Espaces étalés et revêtements — Sur une rédaction d'Henri Cartan pour Bourbaki

Antoine Chambert-Loir

Université Paris Cité, IMJ-PRG, 8 place Aurélie Nemours, 75013 Paris
Courriel: *antoine.chambert-loir@u-pariscite.fr*

Table des matières

1. Débuts du projet bourbachique 1
2. Débuts de la topologie bourbachique 2
3. Topologie combinatoire, algébrique, ou générale ? 3
4. Espaces étalés 5
5. Revêtements 7
Références 9

1. Débuts du projet bourbachique

Il a été maintes fois raconté comment le projet de la poignée de mathématiciens qui s'est réuni chez Capoulade, au pied du quartier latin, un lundi de décembre 1934, s'est rapidement étendu, de « fixer pour 25 ans les matières du certificat de Calcul différentiel et intégral en rédigeant en commun un traité d'Analyse » (Bourbaki, 1934), aux ambitieux *Éléments de mathématique* qu'ils ont signés du nom de N. Bourbaki et dont la rédaction se poursuit encore à ce jour.

Grâce aux efforts conjoints de L. Beaulieu et de la cellule Mathdoc, poursuivis par ceux des Archives Poincaré et du projet ANR Banana[(1)] coordonné par C. Eckes et E. Haffner, les archives du groupe (jusque 1972 environ) sont librement accessibles en ligne[(2)] et s'enrichissent progressivement de transcriptions, de renvois et de commentaires, en faisant un outil privilégié pour quiconque s'intéresse au travail effectué par le groupe Bourbaki pendant ses quarante premières années, et surtout à sa *méthode de travail*.

De fait, dès le début de 1935, le projet s'épaissit simultanément dans deux directions, vers les développements mathématiques récents que les membres du groupe jugent importants et vers les concepts, les structures, qui leur paraissent soutenir les mathématiques contemporaines. C'est ainsi que si les membres du groupe Bourbaki prévoyaient un livre sur les fonctions automorphes, les *Éléments* sont peut-être surtout connus pour

(1) *https://www.item.ens.fr/banana*
(2) *https://archives-bourbaki.ahp-numerique.fr/*

la présentation conceptuelle, générale et abstraite, d'un corpus mathématique relativement élémentaire, à l'exception notable des livres d'*Algèbre commutative* et de *Groupes et algèbres de Lie*.

La présentation du traité proposé par Bourbaki se conforme à l'ordre imposé par l'enchaînement logique des définitions, des énoncés et de leurs démonstrations. En tête des *Éléments* se trouvent ainsi trois livres, *Ensembles*, *Algèbre* et *Topologie*, qui fondent plus ou moins les mathématiques tels qu'ils les envisagent. (Par un jeu de *fascicules de résultats*, ils ont réussi à publier assez vite le livre de *Fonctions d'une variable réelle*, et il serait probablement intéressant d'étudier de près les contraintes que l'écriture de ce quatrième livre a fait peser sur les trois premiers.)

Plusieurs textes écrits dans les premières années en témoignent, comme celui sur l'*architecture des mathématiques* (Bourbaki, 1998), publié en 1948, où il est distingué trois « structures-mères » (structures algébriques, ordres, et topologies) qui sont au centre de la « hiérarchie de structures, allant du simple au complexe, du général au particulier » qui organisent, selon Bourbaki, l'univers mathématique.

2. Débuts de la topologie bourbachique

Le livre de *Topologie générale*, livre III dans l'économie générale des *Éléments de mathématique*, paraît ainsi relativement vite, au moins ses deux premiers fascicules qui sont publiés pendant la Seconde guerre mondiale, en 1940 (structures topologiques et uniformes) et 1942 (groupes topologiques, nombres réels). (Les trois autres fascicules devront attendre la fin de la Guerre, 1947, 1948 et 1949.) À la fin des années 50 et au début des années 60, le groupe en publiera une seconde, puis une troisième édition, et enfin une quatrième, qui regroupe en deux volumes (1971, 1974) les dix chapitres de ces cinq fascicules.

