous noterons N_i l'image réciproque de $\widetilde{L}_i$ sur $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}\cdot\widetilde{K}/\widetilde{K}}$.

Soit ν' le nombre d'idéaux maximaux de $\widetilde{\mathscr{H}(x)}\otimes_{\widetilde{k}}\widetilde{K}$. Cette dernière algèbre est alors produit de ν' algèbres artiniennes locales, ayant toutes même longueur $\widetilde{\ell}/\nu'$, et toutes même corps gradué résiduel isomorphe à $\widetilde{\mathscr{H}(x)}\cdot\widetilde{K}$.

Si X est un modèle de $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}$, alors $\mathsf{X}_{\widetilde{K}}$ possède ν' composantes irréductibles, toutes de multiplicité générique $\widetilde{\ell}/\nu'$ et toutes de même corps gradué de fonctions $\widetilde{\mathscr{H}(x)}\cdot\widetilde{K}$. En appliquant successivement les assertions b) et c) de la proposition 10.4.8, on obtient l'égalité

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}} c_1(\widetilde{L_{1,x}})\cdots c_1(\widetilde{L_{n,x}}) &= \nu'\cdot\frac{\widetilde{\ell}}{\nu'}\int_{\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}\cdot\widetilde{K}/\widetilde{K}}} c_1(N_1)\cdots c_1(N_n)\\ &= \widetilde{\ell}\int_{\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}\cdot\widetilde{K}/\widetilde{K}}} c_1(N_1)\cdots c_1(N_n).\end{aligned}$$

En appliquant l'assertion d) de cette proposition, on en déduit

$$\int_{\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}} c_1(\widetilde{L_{1,x}})\cdots c_1(\widetilde{L_{n,x}}) = \frac{\widetilde{\ell}}{\widetilde{d}}\int_{\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(y)}/\widetilde{K}}} c_1(\widetilde{M_1})\cdots c_1(\widetilde{M_n}).$$

Par suite, on a

$$\lambda_x = \frac{\nu\cdot m_K\cdot\widetilde{d}}{\widetilde{\ell}}\int_{\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}} c_1(\widetilde{L_{1,x}})\cdots c_1(\widetilde{L_{n,x}}).$$

Notons m'_K la multiplicité générique commune des composantes irréductibles de $X_{\mathrm{red},K}$. D'après la proposition 13.8.8 a), c) et e), l'anneau est artinien $\mathscr{H}(x)\widehat{\otimes}_k K$ et sa longueur ℓ est égale à $\nu m'_K$; et d'après la proposition 13.8.8 b) et la proposition 13.8.9, le défaut $\mathrm{def}_k(x)$ est égal à $\ell\widetilde{d}/\widetilde{\ell}$.

Il vient

$$\begin{aligned}\lambda_x &= \frac{m_K}{m'_K}\cdot\frac{\nu\cdot m'_K\cdot\widetilde{d}}{\widetilde{\ell}}\int_{\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}} c_1(\widetilde{L_{1,x}})\cdots c_1(\widetilde{L_{n,x}})\\ &= \frac{m_K}{m'_K}\cdot\frac{\ell\widetilde{d}}{\widetilde{\ell}}\int_{\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}} c_1(\widetilde{L_{1,x}})\cdots c_1(\widetilde{L_{n,x}})\\ &= \frac{m_K}{m'_K}\cdot\mathrm{def}_k(x)\int_{\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}} c_1(\widetilde{L_{1,x}})\cdots c_1(\widetilde{L_{n,x}})\\ &= m\cdot\mathrm{def}_k(x)\int_{\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}} c_1(\widetilde{L_{1,x}})\cdots c_1(\widetilde{L_{n,x}}),\end{aligned}$$

car $m_K = m\cdot m'_K$ en vertu du lemme 13.2.8. □

Exemple 18.4.8. — Supposons que le corps k soit stable. Dans ce cas pour toute base d'Abhyankar t de $\mathscr{H}(x)$ le corps $\widetilde{k(t)}$ est stable, et $\mathscr{H}(x)$ est donc sans défaut sur icelui. Par conséquent $\mathrm{def}_k(x)=1$ et l'on a donc $\lambda_x = m(x)\int_{\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}} c_1(\widetilde{L_{1,x}})\cdots c_1(\widetilde{L_{n,x}})$.

Exemple 18.4.9. — Supposons toujours que k est stable. Faisons de plus l'hypothèse que le corps résiduel classique $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1$ est de degré de transcendance n sur $\tilde{k}^1$ et que les métriques des L_i sont paralinéaires strictement entières au voisinage de x. L'indice $(|\mathscr{H}(x)^\times| : |k^\times|)$ est alors fini, notons-le e. Pour tout i, le fibré résiduel $\widetilde{L_{i,x}}$ est le tiré en arrière le long de l'extension $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1\otimes_{\tilde{k}^1}\widetilde{k}\hookrightarrow\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ du fibré résiduel classique $(\widetilde{L_{i,x}})^1$. Or, $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ est de degré e sur $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1\otimes_{\tilde{k}^1}\widetilde{k}$. Il vient

$$\begin{aligned}\lambda_x &= m(x)\int_{\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}} c_1(\widetilde{L_{1,x}})\cdots c_1(\widetilde{L_{n,x}})\\ &= em(x)\int_{\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}_1/\widetilde{k}_1}} c_1(\widetilde{L_{1,x}}^1)\cdots c_1(\widetilde{L_{n,x}}^1).\end{aligned}$$

Corollaire 18.4.10. — *Soit X un k-espace analytique propre purement de dimension n, et soit $\overline{L}_1,\dots,\overline{L}_n$ des fibrés en droites sur X munis de métriques dpsh. Alors*

$$\int_{X^{\mathrm{an}}} c_1(\overline{L}_1)\wedge\cdots\wedge c_1(\overline{L}_n)$$

ne dépend pas des métriques psh dont on a muni les L_i ; c'est un entier relatif, qui est positif ou nul si les métriques considérées sont psh.

Démonstration. — Que le nombre réel obtenu soit indépendant des métriques dpsh considérées a déjà été vu (proposition 18.3.10). Le calcul $\int_{X^{\mathrm{an}}} c_1(\overline{L}_1)\wedge\cdots\wedge c_1(\overline{L}_n)$ peut alors être fait après extension des scalaires à une extension complète K de k (proposition 18.3.2). Cela permet de supposer que la valuation de k est non triviale.

La proposition 17.7.5 garantit alors l'existence de métriques paralinéaires entières (et même strictement entières) sur les fibrés en droites L_i. Il suffit donc de démontrer l'intégralité annoncée lorsque les métriques des $\overline{L_i}$ sont paralinéaires entières.

Dans ce cas, le courant

$$c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_n)$$

est une somme finie $\sum \lambda_x \delta_x$ (prop. 18.4.3) et les λ_x sont entiers par le théorème 18.4.7. Par conséquent

$$\int_{X^{\mathrm{an}}} c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_n) = \sum \lambda_x$$

est bien un entier relatif.

Si les métriques considérées sont psh, le courant $c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_n)$ est positif, de sorte que cet entier est positif ou nul. □

18.4.11. — Compte tenu de l'existence de métriques lisses (proposition 17.1.8), le corollaire ci-dessus fournit un accouplement multilinéaire et symétrique $\langle \cdot, \cdots, \cdot \rangle \colon \mathrm{Pic}(X)^n \to \mathbf{Z}$. Il est invariant par extension des scalaires.

Lorsque X est algébrique, il coïncide avec le degré d'intersection usuel (théorème 18.3.11).

Proposition 18.4.12. — *Soit d un entier et soit $p \colon Y \to X$ un morphisme propre et plat, purement de dimension relative d, entre espaces k-analytiques. Soient $L_1, \ldots, L_d$ des fibrés en droites sur Y. L'application*

$$X \to \mathbf{Z}, \qquad x \mapsto \langle L_1|_{Y_x}, \ldots, L_d|_{Y_x} \rangle$$

est localement constante.

Démonstration. — L'assertion étant G-locale sur X, on peut le supposer bon. Dans ce cas Y est également bon puisque p est propre et en particulier sans bord. Il existe alors sur chacun des L_i une métrique lisse, donnant lieu à un fibré métrisé $\overline{L}_i$. Soit ω la (d,d)-forme lisse $c_1(\overline{L}_1) \wedge \ldots \wedge c_1(\overline{L}_d)$ (sur l'espace Y). On a pour tout $x \in X$ l'égalité

$$\langle L_1|_{Y_x}, \ldots, L_d|_{Y_x} \rangle = \int_{Y_x} \omega.$$

Il s'ensuit en vertu du théorème 16.3.3 que $x \mapsto \langle L_1|_{Y_x}, \ldots, L_d|_{Y_x} \rangle$ est continue ; puisqu'elle est à valeurs entières, cette fonction est localement constante. □

§ 18.5. CALCULS FORMELS

Dans ce paragraphe, on explique comment calculer des produits de $c_1(\overline{L})$ lorsque la métrique sur L est donnée par un modèle formel. Commençons par un cas élémentaire.

Proposition 18.5.1. — *Soit X un k-schéma propre de dimension n et soit L un fibré en droites sur X. Considérons un modèle formel propre $\mathfrak{X}$ sur k° de X et un fibré en droites $\mathfrak{L}$ sur $\mathfrak{X}$ prolongeant L. Supposons que $\mathfrak{X}$ est relativement normal dans sa fibre générique et que $\mathfrak{X}_s$ est irréductible ; soit η l'unique point de X^{an} dont la réduction est égale au point générique de $\mathfrak{X}_s$. Munissons L de la métrique paralinéaire strictement entière induite par le modèle $\mathfrak{L}$. On a*

$$c_1(\overline{L})^n = \left(\int_X c_1(L)^n \right) \delta_\eta.$$

Démonstration. — La spécialisation de tout point x de X^{an} autre que η a une adhérence de dimension $\leqslant n-1$, donc la dimension de définition de $\widetilde{L_x}$ est au plus $n-1$ (lemme 17.7.10). D'après la proposition 18.4.3 il existe un nombre réel λ tel que

$$c_1(\overline{L})^n = \lambda\delta_\eta.$$

D'après le théorème 18.3.11, la masse totale de cette mesure est le degré $\int_X c_1(L)^n$, si bien que $\lambda = \int_X c_1(L)^n$. □

Exemple 18.5.2. — Prenons le cas du fibré $\mathscr{O}(1)$ sur l'espace projectif $\mathbf{P}^n$, muni de la métrique de Weil associée au modèle formel évident sur k°. Soit η_1 l'unique point de $\mathbf{P}^n$ qui se spécialise en le point générique de la fibre spéciale. D'après la proposition précédente, on a

$$c_1(\overline{\mathscr{O}(1)})^n = \delta_{\eta_1}.$$

18.5.3. — Soit $\mathfrak{X}$ un k°-schéma formel plat, localement topologiquement de type fini et purement de dimension relative n. Notons X sa fibre générique ; supposons-la sans bord (cela revient à demander que les composantes irréductibles de $\mathfrak{X}_s$ soient propres).

Soit $(\mathfrak{L}_1, \dots, \mathfrak{L}_n)$ des fibrés en droites sur $\mathfrak{X}$; notons $\overline{L}_1, \dots, \overline{L}_n$ les fibrés en droites correspondants sur X munis de leurs métriques paralinéaires strictement entières.

On désire calculer la mesure $c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_n)$ sur X de manière analogue au calcul donné par la proposition 18.4.7 à l'aide de la théorie de l'intersection sur la fibre spéciale du schéma formel $\mathfrak{X}$.

Soit x un point de X. Soit $\xi \in \mathfrak{X}_s$ sa spécialisation et soit $V = \overline{\{\xi\}}$; on suppose que $\dim(V) = n$. Comme X est sans bord, V est propre sur $\widetilde{k}_1$. Soit $E = \widetilde{k}^1(V)$ son corps des fonctions et soit F le corps gradué $E \otimes_{\widetilde{k}^1} \widetilde{k}$. Le corps gradué $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ est fini sur $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1 \otimes_{\widetilde{k}^1} \widetilde{k}$ de degré $(|\widetilde{\mathscr{H}(x)}^\times| : |k^\times|)$ et $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1$ est fini sur E ; par conséquent $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ est fini sur F, et l'on note $\lambda_{\mathfrak{X}}(x)$ le degré $[\widetilde{\mathscr{H}(x)} : F]$. On peut décrire $\lambda_{\mathfrak{X}}(x)$ de manière non graduée en remarquant que

$$\lambda_{\mathfrak{X}}(x) = \big(|\mathscr{H}(x)^\times| : |k^\times|\big)[\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1 : E].$$

Définition 18.5.4. — *Supposons que le schéma formel $\mathfrak{X}$ soit propre. On appelle* cycle fondamental *du schéma formel $\mathfrak{X}$ le cycle purement de dimension n supporté par $\mathfrak{X}_s$ donné par*

$$\mathrm{cycle}(\mathfrak{X}) = \sum_x m(x)\mathrm{def}_k(x)\lambda_{\mathfrak{X}}(x)[V_x],$$

où la somme est restreinte aux points x de X tels que l'adhérence de Zariski V_x de la spécialisation de x est de dimension n.

Comme l'application de spécialisation est surjective, le coefficient de chaque composante est strictement positif.

Théorème 18.5.5. — *Soit $\mathfrak{X}$ un k°-schéma formel plat, localement topologiquement de type fini, purement de dimension relative n. Notons X sa fibre générique, supposons-la sans bord. Soit $\mathfrak{L}_1, \dots, \mathfrak{L}_n$ des fibrés en droites sur $\mathfrak{X}$; notons $\overline{L}_1, \dots, \overline{L}_n$ les fibrés en droites sur X déduits de $\mathfrak{L}_i$, munis des métriques paralinéaires strictement entières correspondantes.*

a) *Le support de la mesure est contenu dans l'ensemble localement fini des points de X qui se spécialisent sur le point générique d'une composante irréductible de la fibre spéciale de $\mathfrak{X}$.*

b) *Soit x un point de X dont la spécialisation est le point générique d'une composante irréductible V de $\mathfrak{X}_s$. La masse du point x pour la mesure $c_1(\overline{L}_1)\dots c_1(\overline{L}_n)$ est égale à*

$$m(x)\mathrm{def}_k(x)\lambda_{\mathfrak{X}}(x)\int_V c_1(\mathfrak{L}_{1,s})\cdots c_1(\mathfrak{L}_{n,s}).$$

c) *Si $\mathfrak{X}$ est propre, la masse totale de cette mesure est égale à*

$$\int_{\mathrm{cycle}(\mathfrak{X})} c_1(\mathfrak{L}_{1,s})\cdots c_1(\mathfrak{L}_{n,s})).$$

Démonstration. — Notons μ cette mesure $c_1(\overline{L}_1)\dots c_1(\overline{L}_n)$. D'après la proposition 18.4.3 et la remarque 18.4.4 son support est contenu dans l'ensemble S des points $x \in X$ tels que la dimension de définition simultanée des $(\widetilde{L_{i,x}})^1$ soit égale à n. Soit x un point de X, soit $\xi \in \mathfrak{X}_s$ sa spécialisation et soit V l'adhérence réduite $\overline{\{\xi\}}$. Pour tout i, notons Λ_i le fibré en droites sur $\mathbf{P}_{E/\widetilde{k}^1}$ de prémodèle $(V, \mathfrak{L}_i|_V)$, et M_i l'image réciproque de Λ_i sur $\mathbf{P}_{F/\widetilde{k}}$. D'après le lemme 17.7.10 le $\widetilde{k}^1$-schéma intègre V, muni des restrictions des $\mathfrak{L}_i$, est un prémodèle de $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)/\widetilde{k}}}$, muni des fibrés résiduels stricts $(\widetilde{L_{i,x}})^1$; en d'autres termes, l'image réciproque de M_i sur $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)/\widetilde{k}}}$ est isomorphe à $\widetilde{L_{i,x}}$ pour tout i. Par conséquent, la dimension de définition simultanée des $\widetilde{L_{i,x}}$ est inférieure ou égale à $\dim(V)$. En particulier, si $\dim(V) < n$, la mesure μ est nulle au voisinage de x. Cela démontre l'assertion a).

L'assertion c) découle de l'assertion b) que nous démontrons maintenant. Conservons les notations $x, \xi, V, \Lambda_i, M_i$ introduites ci-dessus, en supposant de plus que $\dim V = n$, c'est-à-dire que ξ est le point générique d'une composante irréductible de $\mathfrak{X}_s$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\mu(x) &= m(x)\mathrm{def}_k(x)\int_{\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)/\widetilde{k}}}} c_1(\widetilde{L_{1,x}})\cdots c_1(\widetilde{L_{n,x}}) \\
&= m(x)\mathrm{def}_k(x)\lambda_{\mathfrak{X}}(x)\int_{\mathbf{P}_{F/\widetilde{k}}} c_1(M_1)\cdots c_1(M_n) \\
&= m(x)\mathrm{def}_k(x)\lambda_{\mathfrak{X}}(x)\int_{\mathbf{P}_{E/\widetilde{k}_1}} c_1(\Lambda_1)\cdots c_1(\Lambda_n) \\
&= m(x)\mathrm{def}_k(x)\lambda_{\mathfrak{X}}(x)\int_V c_1(\mathfrak{L}_1)\cdots c_1(\mathfrak{L}_n),
\end{aligned}$$

où la seconde égalité provient du §10.7.12, la troisième du §10.7.13, et la dernière de la définition du nombre d'intersection dans le cas non gradué. Ceci termine la démonstration. □

Proposition 18.5.6. — *Soit $\mathfrak{X}$ un k°-schéma formel plat, localement topologiquement de type fini, purement de dimension relative n. Soit x un point de X dont l'image ξ dans $\mathfrak{X}_s$ est le point générique d'une composante irréductible V.*

a) *Si X est réduit, on a $m(x) = 1$.*

b) *Si X et $\mathfrak{X}_s$ sont réduits, on a $\lambda_{\mathfrak{X}}(x) = 1$. De plus, x est l'unique antécédent de ξ, et l'on a $|\mathscr{H}(x)^\times| = |k^\times|$ et $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1 = \widetilde{k}^1(V)$.*

c) *Si X et $\mathfrak{X}_s$ sont géométriquement réduits, on a $\mathrm{def}_k(x) = 1$.*

Démonstration. — L'assertion *a*) est évidente.

b) Supposons X et $\mathfrak{X}_s$ réduits, et montrons que $\lambda_{\mathfrak{X}}(x) = 1$. On peut pour ce faire remplacer $\mathscr{X}$ par n'importe quel voisinage ouvert formel de ξ (et X par la fibre générique de ce voisinage), ce qui permet de supposer que $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ où A est une k°-algèbre topologiquement de présentation finie telle que $A_{\widetilde{k}^1}$ soit intègre.

On a $X = \mathscr{M}(A_k)$. Comme A_k et $A_{\widetilde{k}^1}$ sont réduits, la proposition 1.1 de **[27]**, assure qu'il existe une présentation $k\{T_1, \dots, T_n\} \to A_k$ de A_k dont la norme quotient coïncide avec la norme spectrale de A_k. Il en résulte que la norme spectrale de A_k prend ses valeurs dans $|k|$, que $A_k^\circ = A$ et que $A_k^{\circ\circ} = k^{\circ\circ} \cdot A$; par suite, $A \otimes_{k^\circ} \tilde{k}^1 \to \tilde{A}^1$ est un isomorphisme. La proposition 2.4.4, (ii) et (iii), de **[8]** entraîne alors que le point générique de V a un unique antécédent dans X, qui est donc le point x, et que $\{x\}$ est le bord de Shilov de A_k. La semi-norme sur A_k qui correspond à x est donc la norme spectrale de A_k, si bien que $|\mathscr{H}(x)^\times| = |k^\times|$. Il découle alors de la proposition citée que $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1 = \widetilde{k}^1(V)$. Par suite, $\lambda_{\mathfrak{X}}(x) = 1$.

c) Supposons X et $\mathfrak{X}_s$ géométriquement réduits, et montrons que $\mathrm{def}_k(x) = 1$. On se ramène comme ci-dessus au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$. Soit K le complété d'une clôture algébrique de k ; on va appliquer la proposition 13.8.8 en démontrant, avec les notations de cette proposition que l'on a $\ell = \tilde{\ell}$ et $\widetilde{d} = 1$, ce qui permettra de conclure puisque $\mathrm{def}_k(x) = \ell\widetilde{d}/\widetilde{\ell}$.

Notons $\mathfrak{Y} = \mathfrak{X} \otimes_{k^\circ} K^\circ$ et Y sa fibre générique ; on a $Y = X_K$. Soit $W_1, \dots, W_r$ les composantes irréductibles de $\mathfrak{Y}_s$ qui dominent V et $\xi_1, \dots, \xi_r$ leurs points génériques. Par hypothèse, on peut appliquer le résultat *b*) à $\mathfrak{Y}$.

Pour tout i, le point ξ_i a donc un unique antécédent y_i dans Y, et les y_i sont les antécédents de x dans Y. Comme la fibre $\mathfrak{X}_s$ est géométriquement réduite, l'algèbre $\widetilde{k}^1(V) \otimes_{\widetilde{k}^1} \widetilde{K}^1$ est le produit des $\widetilde{K}^1(W_i)$; sa longueur est donc égale à r.

Puisque X et $\mathfrak{X}_s$ sont géométriquement réduit ils sont réduits, et il résulte alors de *b*) que $|\mathscr{H}(x)^\times| = |k^\times|$. Par conséquent

$$\widetilde{\mathscr{H}(x)} \otimes_{\widetilde{\mathscr{H}(k)}} \widetilde{\mathscr{H}(K)} = (\widetilde{\mathscr{H}(x)}^1 \otimes_{\widetilde{\mathscr{H}(k)}^1} \widetilde{\mathscr{H}(K)}^1) \otimes_{\widetilde{\mathscr{H}(K)}^1} \widetilde{\mathscr{H}(K)},$$

si bien que l'algèbre graduée $\widetilde{\mathscr{H}(x)} \otimes_{\widetilde{\mathscr{H}(k)}} \widetilde{\mathscr{H}(K)}$ est de longueur r. On a donc $\tilde{\ell} = r$.

Comme Y est réduit, $\mathscr{H}(x)\widehat{\otimes}_k K$ est le produit des $\mathscr{H}(y_i)$ en vertu de la proposition 13.8.8, *a*) ; la longueur de cet anneau est donc égale à r ; autrement dit, $\ell = r$.

Enfin, pour tout i, on a $[\widetilde{\mathscr{H}(y_i)}^1 : (\widetilde{\mathscr{H}(K)}^1 \cdot \widetilde{\mathscr{H}(x)}^1)] = 1$. Comme K est algébriquement clos, le groupe $|K^\times|$ est divisible et l'on a $[\widetilde{\mathscr{H}(y_i)} : \widetilde{\mathscr{H}(K)} \cdot \widetilde{\mathscr{H}(x)}] = [\widetilde{\mathscr{H}(y_i)}^1 : (\widetilde{\mathscr{H}(K)}^1 \cdot \widetilde{\mathscr{H}(x)}^1)]$. Par suite, $\widetilde{d} = 1$. Cela conclut la démonstration. □

Corollaire 18.5.7. — *Si X et $\mathfrak{X}_s$ sont géométriquement réduit et si $\mathfrak{X}$ est propre, alors le cycle fondamental* $\mathrm{cycle}(\mathfrak{X})$ *est la classe de la fibre spéciale* $[\mathfrak{X}_s]$.

Proposition 18.5.8. — *Supposons que la valuation de k soit discrète. Désignons ici simplement par $\widetilde{\cdot}$ la réduction classique, plutôt que par $\widetilde{\cdot}^1$. Soit $\mathfrak{X}$ un k°-schéma formel*

localement topologiquement de présentation finie et relativement normal dans sa fibre générique X, que l'on suppose réduite. Soit ξ un point générique de la fibre spéciale de $\mathfrak{X}$.

a) *Le point ξ possède un unique antécédent x dans X.*

b) *La multiplicité de la composante irréductible $\overline{\{\xi\}}$ de $\mathfrak{X}_{\tilde{k}}$, c'est-à-dire la longueur de l'anneau local artinien $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{\tilde{k}},\xi}$, est égale à l'indice $\big(|\mathscr{H}(x)^\times| : |k^\times|\big)$.*

c) *Le corps $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ s'identifie au corps $\widetilde{k}(\xi)$.*

d) *On a $m(x) = \mathrm{def}_k(x) = 1$ et $\lambda_{\mathfrak{X}}(x)$ est la multiplicité de la composante irréductible $\overline{\{\xi\}}$ de $\mathfrak{X}_{\overline{k}}$.*

e) *Supposons que $\mathfrak{X}$ soit propre ; alors, le cycle fondamental* $\mathrm{cycle}(\mathfrak{X})$ *est égal à $[\mathfrak{X}_{\overline{k}}]$.*

Cela démontre en particulier que les mesures définies par la théorie de cet article sont compatibles avec celles de [**38**].

Démonstration. — Notons ρ l'application de réduction de X dans $\mathfrak{X}_{\tilde{k}}$. La question est locale sur $\mathfrak{X}$, ce qui autorise à le supposer affine, donc de la forme $\mathrm{Spf}(A)$ où $\mathfrak{A}$ est une k°-algèbre plate topologiquement de présentation finie intégralement close dans A_k. On peut également supposer que $\mathfrak{X}$ est équidimensionnel ; soit d sa dimension. L'espace affinoïde $X = \mathfrak{X}_\eta$ est alors équidimensionnel et de dimension d. Comme il est réduit, son lieu de non-normalité Y est un fermé de Zariski de dimension strictement inférieure à d ([**49**], théorème 4.4). Le corps $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ étant de degré de transcendance d sur $\tilde{k}$, le point x n'appartient pas à Y, donc ξ n'appartient pas à $\rho(Y)$. Si $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ désignent les réductions canoniques des espaces affinoïdes X et Y, la factorisation canonique

$$\begin{array}{ccccc} Y & \longrightarrow & X & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \tilde{Y} & \longrightarrow & \tilde{X} & \longrightarrow & \mathfrak{X}_{\tilde{k}}, \end{array}$$

la surjectivité des applications de réduction et le théorème de Chevalley entraînent que $\rho(Y)$ est constructible dans $\mathfrak{X}_s$ (et même fermé, car $\widetilde{Y}$ est fini sur $\tilde{X}$, qui est fini sur $\mathfrak{X}_s$) ; et il est de dimension $< d$ car pour tout $y \in Y$ le corps $\widetilde{\mathscr{H}(y)}$ est de degré de transcendance majoré par $d_k(y)$, et donc strictement inférieur à d, sur $\widetilde{k}_1$. Quitte à restreindre encore $\mathfrak{X}$, on peut donc supposer que $X = \mathfrak{X}_\eta$ est intègre et normal. Puisque A est intégralement close dans A_k, l'algèbre intègre A est également normale. Soit K son corps des fractions.

Le schéma $\mathfrak{X}_s$ s'identifie à $\mathrm{Spec}\, A_{\widetilde{k}}$; le point ξ correspond par ce biais à un point de $\mathrm{Spec}(A)$ que l'on note encore ξ et qui est de hauteur 1 dans le schéma noethérien normal $\mathrm{Spec}(A)$. L'anneau local $\mathscr{O}_{\mathrm{Spec}(A),\xi}$ est donc l'anneau d'une valuation discrète de K, et il domine k°. Soit $|\cdot| \colon K \to \mathbf{R}_+$ la valuation d'anneau $\mathscr{O}_{\mathrm{Spec}(A),\xi}$ normalisée de sorte que sa restriction à k° soit la valeur absolue structurale de ce dernier. La composition de $|\cdot| \colon K \to \mathbf{R}_+$ cet de l'inclusion de A_k dans K est une semi-norme multiplicative bornée sur A_k, qui définit donc un point x de $\mathscr{M}(A_k)$. L'évaluation en x induit par construction un plongement isométrique de K dans $\mathscr{H}(x)$ d'image dense. Le corps résiduel de $\mathscr{H}(x)$ est dès lors égal à celui de K, c'est-à-dire à $\widetilde{k}(\xi)$, et son groupe des valeurs n'est autre que $|K^\times| = |k^\times|^{1/e}$, où e est l'indice de ramification de $\mathscr{O}_{\mathrm{Spec}(A),\xi}$ sur k°. L'indice e peut aussi s'interpréter comme la longueur de $\mathscr{O}_{\mathrm{Spec}(A),\xi}/(\pi)$ où π est une uniformisante de k°,

c'est-à-dire encore la longueur de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_s,\xi}$. Par conséquent, la longueur de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_s,\xi}$ est égale à l'indice $(|\widetilde{\mathscr{H}(x)}^\times| : |k^\times|)$.

Enfin, soit $y \in X$ tel que $\rho(y) = \xi$. Par hypothèse, si un élément $a \in A$ vérifie $a(\xi) = 0$, il satisfait $|a(y)| < 1$. L'anneau de valuation de K induit par y domine donc $\mathscr{O}_{\mathrm{Spec}(A),\xi}$. Comme ce dernier est un anneau de valuation (discrète), les deux anneaux de valuation coïncident. Comme les restrictions à k des valeurs absolues correspondant à x et y coïncident, ces valeurs absolues sont égales et l'on a $y = x$. Ceci achève la preuve de a), b) et c).

Démontrons d). Comme X est réduit, on a $m(x) = 1$; comme la valuation de k est discrète, le corps k est stable et l'on a $\mathrm{def}_k(x) = 1$. On a par ailleurs

$$\lambda_{\mathfrak{X}}(x) = \big(|\mathscr{H}(x)^\times| : |k^\times|\big)[\widetilde{\mathscr{H}(x)} : \widetilde{k}(\xi)].$$

L'assertion découle donc de b) et c).

Enfin, e) en résulte, compte tenu de la définition de cycle($\mathfrak{X}$). □

§ 18.6. OPÉRATEUR DE MONGE-AMPÈRE RELATIF

Proposition 18.6.1. — *Soit X et Y des espaces analytiques sans bord, équidimensionnels, et topologiquement séparés, soit $p\colon Y \to X$ un morphisme génériquement plat ; on pose $m = \dim(X)$, $n = \dim(Y)$ et $d = n - m$.*

Soit $(L_1, \dots, L_m)$ une famille de fibrés en droites métrisés paralinéaires entiers sur X. Pour tout $x \in X^\#$, posons $\lambda_x = m(x)\mathrm{def}_k(x)\left(\int_{\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}} c_1(\widetilde{L_{1,x}}) \cdots c_1(\widetilde{L_{m,x}})\right)$.

a) *L'ensemble des $x \in X^\#$ tels que $\lambda_x \neq 0$ est une partie fermée et discrète de X, et la mesure $\bigwedge c_1(L_i)$ sur X est égale à $\sum \lambda_x \delta_x$.*

b) *On a l'égalité suivante de courants de bi-dimension (d,d) sur Y :*

$$\bigwedge c_1(p^*L_i) = \sum_{x \in X^\#} \lambda_x \delta_{Y_x},$$

où δ_{Y_x} est le courant d'intégration sur l'espace $\mathscr{H}(x)$-analytique Y_x.

Démonstration. — L'assertion a) est un simple rappel de la proposition 18.4.3.

Soit ω une forme lisse de bidegré $(n-m, n-m)$ à support compact sur Y. D'après la proposition 18.3.5, on a

$$\langle c_1(p^*L_1) \wedge \cdots \wedge c_1(p^*L_m) \wedge \omega \rangle = \int_X u_\omega c_1(L_1) \wedge \cdots \wedge c_1(L_m),$$

où le membre de droite désigne l'intégrale de la fonction u_ω contre la mesure $c_1(L_1) \wedge \cdots \wedge c_1(L_m)$, laquelle est égale à $\sum_{x \in X^\#} \lambda_x \delta_x$ comme on l'a rappelé. Le membre de droite est alors égal à

$$\sum_{x \in X^\#} \lambda_x u_\omega(x).$$

Par ailleurs, pour tout $x \in S$, on a $d_k(x) = m$, si bien que la fibre Y_x est de dimension $\leqslant n - m$; par platitude générique, on a $\dim(Y_x) = n - m$, si bien que

$$u_\omega(x) = \int_{Y_x} \omega = \langle \delta_{Y_x}, \omega \rangle.$$

La proposition en résulte. □

Corollaire 18.6.2. — *Soit X un espace k-analytique sans bord, topologiquement séparé et équidimensionnel. Soit $(f_1, \dots, f_d)$ une suite de d fonctions analytiques sur X que l'on considère comme un morphisme $f\colon X \to \mathbf{A}^d$. Pour toute suite $(t, r_1, \dots, r_d)$ de nombres réels > 0, le courant $(\mathrm{d}'\mathrm{d}''[\log \max(t, |f_1|/r_1, \dots, |f_d|/r_d))])^d$ est égal au courant d'intégration sur la fibre $f^{-1}(\eta_r)$, où $r = (tr_1, \dots, tr_d)$.*

Démonstration. — Posons $\varphi = \log \max(t, |f_1|/r_1, \dots, |f_d|/r_d))$. Soit x un point de X. Supposons tout d'abord qu'il existe i tel que $|f_i(x)|r_i$ soit différent de t. Dans ce cas on peut écrire au voisinage de x l'égalité $\varphi = \log \max(g_1/s_1, \dots, g_m/s_m)$ où $m \leqslant d$, où les g_i sont des fonctions inversibles et les s_i des réels strictement positifs et où $|g_i(x)|/s_i$ est un réel indépendant de i, que l'on note ρ (chaque couple (g_i, s_i) étant de la forme (f_j, r_j) ou $(1, 1/t)$). Soit ψ la fonction $\varphi - \log|g_1|$. On a $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\varphi = \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\psi$ au voisinage de x, et ψ est égale à $\log \max(1/s_1, (g_2 g_1^{-1})/s_2 \dots, (g_m g_1^{-1})/s_m)$. Le lemme 1.7.6 fournit une famille (u_ε) de fonctions lisses et convexes sur $\mathbf{R}^{m-1}$ qui converge uniformément vers $\max(-\log s_1, x_1 - \log s_2, \dots, x_{m-1} - \log s_m)$ quand ε tend vers 0. Le courant $(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\psi)^d$ est alors la limite des formes $(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u_\varepsilon(\log|g_2 g_1^{-1}|, \dots, \log|g_m g_1^{-1}|))^d$. Or comme la famille $(g_1 g_i^{-1})_{2 \leqslant i \leqslant m}$ est de cardinal majoré par $m - 1$ et a fortiori par $d - 1$, sa dimension tropicale est majorée par $d - 1$, si bien que $(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u_\varepsilon(\log|g_2 g_1^{-1}|, \dots, \log|g_m g_1^{-1}|))^d$ est nul pour tout ε. On a donc au voisinage de x les égalités $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\varphi = \mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\psi = 0$.

Supposons maintenant que $|f_i(x)| = r_i$ pour tout i. En utilisant encore le lemme 1.7.6 on obtient une famille (v_ε) de fonctions convexes lisses sur $\mathbf{R}^d$ convergeant uniformément vers $\max(\log t, x_1 - \log r_1, \dots, x_d - \log r_d)$, et le courant $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\varphi$ et la limite des formes $(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,v_\varepsilon(\log|f_1|, \dots, \log|f_d|))^d$. Si la dimension tropicale de f en x est strictement inférieure à d, le courant $(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\varphi)^d$ est donc nul au voisinage de x. L'espace X étant sans bord, la dimension tropicale de f en x est égale au degré de transcendance de la famille $\widetilde{f_i(x)}$. Par conséquent, $(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\varphi)^d$ est nul au voisinage de x dès que $f(x) \notin S(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d)$, c'est-à-dire dès que $f(x) \neq \eta_r$ puisqu'on a supposé que $|f_i(x)| = r_i$ pour tout i.

Il résulte de ce qui précède que le support de $(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\varphi)^d$ est contenu dans $f^{-1}(\eta_r)$. Or f est plat en tout point de la fibre $f^{-1}(\eta_r)$: cela provient du fait que $\mathscr{O}_{\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d, \eta_r}$ est un corps (puisqu'il est artinien et que $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^d$ est réduit) et que f est sans bord. On peut donc, pour démontrer le corollaire, remplacer X par le lieu de platitude de f et ainsi supposer que f est plat.

Soit L le fibré métrisé sur $\mathbf{A}^d$ de fibré sous-jacent $\mathscr{O}_X$, muni de la métrique pour laquelle $\log\|1\|^{-1} = \log \max(t, |T_1|/r_1, \dots, |T_d|/r_d)$. Par définition, $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\varphi$ est égal à $c_1(f^*L)$, si bien que $(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\varphi)^d = c_1(f^*L)^d$. Puisque le support de $(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\varphi)^d$ est contenu dans $f^{-1}(\eta_r)$ comme on l'a vu plus haut, la proposition 18.6.1 montre que

$$(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\varphi)^d = \left(\int_{\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(\eta_r)}/\widetilde{k}}} c_1(\widetilde{L_{\eta_r}})^d \right) \delta_{f^{-1}(\eta_r)}.$$

Il suffit donc pour conclure de montrer que $\int_{\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(\eta_r)}/\widetilde{k}}} c_1(\widetilde{L_{\eta_r}})^d = 1$.

