

Récoltes et Semailles I, II. Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien
 Alexandre GROTHENDIECK
 Gallimard, Collection Tel., 2022. 1800 p. ISBN : 9782072889752

Le jour commence à poindre – je sens qu’il est temps de m’arrêter. Je ne suis pas sûr que c’est le moment et le lieu, dans *Récoltes et semailles*, de poursuivre plus avant le sens de cette coïncidence frappante. C’est une récolte peut-être réservée à d’autres lendemains, pour peu que ma réflexion de cette nuit rencontre un écho chez l’un ou l’autre de ceux qui furent mes élèves.
 (Note 84, 9 mai 1984^a)

Mai 1984. Voilà plusieurs mois qu’Alexandre Grothendieck, jour après jour, ou plutôt nuit après nuit, rédige ses *réflexions* sur son « passé de mathématicien ». Un texte immense, tout à la fois lettre à d’anciens amis et *témoignage*, auquel il donna le titre de *Récoltes et semailles*, et que Gallimard vient de publier dans la collection Tel. L’homme n’a pas abandonné les mathématiques, il enseigne à l’université de Montpellier et a écrit peu avant une très longue lettre à Daniel Quillen, *À la poursuite des champs*, défrichage programmatique, heuristique, qui vient tout juste (2022) d’être publié.^b Et même si personne ne le sait encore, l’*Esquisse d’un programme* qu’il rédigera peu après en guise de demande de poste au CNRS sera source d’inspiration pour au moins 50 ans.

Voilà près de 15 ans qu’en 1970 le mathématicien avait quitté son poste à l’Institut des hautes études scientifiques, à Bures-sur-Yvette, près d’Orsay, en vallée de Chevreuse, un institut autour de René Thom et de Grothendieck créé sur le modèle de l’Institute of Advanced Study de Princeton. C’est que, tirant prétexte du financement militaire de cet institut, et préoccupé par les bouleversements écologiques qui s’annonçaient déjà, il avait préféré tourner le dos à un milieu mathématique qu’il avait animé, renouvelé, bouleversé pendant vingt-cinq ans. Vingt-cinq années au cours desquelles, d’un même mouvement, il avait refondé la géométrie algébrique autour de la notion de *schéma*, construit la « cohomologie étale » et, pour cela, développé la théorie des *topos*, démontré une partie des conjectures de Weil, inventé la notion de *motif*, obtenu la médaille Fields...

Voilà environ 35 ans qu’en 1948 le mathématicien avait quitté la région de Montpellier où il vivait avec sa mère pour étudier les mathématiques, d’abord à Paris puis, accueilli par une bande de mathématiciens (essentiellement le groupe Bourbaki), très rapidement, à Nancy, où il fit une thèse d’analyse fonctionnelle sur la notion de produit tensoriel topologique et la théorie de Fredholm dans laquelle, dit-on, il résolvait d’un coup les quatorze problèmes que Laurent Schwartz lui avait soumis.

Voilà environ 45 ans qu’en 1940, en pleine guerre, interné avec sa mère Hanka au camp de concentration de Rieucros, près de Mende, en tant que juif allemand, enfant, « indésirable », il découvrait

les jeux de tracés au compas, enchanté notamment par les rosaces à six branches qu’on obtient en partageant la circonférence en six parties égales à l’aide de l’ouverture du compas reportée sur la circonférence à six reprises, ce qui fait retomber pile sur le point de départ.
 (Note 69, 27 avril 1984)

et s’emballait en en déduisant que la circonférence du cercle est 6 fois son rayon...

Voilà environ 55 ans qu'en mars 1928, cet homme naissait à Berlin, de parents dont l'énergie socialiste-révolutionnaire conduirait à le confier, dès 1934, à un pasteur et instituteur du nord de l'Allemagne et avec qui il vivra pendant 6 ans. Entre l'engagement révolutionnaire (Budapest, Berlin, Barcelone...) et la nécessité de fuir le nazisme, c'est en France qu'ils se retrouvent, vers 1938. L'arrivée de la guerre, et la défaite de 40, les séparent à nouveau. D'abord interné au camp du Vernet, son père, Shapira, est déporté à Auschwitz où il mourra.

Alexander Grothendieck mourra en 2014, dans la solitude d'une maison de l'Ariège.