Une lecture minutieuse des *Éléments*, en particulier du livre sur les *Groupes et algèbres de Lie* (par exemple LIE, III, §6, p. 192, note 1), suggérait la préparation d'un onzième chapitre qui aurait été consacré à la théorie des revêtements et du groupe fondamental. Ce n'est qu'en 2016 que la parution d'un livre de *Topologie algébrique* a rompu cette longue attente.

En fait, la consultation des archives du groupe Bourbaki montre qu'ils avaient prévu d'inclure un livre de topologie algébrique dès le début de leurs travaux. La réunion du 28 janvier 1935 (Bourbaki, 1935c) mentionne les « surfaces de recouvrement » et la « sous-commission bibliographique » du 13 avril 1935 (Bourbaki, 1935b) cite les livres récemment parus de Kerekjarto, Seifert et Threlfall et Kuratowski. En décembre 1935 (Bourbaki, 1935a), ils ajoutent à la liste le livre d'Alexandroff et Hopf qui leur « épargnera une mise au point délicate ». C'est dans le grand projet de topologie (Bourbaki, 1936b) qu'a rédigé André Weil en 1936 que se précisent les directions dans lesquelles le groupe souhaite porter ses efforts. Si le premier chapitre de ce rapport concerne la topologie générale, les trois autres exposent des questions aujourd'hui rattachées à la topologie algébrique : théorie du degré, espaces de recouvrements et groupe de Poincaré, topologie combinatoire. Tous ces sujets font également l'objet du Séminaire de mathématiques de

Gaston Julia pour l'année 1935/1936 (Audin, 2014) dans lequel, à l'exception de celui de Frédéric Marty, les membres du groupe Bourbaki y font tous les exposés.

L'analyse détaillée (à paraître) des rédactions successives et des circulaires internes du groupe explique le long délai de publication, pour partie dû à l'évolution importante du sujet dans les années 1940–1960. Certains membres du groupe Bourbaki, en particulier Weil, Leray, Ehresmann, Cartan, Eilenberg ou Serre, ont d'ailleurs joué un rôle fondamental dans cette évolution : espaces fibrés, étude des groupes d'homotopie supérieurs, cohomologie, catégories et foncteurs, ensembles simpliciaux…

Cette note est consacrée à un texte (Bourbaki, 1941) rédigé par Henri Cartan en avril 1941 à l'intention de ses collègues du groupe Bourbaki.

C'est un petit texte d'à peine cinq pages, tapé à la machine, ronéotypé sur un papier extrêmement fin et fragile, avec quelques mentions manuscrites. Les symboles mathématiques et lettres grecques, en particulier, ont été tracées à la main. C'est dans le fonds René de Possel de l'Institut Henri Poincaré que ce texte a été retrouvé ; la mention *de Possel* en haut à droite de la première page (voir la reproduction de cette page en figure 1) rappelle qu'il s'agissait de son exemplaire.