Soit s la section $\widetilde{1(\eta_r)}$ de $\widetilde{L(\eta_r)}$. Puisque $\log\|1\|^{-1} = \log\max(t, |T_1|/r_1, \dots, |T_d|/r_d)$, on a d'après le lemme 17.4.10 l'égalité $v(s)^{-1} = \max(1, v(\widetilde{T_1(\eta_r)}), \dots, v(\widetilde{T_d(\eta_r)}))$ pour toute $v \in \mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(\eta_r)/\tilde{k}}}$. On déduit alors de l'exemple 10.7.15 que $\int_{\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(\eta_r)/\tilde{k}}}} c_1(\widetilde{L_{\eta_r}})^d = 1$. □

§ 18.7. FORMULES DE BOCHNER–MARTINELLI ET LEVINE

On démontre dans ce paragraphe l'analogue non archimédien de la formule de Bochner–Martinelli, dû à [**103**], ainsi que l'analogue de la formule de Levine.

18.7.1. — Soit X un n-espace k-analytique sans bord, soit $(f_1, \dots, f_d)$ une suite régulière de fonctions holomorphes sur X, soit Y le sous-espace analytique fermé de X défini par les équations $f_1 = \cdots = f_d = 0$, soit $U = X - Y$ le fermé complémentaire. Par hypothèse, Y est purement de codimension d. Posons $u = \log(\max(|f_1|, \dots, |f_d|))$; c'est une fonction continue et psh sur U. Par suite, pour tout entier naturel r, on peut former les courants $(\mathrm{d}'\mathrm{d}'' u)^r$ et $u(\mathrm{d}'\mathrm{d}'' u)^r$ sur U (§8.7.1) ; ils sont de bidegré (r, r). Comme $d_k(x) \leqslant d$ pour tout point $x \in Y$, ces courants s'étendent uniquement par zéro en des courants sur X lorsque $r < d$, en vertu du lemme 7.1.13. Nous noterons de la même façon ces prolongements. Lorsque $r + 1 < d$, on a $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u(\mathrm{d}'\mathrm{d}'' u)^r) = (\mathrm{d}'\mathrm{d}'' u)^{r+1}$.

Théorème 18.7.2 **(Mihatsch).** — *Soit X un n-espace k-analytique sans bord, soit $(f_1, \dots, f_d)$ une suite régulière de fonctions holomorphes sur X, soit Y le sous-espace analytique fermé de X défini par les équations $f_1 = \cdots = f_d = 0$; posons $u = \log(\max(|f_1|, \dots, |f_d|))$.*

On a l'égalité de courants

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u(\mathrm{d}'\mathrm{d}'' u)^{d-1}) = \delta_Y.$$

Lorsque $d = 1$, on retrouve la formule de Poincaré–Lelong (théorème 16.7.3). Comme $(\mathrm{d}'\mathrm{d}'' u)^{d-1}$ est fermé, on voudrait interpréter le membre de gauche de cette égalité comme $(\mathrm{d}'\mathrm{d}'' u)^d$, mais ce produit n'est pas défini a priori puisque u n'est pas continue sur X.

Démonstration. — Pour tout nombre réel $r \geqslant 0$, posons

$$u_r = \log\max(r, |f_1|, \dots, |f_d|) = \log\max(r, u).$$

Si $r > 0$, u_r est une fonction PL sur X et l'on a

$$(\mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_r)^d = \delta_{f^{-1}(\eta_r)}$$

en vertu du corollaire 18.6.2. Soit ω une $(n - d, n - d)$-forme lisse à support compact sur X. Par définition, on a

$$\langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u(\mathrm{d}'\mathrm{d}'' u)^{d-1}), \omega\rangle = \langle u(\mathrm{d}'\mathrm{d}'' u)^{d-1}, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\omega\rangle = \langle u(\mathrm{d}'\mathrm{d}'' u)^{d-1}, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\omega|_U\rangle,$$

la forme $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\omega|_U$ étant à support compact. La fonction u est minorée par un nombre réel strictement positif sur le support de $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\omega|_U$; il existe donc un nombre réel r_0 tel que $u_r = u$ pour tout nombre réel r tel que $0 < r \leqslant r_0$. Pour un tel r, on a donc

$$\langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u(\mathrm{d}'\mathrm{d}'' u)^{d-1}), \omega\rangle = \langle u_r(\mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_r)^{d-1}, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\omega|_U\rangle,$$

et en reprenant les calculs dans l'autre sens,

$$\langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u(\mathrm{d}'\mathrm{d}'' u)^{d-1}), \omega\rangle = \langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u_r(\mathrm{d}'\mathrm{d}'' u_r)^{d-1}), \omega\rangle.$$

Compte tenu de la définition des produits de courant à la Bedford–Taylor, on a

$$\langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u)^{d-1}), \omega\rangle = \langle (\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u_r)^d), \omega\rangle.$$

Par suite, pour tout nombre réel $r > 0$ assez petit, on a

$$\langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u)^{d-1}), \omega\rangle = \langle \delta_{f^{-1}(\eta_r)}, \omega\rangle.$$

La proposition suivante assure que lorsque r est assez petit, on a

$$\langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''(u(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,u)^{d-1}), \omega\rangle = \langle \delta_Y, \omega\rangle,$$

d'où le théorème. □

Proposition 18.7.3. — *Soit X un n-espace analytique et soit $f = (f_1, \dots, f_d)\colon X \to \mathbf{A}^d$ un morphisme purement de dimension relative d. On suppose en outre que $(f_1, \dots, f_d)$ est une suite régulière et on note Y le fermé analytique d'équations $f_1 = \cdots = f_d = 0$; il est purement de dimension $n - d$.*

Soit ω une G-forme de bidegré $(n-d, n-d)$ sur X, à support compact et à coefficients tropicalement boréliens localement bornés (par exemple, tropicalement continus). Pour t suffisamment proche de l'origine dans $\mathbf{A}^d$, on a

$$\langle \delta_{f^{-1}(t)}, \omega\rangle = \langle \delta_Y, \omega\rangle.$$

Démonstration. — Comme Y est défini par une suite régulière de d équations, le lieu où X est (S_d) contient Y. Puisque ce lieu est un ouvert de Zariski ([**49**], théorème 4.4), on peut supposer que X est (S_d). La fibre en zéro de f, qui est Y, est purement de dimension $n - d$ car $(f_1, \dots, f_d)$ est une suite régulière ; par suite, le morphisme f est de dimension $\leqslant n - d$ au voisinage de Y ([**48**], th. 4.9). D'après le Hauptidealsatz (lemme 11.5.2), la dimension relative de f en tout point est au moins de dimension $n-d$. Quitte à remplacer X par un voisinage de Y, on peut donc supposer que f est purement de dimension $n - d$.

En considérant un recouvrement du support de ω par des domaines analytiques compacts tropicalisant ω et en raisonnant par additivité, on peut supposer que X est compact et que ω est tropicale. Soit $g\colon X \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^N$ un moment et soit α une $(n-d, n-d)$-forme à coefficients continus sur $\mathbf{R}^N$ tels que $\omega = g^*\alpha$. Posons $h = (g, f)\colon X \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^N \times \mathbf{A}^d$.

D'après le théorème 14.7.2, *a*), il existe un nombre réel $r > 0$ tel que pour tout $t \in D(0, r)$, les polyèdres calibrés $g_{\mathrm{trop}}(X_t)^{(n-d)}$ sont égaux. On a donc

$$\langle \delta_{f^{-1}(t)}, \omega\rangle = \int_{g_{\mathrm{trop}}(X_t)^{(n-d)}}, \alpha = \int_{g_{\mathrm{trop}}(X_0)^{(n-d)}}, \alpha = \langle \delta_{f^{-1}(0)}, \omega\rangle = \langle \delta_Y, \omega\rangle.$$

Ceci conclut la démonstration. □

18.7.4. — Passons maintenant à l'analogue de la formule de Levine. Soit n un entier naturel ; posons $X = \mathbf{P}^n$. Soit p un entier naturels tel que $1 \leqslant p \leqslant n$ et soit $f\colon X \dashrightarrow \mathbf{P}^{p-1}$ l'application rationnelle donnée par $f([x_0 : \dots : x_n]) = [x_0 : \dots : x_{p-1}]$. Son ouvert de définition U est le complémentaire du sous-espace projectif $Y \simeq \mathbf{P}^{n-p}$ de $X = \mathbf{P}^n$ défini par $x_0 = \cdots = x_{p-1} = 0$.

On munit le fibré en droites $\mathscr{O}(1)$ sur $\mathbf{P}^n$ de sa métrique formelle psh standard. Posons $\alpha = c_1(\overline{\mathscr{O}(1)})$; c'est un courant paralinéaire positif de bidegré $(1, 1)$ sur X.

Sur l'ouvert U, on peut également considérer le fibré en droites métrisé $f^*\overline{\mathscr{O}(1)}$ (psh, formel) et le courant paralinéaire positif de bidegré $(1, 1)$, $\beta = c_1(f^*\overline{\mathscr{O}(1)})$.

Sur U, le fibré en droites $f^*\mathscr{O}(1)$ est isomorphe à la restriction de $\mathscr{O}(1)$; notons h le logarithme du quotient de leurs deux métriques :

$$h([x_0 : \ldots : x_n]) = \log \frac{\max(|x_0|, \ldots, |x_n|)}{\max(|x_0|, \ldots, |x_{p-1}|)}.$$

C'est une fonction continue paralinéaire sur U.

La théorie de Bedford–Taylor permet de définir les courants positifs $\alpha^i\beta^j$ sur U ; ils sont paralinéaires d'après le théorème 8.10.3. Posons

$$\omega = \sum_{j=0}^{p-1} \alpha^{p-1-j}\beta^j \ ;$$

c'est un courant paralinéaire de bidimension $(n-p+1, n-p+1)$ sur X. Comme h est continue sur U, on peut considérer le courant $h\omega$ de bidimension $(n-p+1, n-p+1)$ sur U. Comme $X - U$ est un fermé de Zariski de dimension $n-p$, il résulte de §7.1.12 que $h\omega$ se prolonge en un unique courant sur X que nous noterons Λ. Pour toute forme η de type $(n-p+1, n-p+1)$ à support compact sur X, le support du courant $\Lambda \wedge \eta$ est contenu dans U ; ainsi, $h\omega \wedge \eta|_U$ est un courant à support compact sur U et l'on a

$$\langle \Lambda, \eta \rangle = \langle h\omega \wedge \eta, 1 \rangle = \langle h\omega, \eta|_U \rangle.$$

Théorème 18.7.5. — *On a la relation de courants*

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\Lambda + \delta_Y = \alpha^p$$

sur X.

Démonstration. — Considérons $g\colon X' \to X$ l'éclatement de Y dans X, soit E le diviseur exceptionnel et soit U' l'image réciproque de U. Le morphisme g induit un isomorphisme de $U' = X' - E$ sur $U = X - Y$. Le morphisme $f \circ g\colon U' \to \mathbf{P}^{p-1}$ se prolonge en un morphisme $f'\colon X' \to \mathbf{P}^{p-1}$. Considérons les deux fibrés en droites métrisés sur X' donnés par $\overline{\mathscr{L}_a} = g^*\overline{\mathscr{O}(1)}$ et $\overline{\mathscr{L}_b} = (f')^*\overline{\mathscr{O}(1)}$; leurs métriques sont paralinéaires, psh ; notons α' et β' leurs courbures. Modulo l'isomorphisme de U' sur U induit par g, on a $\alpha' = \alpha$ et $\beta' = \beta$. Posons également $h' = g^*h$ et $\omega' = \sum_{j=0}^{p-1}(\alpha')^{p-1-j}(\beta')^j$.

Les fibrés en droites sur U' correspondant sont naturellement isomorphes, et on peut prolonger un tel isomorphisme en un morphisme $\rho\colon \mathscr{L}_a \to \mathscr{L}_b$ sur X' dont le lieu des zéros est E. On a $\log\|\rho\|^{-1} = h'$.

Pour toute forme lisse η de bidegré $(n-p+1, n-p+1)$ sur X', la théorie des courants paralinéaires fournit un courant $\omega' \wedge \eta$ sur X'. Ce courant est une limite de formes lisses obtenues en remplaçant ω' par des formes lisses déduites d'approximations psh lisses des métriques tropicalement convexes de $\mathscr{L}_a$ et $\mathscr{L}_b$, donc tropicalisées par une même famille de cartes tropicales. Son support est ainsi contenu dans une partie paralinéaire compacte S de X' ; en particulier, il ne rencontre aucun fermé Zariski strict de X', et est ainsi contenu dans U'. On pose alors $\langle \Lambda', \eta \rangle = \langle \log(h'), \omega' \wedge \eta \rangle$. Comme on peut choisir S ne dépendant que d'un atlas tropical tropicalisant η, on voit que cette formule définit un courant Λ' sur X'.

Sa restriction à U' s'identifie à $h'\omega'$, qui lui-même s'identifie à $h\omega$ via l'isomorphisme de U' sur U. Si η est une forme-test sur X, on a donc

$$\langle \Lambda', g^*\eta \rangle = \langle h'\omega', g^*\eta|_{U'} \rangle = \langle h\omega, \eta|_U \rangle = \langle \Lambda, \eta \rangle.$$

Par suite, on a $g_*\Lambda' = \Lambda$.

La formule de Poincaré–Lelong sur X' entraîne

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, h' + \delta_E = \alpha' - \beta'.$$

D'après la proposition 18.3.9, on a

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''(\Lambda') = \omega' \wedge \delta_E + (\beta' - \alpha') \wedge \omega',$$

où $\omega' \wedge \delta_E$ est défini par la théorie de Bedford–Taylor. On a

$$(\beta' - \alpha') \wedge \omega' = (\beta')^p - (\alpha')^p = -(\alpha')^p$$

puisque β' provient de $\mathbf{P}^{p-1}$.

Démontrons finalement l'égalité

$$g_*(\omega' \wedge \delta_E) = \delta_Y.$$

Soit η une forme lisse de bidegré $(n-p, n-p)$. Par passage à limite à partir du cas lisse, on a

$$\langle g_*(\omega' \wedge \delta_E), \eta\rangle = \langle \omega' \wedge \delta_E, g^*\eta\rangle = \langle \omega'_E, g^*\eta|_E\rangle,$$

où

$$\omega'_E = \sum_{j=0}^{p-1} (\alpha'_E)^{p-1-j} (\beta'_E)^j,$$

où l'on a noté α'_E et β'_E les courbures des $\overline{\mathscr{L}_a}|_E$ et $\overline{\mathscr{L}_b}|_E$. Il s'agit de démontrer que cette expression vaut $\int_Y \eta$. Les métriques de $\overline{\mathscr{L}_a}$ et $\overline{\mathscr{L}_b}$ sont limites uniformes de métriques lisses positives sur les fibrés sous-jacents. Par passage à la limite (proposition 8.7.2), il suffit de démontrer que si $\widetilde{\alpha}$ et $\widetilde{\beta}$ sont les courbures de métriques lisses sur les fibrés en droites $\mathscr{L}_a$ et $\mathscr{L}_b$, on a

$$\langle \widetilde{\omega}|_E, g^*\eta|_E\rangle = \int_Y \eta,$$

où l'on a noté $\widetilde{\omega} = \sum_{j=0}^{p-1} \widetilde{\alpha}^{p-1-j} \wedge \widetilde{\beta}^j$. Appliquons maintenant la formule de projection du théorème 16.5.7 ; il vient

$$\langle \widetilde{\omega}|_E, g^*\eta|_E\rangle = \int_E g^*\eta|_E \wedge \widetilde{\omega} = \int_Y u\eta,$$

où u est la fonction sur Y définie par $u(x) = \int_{E_x} \widetilde{\omega}$ lorsque E_x est dimension $p-1$, et 0 sinon. L'espace E est un fibré projectif au-dessus de Y, de dimension relative $p-1$, la restriction du fibré en droites $\mathscr{L}_b$ est son $\mathscr{O}(1)$. Pour tout $x \in Y$, on a

$$u(x) = \sum_{j=0}^{p-1} (c_1(\mathscr{L}_a)^{p-1-j} c_1(\mathscr{L}_b)^j \cap [E_x]).$$

Les fibres E_x sont des espaces projectifs, la restriction de $\overline{\mathscr{L}_a}$ est triviale, celle de $\overline{\mathscr{L}_b}$ est $\mathscr{O}(1)$; on a donc

$$u(x) = (c_1(\mathscr{O}(1)^{p-1} \cap [\mathbf{P}^{p-1}]) = 1$$

pour tout $x \in Y$. Cela conclut la démonstration de l'égalité $g_*(\omega' \wedge \delta_E) = \delta_Y$.

On a $\Lambda = g_*\Lambda'$, donc $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\Lambda = \mathrm{d}'\mathrm{d}''(g_*\Lambda') = g_*(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\Lambda')$, qui est somme de $g_*(\omega' \wedge \delta_E) = \delta_Y$ et de $g_*(-(\alpha')^p)$. On conclut par la formule de projection du théorème 16.5.7, en utilisant le fait que g est birationnel. □

§ 18.8. PRODUITS DE COURANTS DE COURBURE (MÉTRIQUES FORMELLES)

18.8.1. — Soit X un n-espace k-analytique sans bord, soit $\overline{L}_1, \dots, \overline{L}_d$ des fibrés inversibles sur X munis de métriques paralinéaires entières. Le courant paralinéaire $T = c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_d)$ sur X est paralinéaire (§18.3.1). Dans la suite de ce paragraphe, nous voulons le décrire plus précisément.

Au voisinage d'un point x, cette description se décompose en trois étapes, suivant la dimension de définition analytique en x de la famille $(\overline{L}_j)$ de « $\mathbf{Q}$-fibrés métrisés ». Si elle est $< d$, le courant sera nul au voisinage de x ; le lieu des points où elle est $> d$ ne sera pas chargé. Si elle est égale à d, nous construirons un morphisme de germes $f\colon (X, x) \to (Y, y)$, où $\dim(Y) = d$, sur lequel le courant se restreint en un multiple du courant d'intégration sur la fibre $f^{-1}(y)$. Au voisinage de x, le sous-espace polyédral qui décrit le courant par rapport à un moment donné g apparaît donc comme le polyèdre caractéristique $\Sigma_{g|_{f^{-1}(y)}}$ du moment $g|_{f^{-1}(y)}$, muni d'un multiple de son calibrage canonique en tant que $\mathscr{H}(y)$-espace analytique.

18.8.2. — Soit V l'ensemble des points $x \in X$ en lesquels la dimension de définition résiduelle de la famille $(\overline{L}_1, \dots, \overline{L}_d)$ est au plus égale à d.

Soit aussi W l'ensemble des points $x \in X$ pour lesquels qu'il existe un entier $q \geqslant 1$, puissance de l'exposant caractéristique de $\tilde{k}$, tels que la dimension de définition analytique de la famille $(\overline{L}_1^q, \dots, \overline{L}_d^q)$ est au plus égale à d.

Par définition, W est ouvert dans X et l'on a $V \subset W$ d'après la proposition 17.6.4. (Cette proposition montre aussi que l'on peut prendre $q = 1$ si le corps $\tilde{k}$ est parfait.) D'autre part, $X - V$ est contenu dans une partie faiblement analytique de dimension $< n-d$ (proposition 17.6.2), donc tropicalement $\mathscr{H}^{n-d}$-négligeable. Il en résulte que $X - W$ est tropicalement $\mathscr{H}^{n-d}$-négligeable ; en particulier, il ne charge pas le courant $c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_d)$. Autrement dit, pour toute forme lisse α de type $(n-d, n-d)$ sur X, à support compact, la mesure $T \wedge \alpha$ ne charge pas $X - W$, de sorte que

$$\langle T, \alpha \rangle = \int_X T \wedge \alpha = \int_W T \wedge \alpha.$$

Cela ramène à calculer la restriction à W du courant T. Cela prouve également que T est positif si et seulement si $T|_W$ l'est.

18.8.3. — Soit $x \in W$. Par hypothèse, il existe un morphisme plat (et sans bord) de germes séparés $f\colon (X, x) \to (Y, y)$, où $\dim(Y) \leqslant d$, un entier q, des fibrés inversibles $\overline{M}_1, \dots, \overline{M}_d$ sur Y munis de métriques paralinéaires entières tels que $\overline{L}_i^q \simeq f^*\overline{M}_i$ pour tout i. Notons que comme ici (X, x) est sans bord et les germes en jeu séparés, le morphisme f est en fait automatiquement sans bord, et (Y, y) aussi.

Si $\dim_y(Y) < d$, il résulte de la remarque 8.8.9 que le courant T est nul au voisinage de x.

Supposons maintenant que l'on a $\dim_y(Y) = d$. D'après la proposition 18.6.1, et quitte à restreindre Y, le courant T coïncide avec le courant $q^{-d}\lambda\delta_{f^{-1}(y)}$ au voisinage de x, où

$$\lambda = m(x)\mathrm{def}_k(x) \left(\prod_{j=1}^{d} c_1(\widetilde{M}_i(x)) \cap \widetilde{[(X, x)]} \right).$$

Théorème 18.8.4. — *Soit X un espace analytique sans bord, topologiquement séparé. Soit $\overline{L_1},\dots,\overline{L_d}$ des fibrés en droites sur X munis de métriques paralinéaires entières. Soit x un point de X. Pour que le courant $c_1(\overline{L}_1)\wedge\cdots\wedge c_1(\overline{L}_d)$ soit positif (*resp. *nul) au voisinage de x, il faut et il suffit que le produit des classes de Chern $c_1(\widetilde{L}_{1,x})\dots c_1(\widetilde{L}_{d,x})$ sur $\widetilde{(X,x)}$ soit numériquement effective (*resp. *numériquement triviale).*

Rappelons cette condition (§10.7.14) : choisissons un prémodèle V de $\widetilde{(X,x)}$ et des fibrés en droites $M_1,\dots,M_d$ sur V qui sont des prémodèles des $\widetilde{L_j}$; il s'agit de dire que pour tout sous-variété irréductible Z de codimension m de V, le degré de la classe de zéro-cycle $(c_1(M_1)\dots c_1(M_d)\cap[Z])$ sur V est effective (*resp.* numériquement triviale). Il est classique qu'elle ne dépend pas du choix des prémodèles ([**93**], exemple 1.4.4).

Démonstration. — Comme un courant ou une classe numérique de cycle sont nuls si et seulement s'ils sont à la fois positif et négatif, il suffit de traiter l'assertion relative à la positivité.

Notons m le plus petit entier tel qu'il existe un entier $q\geqslant 1$ de sorte que la dimension de définition analytique en x de la famille $(\overline{L}_1^q,\dots,\overline{L}_d^q)$ soit égale à m. Par homogénéité, on se ramène au cas où $q=1$. Considérons un morphisme plat $f\colon(X,x)\to(Y,y)$, où $\dim(Y)=m$, et des fibrés inversibles $\overline{M}_1,\dots,\overline{M}_d$ sur Y munis de métriques paralinéaires entières tels que $\overline{L}_i\simeq f^*\overline{M}_i$ pour tout i. Notons aussi T le courant considéré.

Si $m<d$, le courant T est nul, de même que le produit de classes de Chern $c_1(\widetilde{L}_1(x))\dots c_1(\widetilde{L}_d(x))$, puisqu'il existe un prémodèle de dimension $<d$.

Supposons $m=d$. On a alors vu qu'au voisinage de x, le courant T est de la forme $\lambda\delta_{f^{-1}(y)}$. où λ est un multiple strictement positif du nombre d'intersection $(c_1(\widetilde{M}_1(y))\dots c_1(\widetilde{M}_d(y))\cap\widetilde{[(Y,y)]})$, qui est positif ou nul si et seulement si le produit de classes de Chern $(c_1(\widetilde{M}_1(y))\dots c_1(\widetilde{M}_d(y))$ est numériquement effectif. Tout prémodèle des $\widetilde{M}_j(y)$ fournit un prémodèle des $\widetilde{L}_j(x)$, d'où l'équivalence dans ce cas car le courant d'intégration $\delta_{f^{-1}(y)}$ est positif et non nul au voisinage de x.

Il reste à traiter le cas où $m>d$. À toute famille finie $\Phi=(\varphi_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^\times$, on associe un recouvrement affine $\mathscr{U}_\Phi$ de l'espace de Zariski–Riemann $\widetilde{(X,x)}$ formé des parties de la forme $\mathscr{U}_\Phi^\varepsilon=\mathbf{P}\{(\varphi_i^{\varepsilon_i})_i\}$, où $\varepsilon=(\varepsilon_i)$ parcourt $\{-1,1\}^I$. Choisissons une telle famille Φ telle que pour tout ε et tout j, le fibré résiduel $\widetilde{L}_{j,x}$ possède une section inversible homogène $\sigma_{j,\varepsilon}$ sur $\mathscr{U}_\Phi^\varepsilon$. Pour tout i, choisissons un élément $f_i\in\mathscr{O}_{X,x}^\times$ tel que $\widetilde{f_i(x)}=\varphi_i$. Pour tout j, choisissons une section inversible $s_{j,\varepsilon}$ du fibré en droites L_j au voisinage de x telle que $\widetilde{s_{j,\varepsilon}(x)}=\sigma_{j,\varepsilon}$.

Choisissons alors un voisinage affinoïde V de x sur lequel les fonctions f_i et les sections $s_{j,\varepsilon}$ sont définies et inversibles ; pour tout $\varepsilon\in\{\pm1\}^I$, notons V_ε le domaine affinoïde de V défini par les inégalités $|f_i^{\varepsilon_i}|\leqslant|f_i(x)|$. On peut supposer que pour tout j et tout ε, $\|s_{j,\varepsilon}\|=\|s_{j,\varepsilon}(x)\|$ sur V_ε.

Pour tout ε, la réduction $\widetilde{V}_\varepsilon$ de V_ε est un $\tilde{k}$-schéma gradué de type fini ; ces schémas se recollent en un $\tilde{k}$-schéma gradué de type fini $\mathscr{S}$. Les applications de réduction $V_\varepsilon\to\widetilde{V}_\varepsilon$ se recollent en une une application de réduction $\pi\colon V\to\mathscr{S}$, anticontinue. Pour tous $s\in\mathscr{S}$, l'adhérence de $\pi^{-1}(s)$ dans V est la réunion des $\pi^{-1}(t)$, où t parcourt l'ensemble des générisations de s dans $\mathscr{S}$ (cela se vérifie sur chacun des V_ε, pour lesquels on applique le lemme 11.7.2).

Pour tout j et tout ε, la section $s_{j,\varepsilon}$ du fibré en droites métrisé $L_j|_{V_\varepsilon}$ est de norme constante. Lorsque ε varie, les réductions graduées des $\mathscr{O}(V_\varepsilon)$-modules normés $L_{j,\varepsilon}(V_\varepsilon)$ se recollent en un fibré en droite gradué $\mathscr{L}_j$ sur $\mathscr{S}$.

Pour tout $y \in V$, l'adhérence de Zariski $\overline{\{\pi(y)\}}$ de $\pi(y)$ est un prémodèle de $\widetilde{(X,y)}$. L'espace de Zariski–Riemann $\widetilde{(V,y)}$ est égal à $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(y)}/\tilde{k}(\pi(y))}\{\overline{\pi(y)}\}$; en particulier, si $y \in \mathring{V}$, on a $\widetilde{(X,y)} = \widetilde{(V,y)} = \mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(y)}/\tilde{k}(\pi(y))}\{\overline{\pi(y)}\}$, ce qui entraîne que $\overline{\pi(y)}$ est propre. Pour tout j, la restriction de $\mathscr{L}_j$ à $\overline{\{\pi(y)\}}$ est un prémodèle de $\widetilde{L_{j,y}}$. (Pour la variante formelle de ce raisonnement, voir la démonstration du lemme 17.7.10.)

En appliquant ce qui précède, on en déduit que le produit des classes de Chern $c_1(\widetilde{L}_{1,x}) \dots c_1(\widetilde{L}_{d,x})$ est numériquement effectif sur $\widetilde{(X,x)}$ si et seulement si l'on a $c_1(\mathscr{L}_1|_W) \dots c_1(\mathscr{L}_d|_W) \geqslant 0$ pour toute sous-variété irréductible W de $\overline{\pi(x)}$ telle que $\dim(W) = d$.

Supposons que ce soit le cas et soit $U = \pi^{-1}(\overline{\pi(x)})$. C'est un voisinage ouvert de x dans V et donc un voisinage de x dans X. Soit y un point de $U \cap \mathring{V}$ tel que $W = \overline{\pi(y)}$ est de dimension $\leqslant d$. Comme W, muni de la restriction des $\mathscr{L}_j$, est un prémodèle des $\widetilde{L}_{j,y}$ sur $\widetilde{(X,y)}$, le produit des classes de Chern $c_1(\widetilde{L}_{1,y}) \dots c_1(\widetilde{L}_{d,y})$ est numériquement effectif, par l'hypothèse faite. D'après le cas « $m \leqslant d$ » déjà traité, le courant T est positif sur un voisinage ouvert U_y de y dans $\mathring{U}$. Le complémentaire dans $\mathring{U}$ de la réunion des U_y est une partie fermée de $\mathring{U}$, c'est l'image réciproque par π de l'ensemble des points de $\mathscr{S}$ tels que $\dim(\overline{y}) > d$. D'après la la proposition 11.10.4 appliquée à chacun des V_ε, c'est une partie faiblement analytique de $\mathring{U}$ de dimension $< n - d$. D'après l'exemple 16.8.4, ce fermé est tropicalement $\mathscr{H}^{n-d}$-négligeable. Par suite, le courant T est positif sur $\mathring{U}$.

Inversement, supposons qu'il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathring{V}$ tel que $T|_U$ soit un courant positif. Soit W une sous-variété irréductible de dimension d de $\overline{\pi(x)}$ et soit w son point générique. Alors, l'adhérence de $\pi^{-1}(w)$ contient x ; en particulier, il existe un point $y \in \pi^{-1}(w) \cap U$. Par hypothèse, le courant T est positif au voisinage de y et les $\mathscr{L}_j|_W$ fournissent un prémodèle des $\widetilde{L}_{j,y}$. D'après le cas « $m \leqslant d$ » traité, le nombre d'intersection $(c_1(\mathscr{L}_1|_W) \dots c_1(\mathscr{L}_d|_W) \cap [W])$ est positif ou nul. Comme cela est vrai pour tout W, cela démontre que le produit des classes de Chern $c_1(\widetilde{L}_{1,x}) \dots c_1(\widetilde{L}_{d,x})$ sur $\widetilde{(X,x)}$ est numériquement effectif. □

Corollaire 18.8.5. — *Soit $\overline{L}_1, \dots, \overline{L}_d$ des fibrés en droites sur X munis de métriques paralinéaires. Si les courants $c_1(\overline{L}_1), \dots, c_1(\overline{L}_d)$ sont positifs, il en est de même de leur produit $c_1(\overline{L}_1) \wedge \dots \wedge c_1(\overline{L}_d)$.*

Démonstration. — Quitte à remplacer les $\overline{L_i}$ par une puissance convenable, on suppose qu'ils sont munis de métriques paralinéaires entières. En effet, sous cette hypothèse, les classes de Chern $c_1(\widetilde{L}_{j,x})$ des fibrés résiduels sont numériquement effectives, pour tout $x \in X$. Il résulte du théorème de Kleiman qu'il en est alors de même de leur produit (voir **[93]**, exemple 1.4.16). □

Corollaire 18.8.6. — *Soit Y un espace analytique sans bord sur une extension complète de K et soit $f\colon Y \to X$ un K-morphisme. Soit $\overline{L}_1, \dots, \overline{L}_d$ des fibrés en droites*

sur X munis de métriques paralinéaires. Si le courant $c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_d)$ sur X est positif, il en est de même du courant $c_1(f^*\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(f^*\overline{L}_d)$ sur Y.

Démonstration. — Quitte à remplacer les $\overline{L_i}$ par une puissance convenable, on suppose qu'ils sont munis de métriques paralinéaires entières. Pour tout i posons $\overline{M}_i = f^*\overline{L}_i$ Soit $y \in Y$ et soit x son image sur X. Notre hypothèse sur les $\overline{L}_i$ $x \in X$ et le théorème ci-dessus assurent que le produit des classes de Chern $c_1(\widetilde{L}_{1,x}) \dots c_1(\widetilde{L}_{d,x})$ est numériquement effectif. Il en va alors de même de $c_1(\widetilde{M}_{1,y}) \dots c_1(\widetilde{M}_{d,y})$ (voir 10.7.14), et l'on conclut en utilisant à nouveau le théorème. □

Corollaire 18.8.7. — *Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces analytiques sans bord, soit u une fonction paralinéaire*harmonique *sur X. Alors $u \circ f$ est harmonique.*

Démonstration. — La fonction u est harmonique si le fibré en droites trivial muni de la métrique paralinéaire pour laquelle $\|1\| = \exp(-u)$ est à courbure nulle. Le corollaire découle alors du corollaire précédent. □

Corollaire 18.8.8. — *Soit X un espace analytique sans bord, soit $\overline{L}$ un fibré en droites sur X muni d'une métrique paralinéaire entière. Soit x un point de X. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le fibré métrisé $\overline{L}$ est psh au voisinage de x ;*
(ii) *Le courant $c_1(\overline{L})$ est positif au voisinage de x ;*
(iii) *Le fibré en droites résiduel $\widetilde{L}(x)$ est numériquement effectif.*

Démonstration. — L'implication (i)⇒(ii) résulte de la proposition 8.3.1 ; l'équivalence (ii)⇒(iii) est le théorème 18.8.4 et l'implication (iii)⇒(i) est la proposition 17.8.4. □

Corollaire 18.8.9. — *On suppose que X est sans bord et que la valeur absolue de k est non triviale. Soit $\tau\colon X \to \mathbf{R}^n$ une fonction strictement paralinéaire à composantes harmoniques. Soit u une fonction convexe continue sur $\mathbf{R}^n$. La fonction τ^*u sur X est psh.*

Démonstration. — Nous allons démontrer le corollaire en trois étapes.

a) Supposons d'abord que u est lisse. Comme τ est harmonique, le courant $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(\tau^*u)$ coïncide avec le courant associé à la G-forme $\tau^*\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''(u)$, qui est positive car u est convexe et lisse.

b) Supposons maintenant que u est $\mathbf{Q}$-paralinéaire.

En remplaçant τ par un multiple $a \cdot \tau$ et u par $x \mapsto u(a^{-1} \cdot x)$, on se ramène au cas où τ est paralinéaire entière. Il existe alors une suite (u_n) de fonctions lisses convexes sur $\mathbf{R}^n$ qui converge localement uniformément vers u. Alors τ^*u_n converge localement uniformément vers τ^*u sur X, de sorte que la suite de courants $(\mathrm{d}'\mathrm{d}''(\tau^*u_n))$ converge vers le courant $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(\tau^*u)$. D'après le cas *a*), les courants $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(\tau^*u_n)$ sont positifs. Par suite, le courant $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(\tau^*u)$ est positif. Le corollaire 18.8.8 entraîne alors que u est psh.

c) Traitons maintenant le cas général. L'assertion est locale sur X ; soit x un point de X et soit W un voisinage compact de x dans X.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une décomposition simpliciale de $\mathbf{R}^n$ dont les sommets sont à coordonnées entières. Dilatons-la d'un facteur assez petit dans G de sorte que u ne varie pas de plus de ε sur chaque simplexe rencontrant $\tau(W)$.

Soit P l'enveloppe convexe de la réunion des simplexes qui rencontrent $\tau(W)$; c'est une $\mathbf{Q}$-cellule compacte de $\mathbf{R}^n$ munie d'une décomposition simpliciale $\mathscr{C}$ à sommets dans $\mathbf{Q}^n$.

L'ensemble des fonctions continues sur P qui sont $\mathbf{R}$-affines sur chaque cellule de $\mathscr{C}$ est un espace affine $\mathscr{F}$; il s'identifie à $\mathbf{R}^{\mathscr{C}_0}$. Il est muni de la $\mathbf{Q}$-structure $\mathbf{Q}^{\mathscr{C}_0}$. Les fonctions $f \in \mathscr{F}$ qui sont convexes en constituent un cône convexe fermé $\mathscr{F}_{\mathrm{conv}}$. Démontrons que ce cône est défini par un nombre fini de formes linéaires à coefficients dans $\mathbf{Q}$ sur $\mathbf{R}^n$.

Soit $f \in \mathscr{F}$; pour toute n-cellule $C \in \mathscr{C}$, notons f_C l'unique fonction affine sur $\mathbf{R}^n$ qui coïncide avec f sur C. Pour que f soit convexe, il faut et il suffit que pour tout sommet $a \in \mathscr{C}_0$ et toute cellule $C \in \mathscr{C}_n$, on ait $f_C(a) \leqslant f(a)$. (En effet, on alors $f_C(x) \leqslant f(x)$ pour tout $x \in P$ et tout $C \in \mathscr{C}_n$, d'où $\sup(f_C) \leqslant f$, et l'inégalité inverse est évidente.) Soit (λ_i) la famille normalisée des coordonnées barycentriques de a par rapport aux sommets (x_i) de C ; ce sont des nombres rationnels car la décomposition simpliciale $\mathscr{C}$ est dilatée d'une décomposition à sommets dans $\mathbf{Z}^n$; on a de plus $f_C(a) = \sum \lambda_i f_C(x_i)$, et $f_C(x_i) = f(x_i)$ pour tout i, de sorte que la relation $f_C(a) \leqslant f(a)$ s'écrit $f(a) - \sum \lambda_i f(x_i) \geqslant 0$.