Écrit dans les années 1984-1986, *Récoltes et semilles* est un texte très long, environ 1000 pages dactylographiées, que Gallimard vient de publier en un coffret de deux volumes de tailles inégales, accompagné d'un petit livret constitué d'une dizaine de textes indépendants. Ce n'est pas pour autant un texte complètement inédit. Dès son écriture, Grothendieck escomptait le publier; contactés, les éditions Christian Bourgois et le journaliste Stéphane Deligeorges s'étaient même dits intéressés. Grothendieck l'avait également envoyé à ses anciens collaborateurs, et l'on pouvait le consulter dans quelques bibliothèques universitaires. Les trois premiers volumes d'une traduction japonaise avaient été publiés vers 1990. Document sulfureux, Internet permit sa plus grande diffusion; outre le texte français, on en trouve en ligne des traductions en anglais, en espagnol, en russe... Ce n'est qu'en 2022 que le texte est finalement publié; des libraires m'ont dit être à la fois satisfaits et étonnés de la façon dont il se vend.

Dès sa table des matières, on devine que *Récoltes et semilles* est un texte au contenu singulier. Précédé d'un *Prélude en quatre mouvements*, il est formé de quatre parties dont les titres sont *Fatuité et renouvellement* pour la première, et *L'enterrement* (I), (II), (III) pour les trois autres. Ces quatre parties forment le projet initial et se présentent comme une suite d'environ 200 notes de quelques pages chacune.

C'est la réflexion poursuivie d'une traite, au cours d'une journée ou d'une nuit, qui constitue l'unité indivise, la cellule vivante et individuelle en quelque sorte, dans l'ensemble de la réflexion (*Récoltes et semilles*, en l'occurrence). Celle-ci est à chacune de ces unités (ou ces « notes », formant mélodie...) ce que le corps d'un organisme vivant est à chacune de ses cellules individuelles, d'une diversité infinie, remplissant chacune une place et une fonction qui n'appartient qu'à elle.

Une lettre, §11. Mouvement et structure

Conçues comme des méditations, et je dirais plutôt des comptes-rendus de méditations, les notes de *Récoltes et semilles* permettent à Grothendieck d'élaborer une longue réflexion sur les oppositions femme/homme, enfant/patron, sensibilité/raison, etc. : toute la troisième partie est consacrée à la dualité yin/yang, sous un angle que la psychologie contemporaine semble avoir dépassé.

Malgré tout, on y trouve parfois des images sublimes qui ont conduit des artistes à en faire le matériau d'œuvres poétiques, telles la pièce *Rêves et motifs*, théâtre d'ombre et de papier froissé de la compagnie Les rémouleurs, ou encore les lectures d'Anouk Grinberg à la Maison de la poésie.

Prenons par exemple la tâche de démontrer un théorème qui reste hypothétique (à quoi, pour certains, semblerait se réduire le travail mathématique). Je vois deux approches extrêmes pour s'y prendre. L'une est celle du marteau et du burin, quand le problème posé est vu comme une grosse noix, dure et lisse, dont il s'agit d'atteindre l'intérieur, la chair nourricière protégée par la coque. Le principe est simple : on pose le tranchant du burin contre la coque, et on tape fort. Au besoin, on recommence en plusieurs endroits différents, jusqu'à ce que la coque se casse – et on est content. (...)

Je pourrais illustrer la deuxième approche, en gardant l'image de la noix qu'il s'agit d'ouvrir. La première parabole qui m'est venue à l'esprit tantôt, c'est qu'on plonge la noix dans un liquide émoullent, de l'eau simplement pourquoi pas, de temps en temps on frotte pour qu'elle pénètre mieux, pour le reste on laisse faire le temps. La coque s'assouplit au fil des

semaines et des mois – quand le temps est mûr, une pression de la main suffit, la coque s’ouvre comme celle d’un avocat mûr à point! Ou encore, on laisse mûrir la noix sous le soleil et sous la pluie et peut-être aussi sous les gelées de l’hiver. Quand le temps est mûr c’est une pousse délicate sortie de la substantifique chair qui aura percé la coque, comme en se jouant – ou pour mieux dire, la coque se sera ouverte d’elle-même, pour lui laisser passage.
(Note 122, 8 novembre 1984)

Cependant, la plus grande part du texte de Grothendieck se concentre autour de quelques aspects de son œuvre mathématique conçus avant son départ pour Montpellier. La forme sous laquelle ses collaborateurs, ses élèves, les ont développés après son départ lui apparaît comme une trahison, sentiment traduit par le titre *L’enterrement* qu’il a donné à trois parties de *Récoltes et semilles* – le mot « enterrement » ou ses variantes apparaissent environ 900 fois dans le texte!