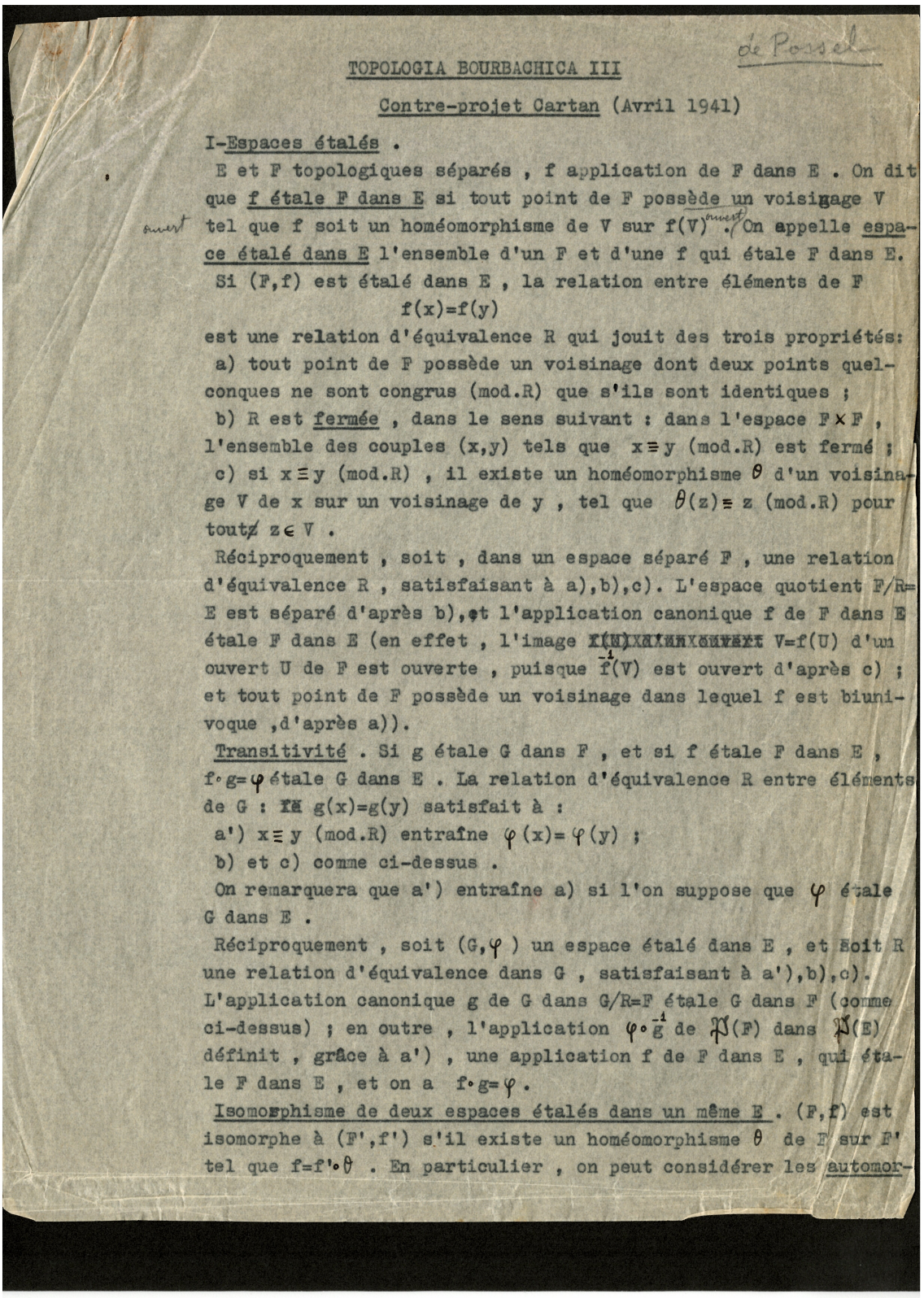
Son titre, *Topologia Bourbachica III*, indique qu'il se rattachait au chapitre III du rapport de Weil (Bourbaki, 1936b). Le sous-titre, *Contre-projet Cartan*, signale la divergence de point de vue entre les deux mathématiciens, mais est représentatif du mode de travail adopté par le groupe qui procède par rédactions et contre-rédactions successives, la plume passant d'un membre à l'autre. La date indiquée, *avril 1941*, nous situe pendant la seconde guerre mondiale, en pleine Occupation, alors que les membres du groupe Bourbaki sont dispersés ; depuis Clermont-Ferrand où était exilée l'université de Strasbourg, Cartan et Dieudonné s'étaient donnés la tâche de redémarrer les activités du groupe que le déclenchement de la guerre avait interrompues.

En apparence, rien de mirifique dans ce texte consacré à un sujet qui, aujourd'hui, bénéficie de nombreuses présentations classiques et est enseigné dans les cours de master. Et pourtant, en rapportant ce texte à la situation du sujet en 1941, nous verrons que chaque paragraphe en est remarquable.

3. Topologie combinatoire, algébrique, ou générale ?

Revenons d'abord sur le contexte dans lequel on parle de groupe fondamental et de revêtements. Dans les ouvrages du début du 20^{e} siècle, (Weyl, 1997 ; Reidemeister, 1928 ; Seifert et Threlfall, 1934), les espaces considérés sont des surfaces, des variétés combinatoires, voire des espaces combinatoires « abstraits » et les arguments font usage des décompositions combinatoires d'un tel espace par agencement de points, arêtes, triangles, tétraèdres… De fait, dans les années 30, la *topologie*, loin d'être générale, vise à étudier des classes particulières d'espaces topologiques, et c'est la théorie des ensembles, *Mengenlehre*, qui fait éclore des problèmes de topologie générale.