Cela prouve que $\mathscr{F}_{\mathrm{conv}}$ est un cône polyédral $\mathbf{Q}$-rationnel de $\mathscr{F}$, de sommet 0.

L'interpolation affine par morceaux u_P de $u|_P$ relative à la décomposition simpliciale $\mathscr{C}$ est encore convexe, car u est convexe. Elle définit un point *réel* de $\mathscr{F}_{\mathrm{conv}}$. Par suite, il existe des points rationnels de $\mathscr{F}_{\mathrm{conv}}$ arbitrairement proches de $u|_P$ aux sommets de $\mathscr{C}$. En particulier, il existe une fonction u_ε sur P, continue, convexe, $\mathbf{Q}$-affine sur chaque cellule de $\mathscr{C}$, prenant des valeurs rationnelles aux sommets de $\mathscr{C}$, telle que $|u_\varepsilon - u_P| \leqslant \varepsilon$ sur P. Puisque la décomposition simpliciale $\mathscr{C}$ avait choisie assez fine pour que $|u_P - u| \leqslant \varepsilon$ sur P, on a $|u_\varepsilon - u| \leqslant 2\varepsilon$ sur P.

La fonction $\tau^* u_\varepsilon$ sur W est alors paralinéaire et approche $\tau^* u$ à 2ε-près. D'après b), elle est psh sur $\mathring{W}$.

En faisant tendre ε vers 0, on en déduit que $\tau^* u$ est psh sur $\mathring{W}$. Cela conclut la démonstration. □

Exemple 18.8.10. — (Dans cet exemple, la notation $\widetilde{\cdot}$ désigne la réduction usuelle, non graduée.) Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel sur k°, plat, localement topologiquement de présentation finie, à fibre spéciale équidimensionnelle, et soit $\mathfrak{L}_1, \dots, \mathfrak{L}_d$ une suite de fibrés en droites sur $\mathfrak{X}$. La fibre générique $\mathfrak{X}_\eta$ de $\mathfrak{X}$ est un espace k-analytique équidimensionnel. Notons X l'intérieur de $\mathfrak{X}_\eta$: c'est l'image réciproque par l'application de réduction $\pi\colon \mathfrak{X}_\eta \to \mathfrak{X}_s$ des points de $\mathfrak{X}_s$ dont l'adhérence est propre sur $\tilde{k}$. Les fibrés en droites $\mathfrak{L}_j$ induisent des fibrés en droites munis de métriques strictement PL sur X, notons-les $\overline{L_j}$.

a) Expliquons comment déduire du théorème 18.8.4 et de la description du fibré résiduel d'un fibré formel (§17.7.9) une description du *support* du courant paralinéaire $c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_d)$ sur X.

Soit x un point de X. Soit V_x la $\tilde{k}$-variété $\overline{\{\pi(x)\}}$; elle est irréductible et propre. Par définition, pour tout j, la restriction $\mathfrak{L}_j|_{V_x}$ à V_x du fibré formel $\mathfrak{L}_j$ est un prémodèle du fibré en droites résiduel $\widetilde{L}_{j,x}$.

D'après le théorème 18.8.4 et la remarque qui le suit, le courant $c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_d)$ est nul au voisinage de x si et seulement si la classe de cycle numérique $c_1(\mathfrak{L}_1|_{V_x}) \cap \cdots \cap c_1(\mathfrak{L}_d|_{V_x}) \cap [V_x]$ sur V est numériquement triviale. Autrement dit, le support du courant

$c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_d)$ sur X est l'ensemble des points x tels que la classe $c_1(\mathfrak{L}_1|_{V_x}) \cap \cdots \cap c_1(\mathfrak{L}_d|_{V_x}) \cap [V_x]$ ne soit pas numériquement triviale.

De manière duale, il en résulte que le complémentaire du support de ce courant est la réunion des $\pi^{-1}(W)$, où W parcourt l'ensemble des sous-variétés irréductibles propres de $\mathfrak{X}_s$ telles que $c_1(\mathfrak{L}_1|_W) \cap \cdots \cap c_1(\mathfrak{L}_d|_W) \cap [W]$ soit numériquement triviale. (En effet, si $x \in \pi^{-1}(W)$, on aura $V_x \subset W$.) Comme π est anticontinue, observons que $\pi^{-1}(W)$ est une partie ouverte de X, pour toute sous-variété irréductible propre W de $\mathfrak{X}_s$, de sorte que la réunion indiquée est effectivement ouverte.

La réunion des sous-variétés irréductibles propres W de $\mathfrak{X}_s$ telles que $c_1(\mathfrak{L}_1|_W) \cap \cdots \cap c_1(\mathfrak{L}_d|_W) \cap [W]$ soit numériquement triviale semble difficile à décrire en général. Toutefois, lorsque chaque composante irréductible W de $\mathfrak{X}_s$ est propre et que les restrictions des $\mathfrak{L}_j$ y induisent des fibrés amples, cet ensemble est la réunion des sous-variétés irréductibles de $\mathfrak{X}_s$ qui sont de dimension $< d$.

Par exemple, le support du courant $c_1(\overline{\mathscr{O}(1)})^d$ sur $\mathbf{P}^n_k$, le fibré en droites $\mathscr{O}(1)$ étant muni de sa métrique formelle canonique, est l'ensemble des points de $\mathbf{P}^n_k$ dont la spécialisation sur $\mathbf{P}^n_{\tilde{k}}$ a une adhérence de dimension $\geqslant d$.

b) On peut mener une analyse similaire pour étudier la positivité du courant $c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_d)$ au voisinage d'un point x de X. Avec les mêmes notations, ce courant est positif au voisinage de x si et seulement si la classe $c_1(\mathfrak{L}_1|_{V_x}) \cap \cdots \cap c_1(\mathfrak{L}_d|_{V_x}) \cap [V_x]$ est numériquement effective. De manière duale, l'image réciproque de la réunion des sous-variétés irréductibles propres W telles que $c_1(\mathfrak{L}_1|_W) \cap \cdots \cap c_1(\mathfrak{L}_d|_W) \cap [W]$ soit numériquement effective est le plus grand ouvert de X sur lequel le courant $c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_d)$ est positif.

Dans le cas particulier où toute composante irréductible de $\mathfrak{X}_s$ est propre, on en déduit que le courant $c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_d)$ est positif si et seulement si, pour toute composante irréductible W de $\mathfrak{X}_s$, la classe de cycle $c_1(\mathfrak{L}_1|_W) \cap \cdots \cap c_1(\mathfrak{L}_d|_W) \cap [W]$ sur W est numériquement effective.

§ 18.9. DÉTECTER LA POSITIVITÉ PAR UNE SOUS-VARIÉTÉ

En géométrie complexe, le caractère psh (ou pluriharmonique) d'une métrique hermitienne sur un fibré en droites se définit par restriction à toute courbe, mais est équivalent à la positivité du courant de courbure. Ce n'est pas ainsi que nous avons procédé dans le cas non archimédien.

Dans ce paragraphe, on donne un résultat de ce genre, qui détecte la stricte positivité d'une métrique paralinéaire sur un fibré en droites au voisinage d'un point d'Abhyankar, par restriction à une courbe convenable, éventuellement sur une extension valuée complète du corps de base.

Lemme 18.9.1. — *Soit K un corps gradué, soit $q\colon V \to Z$ un morphisme surjectif de K-schémas gradués propres et intègres, soit d sa dimension relative générique. Soit $(L_1, \ldots, L_d)$ une famille finie de fibrés en droites sur V ; on suppose que $c_1(L_1) \ldots c_1(L_d)$ est numériquement effectif et qu'il existe un point z de Z de corps gradué résiduel fini sur K et une composante irréductible H de $q^{-1}(z)$ telle que $\int_H c_1(L_1) \ldots c_1(L_d) > 0$. Alors, le degré de $c_1(L_1) \ldots c_1(L_d)$ sur la fibre générique de q est strictement positif.*

Démonstration. — Le lemme 10.3.5 permet de se ramener, par extension des scalaires à $K(T/\rho)$ pour un polyrayon ρ convenable, au cas non gradué. Notons η le point générique de Z ; la fibre générique de q est une $K(\eta)$-variété W et il s'agit de démontrer que $\int_W c_1(L_1|_W)\dots c_1(L_d|_W) > 0$.

Quitte à étendre les scalaires à une clôture algébrique $\overline{K}$ de K, à remplacer V par une composante irréductible de $V_{\overline{K}}$, puis Z par l'image de cette composante sur $Z_{\overline{K}}$ et enfin H par une composante irréductible de $H_{\overline{K}}$ contenue dans $V_{\overline{K}}$, on peut supposer que K est algébriquement clos.

Posons $n = \dim(V)$ et $m = \dim(Z)$, de sorte que $d = n - m$. Soit U un ouvert non vide de Z au-dessus duquel q est plat.

Soit Z' un voisinage affine de z dans Z et soit V' l'image réciproque de Z' sur W. Le lemme de normalisation de Noether fournit un morphisme fini et surjectif $\pi\colon Z' \to \mathbf{A}^d_K$; on note $p = \pi \circ q\colon V' \to \mathbf{A}^m_K$ la flèche composée. Soit D une droite de $\mathbf{A}^m_K$ passant par le K-point $\pi(z)$ qui ne soit pas contenue dans le fermé strict $\pi(Z' - U)$ de $\mathbf{A}^m_K$; il en existe puisque K est infini.

Soit H' une composante irréductible de $p^{-1}(D)$ contenant H ; démontrons que $p(H') = D$. Comme D peut être localement (et même globalement !) définie par $m-1$ équations, il découle du *Hauptidealsatz* que H' est de dimension au moins égale à $n-(m-1) = d+1$. Comme H est de dimension $d = n - m$ et π est fini, les morphismes p et q sont de dimension relative d au point générique de H ; il en est donc de même de la restriction de p à H', car H' contient H. Puisque H' est de dimension $d+1$, il n'est pas entièrement contenu dans $p^{-1}(\pi(z))$ qui est de dimension d en au moins un point. Puisque $p(H')$ est par ailleurs contenu dans la droite D, il s'ensuit que $p(H') = D$.

Munisons H' et D de leurs structures réduites. Alors, D est normale (c'est une droite), H' est intègre et le morphisme $p\colon H' \to D$ est propre et surjectif. Par conséquent, H' est plat sur D et en particulier purement de dimension relative $n - d$ sur D (puisqu'il existe par ce qui précède au moins un point en lequel il est de dimension relative $n - d$ sur D).

Comme $c_1(L_1)\dots c_1(L_d)$ est nef et comme $\int_H P > 0$, le degré $\int_{(\pi|_{H'})^{-1}(p(z))} c_1(L_1)\dots c_1(L_d)$ est strictement positif ; dès lors, le degré de $c_1(L_1)\dots c_1(L_d)$ sur n'importe quelle fibre de $p\colon H' \to D$ est strictement positif (« conservation du nombre », cf. [**69**, théorème 10.2]).

Choisissons $t \in D$ n'appartenant pas à $p(H' - U)$. On a donc $p^{-1}(t) \subset U$ et la fibre $p|^{-1}_{H'}(t)$ est purement de dimension d. D'après ce qui précède, elle possède une composante irréductible E telle que $\int_E P > 0$. Soit $u \in Z'$ un point de $q(E)$. On a $\pi(u) = t$, donc $u \in U \cap Z'$ par choix de t. Par platitude, q est purement de dimension relative $n - d$ au-dessus de U, donc E est une composante irréductible de $q^{-1}(u)$. Comme $c_1(L_1)\dots c_1(L_d)$ est nef, on a $\int_{q^{-1}(u)} c_1(L_1)\dots c_1(L_d) > 0$. En vertu de la platitude de q au-dessus de U, le degré de $c_1(L_1)\dots c_1(L_d)$ sur la fibre générique de q est alors également strictement positif (de nouveau par conservation du nombre), ce qu'il fallait démontrer. □

Proposition 18.9.2. — *Soit K un corps gradué, soit V un K-schéma gradué intègre et propre de dimension n et soit $(L_1, \dots, L_d)$ une famille de fibrés en droites sur V. On suppose que la classe $c_1(L_1)\dots c_1(L_d)$ est numériquement effective et numériquement non triviale. Il existe un K-schéma gradué intègre et propre W, un morphisme birationnel $p\colon W \to V$, un polyrayon r de longueur $n - d$ et un morphisme dominant $q\colon W \to \mathbf{P}^{1,r}_K$ tels que le degré de $c_1(p^*L_1)\dots c_1(p^*L_d)$ sur la fibre générique de q soit strictement positif.*

Démonstration. — Choisissons une sous-variété irréductible fermée H_0 de V de dimension d telle que $\int_{H_0} P > 0$ et soit ξ le point générique de H_0. Le lemme 10.4.4 assure l'existence d'un ouvert U de V rencontrant H_0, et de $n-d$ éléments homogènes $f_1, \dots, f_d$ de $\mathscr{O}_X(U)$, de degrés respectifs $r_1, \dots, r_{n-d}$, tel que le lieu des zéros des $f_i|_U$ soit égal à $H_0 \cap U$. Pour tout i, la famille $(f_1, \dots, f_{n-d})$ définit un morphisme de U vers $\mathbf{A}^r_K \subset \mathbf{P}^{(1,r)}_K$ où $r = (r_1, \dots, r_{n-d})$; il existe alors un morphisme propre et birationnel $p\colon W \to V$, qui est un isomorphisme au-dessus de U, tel que $U \to \mathbf{P}^{(1,r)}_K$ s'étende en un morphisme $q\colon W \to \mathbf{P}^{(1,r)}_K$. L'adhérence de $H_0 \cap U$ dans W est une variété irréductible H de dimension d qui est par construction une composante irréductible de $q^{-1}(0)$; comme H domine H_0, on a $\int_H P > 0$. Il résulte alors du lemme 18.9.1 ci-dessus que le degré de $c_1(L_1) \dots c_1(L_d)$ sur la fibre générique de q est strictement positif. □

Théorème 18.9.3. — *Soit (X, x) un germe d'espace k-analytique sans bord, soit $(\overline{L}_1, \dots, \overline{L}_d)$ une famille finie de fibrés en droites sur X munis de métriques paralinéaires. On suppose que le courant $c_1(\overline{L}_1) \wedge \dots \wedge c_1(\overline{L}_d)$ est positif et non nul, et qu'il existe un fermé de Zariski de (X, x) de dimension $d_k(x)$. Il existe alors une immersion $\varphi\colon (Y, x) \hookrightarrow (X, x)$ d'un germe d'espace analytique sans bord de dimension d tel que le courant $c_1(\varphi^*\overline{L}_1) \dots c_1(\varphi^*\overline{L}_d)$ soit non nul.*

En particulier, pour $d = 1$, on a le corollaire suivant.

Corollaire 18.9.4. — *Soit (X, x) un germe d'espace k-analytique sans bord, soit $\overline{L}$ un fibré en droites sur X muni d'une métrique paralinéaire psh tel que le courant $c_1(L)$ n'est pas nul. S'il existe un fermé de Zariski de (X, x) de dimension $d_k(x)$, il existe un germe de courbe (Y, x) sur (X, x) tel que le courant $c_1(L|_Y)$ ne soit pas nul.*

Démonstration. — Posons $n = d_k(x)$. Quitte à remplacer (X, x) par le fermé de Zariski de dimension n dont on a postulé l'existence, on peut supposer que la dimension de (X, x) est égale à n. Posons $m = n - d$.

D'après le théorème 18.8.4, la classe $c_1(\widetilde{L}_{1,x}) \dots c_1(\widetilde{L}_{d,x})$ sur $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}}$ est nef et numériquement non triviale. Soit $(V, M_1, \dots, M_d)$ un modèle de $(\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{k}} \widetilde{L}_{1,x}, \dots, \widetilde{L}_{d,x})$; la classe $c_1(M_1) \dots c_1(M_d)$ sur V est donc nef et numériquement non triviale. En vertu du lemme 18.9.2, quitte à modifier V, on peut supposer qu'il existe un polyrayon $r = (r_1, \dots, r_m)$ et un morphisme dominant $q\colon W \to \mathbf{P}^{(1,r)}_K$ tel que le degré de $c_1(M_1) \dots c_1(M_d)$ sur la fibre générique de q soit strictement positif.

Choisissons un système de coordonnées affines $T_1, \dots, T_m$ sur $\mathbf{A}^r_{\widetilde{k}} \subset \mathbf{P}^{(1,r)}_{\widetilde{k}}$ (chaque T_i étant homogène de degré r_i). Pour tout i, on note f_i l'image de T_i dans $\widetilde{k}(V)$ *via* la flèche q. Notons W la fibre générique de q ; c'est naturellement un schéma gradué intègre de dimension d sur $\widetilde{k}(f_1, \dots, f_m)$, de corps gradué des fonctions $\widetilde{k}(V) = \widetilde{\mathscr{H}(x)}$. Par hypothèse $\int_W c_1(M_1|_W) \dots c_1(M_d|_W)$ est strictement positif.

Le germe (X, x) est sans bord, et *a fortiori* presque bon. Il existe donc m fonctions inversibles $g_1, \dots, g_m$ sur le germe (X, x) telles que $\widetilde{g_i(x)} = f_i$ pour tout $i \leqslant m$. Soit $g\colon (X, x) \to (\mathbf{A}^{m,\mathrm{an}}_k, z)$ le morphisme de germes induit par les g_i. Démontrons que le germe $(Y, x) = (g^{-1}(\eta_r), x)$ convient.

Démontrons tout d'abord que l'on a $\dim(Y,x)=d$ et que $d_{\mathscr{H}(\eta_r)z}(x)=d$. Pour tout point $y\in Y$, on a

$$n\geqslant d_k(y)=d_{\mathscr{H}(\eta_r)}(y)+d_k(\eta_r)=d_{\mathscr{H}(\eta_r)}(y)+m$$

de sorte $d_{\mathscr{H}(\eta_r)}(y)\leqslant d$. Cela démontre $\dim(Y,x)\leqslant d$. Comme $d_k(x)=n$, le même raisonnement fournit l'égalité $d_{\mathscr{H}(\eta_r)}(x)=d$, d'où l'égalité $\dim(Y,x)=d$.

Posons $\Lambda_i=L_i|_Y$. Compte tenu du théorème 18.8.4, il reste à démontrer que $\int_{\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{\mathscr{H}(z)}}}c_1(\widetilde{\Lambda}_{1,x})\dots c_1(\widetilde{\Lambda}_{d,x})$ est non nulle. Or par fonctorialité de la formation du fibré résiduel $(W,M_1|_W,\dots,M_d|_W)$ est un modèle de $(\mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\widetilde{\mathscr{H}(z)}},\widetilde{\Lambda}_{1,x},\dots,\widetilde{\Lambda}_{d,x})$. L'intégrale ci-dessus est donc égale à $\int_W c_1(M_1|_W)\dots c_1(M_d|_W)$ sur W qui est strictement positive. □

Remarque 18.9.5. — Dans les énoncés de cette section, on peut remplacer la classe $c_1(L_1)\dots c_1(L_d)$, produit de d premières classes de Chern de fibrés en droites, par un polynôme homogène de degré d en les classes de Chern de fibrés vectoriels qui est numériquement effectif et numériquement non trivial. Le lemme 18.9.1 et la proposition 18.9.2 se transposent *verbatim*, avec leurs démonstrations. Le théorème 18.9.2 fait référence à une notion de classes de Chern de fibrés vectoriels munis de métriques paralinéaires pour lesquelles nous n'avons pas de définition. Comme on l'a vu dans sa preuve, la positivité analytique était immédiatement traduite en termes de théorie de l'intersection résiduelle, via le théorème 18.8.4, et c'est ainsi que sa généralisation peut se formuler en l'état actuel de la théorie ; modulo cette modification, la démonstration est identique. On laisse les détails aux lecteurs intéressés.

Remarque 18.9.6. — Nous ne savons pas si l'hypothèse qu'il existe un fermé de Zariski de dimension $d_k(x)$ (c'est-à-dire que x est, localement, un point d'Abhyankar de rang maximal d'un fermé analytique) est nécessaire.

CHAPITRE 19

VARIÉTÉS ABÉLIENNES

---

§ 19.1. MÉTRIQUES SUR LES FIBRÉS EN DROITES SUR LES VARIÉTÉS ABÉLIENNES

Lemme 19.1.1. — *Soit X un k-espace analytique propre. Soit L un fibré en droites sur X. Soit w un entier $\geqslant 2$, soit $f\colon X \to X$ un morphisme et soit $\varepsilon\colon f^*L \simeq L^w$ un isomorphisme de fibrés en droites. Il existe une unique métrique continue sur L qui fait de l'isomorphisme ε une isométrie.*

Si L possède une métrique psh (resp. psh lisse, par exemple si L est ample), alors cette métrique est psh (resp. globalement psh).

Démonstration. — Soit $\|\cdot\|$ une métrique continue sur L. On en déduit une métrique sur f^*L par fonctorialité, puis une métrique sur L^w au moyen de ε, et enfin une métrique sur L. La métrique $\|\cdot\|'$ ainsi définie est l'unique métrique continue sur L qui fait de l'isomorphisme ε une isométrie si l'on munit le membre de gauche de la métrique $f^*(L, \|\cdot\|)$ et le membre de droite de la métrique $(L, \|\cdot\|')^w$. L'ensemble $M(L)$ des métriques continues sur L est un espace affine dont l'espace de translations est l'espace de Banach $\mathscr{C}(X, \mathbf{R})$. Cela munit $M(L)$ d'une structure canonique d'espace métrique complet. En outre, l'application $\|\cdot\| \mapsto \|\cdot\|'$ est $(1/w)$-lipschitzienne. Elle a donc un unique point fixe $\|\cdot\|_0$.

D'après Picard, ce point fixe est la limite des métriques définies par l'itération de l'application $\|\cdot\| \mapsto \|\cdot\|'$ à partir de n'importe quelle métrique. Si nous partons d'une métrique psh (resp. psh lisse), toutes les métriques en jeu sont psh (resp. psh lisses) et convergent uniformément vers la métrique $\|\cdot\|_0$, laquelle est donc psh (resp. globalement psh). □

19.1.2. — Soit A une k-variété abéloïde, c'est-à-dire un espace k-analytique en groupes qui est propre, connexe et lisse ; par exemple, l'analytifiée d'une k-variété abélienne.

Soit L un fibré en droites sur A. Pour toute partie I de A^3, soit $q_I\colon A^3 \to A$ l'homomorphisme donné par la somme des coordonnées d'indices dans I. Le théorème du cube

affirme que le fibré en droites $\mathscr{D}_3(L)$ sur A^3 défini par

$$\mathscr{D}_3(L) = \bigotimes_{I\subset\{1,2,3\}} (q_I)^* L^{\otimes(-1)^{\mathrm{Card}(I)+1}}$$

est trivial. Plus précisément, ce fibré possède une trivialisation canonique τ_L ; elle satisfait à certaines relations de symétrie et de cocycle pour lesquelles nous renvoyons à **[37, 105]** dans le cas des variétés abéliennes et à **[98]** pour le cas des variétés abéloïdes générales. En particulier, la formation de $\mathscr{D}_3(L)$ et de sa trivialisation canonique commute à l'image réciproque par un morphisme de variétés abéloïdes, au produit tensoriel de fibrés en droites et au dual. De plus, la restriction de τ_L à $A\times A\times\{0\}$ coïncide avec la trivialisation évidente de la restriction de $\mathscr{D}_3(L)$ à ce sous-espace.

On définit de manière analogue le fibré en droites $\mathscr{D}_2(L)$ sur A^2 :

$$\mathscr{D}_2(L) = q_{12}^* L \otimes q_1^* L^{-1} \otimes q_2^* L^{-1} \otimes q_\varnothing^* L.$$

Il est canoniquement rigidifié ; ses restrictions à $A\times\{0\}$ et $\{0\}\times A$ sont canoniquement trivialisées. Il est trivialisable si et seulement si L est invariant par translation : pour tout morphisme $x\colon S\to A$, on a un isomorphisme $L\simeq t_x^* L$ sur $A\times S$.

Toute métrique sur L induit des métriques sur $\mathscr{D}_3(L)$ et $\mathscr{D}_2(L)$.

Définition 19.1.3. — *Nous dirons qu'une métrique continue sur L est* cubiste *si la norme de sa trivialisation canonique pour la métrique induite sur $\mathscr{D}_3(L)$ est identiquement égale à* 1*.*

Lemme 19.1.4. — a) *Soit L et M des fibrés en droites sur A, munis de métriques cubistes ; la métrique produit tensoriel sur $L\otimes M$ est cubiste.*

b) *Soit L un fibré en droite sur A muni d'une métrique cubiste ; la métrique duale sur L^{-1} est cubiste.*

Démonstration. — On un isomorphisme naturel $\mathscr{D}_3(L)\otimes\mathscr{D}_3(M)\simeq\mathscr{D}_3(L\otimes M)$; c'est une isométrie. Comme il applique le produit tensoriel des deux trivialisations canoniques sur la trivialisation canonique, la première assertion s'en déduit.

De même, on a une isométrie naturelle $\mathscr{D}_3(L^{-1})\simeq\mathscr{D}_3(L)^{-1}$, compatible aux trivialisations canoniques, d'où la seconde assertion. □

19.1.5. — Soit L un fibré en droites sur A ; fixons-en une rigidification ε, c'est-à-dire une trivialisation en l'origine de A.

Supposons que $[-1]^*L$ soit isomorphe à L^{-1} et fixons un tel isomorphisme compatible aux rigidifications induites par ε. On déduit du théorème du cube par récurrence, par applications successives de l'isomorphisme τ_L, qu'il existe pour tout entier $n\in\mathbf{Z}$ un unique isomorphisme $[n]^*L\simeq L^n$ qui est compatible aux rigidifications sur $[n]^*L$ et L^n induites par ε. La construction de cet isomorphisme entraîne que c'est une isométrie si L est muni d'une métrique cubiste telle que $\|\varepsilon\|=1$.

Supposons que $[-1]^*L$ soit isomorphe à L et fixons un tel isomorphisme compatible aux rigidifications induites par ε. De même, il existe alors pour tout entier $n\in\mathbf{Z}$ un unique isomorphisme $[n]^*L\simeq L^{n^2}$ qui est compatible aux rigidifications sur $[n]^*L$ et L^{n^2} induites par ε. Si L est muni d'une métrique cubiste telle que $\|\varepsilon\|=1$, cet isomorphisme est une isométrie.

Lemme 19.1.6. — *Soit L un fibré en droites sur une variété abéloïde A.*

a) *Le fibré en droites L possède une métrique cubiste $\|\cdot\|$.*

b) *Une métrique sur L est cubiste si et seulement si elle est de la forme $c\|\cdot\|$, pour un nombre réel strictement positif c.*

c) *Soit n un entier $\geqslant 2$. Supposons que L est symétrique (resp. antisymétrique) et fixons un isomorphisme $[n]^*L \simeq L^{n^w}$, où $w = 2$ (resp. $w = 1$). Une métrique sur L est cubiste si et seulement cet isomorphisme est de norme constante.*

Démonstration. — Comme $L \mapsto \mathscr{D}_3(L)$ est homogène de degré 0, un multiple réel strictement positif d'une métrique cubiste sur L est encore cubiste. Il suffit donc de démontrer que pour toute rigidification ε de L, il existe une unique métrique cubiste sur L telle que $\|\varepsilon\| = 1$.

On commence par traiter le cas où L est ou bien antisymétrique ($[-1]^*L \simeq L^{-1}$) ou bien symétrique ($[-1]^*L \simeq L$) ; posons $w = 1$ dans le premier cas et $w = 2$ dans le second. Il existe alors pour tout $n \geqslant 2$ un unique isomorphisme $[n]^*L \simeq L^{n^w}$ qui est compatible avec les rigidifications induites par ε. D'après le lemme 19.1.1, il existe pour tout $n \geqslant 2$ une unique métrique continue sur L qui rend cet isomorphisme une isométrie. Ces métriques sont deux à deux égales et sont nécessairement égales à la métrique cherchée, si elle existe.

Prouvons que ces métriques sont cubistes. Or, l'isomorphisme $[n]^*L \simeq L^{n^w}$ induit un isomorphisme $[n]^*\mathscr{D}_3(L) \simeq \mathscr{D}_3(L)^{n^w}$. Cet isomorphisme est compatible aux rigidifications données par le théorème du cube. En outre, c'est une isométrie lorsque L est muni de la métrique construite ci-dessus. Par suite, la métrique construite sur L induit la métrique triviale sur le fibré en droites trivialisé $\mathscr{D}_3(L)$.

Cela prouve l'existence d'une métrique cubiste lorsque L est symétrique ou antisymétrique. Dans le cas général, la formule $L^2 \simeq (L \otimes [-1]^*L) \otimes (L \otimes [-1]^*L^{-1})$ exprime L^2 comme produit tensoriel d'un fibré en droites symétrique et d'un fibré en droites antisymétrique, rigidifiés, de sorte que L^2 possède une métrique cubiste telle que $\|\varepsilon^2\| = 1$. Sa « racine carrée » est une métrique cubiste sur L telle que $\|\varepsilon\| = 1$.

Démontrons maintenant l'unicité. Considérons deux métriques cubistes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur L telles que $\|\varepsilon\| = \|\varepsilon\|' = 1$. Leur quotient est une métrique cubiste sur $\mathscr{O}_A$ pour laquelle $\|1\| = 1$; il suffit de prouver que cette métrique quotient est la métrique triviale. On est ainsi ramené au cas $L = \mathscr{O}_A$ et $\varepsilon = 1$.

Posons $M = L \otimes [-1]^*L$. Pour tout entier $n \geqslant 2$, l'isométrie du cube de L fournit une isométrie $[n]^*M \simeq M^{n^2}$ compatible avec la rigidification ε. D'après le lemme 19.1.1, la métrique de M est triviale.

Posons maintenant $M' = L \otimes [-1]^*L^{-1}$. De même, l'isométrie du cube de L fournit une isométrie $[n]^*M' \simeq (M')^n$, compatible avec la rigidification ε, de sorte que la métrique de M' est elle-aussi triviale.

Comme $L^2 = M \otimes M'$, la métrique de L est triviale, ce qu'il fallait démontrer.

La dernière assertion résulte de la construction des métriques cubistes. □

Lemme 19.1.7. — *Si L est invariant par translation, alors la norme de toute trivialisation de $\mathscr{D}_2(L)$ est constante lorsque ce fibré en droites est muni de sa métrique induite par une métrique cubiste sur L.*

Démonstration. — Posons $M = \mathscr{D}_2(L)$. Pour tout espace analytique S sur un extension valuée complète de k et tout triplet (x, y, z) de k-morphismes de S dans A, la trivialisation $(x, y, z)^*\tau_L$ de $(x, y, z)^*\mathscr{D}_3(L)$ fournit des isomorphismes

$$(x, y + z)^*M \simeq (x, y)^*M \otimes (x, z)^*M$$

et

$$(x+y,z)^*M \simeq (x,z)^*M \otimes (y,z)^*M$$

définissant la structure de biextension sur M. Pour qu'une métrique sur L soit cubiste, il faut et il suffit que l'un ou l'autre de ces isomorphismes soit une isométrie, lorsque M est muni de la métrique induite par celle de L.

Supposons M trivialisable et soit s l'unique section inversible de M compatible avec sa rigidification canonique. Posons $f = \log(\|s\|)$; c'est une fonction continue sur $A \times A$, elle est en particulier bornée. Par sa définition, le fibré M est canoniquement trivialisé sur $A \times \{0\}$ et $\{0\} \times A$; la section s s'y identifie alors à la section 1.

Considérons le cas particulier où S est l'espace A^3 et x, y, z sont égales aux trois projections de A^3 dans A. Alors $(x, y+z)^*s \otimes ((x,y)^*s \otimes (x,z)^*s)^{-1}$ est une section du fibré $\mathscr{D}_3(L)$ qui se restreint en sa trivialisation évidente sur $\{0\} \times A^2$; c'est donc la section τ_L.

Relâchons nos hypothèses sur S, x, y, z. Par définition d'une métrique cubiste et par ce qui précède, on a $f \circ (x, y+z) = f \circ (x,y) + f \circ (x,z)$. On en déduit que $f \circ (x, ny) = nf \circ (x,y)$ pour tout n. Il en résulte $|f \circ (x,y)| \leqslant \frac{1}{n} \sup(|f|)$ pour tout n, d'où $f \circ (x,y) \equiv 0$. Comme ceci est vrai pour tout (S, x, y), il en résulte que f est identiquement nulle. □

Proposition 19.1.8. — *Supposons que A se prolonge en un schéma abélien formel $\mathfrak{A}$ sur k°. Soit L un fibré en droites sur A. Il existe un fibré en droites $\mathfrak{L}$ sur $\mathfrak{A}$ qui prolonge L et une trivialisation de $\mathscr{D}_3(\mathfrak{L})$ qui prolonge celle de $\mathscr{D}_3(L)$. La métrique formelle sur L associée à ce modèle est cubiste.*

Démonstration. — L'existence d'un tel fibré en droites $\mathfrak{L}$ découle du lemme 6.2.4 de [**98**]. (Dans le cas algébrique, voir aussi le corollaire B.2.2.) Le fibré en droites $\mathscr{D}_3(\mathfrak{L})$ sur $\mathscr{A}^3$ est alors un modèle du fibré en droites $\mathscr{D}_3(L)$ sur A^3. Comme ce dernier est trivialisable, le corollaire affirme également que $\mathscr{D}_3(\mathfrak{L})$ est trivialisable. La restriction de $\mathscr{D}_3(\mathfrak{L})$ à $\mathfrak{A}^2 \times \{0\}$ est munie d'une trivialisation évidente qui se prolonge en une unique trivialisation $\tau_{\mathfrak{L}}$ de $\mathscr{D}_3(\mathfrak{L})$. Sa restriction à A^3 est une trivialisation de $\mathscr{D}_3(L)$ qui induit la trivialisation évidente sur $A^2 \times \{0\}$; c'est donc sa trivialisation canonique. Cela entraîne que τ_L est de norme 1, de sorte que la métrique formelle sur L associé au modèle $(\mathfrak{A}, \mathfrak{L})$ est cubiste. □

Remarque 19.1.9. — Plaçons-nous encore sous les hypothèses de la proposition. Notons $\overline{L}$ le fibré en droites L muni de la métrique formelle déduite du prolongement $\mathfrak{L}$. Soit $g = \dim(A)$ et soit $\gamma \in A$ l'unique point dont la réduction est le point générique de $\mathfrak{A}_s$.

a) La mesure $c_1(\overline{L})^g$ est supportée par γ. Lorsque k est algébriquement clos, le théorème 18.4.7 assure que sa masse est $(c_1(\mathfrak{L}_s)^g \cap [\mathfrak{A}_s])$; c'est encore le cas dans le cas général, comme on le voit en appliquant le résultat à l'extension du schéma formel $\mathfrak{A}$ à $\overline{k}^\circ$.

Lorsque A est algébrique, cette masse est également égale à $(c_1(L)^g \cap [A])$ (théorème 18.3.11).

b) Il résulte de l'exemple 18.8.10, *b*), que les trois propriétés de positivité suivantes sont équivalentes :

(i) Le courant $c_1(\overline{L})$ est positif ;
(ii) Le courant $c_1(\overline{L})$ est positif au voisinage de γ ;
(iii) Le fibré en droites $\mathfrak{L}_s$ est numériquement effectif.

L'implication (i)⇒(ii) est évidente ; l'implication (ii)⇒(iii) est expliquée dans l'exemple indiqué, de même que l'implication (iii)⇒(i).

Dans le paragraphe suivant, nous allons exploiter l'uniformisation des variétés abéloïdes pour obtenir une description similaire des métriques cubistes sur les fibrés en droites et des puissances de leurs courants de courbure.

§ 19.2. MÉTRIQUES CUBISTES ET UNIFORMISATION

19.2.1. — Rappelons l'uniformisation des variétés abéloïdes, d'après [**8, 23, 78, 98**] ; nous renvoyons aussi le lecteur à l'appendice B.5.

Soit A une variété abéloïde sur k ; notons g sa dimension. Il existe une variété abéloïde B à bonne réduction potentielle, un tore algébrique T de dimension r, une extension E de B par T, une suite exacte de groupes analytiques

$$0 \to \Lambda^{\mathrm{an}} \to E \xrightarrow{p} A \to 0$$

où Λ est un k-groupe localement isomorphe à $\mathbf{Z}^r$ pour la topologie étale de $\mathrm{Spec}(k)$.