Pour expliquer cela, il faut revenir sur la « méthode de travail Grothendieck » des années 1960-1970. En effet, la refondation de la géométrie algébrique qu’il a menée ces années-là se divise en deux pôles.

1. Les *Éléments de géométrie algébrique*, rédigés « avec la collaboration de Jean Dieudonné » et familièrement invoqués de l’acronyme ÉGA, sont une réécriture systématique de la géométrie algébrique autour de la notion de schéma. Publiés sous forme d’un long article en 4 chapitres aux *Publications mathématiques de l’IHÉS* entre 1960 et 1966, ils forment un corpus d’environ 2000 pages qui reprennent la géométrie algébrique « à son début » du nouveau point de vue des schémas, tout en y incorporant d’autres avancées fondamentales comme le point de vue cohomologique introduit par Serre en 1955. En 1971, une version améliorée du premier chapitre a fait l’objet d’un volume dans la collection *Grundlehren* de Springer-Verlag.
2. Les *Séminaires de géométrie algébrique* où, chaque année, Grothendieck renouvelait un thème de la géométrie algébrique, assisté d’un groupe de jeunes mathématiciens ou mathématiciennes, pour beaucoup ses élèves doctorants, qui formaient une sorte de détachement avancé : revêtements et groupe fondamental; théorèmes de Lefschetz; groupes algébriques; puis cohomologie étale et fonctions L; théorie de l’intersection et théorème de Riemann-Roch, mais il faut plutôt dire théorème de Riemann-Roch-Grothendieck; cycles évanescents et groupes de monodromie... Les rédactions de ces séminaires, SGA 1 à SGA 7, sont parues dans la collection *Lecture notes in mathematics* de Springer-Verlag entre 1970 et 1972.

Les thèmes mathématiques qui intéressent particulièrement Grothendieck dans *Récoltes et semilles* sont ceux qu’il a introduits avant 1970 mais que ses successeurs n’ont, selon lui, pas correctement traités : les éditions des *Séminaires*, l’insertion par Deligne d’un volume « SGA 4 $\frac{1}{2}$ » entre les volumes 4 et 5 du *Séminaire*, l’algèbre homologique des catégories dérivées (thèse de Verdier), certains aspects de la cohomologie des schémas (théorie de Hodge relative, D-modules, théorie cristalline), la notion de topos, et surtout celle de *motif*. Ce sont des thèmes sur lesquels Grothendieck avait une vision personnelle très approfondie, et pour lesquels il reproche à ses successeurs d’en minorer l’importance, de ne pas les avoir développés selon l’image que lui-même en avait. Il leur reproche carrément de ne pas l’avoir cité suffisamment explicitement; mais était-ce par maladresse ou par indécatesse?

Sur la question de motif, justement, quelques lettres entre Serre et Grothendieck ^c pourront nous aider à y voir un peu plus clair, au risque d’une digression mathématique.

Comme il apparaît dès les premières lignes des ÉGA, l’objectif premier de Grothendieck en refondant la géométrie algébrique était de prouver des conjectures de Weil concernant le nombre de solutions d’équations polynomiales dans des corps finis, plus précisément une certaine série génératrice (la « fonction zêta de Hasse-Weil ») formée à partir de ces nombres de solutions lorsque l’on fait varier le corps fini. Ce sont en fait trois conjectures que formule Weil : 1) cette série est une fraction rationnelle; 2) elle possède une équation fonctionnelle; 3) les zéros et pôles de cette fraction rationnelle sont des nombres complexes de modules précisés.

Dès son article de 1949, Weil fait la suggestion d’utiliser une théorie analogue à la cohomologie singulière. La « cohomologie étale des schémas » a permis à Grothendieck de démontrer les deux premières conjectures de Weil en 1965. (Peu avant, Dwork avait pu prouver la rationalité par une autre

méthode.) Le développement de cette théorie et ses propriétés (en particulier, l'analogie de la formule des traces de Lefschetz) est au centre des monumentaux volumes 4, 5, 6 et 7 des *SGA*.