La proposition initiale de Weil n'était pas très claire sur ce point, et je trouve remarquable la façon dont Cartan débute son texte : il y considère des « espaces topologiques



de Possel

TOPOLOGIA BOURBACHICA III

Contre-projet Cartan (Avril 1941)

I-Espaces étalés .

E et F topologiques séparés , f application de F dans E . On dit que f étale F dans E si tout point de F possède un voisinage V ouvert tel que f soit un homéomorphisme de V sur f(V) ouvert. On appelle espace étalé dans E l'ensemble d'un F et d'une f qui étale F dans E.

Si (F,f) est étalé dans E , la relation entre éléments de F

$$f(x)=f(y)$$

est une relation d'équivalence R qui jouit des trois propriétés:

a) tout point de F possède un voisinage dont deux points quelconques ne sont congrus (mod.R) que s'ils sont identiques ;

b) R est fermée , dans le sens suivant : dans l'espace $F\times F$, l'ensemble des couples (x,y) tels que $x\equiv y$ (mod.R) est fermé ;

c) si $x\equiv y$ (mod.R) , il existe un homéomorphisme θ d'un voisinage V de x sur un voisinage de y , tel que $\theta(z)\equiv z$ (mod.R) pour tout $z\in V$.

Réciproquement , soit , dans un espace séparé F , une relation d'équivalence R , satisfaisant à a),b),c). L'espace quotient F/R=E est séparé d'après b), et l'application canonique f de F dans E étale F dans E (en effet , l'image V=f(U) d'un ouvert U de F est ouverte , puisque $f^{-1}(V)$ est ouvert d'après c) ; et tout point de F possède un voisinage dans lequel f est biunivoque ,d'après a)).

Transitivité . Si g étale G dans F , et si f étale F dans E , $f\circ g=\varphi$ étale G dans E . La relation d'équivalence R entre éléments de G : g(x)=g(y) satisfait à :

a') $x\equiv y$ (mod.R) entraîne $\varphi(x)=\varphi(y)$;

b) et c) comme ci-dessus .

On remarquera que a') entraîne a) si l'on suppose que φ étale G dans E .

Réciproquement , soit (G,φ) un espace étalé dans E , et soit R une relation d'équivalence dans G , satisfaisant à a'),b),c). L'application canonique g de G dans G/R=F étale G dans F (comme ci-dessus) ; en outre , l'application $\varphi\circ g^{-1}$ de $\mathfrak{P}(F)$ dans $\mathfrak{P}(E)$ définit , grâce à a') , une application f de F dans E , qui étale F dans E , et on a $f\circ g=\varphi$.

Isomorphisme de deux espaces étalés dans un même E . (F,f) est isomorphe à (F',f') s'il existe un homéomorphisme θ de F sur F' tel que $f=f'\circ\theta$. En particulier , on peut considérer les automor-

FIGURE 1. Première page du tapuscrit (BOURBAKI, 1941) de Cartan.

séparés ». Même si, plus loin, il ajoutera l'hypothèse qu'ils sont « connexes et localement connexes » (p. 3), cela inscrit le projet d'une étude des revêtements au sein, non de la géométrie différentielle ou de la topologie combinatoire, mais de la topologie générale.

Il a souvent été rapporté comment la méthode de travail du groupe Bourbaki le conduit à trouver (ou plutôt à attribuer) pour chaque concept « sa bonne place ». Il s'agit de délimiter un cadre conceptuel dans lequel les arguments, certes « avec un peu de vaseline et beaucoup de patience » (Bourbaki, 1949, p. 1), s'agencent naturellement. (J'allais écrire « spontanément », l'adverbe aurait été encore plus faux que « naturellement ».)