Nous dirons que la situation est déployée si B a bonne réduction et si le tore T est déployé. Dans ce cas, Λ est isomorphe à $\mathbf{Z}^r$, la suite exacte précédente s'interprète comme le revêtement universel de l'espace topologique A^{an} et Λ comme son groupe fondamental.

Nous nous plaçons désormais dans ce cas.

19.2.2. — Notons $q\colon E \to B$ la projection de l'extension E. Son noyau est le tore déployé T, de sorte que cette extension est localement triviale pour la topologie de Berkovich.

L'extension E est construite à partir d'une extension analytique N de B par le tore affinoïde T^1 ; cet espace N est un domaine analytique compact de A, muni d'une structure de sous-groupe formellement analytique compact.

Soit $\mathfrak{V}$ un recouvrement formellement affinoïde de B trivialisant l'extension N ; pour tout $V \in \mathfrak{V}$, soit $f_V\colon V \to N$ une section de la projection $q|_N\colon N \to B^{\mathrm{an}}$. Sur $V \cap W$, les sections f_V et f_W diffèrent de la multiplication par un morphisme $f_{VW}\colon V \cap W \to T^1$. Ces morphismes (f_{VW}) forment un cocycle à valeurs dans T^1 qui représente l'extension N, mais également, si on les considère comme un cocycle à valeurs dans T, l'extension E.

Pour $V \in \mathfrak{V}$, la section f_V permet d'identifier $q^{-1}(V)$ au produit $V \times T$; composons la projection sur le second facteur avec l'application de tropicalisation de T vers T_{trop} ; on obtient une application φ_V de $q^{-1}(V)$ dans T_{trop} qui est lisse et PL : lorsqu'on identifie T à $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^r$ et T_{trop} à $\mathbf{R}^r$, chaque coordonnée est le logarithme de la valeur absolue d'une fonction holomorphe inversible (un caractère du tore).

Comme le cocycle (f_{VW}) est à valeurs dans T^1, ces applications φ_V se recollent en une application G-lisse, PL, de E dans T_{trop}. Notons-la τ.

La restriction de τ au tore T est l'application de tropicalisation usuelle de T sur T_{trop}. Comme $\tau|_T$ est propre et que B est compacte, l'application $\tau\colon E \to T_{\mathrm{trop}}$ est surjective et propre.

Si $E = B$, le tore T est de dimension 0 et τ est l'application constante.

L'image du réseau Λ par τ est un réseau cocompact de T_{trop} (théorème 1.2 de [**24**]). Par suite, τ induit une application surjective, PL, de A dans le tore réel $T_{\mathrm{trop}}/\tau(\Lambda)$.

Notons β le point de Gauss de B. Dans [**8**, §6.5], Berkovich construit une rétraction par déformation de E sur le squelette du tore $T_{\mathscr{H}(\beta)}$ qui s'identifie à T_{trop} via τ ; nous le noterons $S(E)$. L'action de Λ par translation fixe le point β et stabilise ce squelette. Par passage au quotient, cela induit une rétraction par déformation de A sur le sous-espace $S(A) = S(E)/\Lambda$ qu'il appelle le squelette de A ; par l'application τ, ce squelette s'identifie au tore réel $T_{\mathrm{trop}}/\tau(\Lambda)$. Pour toute extension valuée K de k, la rétraction de A sur $S(A)$ induit un morphisme de groupes de $A(K)$ sur $S(A)$.

Remarque 19.2.3. — Supposons que T soit le tore $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$. La variété abéloïde B a bonne réduction, prolongeons-la en un schéma formel abélien $\mathfrak{B}$ sur k°. L'extension formelle N de B par $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^1$ correspond à un fibré en droites $\mathfrak{Q}$, algébriquement équivalent à zéro, sur le schéma formel abélien $\mathfrak{B}$. Notons Q le fibré en droites sur B qui correspond à $\mathfrak{Q}$ par passage à la fibre générique. L'extension E est un ouvert de l'espace total du fibré Q et la métrique formelle de Q déduite de $\mathfrak{Q}$, considérée comme fonction sur l'espace total de ce fibré est la fonction τ.

Le fibré résiduel $\mathfrak{Q}_s$ sur $\mathscr{B}_s$ est numériquement trivial, car algébriquement équivalent à zéro. D'après le théorème 18.8.4, le courant $c_1(\overline{Q})$ est donc nul. Cela entraîne que le courant $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\tau$ est nul : *la fonction τ est harmonique.*

Pour que la fonction τ soit lisse, il est nécessaire et suffisant que la métrique formelle induite par $\mathfrak{Q}$ soit lisse. D'après la proposition 17.4.13, cela signifie que $\mathfrak{Q}$ est de torsion sur toute sous-variété intègre de $\mathscr{B}_s$. Ainsi, τ est lisse si et seulement $\mathfrak{Q}_s$ est de torsion.

Si le corps résiduel de k est algébrique sur un corps fini, cette dernière propriété est automatique, mais ce n'est pas le cas en général.

Lorsque T est un tore de dimension arbitraire, on peut l'identifier à $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^r$, de sorte que τ s'identifie à une famille $(\tau_1, \dots, \tau_r)$ de fonctions numériques sur E. Ces fonctions sont G-lisses, harmoniques ; pour qu'elles soient toutes lisses, il faut et il suffit l'extension résiduelle de $\mathscr{B}_s$ par $T_{\tilde{k}}$ soit isotriviale.

19.2.4. — Soit L un fibré en droites sur A. Choisissons-en une trivialisation ℓ en l'origine de A et munissons alors L de l'unique métrique cubiste pour laquelle $\|\ell\| = 1$.

Le fibré en droites p^*L sur E provient de B : il existe un fibré en droites M sur B et un isomorphisme $\varepsilon\colon p^*L \simeq q^*M$. Au-dessus de l'élément neutre de E, le fibré p^*L possède la trivialisation $p^*\ell$, et le fibré q^*M possède possède une trivialisation déduite de la structure formelle de M, unique à unité près ; on normalise ε de sorte qu'il applique l'une sur l'autre.

Le choix d'un tel isomorphisme ε munit q^*M d'une donnée de descente de E à A, c'est-à-dire ici d'une famille d'isomorphismes $c = (c_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, où, pour $\lambda \in \Lambda$, c_λ est un isomorphisme $q^*M \to t_\lambda^* q^*M$ de fibrés en droites sur E (t_λ désigne la translation par λ dans E), satisfaisant en outre à la condition de cocycle

$$c_{\lambda+\lambda'} = t_{\lambda'}^* c_\lambda \circ c_{\lambda'}.$$

Pour aller plus loin, nous reprenons les notations de l'appendice (A.7.15-17). En particulier, on note q_L la forme quadratique sur T_{trop} associée au fibré en droites L.

On veut comparer la métrique de q^*M déduite de la métrique formelle de M et la métrique cubiste de p^*L au travers de l'isomorphisme qui identifie ces fibrés.

Remarquons que l'application de tropicalisation τ s'exprime en termes de ces métriques formelles par la formule

$$\langle \tau(t), \lambda' \rangle = \log \|s_{\lambda'}\|(t),$$

pour $t \in E$.

Proposition 19.2.5. — *Fixons (ε, M, c) comme ci-dessus. Il existe une unique fonction f sur T_{trop}, à valeurs réelles telle que l'on ait*

$$\log\|s\|^{-1} - \log\|\varepsilon(s)\|^{-1} = f \circ \tau$$

pour toute section inversible locale s de p^*L. Cette fonction est quadratique et sa composante homogène de degré 2 est égale à $\frac{1}{2}q_L$.

Démonstration. — Pour tout $\lambda \in \Lambda$, nous allons étudier comment l'isomorphisme c_λ modifie les métriques sur q^*M et $t_\lambda^* q^*M$ déduites de la métrique formelle de M. Au-dessus d'un point t de E, on a

$$\log\|c_\lambda\| = \log\|r(\lambda) \otimes r(0)^{-1}\| + \log\|s_{u(\lambda)}\|(t) = \log\|r(\lambda) \otimes r(0)^{-1}\| + \langle \tau(t), u(\lambda)\rangle$$

On déduit de la formule

$$r(\lambda+\mu) \otimes r(\lambda)^{-1} \otimes r(\mu)^{-1} \otimes r(0) = \langle \lambda, u(\mu)\rangle$$

que la fonction $\lambda \mapsto \log\|r(\lambda)\|$ est quadratique sur Λ, et que sa composante homogène de degré 2 est donnée par $\lambda \mapsto \frac{1}{2}\log\|\langle \lambda, u(\lambda)\|$. Il existe une unique fonction quadratique f sur T_{trop} telle que

$$\log\|r(\lambda)\| = f \circ \tau(\lambda)$$

pour tout $\lambda \in \Lambda$.

Munissons q^*M de la métrique $\|\cdot\|_f$ obtenue en multipliant la métrique formelle par la fonction $e^{-f\circ\tau}$. Pour cette nouvelle métrique, la donnée de descente a pour norme

$$\begin{aligned}\log\|c_\lambda\|_f &= \log\|r(\lambda)\| - \log\|r(0)\| + \langle \tau(t), u(\lambda)\rangle + f(\tau(t)) - f(\tau(t+\lambda)) \\ &= -f\circ\tau(t+\lambda) + f\circ\tau(t) + f\circ\tau(\lambda) - f\circ\tau(0) + \langle \tau(t), u(\lambda)\rangle.\end{aligned}$$

C'est une expression linéaire en t et en λ. Pour vérifier qu'elle est nulle, il suffit de prouver qu'elle s'annule lorsque $t \in \Lambda$. Soit donc $\mu \in \Lambda$. Par construction de f, on a

$$f\circ\tau(\mu+\lambda) - f\circ\tau(\mu) - f\circ\tau(\lambda) + f\circ\tau(0) = \log\|\langle \lambda, u(\mu)\rangle\| = \log\|s_{u(\lambda)}(\mu)\| = \langle \tau(\mu), u(\lambda)\rangle$$

d'où l'annulation requise.

La métrique formelle sur M est cubiste, donc celle sur q^*M l'est également. Comme $f \circ \tau$ est une fonction quadratique sur E, la métrique modifiée $\|\cdot\|_f$ est encore cubiste.

Compte tenu de l'isomorphisme ε, la métrique modifiée $\|\cdot\|_f$ descend en une métrique sur L, cubiste. C'est donc la métrique cubiste canonique de L, à un scalaire près. (Ce scalaire vaut 1 si M et L sont rigidifiés en l'origine et si ε et r sont supposés respecter ces rigidifications.) Cela démontre qu'il existe une fonction quadratique f sur T_{trop} qui vérifie la première partie de l'énoncé. L'unicité d'une telle fonction résulte de la surjectivité de τ. Enfin, on a vu que la partie homogène de degré 2 de f est égale à $\lambda \mapsto \frac{1}{2}\|\langle \lambda, u(\lambda)\rangle\|$ sur Λ ; elle y coïncide donc avec $\frac{1}{2}q_L \circ \tau$, ce qui conclut la démonstration. □

Corollaire 19.2.6. — a) *La métrique cubiste de $\overline{L}$ est d-psh.*

b) *On a $c_1(p^*\overline{L}) = c_1(q^*\overline{M}) + \tau^*(\mathrm{d}'\,\mathrm{d}''\,\frac{1}{2}q_L)$.*

c) *Le courant de courbure $c_1(\overline{L})$ est invariant par translation sur A ; il est nul si L est invariant par translation.*

Démonstration. — a) La relation entre la métrique cubiste de p^*L et la métrique formelle de q^*M donnée par la proposition 19.2.5 prouve que la métrique de $p^*\overline{L}$ est d-psh : c'est la somme d'une métrique formelle et d'une métrique G-lisse.

b) De cette relation découle l'égalité de courants

$$c_1(p^*\overline{L}) = c_1(q^*\overline{M}) + \mathrm{d}'\mathrm{d}''[f \circ \tau].$$

Comme τ est harmonique, on a

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''[f \circ \tau] = \mathrm{d}'\mathrm{d}''[\tau^* f] = \tau^*[\mathrm{d}'\mathrm{d}''(f)],$$

en vertu du corollaire 7.8.8. Comme f est quadratique et que sa composante homogène de degré 2 est égale à $\frac{1}{2}q_L$, on a aussi $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, f = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\, q_L$ sur T_{trop}, si bien que

$$c_1(p^*\overline{L}) = c_1(q^*\overline{M}) + \tau^*\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''(\frac{1}{2}q_L).$$

c) Notons $t_a\colon A \to A$ la translation par un point $a \in A(k)$. Nous devons démontrer que $c_1(t_a^*\overline{L}) = c_1(\overline{L})$. Le fibré en droites sous-jacent à $t_a^*\overline{L} \otimes \overline{L}^{-1}$ est $N = t_a^*L \otimes L^{-1}$ et sa métrique est cubiste. On a donc $c_1(t_a^*\overline{L}) = c_1(\overline{L}) + c_1(\overline{N})$. Comme N est algébriquement équivalent à 0, il suffit de démontrer que l'on a $c_1(\overline{L}) = 0$ si L est algébriquement équivalent à 0.

Dans ce cas, la proposition B.6.7 entraîne que $q_L = 0$, d'où $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(q_L) = 0$. Par la même proposition, le fibré formel $\mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{B}$ est invariant par translation, si bien que le fibré en droites $\mathfrak{M}_s$ sur la variété abélienne $\mathfrak{B}_s$ est algébriquement équivalent à 0, et donc numériquement trivial. D'après le corollaire 18.8.8 (appliqué à $\overline{M}$ et son dual), on a $c_1(\overline{M}) = 0$.

Cela prouve que $c_1(\overline{L}) = 0$. □

Remarque 19.2.7. — Comme la forme $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(\frac{1}{2}q_L)$ est invariante par translations sur T_{trop} et comme τ est équivariant pour l'action de Λ, la forme $\tau^*(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\frac{1}{2}q_L)$ est invariante par translations par Λ, de sorte qu'il existe une unique G-forme ω_L sur A telle que $p^*\omega_L = \tau^*(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\frac{1}{2}q_L)$.

Corollaire 19.2.8. — a) *La mesure $c_1(p^*\overline{L})^g$ est une mesure de Haar sur $S(E)$.*

b) *La mesure $c_1(\overline{L})^g$ est l'unique mesure de Haar sur $S(A)$ de masse totale* $\deg_L(A)$.

Démonstration. — a) La formule précédente écrit le courant $c_1(p^*\overline{L})$ comme la somme du courant paralinéaire $c_1(q^*\overline{M})$ et d'un courant associé à une G-forme G-lisse de type $(1,1)$ localement harmoniquement tropicalisable, tous déduits par $\mathrm{d}'\mathrm{d}''$ de métriques d-psh.

Comme le produit de courants à la Bedford–Taylor est multilinéaire, il en résulte l'égalité

$$c_1(p^*\overline{L})^g = \big(c_1(q^*\overline{M}) + \tau^*\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''(\frac{1}{2}q_L)\big)^g = \sum_{d=0}^{g} \binom{g}{d} c_1(q^*\overline{M})^{g-d} \wedge (\tau^*\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''(\frac{1}{2}q_L))^d.$$

Dans cette formule, les produits sont pris au sens de la théorie de Bedford–Taylor. Le corollaire 8.11.2 affirme qu'elle reste valable lorsque, pour tout d, on interprète le terme d'indice d du second membre comme le produit du courant paralinéaire fermé (différence de courants de Bedford–Taylor) $c_1(q^*\overline{M})^{g-d}$ et de la G-forme (localement harmoniquement tropicalisable) $\tau^*(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\frac{1}{2}q_L)^d$.

Le terme d'indice d du membre de droite est nul dès que $g - d > r$, la dimension de l'image de τ. Posons $b = \dim(B)$; ce terme est nul si $d > b$ car $q^*\overline{M}$ est de dimension de définition $\leqslant b$ en tout point. Ainsi, seul le terme d'indice b persiste et l'on obtient

$$c_1(p^*\overline{L})^g = \binom{g}{r} c_1(q^*\overline{M})^b \wedge (\tau^*\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''(\frac{1}{2}q_L))^r.$$

Soit u une fonction lisse à support compact sur E. On a donc

$$\begin{aligned}\langle c_1(p^*\overline{L})^g, u\rangle &= \binom{g}{r}\langle c_1(q^*\overline{M})^b \wedge (\tau^*\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''(\frac{1}{2}q_L))^r, u\rangle \\ &= \binom{g}{r}\langle c_1(q^*\overline{M})^b, u(\tau^*\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''(\frac{1}{2}q_L))^r\rangle.\end{aligned}$$

D'après la proposition 18.6.1, le courant $c_1(q^*\overline{M})^b$ est un multiple $c\delta_{q^{-1}(\beta)}$ du courant d'intégration sur la fibre $q^-1(\beta)$. En effet, comme la fibre spéciale de B est irréductible et de dimension b, seul son point générique β peut intervenir. Ainsi,

$$\langle c_1(p^*\overline{L})^g, u\rangle = c\binom{g}{r}\int_{q^{-1}(\beta)} u(\tau^*\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''(\frac{1}{2}q_L))^r = c\binom{g}{r}\int_{q^{-1}(\beta)} u\tau^*\omega,$$

où l'on a posé $\omega = \mathrm{d}'\mathrm{d}''(\frac{1}{2}q_L)^r$. Comme q_L est quadratique, ω est une (r,r)-forme invariante par translations sur T_{trop}. Ainsi, $\Sigma_\tau = S(E)$ est un support fort de la G-forme $u\tau^*\omega$, de sorte que

$$\langle c_1(p^*\overline{L})^g, u\rangle = c\binom{g}{r}\int_{S(E)}\langle u\tau^*\omega, \mu_E\rangle,$$

où μ_E est le calibrage canonique de $S(E)$.

On peut identifier la fibre $q^{-1}(\beta)$ avec $T_{\mathscr{H}(\beta)}$ de sorte que la fonction τ s'identifie à l'application de tropicalisation de $T_{\mathscr{H}(\beta)}$ sur T_{trop}, et $S(E)$ s'identifie à T_{trop} muni de son calibrage canonique. La contraction $\langle\tau^*\omega, \mu_E\rangle$ s'identifie à une r-forme invariante par translations α sur $S(E)$ et

$$\langle c_1(p^*\overline{L})^g, u\rangle = c\binom{g}{r}\int_{S(E)} u(x)\alpha(x).$$

Ainsi, $c_1(p^*\overline{L})^g$ est une mesure de Haar sur $S(E)$, comme annoncé.

b) Comme p est une application de revêtement, on peut tirer en arrière tout courant T sur A et en déduire un courant p^*T sur E. La construction de $c_1(\overline{L})^g$ entraîne que $p^*c_1(\overline{L})^g = c_1(p^*\overline{L})^g$. D'après b), ce courant $p^*c_1(\overline{L})^g$ est une mesure de Haar ν sur $S(E)$. L'application p fait de $S(E)$ un revêtement de $S(A)$ (c'est même son revêtement universel) ; considérons la mesure de Haar μ sur $S(A)$ telle que $p^*\mu = \nu$. Les courants $p^*c_1(\overline{L})^g$ et $p^*[\mu]$ sont égaux ; il en résulte que les courants $c_1(\overline{L})^g$ et $[\mu]$ sont égaux. D'autre part, on sait que la masse totale du courant $c_1(\overline{L})^g$ est égale à $\deg_L(A)$ (théorème 18.3.11). Le lemme en résulte. □

Corollaire 19.2.9. — *Soit U un ouvert de A, soit X un sous-espace analytique irréductible fermé de U, soit d la dimension de X. Pour tout $j \in \mathbf{N}$, le courant $c_1(q^*\overline{M}|_{p^{-1}(X)})^j$ sur $p^{-1}(X)$ descend en un courant paralinéaire S_j sur X, de bidimension $(d-j, d-j)$.*

Soit ω_L l'unique G-forme sur A telle que $p^*(\omega_L) = \tau^*(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,\frac{1}{2}q_L)$ (remarque 19.2.7).

a) *Pour tout entier* $e \in \{0, \dots, d\}$, *on a*

$$c_1(\overline{L}|_X)^e = \sum_{j=0}^{e} \binom{e}{j} S_{e-j} \wedge \omega_L^j.$$

De plus, on a $S_j = 0$ *si* $j > b$ *ou si* $j > d$, *et* $\omega_L^j = 0$ *si* $j > r$, *si bien que la somme précédente peut être restreinte aux entiers* j *tels que* $e - j \leqslant \inf(b, d)$ *et* $j \leqslant r$, *c'est-à-dire* $\sup(e - b, 0) \leqslant j \leqslant \inf(r, e)$.

b) *Il existe une suite* $(P_0, \dots, P_d)$ *de sous-espaces paralinéaires calibrés de* X, *où* P_j *est de dimension* j, *telle que l'on ait*

$$\langle c_1(\overline{L}|_X)^d, f\rangle = \sum_{j=0}^{d} \int_{P_j} f\omega_L|_{P_j}^j$$

pour toute fonction f *mesurable localement bornée sur* X.

Démonstration. — Rappelons les notations $b = \dim(B)$ et $r = \dim(T)$, de sorte que $g = b + r$. Posons $Y = p^{-1}(X)$ et considérons l'égalité de courants

$$c_1(p^*\overline{L}|_X) = c_1(q^*\overline{M}|_Y) + \mathrm{d}'\mathrm{d}''(\tau^*(\frac{1}{2}q_L)|_Y)$$

sur Y. Prenons-en la puissance e-ième au sens de Bedford–Taylor ; on obtient

$$c_1(p^*\overline{L}|_X)^e = \sum_{j=0}^{d} \binom{e}{j} c_1(q^*\overline{M}|_Y)^{e-j}\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''(\tau^*(\frac{1}{2}q_L)|_Y)^j$$

Pour tout entier i, la puissance $c_1(q^*\overline{M}|_Y)^i$ est un courant paralinéaire sur Y, de bidimension $(d - i, d - i)$; il est différence de courants de Bedford–Taylor et est nul si $i > b$ car sa dimension de définition est $\leqslant b$. La (1,1)-forme $\widetilde{\omega}_L = \tau^*(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\frac{1}{2}q_L)$ sur E est localement harmoniquement tropicalisable ; il en est donc de même de sa restriction à Y. Le corollaire 8.11.2 entraîne donc que le produit au sens de Bedford–Taylor de $c_1(q^*\overline{M}|_Y)^{e-j}$ par $\widetilde{\omega}_L|_Y^j$ coïncide avec son produit naïf par cette G-forme. Cela donne

$$c_1(p^*\overline{L}|_X)^e = \sum_{j=0}^{e} \binom{e}{j} c_1(q^*\overline{M}|_Y)^{e-j} \wedge \widetilde{\omega}_L|_Y^j$$

Enfin, $\widetilde{\omega}_L^j = 0$ si $j > r$ puisque $\widetilde{\omega}_L$ provient d'une $(1,1)$-forme sur T_{trop} par τ.

On a vu que $\widetilde{\omega}_L$ descend à A en la G-forme ω_L, si bien que $\widetilde{\omega}_L|_Y^j$ descend à X en la G-forme $\omega_L^j|_X$. Les courants $c_1(p^*\overline{L}|_X)$ descend à X, par construction. Par suite, le courant $c_1(q^*\overline{M}|_Y)$ descend à X, et chaque $c_1(q^*\overline{M}|_Y)^i$ descend en un courant S_i sur X. On a alors

$$c_1(\overline{L}|_X)^e = \sum_{j=0}^{e} \binom{e}{j} S_{e-j} \wedge \omega_L|_X^j.$$

On a vu que $S_{e-j} = 0$ si $e - j > b$, et que $\omega_L|_X^j = 0$ si $j > r$; par suite, il suffit de conserver ces courants S_j pour j dans l'intervalle $[\sup(e - b, 0), \inf(r, e)]$. Cela conclut la démonstration de la première partie du corollaire.

La seconde assertion est une égalité de mesures ; il suffit de la prouver pour une fonction f qui est lisse. En appliquant la proposition 7.6.9 aux courants $\binom{d}{j} S_{d-j}$ et aux

G-formes $f\omega_L^j$, on obtient des polyèdres calibrés P_j, où P_j est de dimension j, tels que $\langle \binom{d}{j} S_{d-j}, f\omega_L^j \rangle = \int_{P_j} f\omega_L|_{P_j}^j$ pour tout j, d'où la proposition. □

§ 19.3. POSITIVITÉ DES MÉTRIQUES CANONIQUES

Soit A une k-variété abéloïde.

Proposition 19.3.1. — *Supposons que la valeur absolue de k n'est pas triviale. Soit L un fibré en droites sur A. Reprenons les notations E, p, q, B, M et q_L introduites ci-dessus. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *La métrique cubiste de L est psh ;*

(ii) *On a $c_1(\overline{L}) \geqslant 0$;*

(iii) *La forme quadratique de q_L est positive et le fibré en droites résiduel $\mathfrak{M}_s$ sur la $\tilde{k}$-variété abélienne $\mathfrak{B}_s$ est numériquement effectif.*

Lorsque A est algébrique, elles sont équivalentes à la condition :

(iv) *Le fibré en droites L est nef.*

Démonstration. — L'implication (i)⇒(ii) est standard.

Démontrons l'implication (iii)⇒(i). Soit $y \in E$; comme le fibré résiduel de $q^*\overline{M}$ en y s'identifie au fibré résiduel de $\overline{M}$ en $q(y)$, il est numériquement effectif. D'après le corollaire 18.8.8, le fibré métrisé $q^*\overline{M}$ est psh. La fonction τ est harmonique et strictement PL ; la fonction q_L est convexe sur $\mathbf{R}^n$ puisque c'est la somme d'une forme quadratique positive et d'une forme affine. D'après le corollaire 18.8.9, la fonction $\tau^* q_L$ est psh sur E. Puisque le fibré métrisé $p^*\overline{L}$ s'identifie au produit de $q^*\overline{M}$ et du fibré trivial muni de la métrique donné par la fonction $\tau^* q_L$, il est psh. Comme p a localement des sections, le fibré métrisé $\overline{L}$ est également psh.

Il reste à démontrer l'implication (ii)⇒(iii). Prouvons d'abord que la partie quadratique de q_L est positive. Soit b un point rigide de B ; le fibré résiduel $\overline{M}(b)$ est trivial, donc il existe un voisinage ouvert U de b dans B sur lequel le fibré métrisé $\overline{M}$ est trivial. L'extension E est G-localement trivialisable ; puisque b est un point rigide, on peut également supposer qu'elle est trivialisable au-dessus de U. Il existe alors un isomorphisme $q^{-1}(U) \simeq U \times \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^r$ qui identifie τ à la tropicalisation du moment fourni par la seconde projection.

Sur $q^{-1}(U)$, on a donc $c_1(p^*\overline{L}) = \tau^*(\frac{1}{2}\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,q_L)$. Puisque $c_1(\overline{L}) \geqslant 0$, il en est de même de $c_1(p^*\overline{L})$, si bien que $\tau^*(\frac{1}{2}\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,q_L)$ est un courant positif. Comme c'est une forme sur U, cette forme est positive ; comme l'image de $q^{-1}(U)$ par τ est égale à $\mathbf{R}^n$, la $(1,1)$-forme $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,q_L$ sur $\mathbf{R}^n$ est positive, ce qui signifie exactement que la partie quadratique de q_L est positive.

Il reste à démontrer, sous l'hypothèse que $c_1(\overline{L})$ est un courant positif, que le fibré en droite résiduel $\mathfrak{M}_s$ sur $\mathfrak{B}_s$ est numériquement effectif. D'après le corollaire 18.8.8, il suffit de démontrer que le courant $c_1(\overline{M})$ sur B est positif. Soit α une forme lisse positive de type $(n-1, n-1)$ sur B ; démontrons que $\langle c_1(\overline{M}), \alpha \rangle \geqslant 0$.

Soit ω la $(1,1)$-forme standard sur $\mathbf{R}^r$, $\omega = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\|x\|^2 = \sum_{i,j}\mathrm{d}'\,x_i \wedge \mathrm{d}''\,x_j$. Comme ω^r est positive, le courant $c_1(\overline{L}) \wedge \tau^*\omega^r$ est positif. On a

$$c_1(\overline{L}) \wedge \tau^*\omega^r = c_1(q^*\overline{M}) \wedge \tau^*\omega^r + \tau^*(\frac{1}{2}\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\,q_L) \wedge \tau^*\omega^r = c_1(q^*\overline{M}) \wedge \tau^*\omega^r$$

puisque le second terme, une $(r+1,r+1)$-forme issue de $\mathbf{R}^r$, s'annule. Ainsi, le courant $c_1(q^*\overline{M}) \wedge \tau^*\omega^r$ sur E est positif.

Soit u une fonction lisse et positive, à support compact, sur E. La forme $u \cdot q^*\alpha$ est positive sur E. Puisque le courant $c_1(\overline{M}) \wedge \tau^*\omega^r$ est positif, il vient

$$\langle c_1(\overline{M}) \wedge \tau^*\omega^r, u \cdot q^*\alpha\rangle \geqslant 0.$$

On récrit cette inégalité comme l'intégrale de la G-forme $u \cdot \tau^*\omega^r \wedge q^*\alpha$ contre le courant paralinéaire $c_1(\overline{M})$:

$$\langle c_1(\overline{M}), u \cdot \tau^*\omega^r \wedge q^*\alpha\rangle \geqslant 0,$$

et on applique la formule de projection du théorème 16.5.7. Il vient donc

$$\langle c_1(\overline{M}), v\alpha\rangle \geqslant 0,$$

où $v\colon B \to \mathbf{R}$ est définie par

$$v(b) = \int_{E_b} u\tau^*\omega^r,$$

puisque toutes les fibres de q sont de dimension r.

Par approximation uniforme, cette inégalité vaut pour toute fonction continue positive u sur E. Considérons en particulier une fonction u de la forme $u_0 \circ \tau$, où u_0 est une fonction lisse à support compact sur $\mathbf{R}^r$. Alors,

$$v(b) = \int_{E_b} \tau^*u_0\tau^*\omega^r = \int_{\mathbf{R}^r} u_0\omega^r,$$

est indépendant de b, et est strictement positif si $u_0 \neq 0$. Cela prouve que $\langle c_1(\overline{M}), \alpha\rangle \geqslant 0$ et conclut la démonstration de l'équivalence des propriétés (i), (ii) et (iii).

Supposons maintenant que A est algébrique et démontrons qu'elles équivalent au caractère nef de L.

Supposons que L est nef et démontrons que $c_1(\overline{L}) \geqslant 0$. Écrivons $L^{\otimes 2} = (L \otimes [-1]^*L) \otimes (L \otimes [-1]^*L^{-1})$ comme le produit de deux fibrés en droites L_+ et L_-, où L_+ est symétrique et L_- est antisymétrique. En particulier, L_- est algébriquement équivalent à 0, de sorte que $c_1(\overline{L}_-) = 0$. Soit N un fibré en droites ample et symétrique sur A. Pour tout entier naturel t, le fibré en droites $L_+^{\otimes t} \otimes N$ sur A est alors ample, en vertu du critère de Nakai–Moishezon. Il possède en particulier des métriques psh ; comme il est symétrique, ses métriques cubistes sont obtenues par le procédé du lemme 19.1.1 et sont par conséquent psh. Ainsi, $tc_1(\overline{L}_+) + c_1(\overline{N}) \geqslant 0$. En divisant par t et en faisant tendre t vers $+\infty$, on obtient que $c_1(\overline{L}_+) \geqslant 0$. Par suite, $c_1(\overline{L}) \geqslant 0$. Cela prouve l'implication (iv)⇒(ii) lorsque A est algébrique.

Enfin, supposons $\overline{L}$ psh et démontrons que L est nef. Soit C une courbe irréductible dans A. D'après le théorème 18.3.11, on a $c_1(L) \cap [C] = \int_{C^{\mathrm{an}}} c_1(\overline{L}|_{C^{\mathrm{an}}})$. Par ailleurs, $\overline{L}|_{C^{\mathrm{an}}}$ est psh, de sorte que $c_1(\overline{L}|_{C^{\mathrm{an}}}) \geqslant 0$. Par suite, $c_1(L) \cap [C] \geqslant 0$. □

Corollaire 19.3.2. — *Supposons que la valeur absolue de k n'est pas triviale. Soit L un fibré en droites sur A. Reprenons les notations E, p, q, B, M et q_L introduites ci-dessus. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Le fibré en droites L est invariant par translation ;*

(ii) *On a $c_1(\overline{L}) = 0$;*

(iii) *On a $q_L = 0$ et le fibré en droites résiduel $\mathfrak{M}_s$ sur la $\tilde{k}$-variété abélienne $\mathfrak{B}_s$ est numériquement trivial.*

Lorsque A est algébrique, elles sont équivalentes à la condition :

(iv) *Le fibré en droites L est numériquement trivial.*

Démonstration. — Appliquée à L et L^{-1}, la proposition précédente entraîne l'équivalence de (ii), (iii), ainsi que (iv) lorsque A est algébrique. Par ailleurs, il résulte de la proposition B.6.7 que les assertions (i) et (iii) sont équivalentes. □

Remarque 19.3.3. — Supposons que la valuation de k est triviale. Dans ce cas, la transposition de la proposition 19.3.1 et de son corollaire se heurte à une bonne théorie des modèles formels d'espaces k-analytiques propres. Il ne semble par exemple pas connu, bien que plausible, que toute variété abéloïde sur un corps trivialement valué soit abélienne, et on se demande bien, si elle ne l'était pas, ce que serait la fibre spéciale d'un éventuel modèle formel.

Cependant, si on se restreint aux variétés abéliennes, les propriétés (i), (ii) et (iv) de la proposition 19.3.1 restent équivalentes. Rappelons en effet (remarque 17.7.11) que si A est une variété abélienne et L un fibré en droites sur A, alors (A, L) est essentiellement un modèle formel de $(A^{\mathrm{an}}, L^{\mathrm{an}})$, si bien que L^{an} possède une métrique formelle naturelle. Cette métrique est cubiste, par le théorème du cube pour L. L'équivalence des propriétés (i), (ii), (iv) de la proposition 19.3.1 pour $(A^{\mathrm{an}}, L^{\mathrm{an}})$ est alors conséquence du corollaire 18.8.8.

On en déduit également, toujours lorsque A est une variété abélienne, que les assertions (i), (ii) et (iv) du corollaire 19.3.2 pour $(A^{\mathrm{an}}, L^{\mathrm{an}})$ sont équivalentes.

Remarque 19.3.4. — Reprenons les notations du corollaire 19.2.9. Le calcul de la mesure $c_1(\overline{L}|X)^d$ fait a priori intervenir des sous-espaces calibrés P_j de toutes dimensions j telles que $\sup(d-b, 0) \leqslant j \leqslant \inf(r, d)$.

a) La G-forme $\omega_L|_{P_j}$ se déduit de $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(\frac{1}{2}q_L)$ par l'application linéaire par morceaux $\tau|_{P_j}$. C'est donc G-localement une (1,1)-forme constante sur P_j. Par suite, la mesure $\mu_j(L)$ sur P_j déduite de ω_L^j est G-localement multiple constant d'une mesure de Lebesgue sur P_j.

Le support de cette mesure $\mu_j(L)$ est en particulier un sous-espace polyédral de P_j, purement de dimension j, sur lequel τ est une immersion par morceaux.

b) Démontrons que si L et L' sont amples, alors le support de $\mu_j(L)$ coïncide, pour tout j, avec celui de $\mu_j(L')$. (Cette remarque n'a bien sûr d'intérêt que si A est algébrique...)

Il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $L^p \otimes (L')^{-1}$ est ample. D'après la proposition 19.3.1, on a $pc_1(\overline{L}|_X) \geqslant c_1(\overline{L'}|_X)$, ces deux courants étant positifs. On en déduit que la mesure $c_1(\overline{L}|_X)^d$ domine un multiple de la mesure $c_1(\overline{L'}|_X)^d$, et inversement par symétrie. La description polyédrale de ces deux mesures, comme sommes des mesures $\mu_j(L)$ (resp. $\mu_j(L')$) portée par des sous-espaces paralinéaires de dimensions distinctes, dont deux à deux orthogonales, entraîne l'égalité des supports.

c) Dans [**78**], Gubler construit un exemple où les supports des mesures $\mu_j(L)$ ne sont vides pour aucune valeur de j telle que $\sup(d-b, 0) \leqslant j \leqslant \inf(r, d)$.

APPENDICES

APPENDICE A

COMPLÉMENTS D'ANALYSE ET DE TOPOLOGIE

§ A.1. PARACOMPACITÉ

Commençons par rappeler quelques de définition de topologie générale.

A.1.1. — Soit X un espace topologique.

Une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de X est dite *localement finie* si tout point x de X possède un voisinage V tel que l'ensemble des $i \in I$ tels que $V \cap A_i$ est non vide est fini.

Une famille $(B_j)_{j\in J}$ de parties de X est un *raffinement* d'une famille $(A_i)_{i\in I}$ si pour tout $j \in J$, il existe $i \in I$ tel que $B_j \subset A_i$.

Une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de X est appelée recouvrement si sa réunion est égale à X, et recouvrement fermé (resp. ouvert, etc.) si ses membres sont fermés (resp. ouverts, etc.).