Dans une lettre à Serre du 27 août 1965, Grothendieck propose deux « conjectures-clef » concernant les cycles algébriques et qui impliquent les conjectures de Weil ; leur intérêt est d'être purement géométrique, alors que les conjectures de Weil sont plutôt de nature arithmétique. Grothendieck précise également que la conjecture A « semble le "minimum minimorum" pour donner une définition en forme utilisable de la notion de motif ». En 1969, Grothendieck publiera ces conjectures et les appellera « conjectures standard ».

Lorsque Deligne démontre la troisième conjecture de Weil, en 1973, il met à profit une autre propriété géométrique (que la monodromie des pinceaux de Lefschetz est grande, pour en déduire l'irréductibilité d'un système local, puis sa pureté), mais il « contourne » les conjectures standard. Et comme Serre écrit à Grothendieck dans sa réponse à *Récoltes et semilles* (lettre du 23 juillet 1985), « cela te choque, mais cela me ravit ».

Revenons à *Récoltes et semilles*. Dans le cœur du livre, les notes de Grothendieck sont l'occasion de remarques cinglantes, ironiques, méchantes à l'encontre d'à peu près tous les mathématiciens qui, pendant de nombreuses années, s'étaient mis au service de son œuvre. Seuls Dieudonné et Chevalley semblent échapper à son opprobre. Hélas, ces remarques sont souvent injustes, et parfois infondées. Car si Grothendieck a relu ses notes, et les a mêmes parfois remaniées avant de les confier à la frappe, il les considère comme un « matériau brut » qui serait trahi par une réécriture plus ample :

Ainsi, les rectifications éventuelles d'erreurs (matérielles, ou de perspective, etc.) ne sont pas l'occasion de retouches du premier jet, mais se font dans des notes de bas de page, ou lors d'un « retour » ultérieur sur la situation examinée.

Promenade à travers une œuvre, §3, note de bas de page

Si, à plusieurs reprises, il reconnaît ainsi avoir été trompé par une mémoire imparfaite, il ne corrige pas le texte incriminé, mais le complète parfois par des notes de bas de page insérées à l'endroit litigieux, et surtout en revenant sur le sujet par des notes ultérieures.

Tout cela fait de *Récoltes et semilles* un texte qu'il n'est jamais possible de prendre pour argent comptant. C'est un témoignage, et les historiens savent bien la difficulté d'y retrouver l'Histoire. C'est un point où l'édition Gallimard est, je trouve, insuffisante : si on y trouve, en fin du deuxième volume, un index des noms propres, celui-ci est bien moins pratique que la fonction « Rechercher » lorsqu'on dispose d'une version PDF, et on n'y trouvera pas d'index des thèmes évoqués, pas de biographie succincte de Grothendieck, pas de bibliographie, ni de son œuvre, ni de celles connexes, en clair, rien qui s'approcherait du nécessaire appareil critique accompagnant un document de cette ampleur.

En ouvrant *Récoltes et semilles*, c'est cependant par le *Prélude en quatre mouvements* que les lecteurs et lectrices débiteront leur découverte de ce témoignage, prélude lui-même constitué de deux grandes parties, *Promenade à travers une œuvre – ou l'enfant et la Mère* puis *Une lettre*. De fait, ces parties sont présentées dans l'ordre inverse de leur écriture : la *lettre* est une introduction aux quatre parties, et la *promenade* est comme une introduction à l'introduction... Ces deux premiers mouvements sont complétés par une introduction en deux temps : *Le trèfle à cinq feuilles* et *Un acte de respect*.

Écrites à l'issue du long processus de réflexion-méditation que sont *Récoltes et semilles*, plus ramassées, plus synthétiques, un peu moins spécifiquement mathématiques, ce sont peut-être ces deux ou trois cents premières pages que la plupart des lecteurs et lectrices liront.

Lorsque Damien Gayet m'a confié la responsabilité d'écrire cette recension de *Récoltes et semilles*, il m'est immédiatement apparu nécessaire d'éviter un double écueil. L'écueil de l'œuvre monstrueuse d'un génie, d'une part, sur lequel l'édition Gallimard s'échoue dès la quatrième de couverture et qu'à quelques exceptions près (dont le beau texte, fin et juste, qu'y offre Luc Illusie), le livret de présentation n'évite pas plus. L'écueil de la folie d'autre part. Car l'interminable ressentiment, la profonde acrimonie, l'immense méchanceté qui se dégage de la lecture de *Récoltes et semilles* conduit de nombreux collègues à cataloguer ce texte comme l'œuvre d'un paranoïaque. Dans les deux cas, pourquoi le lire ?