La notion de *revêtement* est aujourd'hui bien comprise : il s'agit d'une application continue $p : E \to B$ entre espaces topologiques telle que tout point de B possède un voisinage ouvert U de sorte qu'il existe un ensemble F (discret) et une application continue $\varphi_U : p^{-1}(U) \to F$ tels que l'application $x \mapsto (p(x), \varphi_U(x))$ de $p^{-1}(U)$ dans $U \times F$ soit un homéomorphisme. Si l'on s'adresse à un public un peu savant, on peut dire aujourd'hui qu'il s'agit d'un espace fibré à fibres discrètes ; le revêtement est l'espace E, l'application p est la fibration, et les fibres, les ensembles $p^{-1}(a)$, pour $a \in B$, sont des espaces discrets. Avec les notations ci-dessus, chaque élément $t \in F$ détermine un feuillet du revêtement au-dessus de U, l'ensemble $\varphi_U^{-1}(t)$, que l'application p applique homéomorphiquement sur U. En termes imagés, le revêtement est, au moins sur l'ouvert U, comme « une pile d'assiettes de hauteur F. »

Mais il semblait difficile de proposer cette définition concise dans les années 40, alors que la notion générale d'espace fibré était encore en pleine élaboration (notamment avec les travaux d'Ehresmann, Feldbau, Leray, puis Hurewicz…). Ainsi, la proposition de Cartan, comme celle de Weil, fait une hypothèse plus contraignante qui permet d'identifier facilement les différents feuillets. Cartan exige en effet que l'espace B soit *connexe* et *localement connexe* ; la première condition est en fait peu utile mais la seconde permet d'imposer que tout point de B possède un voisinage ouvert connexe U tel que p applique chaque composante connexe de $p^{-1}(U)$ homéomorphiquement sur U : les feuillets décrits ci-dessus sont donc les différentes composantes connexes de $p^{-1}(U)$.

Signalons aussi une autre invention que Cartan glisse subrepticement : le mot même de *revêtement*. Comme il l'a dit dans (Cartan, 1980, p. 179), la langue française ne disposait que du mot « recouvrement » pour les deux mots allemands *Überdeckung* et *Überlagerung* ; le mot recouvrement a gardé le premier sens, et le mot revêtement a porté le second.

4. Espaces étalés

Mais avant même cette notion de revêtement, Cartan introduit une notion qui est de prime abord plus technique et par certains aspects plus maniable : celle d'*espace étalé*. Avec les notations ci-dessus, étant donnée une application continue $p : E \to B$ entre espaces topologiques, Cartan dit que « p étale E dans B » si tout point de E possède un voisinage *ouvert* V tel que l'application p induise un homéomorphisme de V sur l'*ouvert* $p(V)$. J'ai repris en italique les deux mots ouverts car ils ont été rajoutés à la main sur le tapuscrit ; ils rassurent, peut-être, la personne qui lit le texte, ou celle qui l'a écrit, mais sont finalement inutiles ; il suffirait de remplacer V par un voisinage ouvert

plus petit. On dirait aujourd'hui que le couple formé de E et p est un espace étalé dans B, mais Cartan utilise le mot « ensemble » ; la terminologie met l'accent sur l'espace et sous-entend l'application p.

Cartan ne propose pas d'adjectif pour de telles applications p et, à la suite de Grothendieck (1971), nous utiliserons l'adjectif « étale » ; on emploie parfois l'expression « homéomorphisme local ». Cartan énonce ainsi que la composée de deux applications étales est étale. Il décrit en détail les relations d'équivalence R sur un espace E qui font qu'il est étalé dans l'espace quotient E/R.

Il introduit ensuite l'ensemble des automorphismes d'un espace étalé, c'est-à-dire des homéomorphismes $f : E \to E$ tels que $p \circ f = f$, et énonce qu'ils forment un groupe. Lorsque E est connexe, seul l'automorphisme identique peut fixer un point. Il précise même que l'application identique est la seule application étale $f : E \to E$ d'un espace étalé connexe dans lui-même (vérifiant $p \circ f = f$) qui fixe un point. (Ici, et en plusieurs autres endroits, Cartan impose à l'application f d'être étale, mais il suffirait de requérir qu'elle soit continue, car une application continue entre espaces étalés est automatiquement étale.)

Cartan change alors de point de vue et considère comme donné, non pas l'espace étalé E, mais sa base B. Il commence par s'intéresser à « tous » les espaces étalés dans B et justifie « qu'on a le droit d'en parler » en construisant « une famille d'espaces étalés dans B telle que tout espace connexe étalé dans B soit isomorphe à l'un d'entre eux ». Aujourd'hui, nous dirions que la catégorie des espaces étalés dans B est localement petite, mais le langage des catégories n'était pas encore inventé, et Cartan ne définit pas les *morphismes* de cette catégorie, il considère seulement ses isomorphismes.