A.1.2. — Un espace topologique X est dit *paracompact* s'il est séparé et si pour tout recouvrement ouvert de X, il existe un recouvrement ouvert de X qui le raffine et qui est localement fini.

Un espace topologique compact est paracompact.

A.1.3. — Un espace topologique est dit *dénombrable à l'infini* s'il est réunion dénombrable de parties compactes.

Si X est un espace topologique localement compact (ce qui suppose qu'il est séparé, par définition), il est paracompact si et seulement si il est somme disjointe d'espaces topologiques localement compacts et dénombrables à l'infini. En particulier, un espace topologique localement compact et connexe est paracompact si et seulement s'il est dénombrable à l'infini.

Lemme A.1.4. — *Soit X un espace topologique séparé, localement compact et dont tout point possède une base d'ouverts dénombrables à l'infini.*

a) *Toute partie compacte de X possède un voisinage ouvert qui est dénombrable à l'infini et relativement compact.*

b) *Toute partie dénombrable à l'infini de X possède un voisinage ouvert qui est dénombrable à l'infini, et en particulier paracompact.*

Démonstration. — Il suffit de démontrer la première assertion. Soit F une partie compacte de X. Comme X est localement compact, F possède donc un voisinage compact V. Soit x un point de F ; il possède un voisinage ouvert U_x dans X, contenu dans V et dénombrable à l'infini. Puisque F est compact, il existe une partie finie S de F telle que la réunion U des U_x, pour $x \in S$, contienne F. Cet ensemble U est ouvert dans X et dénombrable à l'infini. □

L'énoncé suivant est un raffinement du théorème 5 de Bourbaki, Topologie générale, chapitre I, §9, n° 10.

Lemme A.1.5. — *Soit X un espace topologique paracompact et localement compact. Soit $\mathscr{B}$ un ensemble de parties de X dont les intérieurs forment une base de la topologie de X. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X. Il existe une famille $(V_j)_{j\in J}$ d'éléments de $\mathscr{B}$, localement finie, raffinant (U_i), et telle que la famille $(\mathring{V}_j)_{j\in J}$ recouvre X.*

Démonstration. — On peut supposer que V est connexe. Il est alors dénombrable à l'infini et on peut donc l'écrire comme réunion croissnte d'une suite (W_n) d'ensembles ouverts relativement compacts telle que $\overline{W_n} \subset W_{n+1}$ pour tout n. Posons $K_0 = \overline{W}_0$; pour tout entier $n \geqslant 1$, posons $K_n = \overline{W}_n - W_{n-1}$; les ensembles K_n sont compacts. L'ensemble ouvert $\Omega_n = V_{n+1} - \overline{V_{n-2}}$ est un voisinage de K_n ; par construction, Ω_n ne rencontre pas Ω_m si $|m-n| \geqslant 3$. Pour tout $x \in K_n$, il existe un élément V_x de $\mathscr{B}$ contenu dans un des ensembles U_i et contenu dans cet ouvert Ω_n et tel que $x \in \mathring{V}_x$. Comme K_n est compact, il existe une partie finie J_n de K_n telle que les $\mathring{V}_x$, pour $x \in J_n$, recouvrent K_n. La famille des V_x, pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in J_n$, convient. □

§ A.2. SÉPARATION, DENSITÉ ET PARTITIONS DE L'UNITÉ

A.2.1. — Nous démontrons ici un certain nombre de résultats généraux et relativement standard concernant la séparation, la densité de certains sous-espaces de fonctions continues et les partitions de l'unité par de telles fonctions.

Nous considérons un espace topologique localement compact X (en particulier séparé) et un sous-faisceau $\mathscr{A}$ en $\mathbf{R}$-algèbres du faisceau des fonctions continues à valeurs réelles sur X. On suppose que pour tout ouvert U de X, tout élément $f \in \mathscr{A}(U)$ et toute fonction lisse φ sur $\mathbf{R}$ définie au voisinage de $f(U)$, la fonction $\varphi \circ f$ appartient à $\mathscr{A}(U)$.

Notons que cette hypothèse est vérifiée dans les deux cas suivants :

– L'espace X est un espace topologique et $\mathscr{A}$ est le faisceau des fonctions continues sur X ;

– L'espace X est un espace paralinéaire affiné ou un espace analytique, plus généralement un espace G-tropical affiné, et $\mathscr{A}$ est le faisceau des fonctions lisses sur X.

Pour alléger la rédaction, nous appellerons fonctions lisses les sections du faisceau $\mathscr{A}$.

A.2.2. — On dit que $\mathscr{A}(X)$ sépare les points si pour tout couple (x, y) de points de X tels que $x \neq y$, il existe une section globale f de $\mathscr{A}_X$ telle que $f(x) \neq f(y)$.

On dit que $\mathscr{A}$ sépare localement les points si pour tout point x de X, il existe un voisinage ouvert U de X tel que $\mathscr{A}(U)$ sépare les points de U.

Lemme A.2.3. — *Supposons que $\mathscr{A}(X)$ sépare les points. Soit K un sous-ensemble compact de X et soit $x \in X - K$. Il existe une fonction lisse sur X qui vaut 1 au voisinage de x et nulle au voisinage de K.*

Démonstration. — On commence par traiter le cas où K est réduit à un point y. Par hypothèse, il existe une fonction lisse f sur X telle que $f(x) \neq f(y)$. On choisit une fonction lisse u sur $\mathbf{R}$ qui est constante égale à 0 au voisinage de $f(x)$ et constante égale à 1 au voisinage de y ; l'existence de telles fonctions est classique. La fonction $u \circ f$ sur X est lisse et convient.

D'après ce qui précède, pour tout $y \in K$, il existe une fonction lisse f_y sur X valant 1 au voisinage de x et nulle dans un voisinage ouvert V_y de y. Soit S une partie finie de K telle que les V_y, pour $y \in S$, recouvrent K ; la fonction $\prod_{y \in S} f_y$ convient. □

Corollaire A.2.4. — *On suppose que $\mathscr{A}$ sépare localement les points. Soit K une partie compacte de X et soit U un voisinage ouvert de K. Il existe une fonction lisse sur X qui vaut 1 au voisinage de K et dont le support est compact et contenu dans U.*

Démonstration. — On commence par traiter le cas où le compact K est réduit à un point x. Soit V un voisinage compact de x tel que $\mathscr{A}(\mathring{V})$ sépare les points de $\mathring{V}$. L'ensemble $F = V - (\mathring{V} \cap U)$ est une partie fermée de X contenue dans V. Soit f une fonction lisse sur V qui vaut 1 au voisinage de x et qui est nulle au voisinage de F. Soit g la fonction sur X qui coïncide avec f sur V et qui est nulle en dehors de V. Elle est lisse sur l'intérieur de V, sur l'ouvert $X - V$ ainsi que sur un voisinage ouvert de F dans X ; ces trois ouverts recouvrent X. La fonction g est donc lisse. Son support est contenu dans U ; comme il est contenu dans V, il est aussi compact.

Traitons maintenant le cas général. Pour tout $x \in K$, soit f_x une fonction lisse sur X qui vaut 1 au voisinage de x et dont le support est compact et contenu dans U. Quitte à remplacer f_x par son carré, on suppose que cette fonction est positive ou nulle. Comme K est compact, la somme g d'une sous-famille finie de ces fonctions est strictement positive en tout point de K. Elle est lisse et son support est compact et contenu dans U. Soit φ une fonction lisse de $\mathbf{R}$ vers $[0;1]$, nulle en 0 et égale à 1 sur un voisinage de $g(K)$; la fonction $f = \varphi \circ g$ convient. □

***Théorème A.2.5* (Stone–Weierstraß).** — *On suppose que $\mathscr{A}$ sépare localement les points. Soit U un ouvert de X et soit f une fonction continue à valeurs réelles sur X dont le support est compact et contenu dans U. Soit a et b des nombres réels tels que $a \leqslant f(x) \leqslant b$ pour tout $x \in X$.*

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction lisse g sur X dont le support est compact, contenu dans U, et telle que $a \leqslant g(x) \leqslant b$ et $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in X$.

Démonstration. — Soit X' le compactifié d'Alexandroff de X ; comme X est localement compact, c'est un espace topologique compact. Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des fonctions réelles sur X' qui sont la somme d'une fonction constante et d'une fonction lisse à support compact sur X (prolongée par 0 au point à l'infini). C'est une sous-algèbre unitaire de l'algèbre des fonctions continues sur X' ; elle sépare les points en vertu du corollaire A.2.4. Prolongée par 0 au point à l'infini, la fonction f définit une fonction continue f' sur X'. D'après le théorème de Stone–Weierstraß, il existe un nombre réel c et une fonction lisse à support compact sur X, disons g, tels que $|f' - g - c| < \varepsilon/4$. En considérant cette inégalité au point à l'infini, on a $|c| < \varepsilon/4$, si bien que $|f - g| < \varepsilon/2$ en tout point.

Soit $h\colon X \to [0,1]$ une fonction lisse sur X dont le support est compact et contenu dans U et qui vaut 1 au voisinage du support de f. La fonction hg est lisse sur X, son support est compact et contenu dans U. Pour x en dehors du support de f, on a $|f(x) - h(x)g(x)| = |h(x)g(x)| \leqslant |g(x)| = |f(x) - g(x)| < \varepsilon/2$. Si x appartient au support de f, on a $|f(x) - h(x)g(x)| = |f(x) - g(x)| < \varepsilon/2$.

Considérons maintenant une fonction $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant les conditions $\theta(x) = a$ pour $x \leqslant a$, $\theta(x) = b$ pour $x \geqslant b$, $|\theta(x) - x| \leqslant \varepsilon/2$ pour $x \in [a;b]$ et, si $a \leqslant 0 \leqslant b$, $\theta(0) = 0$.

Démontrons que la fonction $\theta \circ hg$ répond aux conditions de l'énoncé. Elle est lisse, prend ses valeurs dans l'intervalle $[a,b]$ et, pour tout $x \in X$, on a

$$|\theta \circ hg(x) - f(x)| \leqslant |\theta \circ hg(x) - hg(x)| + |hg(x) - f(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \leqslant \varepsilon.$$

Il reste à vérifier que le support de $\theta \circ hg$ est compact et contenu dans U. Si X est compact et $X = U$, la condition à vérifier est vide. Sinon, f s'annule, de sorte que $a \leqslant 0 \leqslant b$, d'où $\theta(0) = 0$. Par suite, le support de $\theta \circ hg$ est contenu dans celui de g, il est donc compact et contenu dans U. □

Corollaire A.2.6. — *On suppose que $\mathscr{A}$ sépare localement les points.*

a) *L'ensemble des fonctions lisses à support compact sur X est dense dans l'espace $\mathscr{C}_{\mathrm{c}}(X)$ des fonctions continues à support compact sur X, muni de la topologie limite inductive des espaces de fonctions à support dans un compact donné.*

b) *L'ensemble des fonctions lisses à support compact sur X est dense dans l'espace $\mathscr{C}(X)$ des fonctions continues sur X muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.*

Démonstration. — a) Soit Ω une partie ouverte non vide de $\mathscr{C}_{\mathrm{c}}(X)$; soit K une partie compacte de X telle que Ω rencontre $\mathscr{C}_K(X)$ et soit $f \in \Omega \cap \mathscr{C}_K(X)$. Soit V un voisinage ouvert de K dans X, relativement compact. Par définition de la topologie de $\mathscr{C}_{\mathrm{c}}(X)$, $\Omega \cap \mathscr{C}_{\overline{V}}(X)$ est ouvert dans $\mathscr{C}_{\overline{V}}(X)$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que la boule de $\mathscr{C}_{\overline{V}}(X)$, de centre f et de rayon ε, soit contenue dans Ω. D'après le théorème A.2.5, cette boule contient une fonction lisse.

b) Soit Ω une partie ouverte non vide de $\mathscr{C}(X)$ et soit $f \in \Omega$. Soit K une partie de X et $\varepsilon > 0$; démontrons qu'il existe une fonction lisse à support compact sur X, g, telle que $\|g - f\|_K \leqslant \varepsilon$. Soit V un voisinage relativement compact de K de X et soit λ une fonction lisse à support contenu dans V qui vaut 1 sur K D'après le théorème A.2.5, il existe une fonction g, lisse à support contenu dans V, telle que $\|g - \lambda f\| \leqslant \varepsilon$. En particulier, $\|g - f\|_K \leqslant \varepsilon$. □

A.2.7. — Soit X un espace topologique, soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X. Une partition de l'unité subordonnée au recouvrement (U_i) est une famille localement finie $(f_i)_{i\in I}$ de fonctions continues sur X telle que pour tout $i \in I$, le support de f_i soit contenu dans U_i. La mention « localement finie » signifie que tout point $x \in X$ possède un voisinage V sur lequel seul un nombre fini des f_i ne sont pas identiquement nulles.

Si X est paracompact, il existe une partition de l'unité subordonnée à tout recouvrement ouvert de X (Bourbaki, *Topologie générale*, IX, §4, n° 4, p. 40, corollaire 1).

La remarque suivante nous permet, pour construire une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement, de le raffiner autant que nécessaire. Soit $(U_i)_{i\in I}$ et $(V_j)_{j\in J}$ deux

recouvrements ouverts de X. Supposons le recouvrement (V_j) plus fin que le recouvrement (U_i), au sens où pour tout $j \in J$, il existe $i \in I$ tel que $V_j \subset U_i$. Soit alors $(g_j)_{j\in J}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement (V_j). Pour tout $j \in J$, soit $a(j)$ un élément de I tel que $V_j \subset U_{a(j)}$. Pour tout $i \in I$, posons $f_i = \sum_{a(j)=i} g_j$; la famille $(f_i)_{i\in I}$ est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i\in I}$.

***Proposition A.2.8* (Partitions de l'unité lisses).** — *On suppose que X est paracompact et que $\mathscr{A}$ sépare localement les points. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X. Il existe une partition de l'unité subordonnée à (U_i) formée de fonctions lisses sur X.*

Lorsque $\mathscr{A}$ est le faisceau des fonctions continues, on retrouve ainsi l'énoncé classique qu'un espace paracompact admet des partitions de l'unité. Bien sûr, notre démonstration s'inspire de celle-là. Pour une réciproque partielle qui indique la nécessité de l'hypothèse de paracompacité, voir la proposition A.2.11.

Démonstration. — On peut supposer que X est connexe. Comme X est paracompact et localement compact, il existe un recouvrement localement fini formé d'ouverts relativement compacts dans X qui raffine le recouvrement (U_i). Cela nous autorise à supposer que le recouvrement (U_i) est déjà de cette forme. Puisque X est connexe et paracompact, il est dénombrable à l'infini ; on peut donc indexer par une partie de l'ensemble des entiers naturels l'ensemble d'indices du recouvrement (U_i).

Considérons une partition de l'unité continue (g_i) subordonnée au recouvrement (U_i). Pour tout i, le support de g_i est compact. Il existe donc une fonction lisse h_i sur X, à support compact contenu dans U_i, telle que $|h_i - g_i| < 1/2^{i+2}$. Posons $h = \sum h_i$; c'est la somme d'une famille localement finie donc fonctions lisses, donc c'est une fonction lisse. Pour $x \in X$,

$$h(x) = \sum_i h_i(x) \geqslant \sum_i g_i(x) - \sum_i 2^{-i-2} \geqslant 1 - \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i-2} = \frac{1}{2}.$$

Posons $f_i = h_i/h$; c'est une fonction lisse sur X dont le support est contenu dans U_i. On a $\sum f_i = 1$. □

Corollaire A.2.9. — *Soit F une partie fermée de X. Supposons que F possède un voisinage ouvert U qui est paracompact et tel que $\mathscr{A}|_U$ sépare localement les points. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de F par des ouverts de X. Il existe une famille localement finie (θ_i) de fonctions lisses positives sur X, telle que pour tout i, le support de θ_i soit compact et contenu dans U_i et telle que $\sum \theta_i$ vaille 1 au voisinage de F.*

Démonstration. — Soit U un voisinage ouvert de F dans X qui est paracompact tel que $\mathscr{A}|_U$ sépare localement les points. Soit $(V_j)_{j\in J}$ un recouvrement ouvert de F par des ouverts relativement compacts de U qui est plus fin que le recouvrement $(U_i)_{i\in I}$. Choisissons un élément 0 qui n'appartient pas à J ; posons $J' = J \cup \{0\}$ et $V_0 = U - F$. D'après la proposition A.2.8 appliquée à l'espace paracompact U au faisceau $\mathscr{A}|_U$ et au recouvrement ouvert $(V_j)_{j\in J'}$, il existe une partition de l'unité $(g_j)_{j\in J'}$ formée de fonctions lisses sur U qui est subordonnée au recouvrement ouvert $(V_j)_{j\in J'}$.

Pour tout $j \in J$, soit g'_j la fonction sur X qui coïncide avec g_j sur V_j et est identiquement nulle en dehors de V_j. Comme le support de g_j est compact et contenu dans V_j, il est fermé dans X. Par suite, la fonction g'_j est lisse sur X.

Pour tout $j \in J$, choisissons un élément $a(j) \in I$ tel que $V_j \subset U_{a(j)}$. Pour tout $i \in I$, posons $f_i = \sum_{a(j)=i} g'_j$. La famille $(f_i)_{i\in I}$ convient. □

Corollaire A.2.10. — *On suppose que X est paracompact. Si le faisceau $\mathscr{A}$ sépare localement les points, il est fin.*

Proposition A.2.11. — *Soit X un espace topologique séparé dont les composantes connexes sont ouvertes, par exemple connexe ou localement connexe. Soit (f_i) une partition de l'unité sur X formée de fonctions continues à supports compacts. Alors, X est localement compact et paracompact.*

Démonstration. — Pour tout i, soit U_i l'ensemble des $x \in X$ tels que $f_i(x) > 0$, soit F_i son adhérence ; par hypothèse, F_i est compact. Comme $\sum f_i = 1$, les ouverts U_i recouvrent X ; cela entraîne que X est localement compact.

L'espace X est somme de ses composantes connexes, car elles sont ouvertes. Pour démontrer qu'il est paracompact, nous pouvons donc supposer que X est connexe et non vide ; il s'agit alors de démontrer qu'il est dénombrable à l'infini.

Soit $\sim$ la relation d'équivalence sur X la plus fine telle que $x \sim y$ s'il existe $i \in I$ tel que $\{x, y\} \subset U_i$. Comme les U_i sont ouverts, les classes d'équivalences sont ouvertes. Comme X est connexe et non vide, il n'y a qu'une seule classe d'équivalence. Soit maintenant $x \in X$ et soit $i \in I$. Construisons par récurrence une suite croissante (I_n) de parties finies de I. On pose $I_0 = \{i\}$; supposons que I_n est défini. Soit F la réunion des F_i pour $i \in I_n$; c'est une partie compacte de X ; soit I_{n+1} l'ensemble des $i \in I$ tels que $F \cap U_i \neq \varnothing$. Il contient I_n. Comme le recouvrement (U_i) est localement fini, I_{n+1} est fini. Par hypothèse, tout point y de X appartient à l'un des F_i, pour $i \in \cup_{n\geqslant 0} I_n$. Cela prouve que X est réunion dénombrable de parties compactes de X, ainsi qu'il fallait démontrer. □

§ A.3. RAPPELS DE QUELQUES FAITS DE THÉORIE DE LA MESURE

A.3.1. — On ne considère que des espaces localement compacts (donc, implicitement, séparés), et localement connexes par arcs (si besoin), mais on ne peut pas faire d'hypothèse supplémentaire. En particulier, ils ne sont pas tous paracompacts (toute composante est dénombrable à l'infini, ici). Exemples de la droite projective et du plan projectif sur $\mathbf{C}((t))$ privés du point de Gauß ; ils ne sont pas σ-compacts, le second étant connexe, n'est même pas paracompact.

A.3.2. — Soit X un espace localement compact. La théorie de l'intégration sur un tel espace donne lieu à deux points de vue concurrents et nos arguments nous obligent apparemment à utiliser l'un et l'autre des points de vue.

Nous appelerons *mesure de Borel* (positive), ou plus simplement *mesure* (positive), une fonction σ-additive à valeurs dans $\mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}$ sur la tribu de Borel. Une telle mesure sera dite *localement finie* (*resp. finie*) si elle prend une valeur finie en tout compact (*resp.* sur X). Elle sera dite *régulière* si la mesure d'une partie borélienne est la borne supérieure des mesures de ses sous-ensembles compacts. Une *mesure signée* est la différence de deux mesures finies ; une mesure signée est dite régulière si ses parties positive et négative le sont.

On appelle *mesure de Radon* sur X une forme linéaire continue sur l'espace vectoriel $\mathscr{C}_c(X)$ des fonctions continues à support compact sur X, muni de la topologie limite inductive déduite de la filtration par le support. On déduit du lemme d'Urysohn que pour qu'une forme linéaire μ sur cet espace soit continue il suffit que l'on ait $\mu(f) \geqslant 0$ pour toute fonction $f \in \mathscr{C}_c(X)$ qui est positive ; on parle alors de mesure de Radon positive. Toute mesure de Radon sur X est différence de deux mesures de Radon positives ([**35**], chapitre 3, p. 53, th. 2).

A.3.3. — Soit μ une mesure de Borel positive sur X.

Une fonction $f\colon X \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ est appelée fonction-plateau s'il existe une partition dénombrable (A_i) de X par des parties boréliennes telle que f soit constante de valeur a_i sur chaque A_i. Si f est une fonction borélienne à valeurs dans $[0, +\infty]$, on pose $\mu(f) = \sum a_i \mu(A_i)$, avec la convention $(+\infty) \times 0 = 0 \times (+\infty) = 0$; c'est un élément de $[0, +\infty]$. Si $f\colon X \to [0, +\infty]$ est une fonction positive arbitraire, on définit $\mu^*(f)$ comme la borne supérieure des intégrales $\mu(g)$, où g est une fonction plateau telle que $0 \leqslant g \leqslant f$; on dit que f est intégrable si $\mu^*(f) < \infty$.

On dit qu'une fonction borélienne $f\colon X \to [-\infty, +\infty]$ est intégrable si les deux fonctions (boréliennes) $f_+ = \max(0, f)$ et $f_- = -\max(0, -f)$ sont intégrables et l'on pose alors $\mu(f) = \mu(f_+) - \mu(f_-)$. Si f est positive, on a $f_- = 0$, donc $\mu(f) = \mu^*(f)$. On note $\mathscr{L}^1(X, \mu)$ l'ensemble des fonctions boréliennes intégrables. L'application $f \mapsto \mu(f)$ sur $\mathscr{L}^1(X, \mu)$ est une forme linéaire ([**119**], Théorème 1.32).

A.3.4. Théorème de représentation de Riesz. — Si μ est une mesure de Borel localement finie (positive), alors l'espace $\mathscr{C}_c(X)$ est contenu dans $\mathscr{L}^1(X, \mu)$. Toute mesure de Borel localement finie donne ainsi lieu à une mesure de Radon positive. Par suite, une mesure signée donne lieu à une mesure de Radon sur X.

Inversement, toute mesure de Radon positive sur X, est associée à une unique mesure de Borel localement finie et *régulière* ([**113**], exemple 3, p. 183 ; de nombreux ouvrages, par exemple [**119**], utilisent d'autres régularités et ne garantissent pas l'unicité.) On en déduit que toute forme linéaire sur $\mathscr{C}_c(X)$ qui est continue pour la norme uniforme est associée à une mesure signée.

A.3.5. — Soit $f\colon Y \to X$ une application borélienne. Soit μ une mesure de Borel sur Y. On définit alors une mesure de Borel $f_*\mu$ sur X par la formule $f_*\mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$ pour toute partie borélienne A de X.

Supposons que f est continue ; démontrons alors que $f_*\mu$ est régulière si μ l'est. Soit A une partie borélienne de X, soit r un nombre réel tel que $r < f_*\mu(A)$, soit K une partie compacte de Y, contenue dans $f^{-1}(A)$, telle que $\mu(K) > r$. Alors, $f(K)$ est une partie compacte de A telle que $f_*\mu(f(K)) = \mu(f^{-1}(f(K))) \geqslant \mu(K) > r$, d'où l'assertion.

Si f est continue et compacte et si μ est localement finie, alors $f_*\mu$ est localement finie.

A.3.6. — Soit $f\colon Y \to X$ une application continue et compacte. Soit μ une mesure de Radon sur Y. Pour toute fonction continue à support compact φ sur X, la fonction $\varphi \circ f$ sur Y est continue et à support compact ; on définit ainsi une mesure de Radon $f_*\mu$ sur X en posant $(f_*\mu)(\varphi) = \mu(\varphi \circ f)$.

Cette notion coïncide avec l'image des mesures de Borel lorsque μ est positive.

A.3.7. — Comme X est localement compact, une partie A de X est localement compacte si et seulement si elle est localement fermée (intersection d'un ouvert et d'un fermé).

Soit μ une mesure de Borel sur X et soit A une partie localement compacte de X. En restreignant μ à la tribu des parties boréliennes de A, on obtient une mesure sur A appelée, par abus, la restriction de μ à A, et notée μ_A ou $\mu|_A$. Si μ est localement finie (resp. si μ est régulière), il en est de même de μ_A.

Ainsi, les mesures de Borel positives localement finies régulières forment de façon naturelle un préfaisceau sur la catégorie des ensembles localement compacts de X.

D'après le théorème de Riesz, les mesures de Radon positives forment donc aussi un préfaisceau sur cette catégorie. On en déduit qu'il en est de même des mesures de Radon (non nécessairement positives).

Soit A une partie localement compacte de X et soit $f \in \mathscr{C}_c(X)$ une fonction continue dont le support est contenu dans A. Pour toute mesure de Radon μ sur X, on a $\mu_A(f|_A) = \mu(f)$. En effet, l'intégrale d'une fonction continue se déduit de la connaissance de celle des fonctions caractéristiques des boréliens contenus dans son support.

A.3.8. — La topologie de Borel sur l'espace topologique X est une topologie de Grothendieck ensembliste sur la « catégorie » des parties localement fermées de X : une famille $(A_i)_{i\in I}$ est un B-recouvrement de U si pour tout $x \in U$, il existe une partie finie J de I telle que $x \in A_j$ pour tout $j \in J$, et la réunion des A_j, pour $j \in J$, soit un voisinage de x. Considérons un B-recouvrement $(A_i)_{i\in I}$ de U ; on dit qu'une partie V de U est adaptée au recouvrement (A_i) s'il existe une partie finie $J \subset I$ tels que pour tout $j \in J$, $V \cap A_j$ soit fermé dans V et $V = \bigcup_{j\in J}(V \cap A_j)$. Tout sous-ensemble d'une partie adaptée l'est encore.

En outre, tout point de X possède une base de voisinages compacts adaptés au B-recouvrement $(A_i)_{i\in I}$. Partons en effet d'une partie finie J comme dans la définition ; pour tout $j \in J$, soit V_j un voisinage de x dans U tel que $A_j \cap V_j$ soit fermé dans V_j. Posons

$$V = \left(\bigcup_{j\in J} A_j\right) \cap \bigcap_{j\in J} V_j.$$

C'est un voisinage de x dans U, car J est finie, et tout voisinage de x qui est contenu dans V convient. En particulier, il existe de tels voisinages V compacts.

Lemme A.3.9. — *Toute partie compacte V de X admet un recouvrement fini par des parties compactes qui est plus fin que le B-recouvrement $(A_i \cap V)$.*

Démonstration. — Pour $x \in V$, considérons V_x un voisinage de x dans X, compact, et adapté au recouvrement (A_i) ; soit J_x une partie finie de I telle que la famille $(A_j \cap V_x)_{j\in J_x}$ soit un recouvrement fermé de V_x. Soit S une partie finie de V telle que les V_x, pour $x \in S$, recouvrent X, et soit J la réunion des J_x, pour $x \in S$. Les ensembles $A_j \cap V_x \cap V$, pour $x \in S$ et $j \in J$, forment un recouvrement fini de V par des parties compactes. □

A.3.10. — Les mesures forment un faisceau sur la catégorie des ensembles boréliens (munie de la topologie discrète, pour laquelle les recouvrements sont les familles (A_i) d'ensembles boréliens dont une sous-famille dénombrable recouvre X). En effet, si $(A_i)_{i\in I}$ est une telle famille et si, pour tout i, μ_i est une mesure sur A_i, telles que les restrictions à $A_i \cap A_j$ de μ_i et μ_j coïncident, si $i \neq j$, alors il existe une unique mesure μ sur X dont

la restriction à A_i est égale à μ_i. (Remplacer I par $\mathbf{N}$, puis A_i par le complémentaire B_i de la réunion $\bigcup_{j<i} A_j \cap A_i$, ce qui fournit une partition borélienne (B_i) dénombrable de X ; remplacer μ_i par sa restriction à B_i.)

Lemme A.3.11. — *Soit X un espace topologique localement compact. Pour toute partie compacte K de X, supposons donnée une mesure de Borel régulière μ_K sur K ; on suppose que pour tout couple (K, L) de parties compactes de X telles que $L \subset K$, on a $\mu_K|_L = \mu_L$. Alors, il existe une unique mesure de Borel régulière μ sur X telle que $\mu|_K = \mu_K$ pour toute partie compacte K.*

Démonstration. — Soit μ une mesure de Borel régulière sur X dont la trace sur K est égale à μ_K pour toute partie compacte K de X. Pour toute partie borélienne A de X, on a nécessairement

$$\mu(A) = \sup_{\substack{K\subset A\\ K \text{ compact}}} \mu(K) = \sup_{\substack{K\subset A\\ K \text{ compact}}} \mu_K(K).$$

Cela prouve qu'il existe au plus une telle mesure. Pour établir son existence, définissons $\mu(A)$ par la formule précédente, pour toute partie borélienne A de X.

Soit K une partie compacte de X et soit A une partie borélienne de X contenue dans K. Par définition, on a

$$\mu(A) = \sup_{\substack{L\subset A\\ L \text{ compact}}} \mu_L(L) = \sup_{\substack{L\subset A\\ L \text{ compact}}} \mu_K(L) = \mu_K(A),$$

car μ_K est une mesure de Borel régulière.

D'autre part, μ est une fonction d'ensemble positive et croissante. Démontrons qu'elle est dénombrablement additive. Soit (A_n) une famille dénombrable de parties boréliennes disjointes, notons A sa réunion et prouvons que $\mu(A) = \sum \mu(A_n)$. Soit K une partie compacte de A. On a

$$\mu(K) = \mu_K(K) = \sum \mu_K(K \cap A_n) = \sum \mu(K \cap A_n) \leqslant \sum \mu(A_n).$$

On a donc $\mu(A) \leqslant \sum \mu(A_n)$. Inversement, traitons le cas où $\sum \mu(A_n) < \infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit N tel que $\sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) \geqslant \sum \mu(A_n) - \varepsilon$. Pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, soit K_n une partie compacte de A_n telle que $\mu(K_n) \geqslant \mu(A_n) - 2^{-n}\varepsilon$ et posons $K = K_1 \cup \cdots \cup K_N$. Alors, K est une partie compacte de A telle que

$$\mu_K(K) = \sum_{n=1}^{N} \mu_K(K_n) = \sum_{n=1}^{N} \mu(K_n) \geqslant \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) - \varepsilon \geqslant \sum \mu(A_n) - 2\varepsilon.$$

Par suite, $\mu(A) \geqslant \sum \mu(A_n)$. Le cas $\sum \mu(A_n) = \infty$ est analogue. □

Proposition A.3.12. — *Les mesures de Borel régulières, les mesures de Radon positives et les mesures de Radon forment des faisceaux pour la B-topologie sur X. En particulier, elles forment des faisceaux pour la topologie usuelle.*

Démonstration. — Soit (A_i) un B-recouvrement de X et, pour tout i, soit μ_i une mesure de Borel régulière sur A_i ; on suppose que pour tout couple (i, j), on a $\mu_i|_{A_i\cap A_j} = \mu_j|_{A_j\cap A_i}$. Démontrons qu'il existe une unique mesure régulière μ sur X telle que $\mu|_{A_i} = \mu_i$ pour tout i.

Traitons d'abord le cas où X est compact. Quitte à raffiner le B-recouvrement (A_i), on peut supposer qu'il s'agit d'un recouvrement fini par des parties compactes

(lemme A.3.9). Si μ_i était localement finie pour tout i, cela permet de les supposer finies. Soit J une partie finie de I telle que A_j soit fermé pour tout $j \in J$, et les A_j, pour $j \in J$, recouvrent X.

D'après le paragraphe A.3.8, il existe une unique mesure borélienne μ sur X dont la restriction à A_i est égale à μ_i, pour tout $i \in I$. Démontrons que cette mesure est régulière. Soit en effet une partie borélienne A de X. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $i \in I$, soit C_i une partie compacte de $A \cap A_i$ telle que $\mu_i(C_i) > \mu_i(A \cap A_i) - \varepsilon$. Soit C la réunion des C_i ; c'est une partie compacte de A et l'on a

$$\mu(A - C) \leqslant \sum_{i \in I} \mu((A - C) \cap A_i) \leqslant \sum_{i \in I} \mu_i(A_i - C_i) \leqslant \varepsilon \operatorname{Card}(I),$$

donc est arbitrairement petit. On a $\mu|_{A_i} = \mu_i$ pour tout i ; comme X est recouvert par la famille finie $(A_i)_{i \in I}$, la mesure μ est la seule mesure de Borel sur X qui vérifie cette propriété. Si les mesures μ_i sont localement finies, la mesure μ est (localement) finie.

Revenons maintenant au cas général en ne supposant plus que X est compact. D'après ce qui précède, il existe, pour toute partie compacte V de X, une unique mesure de Borel régulière μ_V sur V telle que $\mu_V|_{A_i \cap V} = \mu_i|_{A_i \cap V}$ pour tout $i \in I$. Si $V \subset W$, il résulte des définitions que $\mu_W|_V = \mu_V$. D'après le lemme A.3.11, il existe alors une unique mesure de Borel régulière μ sur X telle que $\mu|_V = \mu_V$ pour toute partie compacte V de X. Si les mesures μ_V sont (localement) finies, la mesure μ construite est localement finie, car X est localement compact.

Soit $i \in I$. Démontrons que la restriction de μ à A_i est égale à μ_i. Par définition d'une mesure de Borel régulière, il suffit de vérifier que pour toute partie compacte C de A_i, on a $\mu|_C = \mu_i|_C$, ce qui est évident puisqu'alors $\mu|_C = \mu_C = \mu_C|_{C \cap A_i} = \mu_i|_{C \cap A_i}$.

Soit ν une mesure de Borel régulière telle que $\nu|_{A_i} = \mu_i$ pour tout i. Pour toute partie compacte V de X, on a donc $\nu|_{A_i \cap V} = \mu_i|_V = \mu_V|_{A_i \cap V}$, donc $\nu|_V = \mu_V$ par définition de μ_V. Donc $\nu = \mu$.

Nous avons ainsi prouvé que les mesures de Borel régulières forment un faisceau pour la B-topologie, et que les mesures localement finies en constituent un sous-faisceau.

Le cas des mesures de Radon s'en déduit en les décomposant en la différence de leurs parties positive et négative. □

A.3.13. — Soit $f\colon Y \to X$ une application continue. On suppose qu'il existe un B-recouvrement (Y_i) de Y tel que, pour tout i, $f|_{Y_i}$ soit un homéomorphisme de Y_i sur une partie $f(Y_i)$ de X. Dans ce cas, $f(Y_i)$ est localement compact, donc localement fermé dans X ; on pourrait ainsi dire que f est un « homéomorphisme B-local ».

Pour toute mesure de Borel (*resp.* de Radon) μ sur X, il existe alors une unique mesure de Borel (*resp.* de Radon) $f^*\mu$ sur Y dont la restriction à Y_i est égale à $(f^{-1})_*(\mu|_{f(Y_i)})$. Cette mesure ne dépend pas du choix du B-recouvrement (Y_i).

§ A.4. RAPPELS D'ANALYSE CONVEXE

Pour la commodité du lecteur, nous rappelons ici quelques faits élémentaires d'analyse convexe, en tâchant d'en donner les démonstrations. L'ouvrage **[85]** nous a été une référence très utile.

Par *espace affine*, nous entendons ici un espace affine de dimension finie sur $\mathbf{R}$. On désignera alors par $\|\cdot\|$ une norme sur l'espace vectoriel sous-jacent.

A.4.1. — Soit V un espace affine. Si x et y sont des points de V, on note $[x,y]$, $]x,y]$, $[x,y[$ et $]x,y[$ les segments (respectivement fermé, semi-ouverts et ouvert) d'extrémités x et y : ce sont les ensembles des points de V de la forme $(1-t)x+ty$, où t parcourt respectivement les intervalles $[0,1]$, $]0,y]$, $[0,1[$ et $]0,1[$.

A.4.2. — Une partie C de V est convexe si pour tout couple (x,y) de points de C, le segment $[x,y]$ est contenu dans C.

L'intersection d'une famille partie de convexes est convexe. L'enveloppe convexe $\mathrm{conv}(A)$ d'une partie A de V est l'intersection de la famille des parties convexes qui contiennent A ; c'est la plus petite partie convexe de V qui contient A.