Peut-être parce que malgré la singularité de ce document, malgré la singularité de son auteur, Grothendieck nous confronte, nous lecteurs et lectrices d'aujourd'hui, à notre propre mouvement vers les mathématiques, souvent initié dans l'enfance.

Mathématicien qui ne cesse d'insister sur l'importance de la réflexion indépendante et solitaire, mais dont l'œuvre est frappée du sceau de collaborations multiples, Grothendieck nous confronte d'abord à notre propre pratique, individuelle et collective, d'une discipline scientifique qui loue le matin l'originalité d'une approche et raffine ses cloisonnements l'après-midi...

Pétri de ressentiment envers ses anciens élèves qui n'auraient pas poursuivi la voie indiquée, à un moment où lui-même était d'ailleurs parti dans une autre direction, Grothendieck nous pose aussi la question du destin de nos travaux, de ce que nous attendons de nos élèves.

Et animé de l'angoisse profonde d'avoir été *enterré, effacé*, et malgré sa propre légèreté, sinon malhonnêteté, il nous rappelle enfin la responsabilité d'une présentation fidèle, sincère, honnête de l'origine des idées qui nous traversent et que nous poursuivons vaillamment.

C'est en tout cas ce que j'ai voulu y lire.

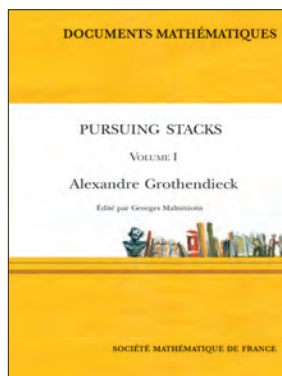
Antoine CHAMBERT-LOIR
Université Paris Cité

a. Toutes les citations sont issues de *Récoltes et semailles*, op. cit.

b. A. GROTHENDIECK, *Pursuing Stacks*, édité par G. MALTSINIOTIS, Documents mathématiques, 20, Société mathématique de France, 2004.

c. A. GROTHENDIECK, J-P. SERRE, *Correspondance Grothendieck-Serre*, édité par P. COLMEZ, Documents mathématiques, 2, Société mathématique de France, 2001. Traduction anglaise, par C. MACLEAN, American Mathematical Society/Société mathématique de France, 2004.

Documents mathématiques - nouveauté



Vol. 20

Pursuing Stacks (volume I)

Alexandre GROTHENDIECK, édité par Georges MALTSINIOTIS

ISBN 978-2-85629-958-6

2022 - 446 pages - Hardcover. 17 x 24

Public: 75 € - Members: 53 €

Despite what its title suggests, Pursuing Stacks (or at least the part of the project that Grothendieck carried out under the name of The Modelizing Story or Histoire de Modèles) is not about the pursuit of stacks. Only the thirteen first sections, as well as, partially, sections 15–21 and 27, are about stacks. Furthermore, it is mainly about ∞ -stacks on the point, i.e. weak ∞ -groupoids. The only reflections on stacks on arbitrary topoi, as natural coefficients for a non-abelian cohomology, are purely heuristic. The rest of the hundred and forty sections deals with homotopy theory : the search for models for homotopy types (and more particularly for small categories whose presheaf category models canonically homotopy types : the test categories), homotopy structures,

contractibility and asphericity structures, abelianization and schematization of homotopy types. Grothendieck was planning to come back later to ∞ -stacks on topoi and to develop, in one or two additional volumes, what he had sketched out in his letters to Breen (letters that he included in Pursuing Stacks as an appendix), but he never did it. Nevertheless, the search for models for homotopy types is closely related to ∞ -stacks, since according to the "homotopy hypothesis", a fundamental conjecture of Grothendieck, the weak ∞ -groupoids model homotopy types. The first volume of this edition consists of the first four chapters (sections 1–91 and 95–98). In a second volume, we will publish the last three chapters, the letters to Breen, as well as the correspondence of Grothendieck with several mathematicians, around the themes of Pursuing Stacks.

Disponible sur le site de la SMF (boutique en ligne) : <https://smf.emath.fr>

*frais de port non compris