La méthode de Cartan consiste à observer que tout espace connexe étalé dans B peut être déduit de certains espaces étalés très simples (sommes disjointes d'ouverts de B) après quotient par une relation d'équivalence convenable. Il invoque pour cela un théorème « de Bourbaki » selon lequel, si $(U_k)_{k\in K}$ est un recouvrement ouvert d'un espace connexe B, et si a et b sont deux points de B, il existe une suite finie $(k_0, \dots, k_n)$ dans K tels que $a \in U_{k_0}$, $b \in U_{k_n}$, et pour tout i entre 1 et n, les ouverts $U_{k_{i-1}}$ et U_{k_i} aient un point commun.

Ce genre de considérations apparaît dans le chapitre I, §11 (*Connexion*), du livre de Topologie générale, en relation avec le théorème de Poincaré–Volterra qui précise la topologie de certains espaces étalés.

Poursuivons notre lecture.

Cartan introduit la notion d'espace étalé *pointé*, c'est-à-dire d'un espace étalé dont on a spécifié un point. Il va alors décrire la famille des espaces étalés pointés qui sont connexes en démontrant, dans un langage moderne, qu'elle possède un objet initial.

En effet, Cartan introduit une relation d'ordre sur les espaces étalés pointés en décidant que $(E, p, \xi) \subset (E', p', \xi')$ (en abrégé $E \subset E'$, l'application p et le point-base ξ sont sous-entendus) s'il existe une application étale $f : E \to E'$ telle que $p' \circ f = p$ et $f(\xi) = \xi'$. La transitivité est évidente, écrit Cartan, mais c'est la remarque faite plus haut qui garantit que l'on a bien une relation d'ordre. Cette même remarque assure aussi qu'il n'y a qu'une seule application f qui permet de s'assurer que $E \subset E'$, un fait que Cartan utilisera plus tard mais ne mentionne pas.

Cartan démontre alors qu'étant donnée une famille (E_i) d'espaces étalés pointés connexes, il existe un espace étalé pointé connexe qui est plus petit que chacun d'eux qu'il appelle l'intersection. La construction consiste à prendre l'espace somme des espaces étalés qui sont contenus dans chaque E_i et à passer au quotient par la relation d'équivalence qui identifie deux points de cet espace somme s'ils sont identifiés dans chaque E_i.

Si l'on cherche à lui conserver son caractère ensembliste, la terminologie semble un peu étrange car lorsque $E \subset E'$, l'application étale de E dans E' sous-jacente à la relation d'ordre n'est le plus souvent *pas* injective. Cependant, comme suggéré plus haut, la terminologie est conforme à celle de la théorie des catégories, l'objet construit est un objet initial, de même qu'une intersection d'ensembles est un objet initial. On regrette ici que le « style Bourbaki », même dans ces rédactions préliminaires, ne donne que peu de motivations…

5. Revêtements

La seconde partie du texte est consacrée aux *revêtements* et se limite aux espaces B qui sont connexes et localement connexes. Cartan commence par énoncer la définition (déjà reprise plus haut) d'un revêtement en précisant dans la définition que la projection d'un revêtement sur sa base est une application étale. Il inscrit donc la théorie des revêtements comme un cas particulier de celle des espaces étalés.

Comme nous l'avons évoqué au début du texte, la définition n'est pas exactement celle d'un espace fibré à fibres discrètes et Cartan identifie les différents feuillets locaux d'un revêtements grâce à l'hypothèse de connexité locale. La simplicité de la définition actuelle d'un espace fibré ne doit pas occulter la difficulté d'y parvenir, notamment lorsque les espaces qui étaient initialement considérés pour une théorie des revêtements étaient des surfaces (en vue de la théorie des surfaces de Riemann) qu'on examinait éventuellement via des décompositions combinatoires. En effet, la topologie locale de ces surfaces, comme celle des généralisations qui étaient envisagées, était relativement simple : elles sont localement connexes, localement compactes, localement contractiles, etc.