L'image, resp. l'image réciproque, d'une partie convexe par une application affine est une partie convexe.

A.4.3. — Soit C une partie convexe de V, non vide, et soit W le sous-espace affine de V engendré par C. L'adhérence $\overline{C}$ de C est contenue dans W ; elle est convexe. (Soit en effet x,y des points de $\overline{C}$ et soit $t\in[0,1]$; écrivons x et y comme limites de suites (x_n) et (y_n) de points de C ; alors $(1-t)x+ty=\lim(1-t)x_n+ty_n$ est limite de points de C donc appartient à $\overline{C}$.)

Si $W\neq V$, l'intérieur de C dans V est vide. On appelle *intérieur relatif* de C, et on note $\mathring{C}$ ou C°, l'intérieur de C dans W.

Si C est vide, on pose $\mathring{C}=\varnothing$.

Lemme A.4.4. — *Soit C une partie convexe d'un espace affine V. Soit $x\in\mathring{C}$ et $y\in\overline{C}$. Alors le segment ouvert $]x,y[$ est contenu dans $\mathring{C}$.*

Démonstration. — Quitte à remplacer V par le sous-espace affine engendré par C, on peut supposer que C engendre l'espace affine V, de sorte que $\mathring{C}$ est l'intérieur topologique de C. Soit δ un nombre réel >0 tel que la boule ouverte $B(x,\delta)$ soit contenue dans C, donc dans $\mathring{C}$. Soit $t\in]0,1[$ et soit $z=(1-t)x+ty$. Par définition de l'adhérence de C, il existe un point $y'\in C$ dans la boule ouverte de centre y et de rayon $t\delta/2(1-t)$; écrivons $y'=y+v$, où v est un vecteur de V. Soit u un vecteur de V de norme $<\delta/2(1-t)$ et posons $x'=x-\frac{t}{1-t}v+\frac{1}{1-t}u$, de sorte que

$$z+u=(1-t)(x-\frac{t}{1-t}v+\frac{1}{1-t}u)+t(y+v)=(1-t)x'+ty'.$$

Par construction, on a $x'\in C$ et $y'\in C$, donc $z+u\in C$. Cela prouve que la boule ouverte de centre z et de rayon $\delta/2(1-t)$ est contenue dans C ; en particulier, $z\in\mathring{C}$. □

Corollaire A.4.5. — *L'intérieur relatif d'une partie convexe est convexe.*

Corollaire A.4.6. — *Soit C une partie convexe d'un espace affine V.*

i) *On a $\overline{C}=\overline{C^\circ}$; en particulier, l'intérieur relatif $\mathring{C}$ de C est dense dans C.*

ii) *On a $\mathring{C}=(\overline{C})^\circ$;*

iii) *Si D est une partie convexe de V, les assertions $\mathring{C}=\mathring{D}$ et $\overline{C}=\overline{D}$ sont équivalentes.*

Démonstration. — On peut supposer que C n'est pas vide, puis que V est l'espace affine engendré par C.

(i) Démontrons d'abord que $\mathring{C}$ n'est pas vide. Puisque C engendre affinement V, il existe une suite $(x_0, \dots, x_n)$ de points de C qui est un repère affine de V. Alors C contient le simplexe $\mathrm{conv}(x_0, \dots, x_n)$ de sommets ces points. Le simplexe ouvert, ensemble des combinaisons convexes des x_i à coefficients strictement positifs, est ouvert dans V, non vide, et contenu dans C. Cela prouve que $\mathring{C}$ n'est pas vide. Fixons alors un point $a \in \mathring{C}$.

On a évidemment $\overline{C^\circ} \subset \overline{C}$. Inversement, soit $x \in \overline{C}$. Le segment $]a, x[$ est contenu dans $\mathring{C}$, et x en est un point adhérent. Cela prouve que x appartient à l'adhérence de $\mathring{C}$, ce qu'il fallait démontrer.

(ii) On a $\mathring{C} \subset \overline{C}^\circ$. Inversement, soit x un point intérieur de $\overline{C}$. Soit S un simplexe de V, contenu dans $\overline{C}$ tel que $x \in \mathring{S}$, c'est-à-dire que x soit barycentre des sommets $(x_0, \dots, x_n)$ de S à coefficients strictement positifs. L'ensemble des familles $(y_0, \dots, y_n)$ de V^{n+1} qui sont des repères affines de V par rapport auquel les coordonnées barycentriques de x sont strictement positives est un ouvert de V^{n+1}. Il contient le point $(x_0, \dots, x_n)$ de $\overline{C}^{n+1}$, donc contient un point $(y_0, \dots, y_n)$ de C^{n+1}. Cela fournit un simplexe T contenu dans C tel que $x \in \mathring{T}$; a fortiori, $x \in \mathring{C}$.

(iii) Cela se déduit des assertions (i) et (ii). □

Proposition A.4.7. — *Soit C et D des parties convexes d'un espace affine V. Supposons que $\mathring{C} \cap \mathring{D}$ ne soit pas vide. On a alors*

$$(C \cap D)^\circ = C^\circ \cap D^\circ \qquad \text{et} \qquad \overline{C \cap D} = \overline{C} \cap \overline{D}.$$

Démonstration. — Fixons un point $a \in \mathring{C} \cap \mathring{D}$.

Commençons par démontrer les égalités

$$\overline{C^\circ \cap D^\circ} = \overline{C \cap D} = \overline{C} \cap \overline{D}.$$

Les inclusions

$$\overline{C^\circ \cap D^\circ} \subset \overline{C \cap D} \subset \overline{C} \cap \overline{D}$$

sont évidentes, car $\overline{C}$ et $\overline{D}$ sont des parties fermées de V contenant $C \cap D$, et $C \cap D$ contient $C^\circ \cap D^\circ$. Inversement, soit $x \in \overline{C} \cap \overline{D}$. Le segment $]a, x[$ étant contenu dans C° et dans D°, il est contenu dans $C^\circ \cap D^\circ$. Comme le point x y est adhérent, on a $x \in \overline{C^\circ \cap D^\circ}$.

Puisque $C^\circ \cap D^\circ$ est une partie convexe de V, de même adhérence que $C \cap D$, elle a même intérieur relatif. On a donc $(C^\circ \cap D^\circ)^\circ = (C \cap D)^\circ$. En particulier, $(C \cap D)^\circ \subset C^\circ \cap D^\circ$.

Soit x un point de $\mathring{C} \cap \mathring{D}$. Cet ensemble contient un voisinage de x dans l'intersection des espaces affines engendrés par C et D ; en particulier, il contient un voisinage de x dans le sous-espace affine engendré par $C \cap D$, ce qui prouve que $\mathring{C} \cap \mathring{D}$ est contenu dans $(C \cap D)^\circ$. □

Proposition A.4.8. — *Soit $f : V \to W$ une application affine.*

a) *Soit C une partie convexe de V. Alors $f(C)$ est une partie convexe de W et l'on a $f(C)^\circ = f(C^\circ)$.*

b) *Soit D une partie convexe de W. Alors, $f^{-1}(D)$ est une partie convexe de V. Si, de plus, $f^{-1}(D^\circ) \neq \varnothing$, alors $f^{-1}(D)^\circ = f^{-1}(D^\circ)$.*

Démonstration. — Pour la première assertion, on peut supposer que C engendre V et que f est surjective. Comme f est continue et C° est dense dans $\overline{C}$, on a

$$f(C) \subset f(\overline{C}) = f(\overline{C^\circ}) \subset \overline{f(C^\circ)} \subset \overline{f(C)}.$$

Par suite, $f(C^\circ)$ et $f(C)$ ont même adhérence, donc même intérieur relatif. En particulier, $f(C)^\circ = f(C^\circ)^\circ \subset f(C^\circ)$. Puisque f est une application ouverte et que C° est ouvert dans V, $f(C^\circ)$ est ouvert dans W ; on a donc $f(C^\circ) \subset f(C)^\circ$. L'égalité $f(C)^\circ = f(C)^\circ$ en résulte.

Pour démontrer la seconde assertion, supposons d'abord que f soit l'inclusion d'un sous-espace affine. Alors, $f^{-1}(D) = D \cap V$, et $f^{-1}(D^\circ) = D^\circ \cap V = (D \cap V)^\circ = f^{-1}(D)^\circ$ en vertu de la proposition précédente. Dans le cas général, choisissons un sous-espace affine maximal V_1 de V tel que $f|_{V_1}$ soit injectif. Cela permet de supposer que $V = V_1 \times V_2$ et que f est de la forme $(v_1, v_2) \mapsto f_1(v_1)$, où $f_1 \colon V_1 \to W$ est injectif. Alors

$$f^{-1}(D^\circ) = f_1^{-1}(D^\circ) \times V_2 = f_1^{-1}(D)^\circ \times V_2 = (f_1^{-1}(D) \times V_2)^\circ = f^{-1}(D)^\circ,$$

ainsi qu'il fallait démontrer. □

APPENDICE B

STRUCTURE DES VARIÉTÉS ABÉLOÏDES

---

§ B.1. GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ET GÉOMÉTRIE FORMELLE

Soit k un corps valué complet ; on suppose que sa valuation n'est pas triviale.

B.1.1. — Un modèle formel $\mathfrak{X}$ d'un espace strictement k-analytique X est un k°-schéma formel *plat*, localement topologiquement de présentation finie muni d'un isomorphisme de $\mathfrak{X}_\eta$ sur X (qu'on considérera être une égalité). Nous renvoyons par exemple au §1 de **[10]** pour la construction (dans un cadre un peu plus général où $\mathfrak{X}$ n'est pas supposé plat).

On dispose aussi d'une application de spécialisation $\pi\colon \mathfrak{X}_\eta \to \mathfrak{X}_s$; elle est anticontinue et surjective. La preuve de cette surjectivité ne semble pas explicitée dans la littérature ; pour les points fermés, renvoyons à la proposition 8.3/8 de **[19]** ; on s'y ramène par changement de base.

B.1.2. — Le théorème suivant est une variante du théorème de Raynaud ; sa preuve consiste essentiellement à vérifier que la construction faite par Raynaud fournit un résultat un peu plus précis que celui traditionnellement donné.

Théorème B.1.3. — *Soit X un espace strictement k-analytique topologiquement séparé. Soit $(V_i)_{i\in I}$ un G-recouvrement localement fini de X par des domaines strictement analytiques compacts, pour tout $i \in I$, soit $\mathfrak{V}_i$ un modèle formel de V_i. Il existe un modèle formel $\mathfrak{X}$ de X et un recouvrement ouvert $(\mathfrak{U}_i)_{i\in I}$ de $\mathfrak{X}$ tels que pour tout $i \in I$, $\mathfrak{U}_{i,\eta} = U_i$ et $\mathfrak{U}_i$ est un éclatement admissible de $\mathfrak{V}_i$.*

Lemme B.1.4. — *Le théorème B.1.3 est vrai lorsque l'ensemble I est fini.*

Démonstration. — Soit X un espace strictement k-analytique, réunion de deux domaines strictement analytiques compacts U et V, soit $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ des modèles formels de U et V. Démontrons qu'il existe alors un modèle formel $\mathfrak{X}$ de X et deux ouverts $\mathfrak{U}'$ et $\mathfrak{V}'$ de $\mathfrak{X}$ tels que :

a) $\mathfrak{U}'_\eta = U$ et $\mathfrak{U}'$ est un éclatement admissible de $\mathfrak{U}$;
b) $\mathfrak{V}'_\eta = V$ et $\mathfrak{V}'$ est un éclatement admissible de $\mathfrak{V}$.

Posons $W = U \cap V$; c'est un domaine compact de X, car X est topologiquement séparé. Le lemme 8.4/5 de [**19**] appliqué à $\mathfrak{U}$ et au domaine analytique W de $U = \mathfrak{U}_\eta$ fournit un éclatement admissible $\mathfrak{U}' \to \mathfrak{U}$ et un ouvert formel $\mathfrak{W}'_1$ de $\mathfrak{U}'$ de fibre générique W. De même, il existe un éclatement admissible $\mathfrak{V}' \to \mathfrak{V}$ et un ouvert formel $\mathfrak{W}'_2$ de $\mathfrak{V}'$ de fibre générique $W = V \cap U$. D'après le lemme 8.4/4 (d) de [**19**], il existe un diagramme d'éclatements admissibles

$$\begin{array}{ccc} & \mathfrak{W}'' & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathfrak{W}'_1 & & \mathfrak{W}'_2 \end{array}$$

induisant l'identité de W sur les fibres génériques. Comme $\mathfrak{W}'_1$ et $\mathfrak{W}'_2$ sont quasi-compacts, ces deux éclatements admissibles se prolongent en des éclatements admissibles $\mathfrak{U}' \leftarrow \mathfrak{U}''$ et $\mathfrak{V}'' \to \mathfrak{V}'$ ([**19**], proposition 8.2/13). Soit $\mathfrak{X}$ le recollement de $\mathfrak{U}''$ et $\mathfrak{V}''$ le long de $\mathfrak{W}''$. C'est un modèle formel de X. Comme le composé de deux éclatements admissibles est un éclatement admissible ([**19**], lemme 8.2/11), le recouvrement ouvert $(\mathfrak{U}'', \mathfrak{U}'')$ satisfait les conditions requises. □

Lemme B.1.5. — *Le théorème B.1.3 est vrai lorsque l'ensemble $I = \mathbf{N}$ et que $V_m \cap V_n = \varnothing$ dès que $|m - n| \geqslant 2$.*

Démonstration. — Pour tout n, posons $W_n = V_0 \cup \cdots \cup V_n$. C'est un espace strictement analytique compact dont $(V_0, \ldots, V_n)$ est un G-recouvrement fini par des domaines strictement analytiques ; nous allons en construire un modèle $\mathfrak{W}_n$ muni d'un recouvrement ouvert $(\mathfrak{V}_{n,i})_{i \leqslant n}$ tel que $(\mathfrak{V}_{n,i})_\eta = V_i$ pour tout i, de sorte que les propriétés suivantes soient satisfaites :

a) Pour tous i, n tels que $i \leqslant n$, $\mathfrak{V}_{n,i}$ domine $\mathfrak{V}_i$;
b) Pour tous i, m, n tels que $i \leqslant m \leqslant n$, $\mathfrak{V}_{n,i}$ domine $\mathfrak{V}_{m,i}$;
c) Pour tous i, m, n tels que $i \leqslant m - 2$ et $m \leqslant n$, alors $\mathfrak{V}_{n,i} = \mathfrak{V}_{m,i}$.

Pour $n = 0$, on pose $\mathfrak{W}_0 = \mathfrak{V}_{0,0} = \mathfrak{V}_0$.

Supposons $\mathfrak{W}_m$ et $\mathfrak{V}_{m,i}$ construits pour $i \leqslant m \leqslant n$; construisons $\mathscr{W}_{n+1}$.

Commençons par recoller $\mathfrak{V}_{n,n}$ et $\mathfrak{V}_{n+1}$. D'après le lemme B.1.4, appliqué à $V_n \cup V_{n+1}$ et à son recouvrement (V_n, V_{n+1}) et à la famille de modèles $(\mathfrak{V}_{n,n}, \mathfrak{V}_{n+1})$ il existe un schéma formel $\mathfrak{S}$, un recouvrement ouvert $(\mathfrak{V}'_{n,n}, \mathfrak{V}'_{n+1})$ de $\mathfrak{S}$ induisant le recouvrement (V_n, V_{n+1}), où $\mathfrak{V}'_{n,n}$ est un éclatement admissible de $\mathfrak{V}_{n,n}$ et $\mathfrak{V}'_{n+1}$ est un éclatement admissible de $\mathfrak{V}_{n+1}$. Soit I le faisceau cohérent d'idéaux ouverts sur $\mathfrak{V}_{n,n}$ définissant $\mathfrak{V}'_{n,n}$. Pour $i \leqslant n - 2$, la fibre générique V_n de $\mathfrak{V}_{n,n}$ est disjointe de celle, V_i, de $\mathfrak{V}_{n,i}$. D'après la proposition 8.2/13 de [**19**], il existe un faisceau cohérent d'idéaux ouverts J sur $\mathscr{W}_n$ prolongeant I et dont la restriction à l'union des $\mathscr{V}_{n,i}$ pour $i \leqslant n - 2$ est le faisceau structural. Soit $\mathfrak{W}'_n$ l'éclatement admissible de $\mathfrak{W}_n$ le long de J ; c'est un modèle de W_n dont $\mathfrak{V}'_{n,n}$ est un ouvert.

Soit $\mathfrak{W}_{n+1}$ le schéma formel obtenu par recollement de $\mathfrak{W}'_n$ et $\mathfrak{S}$ le long de $\mathfrak{W}'_{n,n}$. Par construction, $\mathfrak{V}'_{n+1}$ en est un ouvert que l'on note $\mathfrak{V}_{n+1,n+1}$. On pose aussi $\mathfrak{V}_{n+1,n} = \mathfrak{V}'_{n,n}$. Enfin, pour $i \leqslant n - 1$, on note $\mathfrak{V}_{n+1,i}$ l'image réciproque de $\mathfrak{V}_{n,i}$ dans l'ouvert $\mathfrak{W}'_n$ de $\mathfrak{W}_{n+1}$. Si $i \leqslant n - 2$, $\mathfrak{V}_{n+1,i} = \mathfrak{V}_{n,i}$.

La construction est ainsi obtenue par récurrence.

Pour tout i, notons $\mathfrak{U}_i$ la limite du système inductif essentiellement constant $(\mathfrak{V}_{n,i})_{n \geqslant i}$. La famille $(\mathfrak{U}_i)$ se recolle en un schéma formel $\mathfrak{X}$ qui satisfait les conditions requises. □

Preuve du théorème B.1.3. — On peut supposer que X est connexe.

Définissons une suite (W_n) de domaines strictement analytiques compacts de X et une suite (I_n) de parties finies de I telles que $W_n = \bigcup_{i\in I_n} V_i$. Choisissons un élément $i_0 \in I$ et posons $W_0 = V_{i_0}$; posons $I_0 = \{i_0\}$. Si $W_0, \dots, W_n$, et $I_0, \dots, I_n$ sont définis, posons I_{n+1} l'ensemble des $i \in I$ tels que tels que V_i rencontre W_n, mais V_i ne rencontre aucun des W_m, pour $m < n$, et soit W_{n+1} la réunion des V_i, pour $i \in I_{n+1}$. Comme le recouvrement (V_i) est localement fini, l'ensemble I_{n+1} est fini, de sorte que W_{n+1} est un domaine strictement analytique compact.

Pour tout n, choisissons un modèle formel $\mathfrak{W}_n$ de W_n possédant un recouvrement ouvert $(\mathfrak{V}_{n,i})_{i\in I_n}$, où $\mathfrak{V}_{n,i}$ est, pour tout $i \in I_n$, un éclatement admissible de $\mathfrak{V}_i$.

Appliquons le lemme B.1.5 à l'espace X et à la famille $(\mathfrak{W}_n)$. On en déduit l'existence d'un modèle $\mathfrak{X}$ muni d'un recouvrement ouvert $(\mathfrak{W}'_n)$ où, pour tout n, $\mathfrak{W}'_n$ est un éclatement admissible de $\mathfrak{W}_n$. Pour tout $i \in I$, il existe un unique entier n tel que $i \in I_n$; notons $\mathfrak{U}_i$ l'image réciproque de $\mathfrak{V}_{n,i}$ dans $\mathfrak{W}'_n$. Le modèle $\mathfrak{X}$ et la famille $(\mathfrak{U}_i)$ satisfont les conditions du théorème B.1.3. □

Corollaire B.1.6. — *Tout espace strictement k-analytique paracompact possède un modèle formel.*

Démonstration. — Soit X un tel espace. Il est topologiquement séparé, par définition d'un espace topologique paracompact. Par hypothèse, X possède un G-recouvrement strictement affinoïde. Puisque X est paracompact, ce G-recouvrement peut être raffiné en un G-recouvrement $(X_i)_{i\in I}$ qui est localement fini. Pour tout i, choisissons un modèle de l'espace affinoïde X_i (choisir un système d'équations à coefficients entiers et quotienter par la $k^{\circ\circ}$-torsion). D'après le théorème B.1.3, il existe un modèle formel $\mathfrak{X}$ de X. □

Corollaire B.1.7. — *Soit X un espace strictement analytique paracompact, soit $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille finie d'éléments de $\mathscr{O}_X(X)$ telles que $|f_\alpha(x)| \leqslant 1$ pour tout $\alpha \in A$ et tout $x \in X$. Il existe un modèle $\mathfrak{X}'$ de $\mathfrak{X}$ tel que chaque f_α appartienne à $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}(\mathfrak{X}')$.*

Démonstration. — Soit $(\mathfrak{X}_i)$ un recouvrement ouvert affine de $\mathfrak{X}$ dont les fibres génériques (X_i) forment un G-recouvrement localement fini de X. D'après le lemme 8.4/6 de **[19]**, il existe pour tout i un éclatement admissible $\mathfrak{X}'_i$ de $\mathfrak{X}_i$ tel que $f_\alpha|_{X_i}$ appartient à $\mathscr{O}(\mathfrak{X}'_i)$ pour tout $\alpha \in A$. D'après le théorème B.1.3, il existe un modèle $\mathfrak{X}'$ de X possédant un recouvrement ouvert $(\mathfrak{X}''_i)$ tel que $\mathfrak{X}''_i$ domine $\mathfrak{X}'_i$ pour tout i. Il convient. □

Théorème B.1.8. — *Soit X un espace strictement k-analytique paracompact et soit $\mathfrak{X}$ un modèle formel de X. Soit $\mathscr{M}$ un faisceau cohérent sur X_{G}.*

a) *Il un faisceau cohérent $\mathfrak{M}$ de $\mathscr{M}$ sur $\mathfrak{X}$ dont la fibre générique est égale à $\mathscr{M}$.*

b) *Si $\mathscr{M}$ est localement libre et $(\mathfrak{X}, \mathfrak{M})$ en est un modèle, il existe un éclatement admissible $p\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ tel que le transformé strict de $\mathfrak{M}$ par p soit localement libre.*

Apparemment, la preuve ne se trouve dans la littérature (proposition 5.6 de **[25]**, par exemple) que sous l'hypothèse que X est compact. Comme nous allons voir, la preuve donnée s'applique en général.

Démonstration. — a) On peut supposer que X est connexe ; puisqu'il est paracompact, $\mathfrak{X}$ est la réunion d'une *suite* $(\mathfrak{U}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'ouverts formels affines dont les fibres génériques forment un G-recouvrement affinoïde de X. Pour tout entier n, posons aussi $\mathfrak{V}_n = \bigcup_{m=0}^{n} \mathfrak{U}_m$.

Soit n un entier. La fibre générique $\mathfrak{U}_{n,\eta}$ de $\mathfrak{U}_n$ étant affinoïde, il existe un faisceau cohérent $\mathfrak{M}_n$ sur $\mathfrak{U}_n$, sans k°-torsion, dont la fibre générique est égale à $\mathscr{M}$ sur $\mathfrak{U}_{n,\eta}$; il suffit par exemple de prendre une présentation de $\mathscr{M}$ à coefficients entiers et de quotienter par la $k^{\circ\circ}$-torsion.

On construit alors par récurrence un faisceau cohérent $\mathfrak{M}'_n$ sur $\mathfrak{V}_n$ dont la restriction à $\mathfrak{V}_{n-1}$ est égale à $\mathfrak{M}'_{n-1}$ et dont la fibre générique est $\mathscr{M}$ sur $\mathfrak{U}_{n,\eta}$. Le point-clé est le lemme 5.7 de [**25**] qui explique comment, étant donné $\mathfrak{M}'_n$, comment modifier $\mathfrak{M}_{n+1}$ de sorte qu'il se recolle avec $\mathfrak{M}'_n$ sur $\mathfrak{V}_n \cap \mathfrak{U}_{n+1}$.[(1)] Cela fournit un modèle formel $\mathfrak{M}$ de $\mathscr{M}$.

b) Supposons maintenant que $\mathscr{M}$ est localement libre et expliquons comment utiliser le théorème de platification par éclatements de Raynaud ([**26**], théorème 4.1) pour transformer un modèle formel $\mathfrak{M}$ de $\mathscr{M}$ en un modèle localement libre. On se ramène au cas où X est connexe ; reprenons le recouvrement ouvert croissant $(\mathfrak{V}_n)$ considéré précédement. On va construire un système projectif $(\mathfrak{X}_n)$ de modèles formels de X, avec $\mathfrak{X}_{-1} = \mathfrak{X}$, dont les morphismes de transition sont des éclatements admissibles, de sorte qu'au-dessus de $\mathfrak{V}_n$, le transformé strict de $\mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{X}_n$ soit localement libre et le morphisme de transition $\mathfrak{X}_{n+1} \to \mathfrak{X}_n$ soit un isomorphisme. La limite projective de ce système est un schéma formel $\mathfrak{X}'$ qui s'identifie à $\mathfrak{X}_n$ au-dessus de $\mathfrak{V}_n$, le morphisme canonique $\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ est un éclatement admissible et le transformé strict de $\mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{X}'$ est localement libre ; c'est un modèle de $\mathscr{M}$.

On pose $\mathfrak{X}_{-1} = \mathfrak{X}$. Supposons $\mathfrak{X}_n$ construit, notons $\mathfrak{F}$ le transformé strict de $\mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{X}_n$, notons $\mathfrak{W}$ l'image réciproque de $\mathfrak{V}_n$ et $\mathfrak{W}'$ celle de $\mathfrak{V}_{n+1}$. Il existe un idéal cohérent ouvert $\mathscr{J}'_n$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{W}'}$ tel que le transformé strict de $\mathfrak{F}|_{\mathfrak{W}'}$ par l'éclatement admissible correspondant soit localement libre ; de plus, on peut suppose que $\mathscr{J}'_n$ est trivial sur l'ouvert $\mathfrak{W}$ sur lequel $\mathfrak{F}$ est localement libre. Prolongeons l'idéal $\mathscr{J}_n$ en un idéal cohérent ouvert de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$ ([**19**], proposition 8.2/13) et prenons pour espace $\mathfrak{X}_{n+1}$ l'éclatement admissible correspondant. Le système $(\mathfrak{X}_n)$ ainsi défini convient. □

§ B.2. ADHÉRENCE DE ZARISKI DES DIVISEURS DE CARTIER

Proposition B.2.1. — *Soit A un anneau de valuation, soit K son corps des fractions. Soit $f\colon X \to \mathrm{Spec}(A)$ un morphisme lisse de schémas. Soit Y un diviseur de Cartier effectif de X_K. L'adhérence schématique de Y dans X est un diviseur de Cartier effectif de X.*

(Voir aussi [**96**], lemme 2.9.)

Démonstration. — On peut supposer que X est de type fini et de dimension relative constante. Notons Z l'adhérence schématique de Y dans X. Par définition de l'adhérence schématique, $\mathscr{O}_Z$ est sans-A-torsion, donc Z est plat sur A. D'après le théorème 3 de [**106**], il est alors de présentation finie. En particulier, il est de codimension relative 1 en tout point et ne contient donc aucune composante irréductible d'une fibre de $X \to \mathrm{Spec}(A)$. Les anneaux locaux de X sont intègres. Il s'agit donc de prouver que l'idéal de Z est principal au voisinage de tout point.

(1) Avec les notations de *loc. cit.*, il convient plutôt de recoller $\mathscr{M}_1$ et $g^{-n}\mathscr{M}'_2 + g^m\mathscr{M}_2$, où m est un entier tel que $g^m\mathfrak{M}_{21} \subset \mathscr{M}_{12}$.

Par approximation noethérienne, il existe une sous-$\mathbf{Z}$-algèbre normale et de type fini $\mathscr{A}$ de A, un morphisme lisse $\varphi\colon \mathscr{X} \to \mathrm{Spec}(\mathscr{A})$ et un sous-schéma fermé $\mathscr{Z}$ de $\mathscr{X}$ induisant $f\colon X \to \mathrm{Spec}(A)$ et Z par changement de base à A.

Soit $z \in Z$, posons $s = f(z)$; soit $\zeta \in \mathscr{Z}$ et $\sigma = \varphi(\zeta) \in \mathrm{Spec}(\mathscr{A})$ leurs images. Par hypothèse, aucune composante irréductible de $f^{-1}(s)$ n'est contenue dans Z ; par conséquent, aucune composante irréductible de $\varphi^{-1}(\sigma)$ n'est contenue dans $\mathscr{Z}$. D'après la proposition 21.14.3 de [**72**] (théorème de Ramananujam–Samuel), l'idéal de $\mathscr{Z}$ dans $\mathscr{X}$ est principal au voisinage de ζ. Par suite, l'idéal de Z dans X est principal au voisinage de z. Cela conclut la démonstration. □

Corollaire B.2.2. — *Soit A un anneau de valuation, soit K son corps de fractions. Soit $f\colon X \to \mathrm{Spec}(A)$ un morphisme lisse et de présentation finie de schémas. L'homomorphisme de* $\mathrm{Pic}(X)$ *dans* $\mathrm{Pic}(X_K)$ *est surjectif.*

Si les fibres de f sont géométriquement intègres, cet homomorphisme est bijectif.

(Pour l'injectivité, on utilisera seulement de A que c'est un anneau normal de groupe de Picard trivial.)

Démonstration. — Soit L un fibré en droites sur X_K. Dans chaque composante connexe de X_K, on choisit un ouvert non vide sur lequel L est trivialisable et on en choisit une trivialisation ; la famille de ces trivialisations définit une section rationnelle inversible s de L. Comme X_K est lisse, et en particulier localement factoriel, chaque composante du diviseur de Cartier $\mathrm{div}(s)$ est elle-même un diviseur de Cartier, ce qui permet d'écrire $\mathrm{div}(s)$ comme la différence $D - D'$ de deux diviseurs de Cartier *effectifs* sur X_K. D'après la proposition B.2.1, leurs adhérences schématiques E et E' sont des diviseurs de Cartier sur X. Par construction $\mathscr{O}_X(E - E')|_{X_K}$ est isomorphe à $\mathscr{O}_{X_K}(D - D')$, donc à L. Cela démontre la surjectivité de l'homomorphisme indiqué.

Supposons que les fibres de f sont géométriquement intègres et démontrons l'injectivité de cet homomorphisme. Soit L un fibré en droites sur X dont la restriction à X_K est trivialisable. Comme la propriété pour les fibres d'un morphismes d'être géométriquement intègres est constructible, il existe un sous-anneau R de A, qui est une $\mathbf{Z}$-algèbre de type fini normale, un morphisme $\varphi\colon \mathscr{X} \to \mathrm{Spec}(R)$, lisse et de présentation finie, à fibres géométriquement intègres, et un fibré en droites $\mathscr{L}$ sur $\mathscr{X}$ tel que $\mathscr{L}_{\mathrm{Frac}(R)}$ soit trivialisable, induisant f et L par changement de base. Compte-tenu de [**72**, Err., 53, (21.4.13)], il existe un fibré en droites $\mathscr{M}$ sur $\mathrm{Spec}(R)$ tel que $\mathscr{L}$ est isomorphe à $\varphi^*\mathscr{M}$. Il s'ensuit que L est isomorphe à f^*M, où M est le fibré en droites sur $\mathrm{Spec}(A)$ déduit de $\mathscr{M}$. Puisque A est local, M est trivialisable, et L l'est donc aussi. □

§ B.3. CORPS DE DÉFINITION DES DOMAINES ANALYTIQUES

Proposition B.3.1. — *Soit X un espace k-analytique topologiquement séparé. Soit K une extension complète de k et soit W un domaine analytique de X_K.*

a) *Il existe au plus un domaine analytique compact V de X tel que $W = V_K$.*

b) *Soit K_0 un sous-corps dense de K contenant k. Si W est compact, il existe un sous-corps k' de K_0, de type fini sur k, dont on note K' l'adhérence dans K, et un domaine analytique V' de $X_{K'}$ tels que $W = V'_K$.*

Démonstration. — Notons $\pi\colon X_K \to X$ de changement de base ; il est surjectif. Si V est un domaine analytique de X_K tel que $W = V_K$, on a $V = \pi(W)$ et $W = \pi^{-1}(V)$, d'où l'unicité.

Cela démontre plus généralement qu'il existe un domaine analytique V de X tel que $W = V_K$ si et seulement si $\pi(W)$ est un domaine analytique de X tel que $W = \pi^{-1}(\pi(W))$. On constate ainsi que cette propriété est locale pour la G-topologie de X.

Comme $\pi(W)$ est compact, il existe une famille finie (U_i) de domaines affinoïdes de X dont la réunion recouvre $\pi(W)$. Il suffit de prouver le résultat pour les domaines analytiques $W \cap \pi^{-1}(U_i)$ de $U_{i,K}$, quitte à prendre, sur l'extension composée des extensions de type fini qui apparaissent, la réunion des domaines analytiques construits. On suppose donc que X est affinoïde. Dans ce cas, X_K est affinoïde, et W est réunion finie de domaines rationnels de X_K, en vertu du théorème de Gerritzen–Grauert.

On peut donc supposer que W est un domaine rationnel de X_K. Il est ainsi décrit par une combinaison d'inégalités $|f_1| \leqslant \lambda_1|g|$, …, $|f_n| \leqslant \lambda_n|g|$, où $f_1, \ldots, f_n, g$ sont des éléments de $\mathscr{O}(X_K)$ sans zéro commun et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des nombres réels strictement positifs. En particulier, g ne s'annule pas sur W ; comme W est compact, g est minorée sur W et on peut ajouter à ce système d'inégalités une inégalité de la forme $1 \leqslant \lambda_0|g|$. L'anneau $\mathscr{O}(X) \otimes_k K_0$ est dense dans $\mathscr{O}(X_K)$. Grâce à l'inégalité ultramétrique, on peut remplacer les f_i et g par des éléments de $\mathscr{O}(X) \otimes_k K_0$ sans changer le domaine décrit par les inégalités ci-dessus. Il suffit de prendre le sous-corps k' de K_0 engendré par les coefficients d'une représentation des f_i et g dans le produit tensoriel $\mathscr{O}(X) \otimes_K K_0$. □

Corollaire B.3.2. — *Supposons que W est compact et que K est la complétion d'une clôture algébrique de k.*

a) *Il existe une extension finie k' de k contenue dans K et un domaine analytique compact V' de $X_{k'}$ tels que $W = V'_K$;*

b) *Si k n'est pas trivialement valué, on peut choisir k' séparable sur k.*

Démonstration. — La première assertion est immédiate, et la seconde résulte de ce que la clôture séparable de k dans K est dense dans K (**[20]**, proposition 3.4.1/6). □

Remarque B.3.3. — Supposons que la valuation de k n'est pas triviale. La démonstration de la proposition prouve que si X est un espace strictement k-analytique, et si W est un domaine strictement K-analytique de X_K, il existe une extension k' comme dans la proposition (ou dans le corollaire) et un domaine strictement k'-analytique V' de $X_{k'}$ tels que $W = X_K$. On procède de la même manière, en prenant $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ égaux à 1 et λ_0 dans $|k^\times|$.

§ B.4. ESPACES FORMELLEMENT ANALYTIQUES

Soit k un corps ultramétrique complet dont la valeur absolue est non triviale. Dans ce paragraphe, tous les espaces analytiques considérés seront et nous noterons $\widetilde{\cdot}$ les réductions classiques, non graduées.

Définition B.4.1. — *Soit X un espace strictement affinoïde et soit $\pi\colon X \to \widetilde{X}$ l'application de réduction. On dit qu'un domaine analytique V de X est un* domaine formel *si $\pi(V)$ est un ouvert de $\widetilde{X}$ et si $V = \pi^{-1}(\pi(V))$.*

Cela revient à demander qu'il existe une famille finie (f_i) de fonctions analytiques sur X de normes spectrales inférieures ou égales à 1 telles que V soit la réunion des domaines $\{|f_i(x)| = 1\}$.

Un domaine formel est un domaine strictement analytique compact.

Lemme B.4.2. — *Soit X un espace strictement affinoïde et soit V un domaine affinoïde de X. On a les équivalences :*

a) *Le domaine analytique V est un domaine formel de X ;*

b) *L'immersion de V dans X induit une immersion ouvertes $\widetilde{V} \to \widetilde{X}$ entre leurs réductions canoniques ;*

c) *Le domaine V est l'image réciproque d'un ouvert affine de $\widetilde{X}$ par l'application de réduction.*

Notons $\pi\colon X \to \widetilde{X}$ l'application de réduction canonique. L'image de $\widetilde{V}$ dans $\widetilde{X}$ par le morphisme induit par l'immersion $V \hookrightarrow X$ est égale à $\pi(V)$, par construction. Ainsi, si les assertions du lemme sont satisfaites, la réduction canonique $\widetilde{V}$ de V s'identifie à l'ouvert $\pi(V)$ de $\widetilde{X}$.

Si V est un domaine formel quelconque de X, il n'y aura donc pas d'ambiguïté à noter $\widetilde{V}$ l'ouvert $\pi(V)$ de $\widetilde{X}$.

Démonstration. — L'équivalence (i)⇔(ii) est le théorème 1.2 de [**18**]. Si elles sont satisfaites, $\widetilde{V}$ est un schéma affine, car V est affinoïde, d'où l'assertion (iii). Enfin, l'implication (iii)⇒(i) est évidente. □

Définition B.4.3. — *Soit X un espace strictement k-analytique. Un* atlas affinoïde formel *sur X est un G-recouvrement $\mathscr{V}$ de X par des domaines strictement affinoïdes tel que pour tout couple (V, W) d'éléments de $\mathscr{V}$, le domaine analytique $V \cap W$ est un domaine formel de V et de W.*

Deux atlas affinoïdes formels sont dits compatibles si leur réunion est encore un atlas affinoïde formel. C'est une relation d'équivalence.

Un espace formellement analytique est un espace strictement k-analytique muni d'une classe d'équivalence d'atlas affinoïdes formels. Il possède alors un unique atlas affinoïde formel maximal ; les éléments de cet atlas sont appelés *domaines affinoïdes formels.*

Un espace formellement analytique est topologiquement séparé.

B.4.4. — Soit X un espace formellement analytique et soit $\mathscr{V}$ son atlas affinoïde formel maximal. Pour $U \in \mathscr{V}$, on note $\pi_U\colon U \to \widetilde{U}$ l'application de réduction canonique.

Pour tous $U, V, W \in \mathscr{V}$ tels que $W \subset U \cap V$, l'application canonique $\widetilde{W} \to \pi_U(W)$ est un isomorphisme, de même que l'application canonique $\widetilde{W} \to \pi_V(W)$. On peut donc recoller les $\tilde{k}$-schémas $\widetilde{U}$ et les applications $\pi_U\colon U \to \widetilde{U}$, pour U parcourant $\mathscr{V}$, en un $\tilde{k}$-schéma $\widetilde{X}$ et une application anticontinue surjective $\pi\colon X \to \widetilde{X}$.

On dit que $\widetilde{X}$ est la *réduction canonique* de l'espace formellement analytique X. (Elle dépend bien sûr de l'atlas affinoïde formel choisi, et pas seulement de la structure d'espace analytique sous-jacent.)

Comme les $\widetilde{U}$ sont réduits et de type fini, le $\tilde{k}$-schéma $\widetilde{X}$ est réduit et localement de type fini. Si X est compact, il est de type fini.

Exemple B.4.5. — a) Soit X un espace affinoïde. L'ensemble $\{X\}$ est un atlas affinoïde formel sur X qui le munit d'une structure d'espace analytique formel.

b) Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel plat et localement topologiquement de type fini sur k°. Soit $\mathscr{U}$ un recouvrement de $\mathfrak{X}$ par des ouverts formels affines. Alors, la famille des $\mathfrak{U}_\eta$, pour $\mathfrak{U} \in \mathscr{U}$, est un atlas affinoïde formel de $\mathfrak{X}_\eta$. La structure d'espace analytique formelle obtenue sur $X = \mathfrak{X}_\eta$ ne dépend pas du choix du recouvrement $\mathscr{U}$.

Le morphisme de réduction $\rho\colon X \to \mathfrak{X}_s$ est surjectif (voir B.1.1) ; il se factorise de manière unique par un morphisme fini et surjectif $\varphi\colon \widetilde{X} \to \mathfrak{X}_s$ (la finitude se déduit du théorème 6.3.5/1 de [**20**], voir aussi [**10**], §1, p. 541, ligne 12 en partant du bas).

Soit U un ouvert affine de $\mathfrak{X}_s$; alors $\rho^{-1}(U) = \pi^{-1}(\varphi^{-1}(U))$ et $\varphi^{-1}(U)$ est un ouvert affine de $\widetilde{X}$, car φ est un morphisme affine, puisque fini. D'après le lemme ci-dessous, $\rho^{-1}(U)$ est un domaine affinoïde formel de X.

Lemme B.4.6. — *Soit X un espace formellement analytique. Pour que X soit affinoïde, il faut et il suffit que sa réduction soit un schéma affine.*

Démonstration. — C'est le théorème 3.1 de [**18**]. □

B.4.7. — Soit X un espace formellement analytique et soit V un domaine analytique de X. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Il existe un ouvert Ω de $\widetilde{X}$ tel que $V = \pi^{-1}(\Omega)$;
b) V est G-recouvert par les domaines affinoïdes formels qu'il contient ;
c) $\pi(V)$ est un ouvert de $\tilde{X}$ et $V = \pi^{-1}(\pi(V))$.

On dira que V est un *domaine analytique formel* de X.

Définition B.4.8. — *Soit X et Y des espaces formellement analytiques. On dit qu'un morphisme d'espaces analytiques $f\colon X \to Y$ est* formel *si les domaines affinoïdes formels U de X tels qu'il existe un domaine affinoïde formel V de Y contenant $f(U)$ constituent un G-recouvrement de X.*

Lemme B.4.9. — *Soit X et Y des espaces formellement analytiques et soit $f\colon X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *Pour tout domaine analytique formel V de Y, l'image réciproque $f^{-1}(V)$ est un domaine analytique formel de X ;*

ii) *Pour tout domaine affinoïde formel V de Y, l'image réciproque $f^{-1}(V)$ est un domaine analytique formel de X ;*

iii) *Il existe un G-recouvrement de Y par des domaines affinoïdes formels V dont l'image réciproque $f^{-1}(V)$ est un domaine analytique formel de X ;*

iv) *f est un morphisme formel.*

Démonstration. — Les implications (i)⇒(ii)⇒(iii) sont évidentes.

(iii)⇒(iv). Soit $\mathscr{V}$ un G-recouvrement de Y par des domaines affinoïdes formels de Y tel que $f^{-1}(V)$ soit un domaine analytique formel de X, pour tout $V \in \mathscr{V}$. Pour tout $V \in \mathscr{V}$, choisissons un G-recouvrement $\mathscr{U}_V$ de $f^{-1}(V)$ par des domaines affinoïdes formels de X. La réunion des $\mathscr{U}_V$, pour $V \in \mathscr{V}$ est un G-recouvrement affinoïde formel de X qui garantit que f est un morphisme formel.

(iv)⇒(ii). Soit $\mathscr{U}$ un G-recouvrement de X par des domaines affinoïdes formels tel que pour tout $U \in \mathscr{U}$, il existe un domaine affinoïde formel V_U de Y tel que $f(U) \subset V_U$. Soit W un domaine affinoïde formel de Y ; démontrons que son image réciproque est un domaine analytique formel de X.

Soit $U \in \mathscr{U}$; l'intersection $W \cap V_U$ est réunion finie $\bigcup_{i\in I_U} W_i$ de domaines analytiques de V_U de la forme $W_i = \{|\varphi_i| = 1\}$, où φ_i est une fonction analytique sur V_U de norme spectrale inférieure ou égale à 1. L'image réciproque $U_i = f^{-1}(W_i) \cap U$ de W_i dans U est donc définie par $|f^*(\varphi_i)| = 1$ et la norme spectrale de $f^*(\varphi_i)$ est inférieure ou égale à 1. Comme $f^{-1}(W) \cap U = \bigcup_{i\in I_U} U_i$, cela démontre que $f^{-1}(W) \cap U$ est un domaine analytique formel de U.

Comme $f^{-1}(W)$ est G-recouvert par les $f^{-1}(W) \cap U$, pour $U \in \mathscr{U}$, il en résulte que $f^{-1}(W)$ est un domaine analytique formel de X, ce qu'il fallait démontrer.

(ii)⇒(i). Soit V un domaine analytique formel de Y et soit $\mathscr{W}$ un G-recouvrement de V par des domaines affinoïdes formels de Y. Pour tout $W \in \mathscr{W}$, choisissons un G-recouvrement $\mathscr{U}_W$ de $f^{-1}(W)$ par des domaines affinoïdes formels de X. Alors, la réunion de $\mathscr{U}_W$ est un G-recouvrement de $f^{-1}(V)$ par des domaines affinoïdes formels de X, ce qui prouve que $f^{-1}(V)$ est un domaine analytique formel de X. □

B.4.10. — La catégorie des espaces formellement analytiques possède des produits. Si X et Y sont des espaces formellement analytiques, leur produit a pour espace analytique sous-jacent le produit $X \times_k Y$, et ses domaines formellement affinoïdes sont les produits de domaines formellement affinoïdes de X et Y respectivement.

Par construction, on dispose d'un morphisme canonique $\widetilde{X \times_k Y} \to \widetilde{X} \times_{\tilde{k}} \widetilde{Y}$; il est fini.

B.4.11. — Soit A une k-algèbre strictement affinoïde. Toute présentation $f\colon k\{T_1, \dots, T_n\} \to A$ induit sur A une norme quotient qui domine la semi-norme spectrale de A ; on dit que A est distinguée, ou que l'espace affinoïde $\mathscr{M}(A)$ est distingué, s'il existe une telle présentation pour laquelle la semi-norme spectrale de A est égale à la norme quotient. Si l'algèbre A est distinguée, elle est réduite, sa semi-norme spectrale est une norme et prend ses valeurs dans $|k|$. Inversement, si k est un corps stable et A est une algèbre strictement affinoïde réduite dont la norme spectrale prend ses valeurs dans $|k|$, alors A est distinguée (théorème 6.4.3/1 de [**20**]).

Si A est distinguée, alors la k°-algèbre A° est topologiquement de présentation finie. Plus précisément, la démonstration du corollaire 2.6 de [**18**], prouve que toute famille finie $(a_1, \dots, a_n)$ dans A° dont les images dans $\widetilde{A}$ engendrent $\widetilde{A}$ engendre topologiquement A° (comme k°-algèbre) et A (comme k-algèbre). De même, l'inclusion $k^{\circ\circ}A^\circ \to A^{\circ\circ}$ est une égalité, et l'homomorphisme canonique de $\widetilde{k} \otimes_{k^\circ} A^\circ$ dans $\widetilde{A}$ est un isomorphisme ; en particulier, $\widetilde{k} \otimes_{k^\circ} A^\circ$ est réduit.

Inversement, si R est une k°-algèbre, plate et topologiquement de présentation finie, telle que $\widetilde{k} \otimes_{k^\circ} R$ soit réduite, alors, l'algèbre affinoïde R_k est distinguée et l'homomorphisme canonique de R dans $(R_k)^\circ$ est un isomorphisme. (Voir [**20**], proposition 6.4.3/4.)

B.4.12. — On dit qu'un espace formellement analytique X est distingué s'il possède un G-recouvrement formellement affinoïde composé de domaines affinoïdes distingués. Si X est distingué, tout domaine formellement affinoïde de X est distingué ([**18**], corollaire 2.5 et commentaires pages 16–17). Il s'ensuit que tout domaine analytique formel de X est un espace formellement analytique distingué.

B.4.13. — Soit X un espace formellement analytique distingué. Pour tout domaine formellement affinoïde U de X, la k°-algèbre $\mathscr{O}(U)^\circ$ est topologiquement de présentation finie et l'homomorphisme canonique $\widetilde{k} \otimes_{k^\circ} \mathscr{O}(U)^\circ \to \widetilde{\mathscr{O}(U)}$ est un isomorphisme. Les spectres formels $\mathrm{Spf}(\mathscr{O}(U)^\circ)$ se recollent en un schéma formel $\mathfrak{X}$, plat et localement topologiquement de présentation finie sur k°, dont la fibre générique s'identifie à l'espace formellement analytique X et la fibre spéciale à $\widetilde{X}$ de manière compatible aux applications de réduction.

Inversement, si $\mathfrak{X}$ est un k°-schéma formel, plat, localement topologiquement de présentation finie et à fibre spéciale réduite, alors l'espace formellement analytique $\mathfrak{X}_\eta$ est distingué et le schéma formel qui lui est associé s'identifie à $\mathfrak{X}$.

Cette construction induit une équivalence entre la catégorie des espaces formellement analytiques distingués sur k et celle des schémas formels plats, localement topologiquement de présentation finie sur k° dont la fibre spéciale est réduite.

B.4.14. — Soit X un espace formellement analytique distingué dont la fibre spéciale est géométriquement réduite. Alors, pour toute extension complète K de k, X_K est distingué, et sa fibre spéciale s'identifie à $\widetilde{X}_{\tilde{K}}$ ([**17**], lemme 1.6).

Soit X, Y des espaces formellement analytiques distingués dont les fibres spéciales sont géométriquement réduites (il suffit en fait que l'une des deux fibres spéciales soit géométriquement réduite). Alors, pour toute extension complète K de k, l'espace formellement analytique $X \times_k X$ est distingué et sa fibre spéciale s'identifie à $\widetilde{X} \times_{\tilde{k}} \widetilde{Y}$ (loc. cit.).

B.4.15. — Un groupe formellement analytique est un objet en groupes dans la catégorie des k-espaces formellement analytiques. Son espace analytique sous-jacent est alors un groupe k-analytique. Étant donné un groupe analytique G, une structure de groupe formellement analytique sur G est une structure d'espace formellement analytique pour laquelle la loi de groupe de G est un morphisme d'espaces formellement analytiques.

Théorème B.4.16 **([17], Satz 1.1).** — *Tout morphisme d'espaces k-analytiques en groupes entre groupes formellement analytiques est formellement analytique. En particulier, un groupe k-analytique possède au plus une structure de groupe formellement analytique.*

B.4.17. — Suivant [**17**], définition 1.7, on dit qu'un k-groupe formellement analytique G réduit a *bonne réduction* s'il est distingué et si sa fibre spéciale est géométriquement réduite.

Dans ce cas, la réduction de l'espace formellement analytique $G \times_k G$ s'identifie au produit $\widetilde{G} \times_{\tilde{k}} \widetilde{G}$, ([**17**], lemme 1.6). La loi de groupe sur G induit alors sur $\widetilde{G}$ une structure de $\tilde{k}$-schéma en groupes. Comme il est géométriquement réduit, il est lisse.

Si G a bonne réduction, alors G_K a bonne réduction, pour toute extension complète K de k, de réduction $\widetilde{G}_{\tilde{K}}$.

§ B.5. LE THÉORÈME D'UNIFORMISATION

Les variétés abéloïdes sont les analogues pour la géométrie non archimédienne des tores complexes. Les analytifiés de variétés abéliennes en fournissent des exemples cruciaux qui seront ceux qui nous intéresseront particulièrement.

Soit k un corps ultramétrique complet dont la valeur absolue est non triviale.

Définition B.5.1. — *Une* variété abéloïde *sur k est un k-groupe analytique connexe, propre et lisse.*

Une variété abéloïde est commutative ([**98**], corollaire 7.1.4).

L'analytifiée d'une k-variété abélienne est abéloïde.

La fibre générique d'un k°-schéma formel en groupes propre, lisse et connexe est une variété abéloïde. Les variétés abéloïdes obtenues de cette façon sont des groupes formellement analytiques à bonne réduction ; nous les appellerons simplement variétés abéloïdes à bonne réduction.

B.5.2. — Les variétés abéloïdes possèdent une uniformisation, inspirée par celle que l'on connaît dans le cas complexe, et qui a d'ailleurs été l'une des motivations pour le développement d'une géométrie analytique non archimédienne.

Cette uniformisation a d'abord été construite par Tate [**125**] pour les courbes elliptiques puis étendue aux variétés abéloïdes par Raynaud [**114**]. La théorie a été reprise et rédigée en détail par Bosch & Lütkebohmert : [**98**] (chapitre 7) et [**8**] (chapitre 6) ; voir aussi [**97**] dans le cas où la valuation de k est discrète, ainsi que [**21, 22**] dans le cas des variétés abéliennes.

La description de cette uniformisation fait jouer un rôle central aux tores et à leurs variantes affinoïdes ; nous allons commencer par quelques rappels à leur sujet.

B.5.3. — On note $\mathbf{G}_{\mathrm{m},k,1}$ le sous-groupe analytique compact de l'analytifié $\mathbf{G}_{\mathrm{m},k}^{\mathrm{an}} = \mathscr{M}(k\{T,T^{-1}\})$ du tore algébrique $\mathbf{G}_{\mathrm{m},k} = \mathrm{Spec}(k[T,T^{-1}])$ défini par la condition $|T| = 1$. On appelle *k-tore affinoïde* un k-groupe affinoïde T tel qu'il existe une extension complète K de k pour laquelle T_K est isomorphe à une puissance $(\mathbf{G}_{\mathrm{m},K,1})^n$; on dit alors que K déploie T, ou que T est déployé sur K. Si T est un k-tore affinoïde, il existe en fait une extension finie et séparable de k qui déploie T.

Dans [**16**], Bosch définit les k-tores affinoïdes en imposant que l'extension K comme ci-dessous soit le complété d'une clôture algébrique de k. Dans ce cas, le fait qu'on puisse supposer K finie et séparable est le théorème 2.6 de cette référence. Comme nous n'avons pas pu trouver une preuve du cas général dans la littérature, explicitons-la ici.

Soit k_1 une extension finie séparable de k tel que G_{k_1} soit un k_1-groupe analytique à bonne réduction. Quitte à agrandir K, on peut supposer qu'il contient une clôture algébrique de k_1. La fibre spéciale $\widetilde{G_K}$ est un tore algébrique déployé sur $\tilde{K}$; comme elle est égale à $(\widetilde{G_{k_1}})_{\tilde{K}}$, cela démontre que $\widetilde{G_{k_1}}$ est un $\widetilde{k_1}$-tore algébrique (non nécessairement déployé). Quitte à agrandir k_1, on peut donc supposer que $\widetilde{G_{k_1}}$ est un $\widetilde{k_1}$-tore algébrique déployé. Nous allons démontrer que cette extension k_1 convient alors. Quitte à remplacer k par k_1, on peut ainsi supposer que G est un k-groupe affinoïde à bonne réduction dont la fibre spéciale est un $\tilde{k}$-tore algébrique déployé, et il s'agit de démontrer que G est un k-tore affinoïde déployé.

Soit $\mathfrak{G}$ le k_0-schéma formel associé au groupe à bonne réduction G (c'est-à-dire le spectre formel de $\mathscr{O}(G)^\circ$). Soit u un isomorphisme de $\widetilde{k}$-groupes algébriques de $\mathbf{G}^n_{\mathrm{m},\widetilde{k}}$ sur $\widetilde{G}$. D'après [**73**, exposé X, prop. 2.1], il existe pour tout élément $a \in k^{\circ\circ}$ un unique isomorphisme u_a de $k^\circ/(a)$-schémas en groupes de $\mathbf{G}^n_{\mathrm{m},k^\circ/(a)}$ sur $\mathfrak{G}_{k^\circ/(a)}$ qui relève u. La famille des u_a définit alors un isomorphisme de schémas en groupes formels $\mathfrak{u}$ de $\mathfrak{G}^n_{\mathfrak{m}}$ sur $\mathfrak{G}$. En passant aux fibres génériques, il induit un isomorphisme de $\mathbf{G}^n_{\mathrm{m},k,1}$ sur G.

B.5.4. — Cet argument démontre en fait qu'un k-groupe affinoïde à bonne réduction G est un tore déployé si et seulement si sa réduction est un tore déployé.

Plus généralement, si G est un k-groupe affinoïde à bonne réduction, c'est un k-tore si et seulement si sa réduction est un $\tilde{k}$-tore ; si c'est le cas, G est déployé par une extension finie non ramifiée de k.

B.5.5. — Soit T un k-tore algébrique. Si T est déployé et $j\colon T \to \mathbf{G}^n_{\mathrm{m}}$ est un isomorphisme de tores, l'image réciproque de $\mathbf{G}^n_{\mathrm{m},k,1}$ est un domaine affinoïde de T^{an} et est un k-tore affinoïde. Il ne dépend pas du choix de j ; on le note T_1. Dans le cas général, si k' est une extension finie galoisienne qui déploie T, le tore affinoïde $T_{k',1}$ descend à k et s'identifie à domaine affinoïde T_1 de T^{an} qui est un k-tore affinoïde déployé par k'.

Comme dans [**16**, Satz 3.8], cette construction établit une équivalence de catégories de la catégorie des k-tores algébriques vers la catégorie des k-tores affinoïdes. En effet, ces deux catégories sont également identifiées, par les foncteurs des caractères, à la catégorie des $\mathbf{Z}$-modules libres de type fini munis d'une action de Galois, de façon compatible à la construction $T \mapsto T_1$.

Lemme B.5.6. — *Soit A une variété abéloïde sur k et soit N un domaine analytique compact de A qui est un sous-groupe analytique. Supposons que N soit un groupe formellement analytique à réduction semi-abélienne.*

a) *Pour tout groupe formellement analytique compact Z à bonne réduction et tout morphisme de groupes $f\colon Z \to A$, on a $f(Z) \subset N$.*

b) *Pour toute extension complète k' de k, le domaine $N_{k'}$ est le plus grand domaine analytique compact de $A_{k'}$ qui est un sous-groupe analytique et un groupe formellement analytique à bonne réduction.*

Démonstration. — L'assertion *a*) est la proposition 5.4.6 de [**98**], appliquée au point rationnel $z_0 = e$. Comme $N_{k'}$ satisfait les mêmes propriétés que N, l'assertion *b*) se déduit de *a*) en prenant pour f un morphisme d'inclusion. □

Proposition B.5.7. — *Soit A une variété abéloïde sur k. Il existe un unique domaine analytique compact N de A vérifiant les propriétés suivantes :*

a) *C'est un sous-groupe analytique de A ;*

b) *Il possède une structure de groupe formellement analytique ;*

c) *Il existe une extension finie séparable k' de k telle que $N_{k'}$ soit un groupe formellement analytique extension (dans la catégorie des groupes formellement analytiques) d'une variété abéloïde à bonne réduction par un tore affinoïde.*

La formation de N commute à toute extension des scalaires.

Notons que dans *c*), $N_{k'}$ est un groupe formellement analytique à bonne réduction semi-abélienne ; il est en particulier justiciable du lemme B.5.6.

On l'appellera le *domaine de Néron* de la variété abéloïde A. Supposons que k soit de valuation discrète et que A soit l'analytifié d'une variété abélienne ; soit $\mathscr{A}$ son modèle de Néron sur k° et supposons que la fibre spéciale de sa composante neutre $\mathscr{A}^\circ$ soit une variété semi-abélienne. Dans ce cas, la fibre générique du complété formel de $\mathscr{A}^\circ$, qui est égale à l'image réciproque de $\mathscr{A}_s^\circ$ par l'application de réduction, est le domaine de Néron de A.

Démonstration. — Le théorème 7.6.4 de **[98]** affirme qu'il existe une extension finie séparable K de k et un domaine analytique compact M de $B = A_K$ qui est un groupe formellement analytique, extension d'une variété abéloïde à bonne réduction par un tore affinoïde. Cette propriété reste vraie si l'on agrandit K.

La proposition s'en déduit par descente comme suit.

Démontrons d'abord l'assertion d'unicité. Soit N un domaine analytique vérifiant les conditions de la proposition. Quitte à agrandir K, on peut supposer que $k' \subset K$.

Comme $N_{k'}$ est distingué, N_K est un domaine analytique de A_K, qui en est un sous-groupe analytique, muni d'une structure de groupe formellement analytique distingué dont la réduction est une variété semi-abélienne ; c'est donc M_K d'après le lemme B.5.6, appliqué à N_K et à M_K. On en déduit que N est l'image de M par le morphisme de changement de base $X_K \to X$.

Pour établir l'existence d'un domaine analytique N vérifiant les conditions de la proposition, nous allons démontrer que « M descend à k ». Quitte à agrandir K, on peut supposer que l'extension $k \to K$ est galoisienne. Soit $g \in \mathrm{Gal}(K/k)$ et soit γ un automorphisme de corps valué de K qui étend g. Le domaine analytique $(gN)_K$ est égal à γM et satisfait les propriétés de M, donc est égal à M, d'après le lemme B.5.6. On en déduit que $gN = N$. Par une version « tordue » du théorème de pleine fidélité de Bosch (théorème B.4.16), le groupe $\mathrm{Gal}(K/k)$ agit sur N par des morphismes formellement analytiques. Le lemme 2.3 de **[22]** entraîne alors qu'il existe un domaine analytique N de A qui est un sous-groupe analytique, muni d'une structure formellement analytique, tel que $M = N_K$ en tant que groupe formellement analytique.

Soit N le domaine de Néron de A et soit K une extension complète de k. Comme N_K vérifie les conditions de l'énoncé qui caractérisent le domaine de Néron de la variété abéloïde A_K, c'est son domaine de Néron. Cela conclut la démonstration. □

B.5.8. — Soit A une variété abéloïde sur k et soit N le domaine de Néron de A (proposition B.5.7). *La catégorie des immersions fermées $j\colon T \to N$, où T est un tore affinoïde et j un morphisme de groupes analytiques, admet un objet final.*

Pour cette assertion, un argument de descente galoisienne permet de supposer que N a bonne réduction semi-abélienne déployée. Compte tenu de **[73]**, exposé XV, théorème 8.8, la catégorie étudiée s'identifie alors, via le foncteur de réduction, à celle des immersions fermées de $\tilde{k}$-tores $\widetilde{j}\colon \widetilde{T} \to \widetilde{N}$. Détaillons un peu l'argument.

L'anneau k° n'est pas noethérien, mais le schéma formel $\mathfrak{N}$ associé à la structure formelle analytique de N est topologiquement de présentation finie. Par suite, pour tout élément non nul a de k°, le $k^\circ/(a)$-schéma $\mathfrak{N}_a$ déduit de $\mathfrak{N}$ est de présentation finie ; il est lisse, car il est plat et que sa fibre spéciale est lisse. Couplé à un argument d'approximation noethérienne, le théorème 8.8 de l'exposé XV de **[73]** assure que le foncteur de réduction $\mathfrak{T} \mapsto \mathfrak{T}_s$ induit une bijection entre sous-tores formels de $\mathfrak{N}$ et sous-tores de $\widetilde{N}$. Autrement dit, le foncteur $T \mapsto \widetilde{T}$ induit une bijection entre sous-tores affinoïdes (Zariski-fermés) à bonne réduction de N et sous-tores de $\widetilde{N}$.

Comme le schéma en groupes semi-abélien $\widetilde{N}$ possède un plus grand sous-tore, le groupe formellement analytique N possède un plus grand sous-tore affinoïde (Zariski-fermé) à bonne réduction. Il reste à démontrer que tout sous-tore affinoïde affinoïde (Zariski-fermé) de N est à bonne réduction. Soit T un tel sous-tore affinoïde. Soit k' une extension finie galoisienne de k telle que $T_{k'}$ ait bonne réduction. Par ce qui précède, ce sous-tore de $N_{k'}$ correspond à un sous-tore de $\widetilde{N_{k'}} = \widetilde{N}_{\widetilde{k}'}$, isomorphe à $\widetilde{T_{k'}}$. Comme $\widetilde{N}$ est déployé, il existe un sous-tore S de $\widetilde{N}$ tel que $\widetilde{T_{k'}} = S_{\widetilde{k}'}$. On en déduit que T est l'unique sous-tore affinoïde (Zariski-fermé) à bonne réduction de N dont la réduction est S.

B.5.9. — Notons $j\colon T \to N$ l'immersion fermée maximale d'un tore affinoïde dans N. *Le quotient $B = N/T$ est une variété abéloïde sur k à potentielle bonne réduction. Plus précisément, si k' est une extension complète de k telle que $N_{k'}$ ait bonne réduction, alors $B_{k'}$ a bonne réduction.*

Détaillons l'argument.

Supposons d'abord que N soit extension d'une variété abéloïde à bonne réduction B par un tore affinoïde S ; alors $S = T$ et $N/T = B$.

Dans le cas général, il existe une extension finie galoisienne k' de k telle que le groupe analytique $(N/T)_{k'}$ soit une k'-variété abéloïde B' à bonne réduction. Cette variété abéloïde est munie d'une donnée de descente galoisienne de k' à k. Comme la réduction de B' est projective, tout ensemble fini de points de B' est contenu dans un domaine affinoïde formel de B', image réciproque d'un ouvert affine contenant les réductions des points considérés. Cela entraîne que la donnée de descente sur B' est effective, dans la catégorie des espaces formellement analytiques, si bien qu'il existe une variété abéloïde B sur k, qui est formellement analytique, et telle que $B' = B_{k'}$.

Notons que si B' est l'analytifié d'une variété abélienne, il en va de même de B par descente galoisienne schématique.

B.5.10. — Soit T_{a} le tore algébrique tel que $T = T_{\mathrm{a},1}$. On déduit du théorème 7.6.4, (b) de **[98]** et d'un argument de descente galoisienne finie que tout morphisme de groupes analytiques de T vers A s'étend de manière unique en un morphisme de groupes analytiques de $T_{\mathrm{a}}^{\mathrm{an}}$ dans A. En particulier, l'immersion fermée de T dans N s'étend de manière unique en un morphisme de groupes analytiques q de $T_{\mathrm{a}}^{\mathrm{an}}$ dans A.

Considérons le morphisme de groupes analytiques $q'\colon T_{\mathrm{a}}^{\mathrm{an}} \times N \to A$ déduit de q et de l'injection de N dans A. Le morphisme $t \mapsto (t^{-1}, t)$ de T dans $T_{\mathrm{a}}^{\mathrm{an}} \times N$ est une immersion fermée, son image est un sous-groupe analytique (Zariski-fermé) qu'on note D. Le quotient E de $T_{\mathrm{a}}^{\mathrm{an}} \times N$ par D est le produit contracté $T_{\mathrm{a}}^{\mathrm{an}} \times^T N$; on a par construction une suite exacte de k-groupes analytiques

$$1 \to T_{\mathrm{a}}^{\mathrm{an}} \to E \to B \to 0.$$

Le morphisme $q'\colon T_{\mathrm{a}}^{\mathrm{an}} \times N \to A$ passe au quotient et induit un morphisme analytique p de E dans A.

B.5.11. — Dans ce paragraphe et dans les deux qui suivent, on suppose que le domaine de Néron N a bonne réduction et que le tore T est déployé.

Soit $\mathfrak{V}$ un recouvrement formellement affinoïde de B trivialisant l'extension N ; pour tout $V \in \mathfrak{V}$, soit $f_V\colon V \to N$ une section de la projection $q|_N\colon N \to B^{\mathrm{an}}$. Sur $V \cap W$, les sections f_V et f_W diffèrent de la multiplication par un morphisme $f_{VW}\colon V \cap W \to T$. Ces morphismes (f_{VW}) forment un cocycle à valeurs dans T qui représente l'extension N, mais également, si on les considère comme un cocycle à valeurs dans $T_{\mathrm{a}}^{\mathrm{an}}$, l'extension E.

Pour $V \in \mathfrak{V}$, la section f_V permet d'identifier $q^{-1}(V)$ au produit $V \times T_{\mathrm{a}}^{\mathrm{an}}$; composons la projection sur le second facteur avec l'application de tropicalisation de T vers $T_{\mathrm{a,trop}}$; on obtient une application τ_V de $q^{-1}(V)$ dans $T_{\mathrm{a,trop}}$. Lorsqu'on identifie $T_{\mathrm{a}}^{\mathrm{an}}$ à $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^r$, l'espace $T_{\mathrm{a,trop}}$ s'identifie à $\mathbf{R}^r$ et chaque coordonnée de τ_V est le logarithme de la valeur absolue d'une fonction holomorphe inversible (un caractère du tore). Comme le cocycle (f_{VW}) est à valeurs dans T, ces applications τ_V se recollent en une application $\tau\colon E \to T_{\mathrm{a,trop}}$. (Dans le langage de ce travail, l'application τ est PL.)

La restriction de τ au tore $T_{\mathrm{a}}^{\mathrm{an}}$ est l'application de tropicalisation usuelle de $T_{\mathrm{a}}^{\mathrm{an}}$ sur $T_{\mathrm{a,trop}}$. Comme $\tau|_{T_{\mathrm{a}}^{\mathrm{an}}}$ est propre et que B est compacte, l'application $\tau\colon E \to T_{\mathrm{a,trop}}$ est surjective et propre.

Si $E = B$, T_{a} est de dimension 0 et τ est l'application constante.

B.5.12. — Nous nous sommes placés dans le cas déployé, et le théorème 7.6.4, *c*), de **[98]** affirme alors que le morphisme $p\colon E \to A$ est surjectif et que son noyau Λ est un sous-groupe discret, abélien libre de rang $\dim(T)$, de $E(k)$. Le Λ-torseur E est un $\mathbf{Z}^{\dim(T)}$-torseur topologique. L'image du réseau Λ par τ est un réseau cocompact de $T_{\mathrm{a,trop}}$ (corollaire 7.6.2 de **[98]**). Par suite, τ induit une application surjective de A^{an} dans le tore réel $T_{\mathrm{a,trop}}/\tau(\Lambda)$.

B.5.13. — Supposons encore que le domaine de Néron N ait bonne réduction et que T soit déployé. L'étude analytique de l'extension E (**[8]**, §6.5, p. 124) démontre que E est contractile ; cela repose sur le fait que la variété abéloïde B ayant bonne réduction, l'espace analytique B est contractile, de même que l'analytifié d'un tore. Cela fournit ainsi l'uniformisation analytique de A : E est un revêtement universel de A.

Plus précisément, Berkovich construit une rétraction par déformation de B sur le point de Gauss β correspondant au point générique de sa réduction, une rétraction par déformation de $T_{\mathrm{a}}^{\mathrm{an}}$ sur son squelette $(T_{\mathrm{a}}^{\mathrm{an}})_{\mathrm{sq}}$, et les combine pour obtenir une rétraction par déformation de E sur un sous-espace fermé $S(E)$ qui est le squelette de $(T_{\mathrm{a}}^{\mathrm{an}})_\beta$. La restriction de τ à $S(E)$ est un homéomorphisme de ce squelette sur $T_{\mathrm{a,trop}}$.

Cette rétraction par déformation est invariante par l'action de Λ par translation et identifie Λ à un réseau Γ de $S(E)$. Elle passe au quotient et induit donc une rétraction par déformation de A sur le tore réel $S(A) = S(E)/\Gamma$.

B.5.14. — Revenons maintenant à la situation générale.

Par descente galoisienne, il résulte du cas déployé que le morphisme $p\colon E \to A$ est surjectif, que son noyau Λ est un k-groupe étale et que p fait de E un Λ-torseur. Pour toute extension k' qui déploie la situation, $\Lambda_{k'}$ est un k'-groupe constant, abélien libre de rang $\dim(T)$.

Considérons une extension galoisienne finie k' déployant la situation. Alors, $E_{k'}$ est contractile, $p_{k'}\colon E_{k'} \to A_{k'}$ est un revêtement universel de $A_{k'}$. Cependant, $p\colon E \to A$ n'est pas, en général, un isomorphisme local (par exemple, dès que le noyau de p n'est pas déployé).

Cependant, après changement de base de k à une extension galoisienne k finie, les constructions du cas déployé fournissent une rétraction par déformation sur le squelette $S(A_{k'})$ qui est un tore réel de dimension $\dim(T)$. Berkovich démontre que les constructions données commutent à l'action de $\mathrm{Gal}(k'/k)$ et fournissent une rétraction par déformation de A sur le quotient du tore réel $S(A_{k'})$ par l'action de $\mathrm{Gal}(k'/k)$.

§ B.6. FIBRÉS EN DROITES SUR UNE VARIÉTÉ ABÉLOÏDE

B.6.1. — Nous allons maintenant rappeler comment l'uniformisation d'une variété abéloïde permet de décrire la catégorie des fibrés en droites sur icelle, d'après [**115, 23, 78, 98**]. Nous nous plaçons dans le cas déployé, c'est-à-dire que le tore T est déployé et que la variété abéloïde B a bonne réduction. Partons du diagramme fondamental que fournit l'uniformisation :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \Lambda & & & & \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle j} & \searrow^{\varphi} & & & \\ 1 & \longrightarrow & T_{\mathrm{a}}^{\mathrm{an}} & \longrightarrow & E & \xrightarrow{q} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

On dispose également d'un diagramme dual, classique dans la théorie des 1-motifs :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \Lambda' & & & & \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle j'} & \searrow^{\varphi'} & & & \\ 1 & \longrightarrow & T_{\mathrm{a}}^{\prime\mathrm{an}} & \longrightarrow & E' & \xrightarrow{q'} & B' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Rappelons sa construction.

Notons B' la variété abéloïde duale de B et $\mathscr{P}$ la biextension de Poincaré sur $B \times B'$; elles sont canoniquement munies de structures formellement analytiques que nous désignons par les mêmes notations. Nous avons noté $j\colon \Lambda \to E$ l'immersion canonique et posé $\varphi = q \circ j\colon \Lambda \to B$.

Notons Λ' le groupe des caractères du tore T_{a} et T'_{a} le tore algébrique de groupe de caractères Λ. À tout $\lambda' \in \Lambda'$ correspond par fonctorialité une extension $\lambda'_* E$ de B par $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$, donc un fibré en droites $\varphi'(\lambda') \in B'(k)$. L'application $\varphi'\colon \Lambda' \to B'(k)$ est un morphisme de groupes. De plus, le fibré en droites $q^*\varphi'(\lambda')$ possède une trivialisation canonique $s_{\lambda'}$ et l'application $\lambda' \mapsto s_{\lambda'}$ est additive.