D'ailleurs, dans (Bourbaki, 1936b), Weil combinait locale compacité et locale connexité et aboutissait à une définition incorrecte d'un revêtement : il exigeait que *chaque composante connexe de l'image réciproque d'une partie fermée compacte arbitraire de B soit compacte.* Le compte-rendu des réunions des 22 et 23 mars 1936 qu'offre le *Journal de Bourbaki* (Bourbaki, 1936a) donne un indice sur ces hésitations. Nous sommes l'après-midi du 23 mars, Cartan vient d'arriver :

> On passe à la troisième partie. WEIL insiste sur la subtilité de la notion de localement connexe. CARTAN propose de s'en tenir aux espaces localement euclidiens. De prudentes investigations prouvent qu'il ne sait pas ce que c'est.
>
> CARTAN lit un laïus sur une nouvelle manière d'introduire le groupe de monodromie. Ça paraît très confus — WEIL clarifie — On pense que ça serait intéressant en théorie des ensembles mais pas en topologie.
>
> CHEVALLEY ennuie beaucoup WEIL. On a quelques instants d'émotion. Tout s'arrange par un errata.

Le premier paragraphe de cet extrait du *Journal* montre une difficulté intéressante : il est délicat de définir une classe maniable d'espaces topologiques qui contienne une famille donnée d'exemples importants. Rien ne garantit que les restrictions qui sont faites ici (connexité locale, etc.) suffiront au développement de la théorie ; à l'inverse, comment exprimer de façon générale les propriétés d'objets spécifiques qui ont servi à former l'intuition ?

Dans le second paragraphe, l'opposition entre théorie des ensembles et topologie rappelle le point de vue dominant dans la topologie des années 1930.

C'est dans le troisième paragraphe qu'est évoqué le problème de la définition de Weil : on ne peut exiger cela de l'image réciproque de toute partie fermée compacte de B, mais seulement de toute partie fermée compacte assez petite, contenue dans un ouvert U sur lequel le revêtement se découpe en feuillets. Cette correction figure à la fin de (Bourbaki, 1936b), en bas de page des *observations critiques de C. Chevalley* ; Cartan y a ajouté un renvoi sur son exemplaire (p. 16).

Cartan poursuit sa description de la théorie des revêtements en introduisant alors la notion d'espace *monodrome* : ce sont les espaces B (connexes, localement connexes) tels que tout revêtement connexe E de B est isomorphe à B, c'est-à-dire que l'application de projection $p : E \to B$ est un homéomorphisme. (La connexité de l'espace vide est une question sans grande portée à laquelle Bourbaki et Cartan répondent de façons différentes.) Ce sont les espaces « simplement connexes » au sens de la théorie des revêtements : leurs revêtements sont tous de la forme $B \times F$, où F est un espace discret.

Même si Cartan n'emploie pas cette terminologie, il était compris à l'époque qu'il s'agit d'une extension de la notion de connexité. Dans un espace topologique donné, la réunion de deux ouverts connexes dont l'intersection est non vide est encore connexe ; Cartan démontre alors la réunion de deux ouverts connexes monodromes dont l'intersection est connexe est encore monodrome. La note de Cartan ne contient pas d'exemple explicite, et ne fait nulle part le lien avec la théorie de l'homotopie, mais signalons qu'une variante de la démonstration de ce résultat permet de prouver la propriété fondamentale que tout cube $[0;1]^n$ ou tout simplexe est monodrome.

En vue de préparer la théorie du revêtement universel, Cartan prouve qu'un revêtement pointé d'un espace pointé donné B qui est un espace monodrome est contenu (au sens qu'il a donné pour les espaces étalés pointés) dans tout espace pointé étalé dans B. Lorsque l'espace B est « localement monodrome », il démontre que l'intersection (au sens donné pour les espaces étalés pointés) de toute famille de revêtements pointés est

encore un revêtement ; de plus, tout revêtement d'un revêtement est un revêtement. Ces propriétés ne vaudraient pas sans l'hypothèse de monodromie locale, il y a des myriades d'exemples qui indiquent que la théorie des revêtements n'est pas raisonnable sans des hypothèses topologiques locales qui font intervenir la notion de revêtement.

Comme ces revêtements forment une famille, on peut en particulier prendre l'intersection de tous les revêtements pointés d'un espace B (supposé connexe, localement connexe et localement monodrome…). C'est un revêtement pointé de B et, comme l'écrit Cartan, il est « évidemment monodrome ». En outre, au moins à isomorphisme près, il ne dépend pas du point base choisi sur B : c'est le revêtement universel de B.

La fin du texte de Cartan est consacrée à la *classification* des revêtements pointés d'un espace pointé B au moyen de son *groupe de Poincaré*, les premiers étant en correspondance bijective avec les sous-groupes du second.

Il y a ici une différence notable entre la présentation qu'il propose et celle qui est couramment exposée aujourd'hui. Dans ce texte de Cartan, le groupe de Poincaré d'un espace pointé B est *défini* comme le groupe des automorphismes de son revêtement universel, alors que chez Poincaré, et à peu près partout aujourd'hui, il est défini en termes de classes d'homotopie de lacets au point-base (les homotopies étant astreintes à fixer ce point-base). De fait, il n'y a pas le moindre chemin dans cette note de Cartan. Avec des lunettes quelque peu anachroniques, on peut même y lire une anticipation de la théorie du groupe fondamental que proposera Grothendieck (1971) en géométrie algébrique.

Références

M. Audin, éd. (2014). *Le Séminaire de mathématiques 1935-1936 : Topologie*. Le séminaire de mathématiques 1933-1939 4. CEDRAM. URL : *https://proceedings.centre-mersenne.org/item/MALSM_2014__4_/*.

N. Bourbaki (1934). *Réunion du 10 - XII - 34 à 12h*. URL : *https://archives-bourbaki.ahp-numerique.fr/items/show/1*.

——— (1935a). *Journal de Bourbaki n°2*. Journal de Bourbaki. URL : *https://archives-bourbaki.ahp-numerique.fr/items/show/16*.

——— (1935b). *Sous-commission bibliographique*. URL : *https://archives-bourbaki.ahp-numerique.fr/items/show/10*.

——— (1935c). *Traité d'analyse — Réunion du 28 janvier 1935*. Tribu.

——— (1936a). *Journal de Bourbaki n°5*. Journal de Bourbaki. URL : *https://archives-bourbaki.ahp-numerique.fr/items/show/68*.

——— (1936b). *Rédaction n°084. Topologia Bourbachica*. URL : *http://archives-bourbaki.ahp-numerique.fr/items/show/492*.

——— (1941). *Rédaction. Topologia Bourbachica III, Contre-projet Cartan (avril 1941)*. Rédaction. URL : *http://archives-bourbaki.ahp-numerique.fr/items/show/655*.

——— (1949). *Tribu - Compte-rendu du congrès œcuménique du cocotier (Royaumont, 13-25 avril 1949)*. Tribu. Royaumont. URL : *https://archives-bourbaki.ahp-numerique.fr/items/show/96*.

N. Bourbaki (1998). « L'architecture des mathématiques », in : *Les grands courants de la pensée mathématique*. Hermann. URL : *https://dn721800.ca.archive.org/0/items/la-architecture-des-mathematiques-nicolas-bourbaki-ocr/la%20architecture%20des%20mathematiques%20-%20nicolas%20bourbaki_ocr.pdf*.

H. Cartan (1980). « Nicolas Bourbaki and contemporary mathematics », *The Mathematical Intelligencer* **2** (4), p. 175-180. URL : *https://doi.org/10.1007/BF03028596*.

A. Grothendieck (1971). *Revêtements étales et groupe fondamental*. Lecture Notes in Mathematics 224. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag.

K. Reidemeister (1928). « Fundamentalgruppe und Überlagerungsräume », *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* **1928**, p. 69-76. URL : *https://eudml.org/doc/59259*.

H. Seifert et W. Threlfall (1934). *Lehrbuch der Topologie*. Leipzig : B. G. Teubner.

J.-P. Serre (1956). « Géométrie algébrique et géométrie analytique », *Universite de Grenoble. Annales de l'Institut Fourier* **6**, p. 1-42. URL : *http://aif.cedram.org/item?id=AIF_1955__6__1_0*.

H. Weyl (1997). *Die Idee der Riemannschen Fläche*. Sous la dir. de R. Remmert. T. 5. Teubner-Archiv zur Mathematik. Wiesbaden : Vieweg+Teubner Verlag. URL : *http://link.springer.com/10.1007/978-3-663-07819-7*.