Par bidualité, $B(k)$ s'interprète comme $\mathrm{Pic}^0(B')$ de sorte que le morphisme de groupes $\varphi\colon \Lambda \to B(k)$ fournit une extension E' de B' par le tore $T_{\mathrm{a}}^{\prime\mathrm{an}}$. Pour $(\lambda, \lambda') \in \Lambda \times \Lambda'$, le point $j(\lambda)$ de $E(k)$ fournit un k-point de l'extension $\lambda'_* E$ de B par $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$, c'est-à-dire un point $\langle \lambda, \lambda' \rangle$ de la fibre de $\mathscr{P}$ en $(\varphi(\lambda), \varphi'(\lambda'))$ et, par symétrie, un k-point $j'(\lambda')$ de l'extension E' qui relève $\varphi'(\lambda')$. L'application $j'\colon \Lambda' \to E'$ ainsi construite est un morphisme de groupes, injectif.

On note enfin l'égalité $\langle \lambda, \lambda' \rangle = s_{\lambda'}(j(\lambda))$.

B.6.2. — Soit L un fibré en droites sur A ; il vérifie le théorème du cube ([**98**], théorème 7.1.6, *a*)). Comme tout fibré en droites cubiste sur E, le fibré en droites p^*L sur E provient de B et même d'un fibré en droites cubiste M sur l'espace formellement analytique B ([**98**], proposition 6.2.10). Par la formule $b \mapsto t_b^* M \otimes M^{-1}$, le fibré en droites M fournit un morphisme de variétés abéloïdes $\theta_L\colon B \to B'$, t_b désignant la translation par b. Le fibré M n'est pas unique ; les ambiguïtés possibles consistent exactement à le multiplier par un fibré en droites de la forme $\varphi'(\lambda')$, pour $\lambda' \in \Lambda'$, si bien que l'application θ_L ne dépend bien que de L.

D'autre part, ce fibré en droites p^*L est muni d'une donnée de descente relative à l'action de Λ, qu'on transporte à q^*M au moyen de l'isomorphisme donné. Ces données de descente sont explicitées par la proposition 6.2.12 de [**98**] : elles sont paramétrées par

des couples (u, r), où $u\colon \Lambda \to \Lambda'$ est un morphisme de groupes tel que

$$\theta_M \circ \varphi = \varphi' \circ u$$

et $r\colon \Lambda \to \varphi^* M$ est une trivialisation telle que

$$r(\lambda+\mu) \otimes r(\lambda)^{-1} \otimes r(\mu)^{-1} \otimes r(0) = \langle \lambda, u(\mu)\rangle.$$

Pour donner sens à cette relation, observons que le membre de droite de l'égalité précédente est une section de $\mathscr{P}$ au-dessus du point $(\varphi(\lambda), \varphi' \circ u(\mu))$. Le membre de gauche est une trivialisation du fibré en droites

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda+\mu)^* M \otimes \varphi(\lambda)^* M^{-1} \otimes \varphi(\mu)^* M^{-1} \otimes \varphi(0)^* M & \\ \simeq \varphi(\lambda)^*(t^*_{\varphi(\mu)} M \otimes M^{-1}) \otimes 0^*(t^*_{\varphi(\mu)} M \otimes M^{-1})^{-1} & \\ \simeq \varphi(\lambda)^* \theta_M(\varphi(\mu)) \otimes \theta_M(\varphi(\mu))^{-1}. &\end{aligned}$$

Le premier facteur est la fibre en $\varphi(\lambda)$ du fibré en droites $\theta_M \circ \varphi(\mu) = \varphi'(u(\mu))$, c'est-à-dire la fibre de $\mathscr{P}$ en $(\varphi(\lambda), \varphi'(u(\mu)))$; le second facteur est la fibre en l'origine du fibré en droites $\theta_M \circ \varphi(\mu)$, c'est-à-dire la fibre de $\mathscr{P}$ en $(0, \varphi'(u(\mu)))$; par la structure de biextension sur $\mathscr{P}$, le membre de gauche s'interprète donc comme un point de la fibre de $\mathscr{P}$ en $(\varphi(\lambda), \varphi' \circ u(\mu))$.

À un tel couple (u, r) est associé la famille des isomorphismes

$$c_\lambda\colon q^* M \to t^*_{j(\lambda)} q^* M, \quad m \mapsto r(\lambda) \otimes r(0)^{-1} \otimes s_{u(\lambda)} \otimes m,$$

pour $\lambda \in \Lambda$.

B.6.3. — Soit $\lambda \in \Lambda$ et $\lambda' \in \Lambda'$; on a construit une section canonique $\langle \lambda, \lambda'\rangle$ du fibré de Poincaré $\mathscr{P}$ au-dessus de $(\varphi(\lambda), \varphi'(\lambda'))$. Grâce à la structure formelle du fibré de Poincaré, il lui est associé une métrique formelle. L'application

$$(\lambda, \lambda') \mapsto \log(\|\langle \lambda, \lambda'\rangle\|)$$

est une forme bilinéaire sur $\Lambda \times \Lambda'$. Comme Λ est un réseau de E, cette forme bilinéaire non dégénérée ([**98**], prop. 6.1.8, équivalence de (i) et (ii)).

Pour (u, r) comme ci-dessus, l'application

$$(\lambda, \mu) \mapsto \log(\|\langle \lambda, u(\mu)\rangle\|)$$

est une forme bilinéaire symétrique sur $\Lambda \times \Lambda$ (*cf.* [**98**], prop. 6.4.1, *c*)). Nous noterons q_L la forme quadratique sur $T_{\mathrm{a,trop}}$ correspondante :

$$q_L(\tau(\lambda)) = \log(\|\langle \lambda, u(\lambda)\rangle\|).$$

Théorème B.6.4. — *Soit L un fibré en droites sur A, soit (M, u, r) le triplet sur E fournissant L par descente. Pour que L soit ample, il faut et il suffit que M_s soit ample sur la variété abélienne résiduelle B_s et que la forme quadratique q_L sur $T_{\mathrm{a,trop}}$ soit définie positive. Si c'est le cas, la variété abéloïde B et le schéma formel abélien $\mathfrak{B}$ sont algébrisables.*

Pour la démonstration, nous renvoyons à [**98**], théorème 6.4.4. Dans cette référence, l'amplitude de M_s intervient par celle du fibré en droites analytique M sur la variété abéloïde B ; d'après le lemme suivant, ces deux assertions sont équivalentes et entraîne l'énoncé d'algébricité.

Lemme B.6.5. — *Soit $\mathfrak{B}$ un schéma formel abélien sur k° et soit $\mathfrak{L}$ un fibré en droites sur $\mathfrak{B}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le fibré en droites $\mathfrak{L}_\eta$ sur la variété abéloïde $\mathfrak{B}_\eta$ est ample ;*
(ii) *Le fibré en droites $\mathfrak{L}$ est relativement ample sur* $\mathrm{Spf}(k^\circ)$ *;*
(iii) *Le fibré en droites $\mathfrak{L}_s$ sur la variété abélienne $\mathfrak{B}_s$ est ample.*

Démonstration. — L'implication (iii)⇒(ii) résulte du théorème des fonctions formelles de Grothendieck sous sa forme non nécesssairement noethérienne ([**1**], §2.11). L'implication (ii)⇒(i) est évidente. Il reste à démontrer que si $\mathfrak{L}_\eta$ est ample, alors $\mathfrak{L}_s$ est ample. Dans les deux théories, le critère d'amplitude est analogue : il faut et il suffit qu'une puissance du fibré soit effective et qu'il définisse un morphisme injectif dans la variété abéloïde (resp. abélienne) duale. Supposons que $\mathfrak{L}_\eta^{\otimes n}$ est effectif. Comme $\mathfrak{B}$ est propre et lisse, à fibres géométriquement connexes, l'« adhérence schématique » d'un diviseur de Cartier qui le définit est un diviseur de Cartier $\mathfrak{D}$ sur $\mathfrak{X}$ et $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{D})$ est l'unique fibré en droites sur $\mathfrak{X}$ qui prolonge $\mathfrak{L}_\eta^{\otimes n}$ ([**96**], preuve du lemme 2.9). On a donc $\mathfrak{L}^{\otimes n} \simeq \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{D})$, ce qui entraîne que $\mathfrak{L}_s^{\otimes n}$ est effectif. Considérons le morphisme $\theta_{\mathfrak{L}}$ du schéma formel abélien $\mathfrak{B}$ vers le schéma formel abélien dual $\mathfrak{B}'$. Sur la fibre générique, on obtient le morphisme correspondant entre variétés abéloïdes ; son noyau est fini par hypothèse, si bien que $\theta_{\mathfrak{L},\eta}$ est surjectif. Par surjectivité de la spécialisation, $\theta_{\mathfrak{L},s}$ est également surjectif, donc son noyau est fini. Cela prouve que $\mathfrak{L}_s$ est ample. □

Remarque B.6.6. — Lorsque A est une variété abélienne, nous allons démontrer que la variété abéloïde B et son extension E sont algébrisables.

Lorsque la situation est déployée, on vient de voir que la variété abéloïde B est simultanément l'analytifié de la fibre générique d'un schéma abélien $\mathscr{B}$ et la fibre générique de son complété formel $\widehat{\mathscr{B}}$. Les descriptions d'une extension d'une variété abélienne par un tore déployé sont les mêmes dans les cas algébrique, formel et analytique : ces extensions correspondent à un morphisme du groupe des caractères de ce tore dans la variété duale. Cela fournit une extension $\mathscr{E}$ du schéma abélien $\mathscr{B}$ par un k°-tore déployé $\mathscr{T}$. La fibre générique de cette extension est une extension algébrique de B par le tore T_{a} dont l'analytifiée est E ; la fibre générique du complété formel de cette extension est une extension de B par le tore affinoïde T et s'identifie comme extension au domaine de Néron N de A.

Dans le cas général, il existe donc une extension finie galoisienne k' de k telle que l'extension $E_{k'}$ de $B_{k'}$ par le tore $T_{\mathrm{a},k'}^{\mathrm{an}}$ soit algébrisable et que ce tore soit déployé. Ces espaces et l'extension sont munis d'une donnée de descente galoisienne analytique. Comme $B_{k'}$ est projective, cette donnée de descente est algébrique, et donc effective, si bien que B est algébrisable.

Les automorphismes d'une extension d'une variété abélienne par $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ (induisant l'identité sur les deux facteurs) sont en particulier des automorphismes de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$-torseurs. Par GAGA appliqué au fibré en droite correspondant, ces automorphismes d'extension analytiques sont algébrisables. Il en va de même des automorphismes d'extension par un tore analytique déployé, de sorte que la donnée de descente de l'extension $E_{k'}$ est algébrique. Comme $E_{k'}$ est affine sur la variété projective $B_{k'}$, cette donnée de descente est encore effective. Autrement dit, l'extension E est algébrique.

Cependant, il n'y a pas de raison pour que le domaine de Néron soit la fibre générique d'un schéma formel de type fini, a fortiori, algébrisable.

Bien sûr, le morphisme d'uniformisation $p\colon E \to A$ n'est pas algébrique si le tore est de dimension strictement positive, puisque son noyau est infini et de dimension 0.

Proposition B.6.7. — *Soit L un fibré en droites sur A, soit (M, u, r) le triplet sur E fournissant L par descente. Pour que L soit invariant par translation, il faut et il suffit que $\mathfrak{M}$ soit invariant par translation et que la forme quadratique q_L soit nulle.*

Démonstration. — Cela résulte du corollaire 6.2.13 de [**98**] qui affirme l'équivalence de trois assertions (a), (b), (c) ; l'assertion (a) signifie que L est invariant par translations et l'assertion (b) signifie que M est invariant par translation et q_L est nulle. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Abbes – *Éléments de géométrie rigide, volume I. Construction et étude géométrique des espaces rigides*, Progress in Mathematics, vol. 286, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2010.

[2] L. Allermann & J. Rau – « First steps in tropical intersection theory », *Math. Z.* **264** (2010), no. 3, p. 633–670.

[3] S. Ju. Arakelov – « Intersection theory of divisors on an arithmetic surface », *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **38** (1974), no. 6, p. 1167–1180.

[4] M. Baker & R. Rumely – *Potential theory on the Berkovich projective line*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 159, Amer. Math. Soc., 2010.

[5] M. H. Baker & R. Rumely – « Equidistribution of small points, rational dynamics, and potential theory », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **56** (2006), no. 3, p. 625–688, *arXiv:math.NT/0407426*.

[6] E. Bedford & B. Taylor – « A new capacity for plurisubharmonic functions », *Acta Math.* **149** (1982), p. 1–40.

[7] G. M. Bergman – « The logarithmic limit-set of an algebraic variety », *Trans. Amer. Math. Soc.* **157** (1971), p. 459–469.

[8] V. G. Berkovich – *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.

[9] ———, « Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (1993), no. 78, p. 5–161.

[10] ———, « Vanishing cycles for formal schemes », *Invent. Math.* **115** (1994), no. 3, p. 539–571 (English).

[11] ———, « Smooth p-adic analytic spaces are locally contractible. II », in *Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II*, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004, p. 293–370.

[12] R. Bieri & J. R. J. Groves – « The geometry of the set of characters induced by valuations », *J. Reine Angew. Math.* **347** (1984), p. 168–195.

[13] S. Bloch, H. Gillet & C. Soulé – « Non-archimedean Arakelov theory », *J. Algebraic Geometry* **4** (1995), p. 427–485.

[14] Z. Błocki – « Uniqueness and stability for the complex Monge-Ampère equation on compact Kähler manifolds », *Indiana Univ. Math. J.* **52** (2003), no. 6, p. 1697–1701.

[15] Z. Błocki & S. Kołodziej – « On regularization of plurisubharmonic functions on manifolds », *Proc. Amer. Math. Soc.* **135** (2007), no. 7, p. 2089–2093 (electronic).

[16] S. Bosch – « k-affinoide Tori », *Mathematische Annalen* **192** (1971), no. 1, p. 1–16 (de).

[17] _____, « Rigid analytische Gruppen mit guter Reduktion », *Mathematische Annalen* **223** (1976), no. 3, p. 193–205 (de).

[18] _____, « Zur Kohomologietheorie rigid analytischer Räume », *manuscripta mathematica* **20** (1977), no. 1, p. 1–27 (de).

[19] _____, *Lectures on formal and rigid geometry*, Lecture Notes in Math., vol. 2105, Springer-Verlag, 2014.

[20] S. Bosch, U. Güntzer & R. Remmert – *Non-Archimedean analysis. A systematic approach to rigid analytic geometry*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 261, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[21] S. Bosch & W. Lütkebohmert – « Stable reduction and uniformization of abelian varieties II », *Inventiones mathematicae* **78** (1984), no. 2, p. 257–297 (en).

[22] _____, « Néron models from the rigid analytic viewpoint. », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **1986** (1986), no. 364, p. 69–84 (en).

[23] _____, « Degenerating abelian varieties », *Topology* **30** (1991), p. 653–698.

[24] _____, « Degenerating abelian varieties », *Topology* **30** (1991), no. 4, p. 653–698 (en).

[25] _____, « Formal and rigid geometry. I. Rigid spaces », *Math. Ann.* **295** (1993), no. 2, p. 291–317.

[26] _____, « Formal and rigid geometry. II. Flattening techniques », *Math. Ann.* **296** (1993), no. 3, p. 403–429.

[27] S. Bosch, W. Lütkebohmert & M. Raynaud – « Formal and rigid geometry. IV. The reduced fibre theorem », *Inventiones Mathematicae* **119** (1995), no. 2, p. 361–398.

[28] J.-B. Bost, H. Gillet & C. Soulé – « Heights of projective varieties and positive Green forms », *J. Amer. Math. Soc.* **7** (1994), p. 903–1027.

[29] A. M. Botero, J. I. Burgos Gil & M. Sombra – « Convex analysis on polyhedral spaces », *Mathematische Zeitschrift* **301** (2022), no. 2, p. 1631–1674.

[30] S. Boucksom & D. Eriksson – « Spaces of norms, determinant of cohomology and Fekete points in non-Archimedean geometry », *Advances in Mathematics* **378** (2021), p. 107501.

[31] S. Boucksom, C. Favre & M. Jonsson – « Singular semipositive metrics in non-archimedean geometry », 2012, *arXiv:1201.0187*.

[32] _____, « Solution to a non-Archimedean Monge-Ampère equation », 2012, *arXiv:1201.0188*.

[33] S. Boucksom, C. Favre & M. Jonsson – « Solution to a non-Archimedean Monge-Ampère equation », *Journal of the American Mathematical Society* **28** (2015), no. 3, p. 617–667.

[34] _____, « Singular semipositive metrics in non-Archimedean geometry », *Journal of Algebraic Geometry* **25** (2016), no. 1, p. 77–139.

[35] N. Bourbaki – *Éléments de mathématique. Fasc. XIII. Livre VI : Intégration. Chapitres 1, 2, 3 et 4 : Inégalités de convexité, Espaces de Riesz, Mesures sur les espaces localement compacts, Prolongement d'une mesure, Espaces L^p*, Deuxième édition revue et augmentée. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1175, Hermann, Paris, 1965.

[36] N. Bourbaki – *Topologie générale*, Springer-Verlag, 1971, Chapitres 1 à 4.

[37] L. Breen – *Fonctions thêta et théorème du cube*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 980, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[38] A. Chambert-Loir – « Mesures et équidistribution sur des espaces de Berkovich », *J. reine angew. Math.* **595** (2006), p. 215–235, math.NT/0304023.

[39] _____, « Heights and measures on analytic spaces. A survey of recent results, and some remarks », in *Motivic Integration and its Interactions with Model Theory and Non-Archimedean Geometry : Volume II* (R. Cluckers, J. Nicaise & J. Sebag, éds.), Cambridge University Press, 2011, *arXiv:1001.2517*, p. 1–50.

[40] A. Chambert-Loir & A. Thuillier – « Mesures de Mahler et équidistribution logarithmique », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **59** (2009), no. 3, p. 977–1014.

[41] S.-S. Chern, H. I. Levine & L. Nirenberg – « Intrinsic norms on a complex manifold », in *Global Analysis, Papers in Honor of K. Kodaira*, Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press, Princeton, 1969, p. 119–139.

[42] A. Cohen, M. Temkin & D. Trushin – « Morphisms of Berkovich curves and the different function », *Advances in Mathematics* **303** (2016), p. 800–858.

[43] B. Conrad – « Irreducible components of rigid spaces », *Ann. Inst. Fourier* **49** (1999), no. 2, p. 473–541 (English).

[44] J.-P. Demailly – « Mesures de Monge-Ampère et caractérisation géométrique des variétés algébriques affines », *Mém. Soc. Math. France* (1985), no. 19, p. 124.

[45] _____, « Complex analytic and differential geometry », 2009, *http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf*.

[46] A. Ducros – « Image réciproque du squelette par un morphisme entre espaces de Berkovich de même dimension », *Bull. Soc. Math. France* **131** (2003), no. 4, p. 483–506.

[47] _____, « Parties semi-algébriques d'une variété algébrique p-adique », *Manuscripta Math.* **111** (2003), no. 4, p. 513–528.

[48] _____, « Variation de la dimension relative en géométrie analytique p-adique », *Compos. Math.* **143** (2007), no. 6, p. 1511–1532.

[49] _____, « Les espaces de Berkovich sont excellents », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **59** (2009), no. 4, p. 1443–1552.

[50] _____, « Espaces de Berkovich, polytopes, squelettes et théorie des modèles », *Confluentes Math.* **4** (2012), no. 4, p. 1250007, 57, arXiv:1203.6498.

[51] _____, « Toute forme non ramifiée d'un polydisque ouvert est triviale », *Math. Z.* **273** (2013), no. 1-2, p. 331–353 (French).

[52] _____, *Families of Berkovich spaces*, vol. 400, Paris : Société Mathématique de France (SMF), 2018.

[53] _____, « Dévisser, découper, éclater et aplatir les espaces de Berkovich », *Compositio Mathematica* **157** (2021), no. 2, p. 236–302.

[54] _____, « Réduction en famille d'espaces affinoïdes », *Bull. Soc. Math. Fr.* **149** (2021), no. 4, p. 547–611 (French).

[55] A. Ducros – « Utilisation de l'aplatissement en géométrie de berkovich », 2023.

[56] A. Ducros – « La structure des courbes analytiques », Preprint, arXiv :2405.10619 [math.AG] (2024), 2024.

[57] _____, « La structure des courbes analytiques », Mai 2024.

[58] A. Ducros, E. Hrushovski & F. Loeser – « Non-Archimedean integrals as limits of complex integrals », *Duke Mathematical Journal* **172** (2023), no. 2, p. 313–386.

[59] A. Ducros, E. Hrushovski, F. Loeser & J. Ye – « Tropical functions on a skeleton », *Journal de l'École polytechnique — Mathématiques* **11** (2024), p. 613–654.

[60] A. Ducros & A. Thuillier – « Les squelettes accessibles d'un espace de Berkovich », Preprint, arXiv :2409.08755 [math.AG] (2024), 2024.

[61] M. Einsiedler, M. Kapranov & D. Lind – « Non-Archimedean amoebas and tropical varieties », *J. Reine Angew. Math.* **601** (2006), p. 139–157.

[62] P. E. Eleftheriou – « Semilinear stars are contractible », *Fundamenta Mathematicae* **241** (2018), p. 291–312.

[63] G. Faltings – « Calculus on arithmetic surfaces », *Ann. of Math.* **119** (1984), p. 387–424.

[64] ———, « Diophantine approximation on abelian varieties », *Ann. of Math.* **133** (1991), p. 549–576.

[65] C. Favre & J. Rivera-Letelier – « Équidistribution quantitative des points de petite hauteur sur la droite projective », *Math. Ann.* **335** (2006), no. 2, p. 311–361.

[66] ———, « Théorie ergodique des fractions rationnelles sur un corps ultramétrique », *Proc. London Math. Soc.* **100** (2010), no. 1, p. 116–154, *arXiv:0709.0092*.

[67] J. E. Fornaess & R. Narasimhan – « The Levi problem on complex spaces with singularities », *Mathematische Annalen* **248** (1980), no. 1, p. 47–72.

[68] W. Fulton – *Introduction to toric varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 131, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993, The William H. Roever Lectures in Geometry.

[69] ———, *Intersection theory*, second éd., Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[70] H. Gillet & C. Soulé – « Arithmetic intersection theory », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **72** (1990), p. 94–174.

[71] A. Grothendieck – « Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. II », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **24** (1965), p. 5–231.

[72] ———, « Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **32** (1967), p. 5–361.

[73] A. Grothendieck & M. Demazure – *Schémas en groupes*, Lecture Notes in Math., no. 151-152-153, Springer-Verlag, 1970, SGA 3.

[74] L. Gruson – « Théorie de fredholm p-adique », *Bulletin de la Société Mathématique de France* **94** (1966), p. 67–95 (fre).

[75] W. Gubler – « Local heights of subvarieties over non-archimedean fields », *J. reine angew. Math.* **498** (1998), p. 61–113.

[76] ———, « Tropical varieties for non-Archimedean analytic spaces », *Invent. Math.* **169** (2007), no. 2, p. 321–376.

[77] ———, « The Bogomolov conjecture for totally degenerate abelian varieties », *Invent. Math.* **169** (2007), no. 2, p. 377–400.

[78] ———, « Non-archimedean canonical measures on abelian varieties », *Compositio Math.* **146** (2010), p. 683–730, *arXiv:0801.4503*.

[79] W. Gubler, P. Jell & J. Rabinoff – « Forms on Berkovich spaces based on harmonic tropicalizations », Novembre 2021.

[80] W. Gubler & K. Künnemann – « A tropical approach to nonarchimedean Arakelov geometry », *Algebra & Number Theory* **11** (2017), no. 1, p. 77–180.

[81] W. Gubler & F. Martin – « On Zhang's semipositive metrics », arXiv:math.AG/1608.08030, 2016.

[82] ———, « On Zhang's Semipositive Metrics », *Documenta Mathematica* **24** (2019), p. 331–372.

[83] W. Gubler & J. Rabinoff – « On semipositive piecewise linear functions in non-archimedean analytic geometry », Mars 2025.

[84] R. Harvey – « Holomorphic chains and their boundaries », in *Several complex variables (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXX, Part 2, Williams Coll., Williamstown, Mass., 1975)*, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1977, p. 309–382.

[85] J.-B. Hiriart-Urruty & C. Lemaréchal – *Fundamentals of convex analysis*, Grundlehren Text Editions, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[86] I. Itenberg, L. Katzarkov, G. Mikhalkin & I. Zharkov – « Tropical Homology », *Mathematische Annalen* **374** (2019), no. 1-2, p. 963–1006.

[87] P. Jell – « A Poincaré lemma for real-valued differential forms on Berkovich spaces », *Mathematische Zeitschrift* **282** (2016), no. 3, p. 1149–1167.

[88] ———, « Tropical Hodge numbers of non-archimedean curves », *Israel Journal of Mathematics* **229** (2019), no. 1, p. 287–305.

[89] P. Jell & V. Wanner – « Poincaré duality for the tropical Dolbeault cohomology of non-archimedean Mumford curves », *Journal of Number Theory* **187** (2018), p. 344–371.

[90] A. J. de Jong – « Smoothness, semistability and alterations », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **83** (1996), p. 51–93.

[91] M. Klimek – *Pluripotential theory*, London Math. Society Monographs, no. 6, Clarendon Press, 1991.

[92] A. Lagerberg – « Super currents and tropical geometry », *Math. Z.* **2012** (2012), no. 3-4, p. 1011–1050, arXiv:1008.2856.

[93] R. Lazarsfeld – *Positivity in Algebraic Geometry I*, Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften, no. 48, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2004 (en).

[94] Y. Liu – « A non-archimedean analogue of the Calabi-Yau theorem for totally degenerate abelian varieties », *J. Diff. Geom.* **89** (2011), p. 87–110.

[95] ———, « Tropical cycle classes for non-archimedean spaces and weight decomposition of De Rham cohomology sheaves », *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* **53** (2020), no. 2, p. 291–352.

[96] W. Lütkebohmert – « Formal-algebraic and rigid-analytic geometry », *Mathematische Annalen* **286** (1990), no. 1, p. 341–371 (en).

[97] ———, « The structure of proper rigid groups », *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* **1995** (1995), no. 468, p. 167–219.

[98] ———, *Rigid Geometry of Curves and Their Jacobians*, Ergebnisse Der Mathematik Und Ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], no. 61, Springer International Publishing, Cham, 2016 (en).

[99] D. Maclagan & B. Sturmfels – *Introduction to Tropical Geometry*, Graduate Studies in Mathematics, no. 161, American Mathematical Society, 2015.

[100] V. Maillot – « Géométrie d'Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intégrables », *Mém. Soc. Math. France* (2000), no. 80, p. 129.

[101] D. Marker – *Model theory : An introduction*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 217, Springer-Verlag, New York, 2002.

[102] A. Mihatsch – « On tropical intersection theory », *Selecta Mathematica* **29** (2023), no. 2, p. 17.

[103] ———, « δ-Forms on Lubin–Tate spaces », *Duke Mathematical Journal* **173** (2024), no. 14, p. 2809–2928.

[104] G. Mikhalkin – « Tropical geometry and its applications », in *International Congress of Mathematicians. Vol. II*, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, p. 827–852.

[105] L. Moret-Bailly – *Pinceaux de variétés abéliennes*, Astérisque, no. 129, Soc. Math. France, 1985.

[106] M. Nagata – « Finitely generated rings over a valuation ring », *Journal of Mathematics of Kyoto University* **5** (1966), no. 2, p. 163–169.

[107] S. Payne – « Analytification is the limit of all tropicalizations », *Math. Res. Lett.* **16** (2009), no. 3, p. 543–556.

[108] C. Perez-Garcia & W. H. Schikhof – *Locally convex spaces over non-Archimedean valued fields*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 119, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[109] J. Poineau – « Raccord sur les espaces de Berkovich », *Algebra Number Theory* **4** (2010), no. 3, p. 297–334.

[110] ———, « La droite de Berkovich sur $\mathbf{Z}$ », *Astérisque* (2012), no. 334, p. viii+xii+284.

[111] J. Poineau – « Les espaces de Berkovich sont angéliques », *Bull. Soc. Math. France* **141** (2013), no. 2, p. 267–297.

[112] J. Poineau – « Dynamique analytique sur $\mathbf{Z}$. I : Mesures d'équilibre sur une droite projective relative », Février 2024.

[113] D. Pollard & F. Topsøe – « A unified approach to Riesz type representation theorems », *Studia Math.* **54** (1975), no. 2, p. 173–190.

[114] M. Raynaud – « Variétés abéliennes et géométrie rigide », in *Actes du Congrès International des Mathématiciens* (Nice, 1970), vol. 1, Gauthier-Villars, 1971, p. 473–477.

[115] M. Raynaud – « Variétés abéliennes et géométrie rigide », in *Actes Du Congrès International Des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1* (Nice, 1970), vol. 1, Gauthier-Villars, 1971, p. 473–477.

[116] J. Rivera-Letelier – « Dynamique des fonctions rationnelles sur des corps locaux », *Astérisque* (2003), no. 287, p. xv, 147–230, Geometric methods in dynamics. II.

[117] A. Robinson – *Complete theories*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1956.

[118] R. T. Rockafellar – *Convex analysis*, Princeton Mathematical Series, No. 28, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[119] W. Rudin – *Real and complex analysis*, 3 éd., McGraw-Hill, 1987.

[120] R. S. Rumely – *Capacity theory on algebraic curves*, Lecture Notes in Math., vol. 1378, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[121] P. Scholze – « p-adic geometry », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de Janeiro 2018. Vol. I. Plenary Lectures*, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2018, p. 899–933.

[122] L. Schwartz – *Théorie des distributions*, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, No. IX-X. Nouvelle Édition, Entiérement Corrigée, Refondue et Augmentée, Hermann, Paris, 1966.

[123] W. Stoll – « The continuity of the fiber integral », *Mathematische Zeitschrift* **95** (1966), no. 2, p. 87–138.

[124] L. Szpiro, E. Ullmo & S.-W. Zhang – « Équidistribution des petits points », *Invent. Math.* **127** (1997), p. 337–348.

[125] J. Tate – « A review of non-archimedean elliptic function », in *Conference on elliptic curves and modular forms* (Hong Kong, 1993), 1995, p. 162–184.

[126] M. Temkin – « On local properties of non-Archimedean analytic spaces », *Math. Ann.* **318** (2000), no. 3, p. 585–607.

[127] ———, « On local properties of non-Archimedean analytic spaces. II », *Israel J. Math.* **140** (2004), p. 1–27.

[128] ———, « A new proof of the Gerritzen-Grauert theorem », *Math. Ann.* **333** (2005), no. 2, p. 261–269.

[129] M. Temkin – « Stable modification of relative curves », *J. Algebraic Geom.* **19** (2010), no. 4, p. 603–677.

[130] ———, « Stable modification of relative curves », *Journal of Algebraic Geometry* **19** (2010), no. 4, p. 603–677.

[131] _____, « Metrization of Differential Pluriforms on Berkovich Analytic Spaces », in *Nonarchimedean and Tropical Geometry* (M. Baker & S. Payne, éds.), Springer International Publishing, Cham, 2016, p. 195–285.

[132] _____, « Topological transcendence degree », *J. Algebra* **568** (2021), p. 35–60 (English).

[133] A. Thuillier – « Théorie du potentiel sur les courbes en géométrie non archimédienne. Applications à la théorie d'Arakelov », Thèse, Université de Rennes 1, 2005, *http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00010990/*.

[134] _____, « Géométrie toroïdale et géométrie analytique non archimédienne. Application au type d'homotopie de certains schémas formels », *Manuscripta Math.* **123** (2007), no. 4, p. 381–451.

[135] E. Ullmo – « Positivité et discrétion des points algébriques des courbes », *Ann. of Math.* **147** (1998), no. 1, p. 167–179.

[136] O. Viro – « Dequantization of real algebraic geometry on logarithmic paper », in *European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000)*, Progr. Math., vol. 201, Birkhäuser, Basel, 2001, p. 135–146.

[137] V. Weispfenning – « Quantifier elimination and decision procedures for valued fields », in *Models and sets (Aachen, 1983)*, Lecture Notes in Math., vol. 1103, Springer, Berlin, 1984, p. 419–472.

[138] X. Yuan & S.-W. Zhang – « Calabi theorem and algebraic dynamics », *http://www.math.columbia.edu/~szhang/papers/calabi%20and%20semigroup.pdf*, 2009.

[139] X. Yuan – « Big line bundles on arithmetic varieties », *Invent. Math.* **173** (2008), p. 603–649, *arXiv:math.NT/0612424*.

[140] X. Yuan & S.-W. Zhang – « Adelic line bundles on quasi-projective varieties », Juin 2025.

[141] S.-W. Zhang – « Admissible pairing on a curve », *Invent. Math.* **112** (1993), no. 1, p. 171–193.

[142] _____, « Small points and adelic metrics », *J. Algebraic Geometry* **4** (1995), p. 281–300.

[143] _____, « Equidistribution of small points on abelian varieties », *Ann. of Math.* **147** (1998), no. 1, p. 159–165.

INDEX

A
algèbre k-affinoïde, 296
algèbre strictement k-affinoïde, 296
anneau G-local d'un espace analytique, 370

B
base orthogonale, 472
base orthonormée, 473
bord d'une cellule, 44

C
carte G-tropicale agréable, 127
carte paralinéaire, 73
  domaine de définition, 73
cartes
  jeu de, 86
cône tropical, 128
cellule, 44
  d'un espace paralinéaire, 59, 62
cellule forte, 62
cellule ouverte, 44
commode, 393
courant
  — symétrique, 154
courant de Bedford–Taylor, 206
courant d'intégration, 162
courant positif, 158
courant squelettique, 170
cpsh, 195
cycle, 382

D
décomposition cellulaire, 62
  forte, 63
dimension de définition résiduelle simultanée d'une famille de fibrés vectoriels métrisés paralinéaires entiers, 487
dimension d'une cellule, 44
discordance
  d'un calibrage, 112
domaine de Néron, 587

E
espace
  holomorphiquement séparé, 421
espace analytique
  localement holomorphiquement séparé, 421
espace G-tropical, 72
  affiné, 139
espace G-tropical affiné décent, 142
espace G-tropical vertébré, 121
espace G-tropical vertébré associé à un espace analytique, 357
espace G-tropical vertébré riche, 123
espace k-analytique
  n-espace k-analytique, 433
espace paralinéaire calibré harmonieux, 112
espace tangent
  en un point d'un sous-ensemble paralinéaire, 47

F
fonction
  tropicalement continue, 81
fonction affine sur un espace analytique, 344
fonction continue plurisousharmonique, 195
fonction dpsh, 209
fonction G-lisse sur un espace G-tropical, 81
fonction localement intégrable sur un espace G-tropical vertébré, 133
fonction méromorphe, 385
  — régulière, 386
fonction paralinéaire harmonique, 188
fonction plurisousharmonique, 193

fonction tropicalement convexe, 198
fonction tropicalement d-convexe, 209
forme
  forme G-lisse sur un espace G-tropical, 77
  G-forme sur un espace G-tropical, 77
forme de type (n, q) G-localement constante, 98
forme de type (p, q)
  sur un espace affine, 27
forme lisse
  sur un espace paralinéaire, 48
forme lisse sur un espace G-tropical affiné, 140
forme localement intégrable, 135
forme localement intégrable sur un espace paralinéaire calibré, 110
forme-volume sur un espace G-tropical vertébré, 131
forme-volume sur un espace paralinéaire
  standard, 101

G

G-forme
  à coefficients tropicalement boréliens, 81
  à coefficients tropicalement continus, 81
  harmoniquement tropicalisable, 191
G-recouvrement
  d'un espace topologique, 47

I

intérieur d'une cellule, 44

K

k-algèbre affinoïde, 296

L

log, 328
longueur d'un polyrayon, 295

M

métrique, 469
  — formelle, 491
  dpsh, 494
  globalement dpsh, 496
  globalement psh, 496
  psh, 494
  tropicalement convexe, 494
modèle, 286
moment, 332
moment agréable, 394

P

paralinéaire
  application —, 46, 61
  carte —, 59
  espace —, 59
  sous-espace, 47
partie d-négligeable, 62
partie fidèlement paralinéaire, 73
partie négligeable
  d'un espace G-tropical vertébré, 133
partie squelettique d'un espace G-tropical chordé, 118
partition de l'unité, 141, 422, 564, 565
point squelettique, 118
polyèdre caractéristique d'un moment, 349
polyèdre de variation maximale, 121
polyèdre tropical, 127, 408
pré-modèle, 286
presque bon
  espace —, 300
psh, 193

S

semi-métrique, 469
squelette canonique
  de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{n}$, 328
  d'un tore, 330
superforme, 27
support d'une G-forme, 77
supports
  famille de —, 90

T

théorème de Gerritzen–Grauert, 297
tropicalisation
  d'un moment, 332
  d'un tore, 328

V

vecteur-volume, 32