Sorbonne Université
Master de mathématiques fondamentales, année universitaire 2020-2021, cours *Les outils de la géométrie algébrique*, corrigé de l'examen terminal du 27 octobre 2020.
Enseignant : Antoine Ducros

Exercice 1. Nous utiliserons souvent implicitement dans ce qui suit le fait suivant, qui se vérifie trivialement ouvert par ouvert : si un morphisme de $\mathscr{G}$-faisceaux est un isomorphisme de faisceaux, c'est un isomorphisme de $\mathscr{G}$-faisceaux.

(1) Soit u un morphisme de $\mathscr{G}$ vers $\mathscr{F}$ et soit U un ouvert de X. Pour tout $g \in \mathscr{G}(U)$ on a
$$u(g) = u(ge) = gu(e)$$
(en omettant d'indiquer les restrictions à U pour ne pas alourdir les notations) ; par conséquent, on voit que u est entièrement déterminée par $u(e)$, d'où l'injectivité de l'application étudiée.
Montrons sa surjectivité. Soit f un élément de $\mathscr{F}(X)$. Pour tout ouvert U de X, l'application de $\mathscr{G}(U)$ dans $\mathscr{F}(U)$ qui envoie g sur gf commute à l'action de $\mathscr{G}$ (car $g'(gf) = (g'g)f$ pour tout (g, g') par définition d'une action de groupes), et est manifestement fonctorielle en U. Elle définit donc un morphisme de $\mathscr{G}$ dans $\mathscr{F}$, qui envoie par construction e sur f.
Ainsi $u \mapsto u(e)$ établit bien une bijection $\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}-\mathsf{faisc}}(\mathscr{G}, \mathscr{F}) \simeq \mathscr{F}(X)$, dont la réciproque a été exhibée ci-dessus : c'est $f \mapsto (g \mapsto gf)$.
En termes catégoriques, le foncteur covariant de $\mathscr{G}$-faisc dans Ens qui envoie $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{F}(X)$ est représentable par le couple $(\mathscr{G}, e)$.

(2) Soit $u\colon \mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ un morphisme entre deux $\mathscr{G}$-torseurs. Pour montrer que u est un isomorphisme, on peut le vérifier localement ; ceci permet donc de supposer que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ sont tous deux isomorphes à $\mathscr{G}$, et finalement qu'ils sont égaux à $\mathscr{G}$.
Il résulte alors de (1) que si l'on pose $f = u(e)$ le morphisme u est donné par la formule $g \mapsto gf$; et c'est clairement un isomorphisme de réciproque $g \mapsto gf^{-1}$.
Un $\mathscr{G}$-torseur $\mathscr{F}$ est trivial si et seulement si il existe un isomorphisme de $\mathscr{G}$ vers $\mathscr{F}$; par ce qui précède, cela revient simplement à demander qu'il existe un morphisme de $\mathscr{G}$ vers $\mathscr{F}$; et d'après (1), l'ensemble des morphismes de $\mathscr{G}$ vers $\mathscr{F}$ est en bijection avec $\mathscr{F}(X)$. En conséquence, $\mathscr{F}$ est trivial si et seulement si $\mathscr{F}(X)$ est non vide.

(3) Supposons que $\mathscr{F}$ soit un $\mathscr{G}$-torseur. Il existe alors un recouvrement ouvert (U_i) de X tel que $\mathscr{F}|_{U_i}$ soit trivial pour tout i, ce qui entraîne en vertu de (2) que $\mathscr{F}(U_i)$ est non vide, d'où (i). Soit U un ouvert de X et soit $f \in \mathscr{F}(U)$. Soit u l'unique morphisme de $\mathscr{G}|_U$ vers $\mathscr{F}|_U$ envoyant e sur f, qui est donné par la formule $g \mapsto gf$, *cf.* la question (1). Comme $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{G}$-torseur, ce morphisme est un isomorphisme d'après (2), d'où (ii).
Réciproquement, supposons que (i) et (ii) soient satisfaits, et donnons-nous (U_i) comme dans (i). Fixons i. Par hypothèse, $\mathscr{F}(U_i)$ est non vide ; choisissons $f_i \in \mathscr{F}(U_i)$, et soit u_i l'unique morphisme de $\mathscr{G}|_{U_i}$ vers $\mathscr{F}|_{U_i}$ envoyant e sur f_i, qui est donné par la formule $g \mapsto gf_i$, *cf.* la question (1). Il résulte de l'hypothèse (ii) que u_i est un isomorphisme ;

ceci valant pour tout i, le $\mathscr{G}$-faisceau $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{G}$-torseur (trivialisé par le recouvrement (U_i)).

(4) Posons $h_{ij} = a_i g_{ij} a_j^{-1}$. On a pour tout (i, j, k) les égalités

$$h_{ik} = a_i g_{ik} a_k^{-1} = a_i g_{ij} g_{jk} a_k^{-1} = a_i g_{ij} a_j^{-1} j g_{jk} a_k^{-1} = h_{ij} h_{jk}$$

(dans $\mathscr{G}(U_i \cap U_j \cap U_k)$). On a par ailleurs

$$h_{ii} = a_i g_{ii} a_i^{-1} = a_i e a_i^{-1} = e$$

et

$$h_{ji} = a_j g_{ji} a_i^{-1} = a_j g_{ij}^{-1} a_i^{-1} = (a_i g_{ij} a_j^{-1})^{-1} = h_{ij}^{-1}$$

si bien que (h_{ij}) est un cocycle.

(5) Tout cocycle est cohomologue à lui-même (prendre $a_i = e$ pour tout i) ; la relation de cohomologie est donc bien réflexive.
Soit (g_{ij}) un cocyle, et soit (h_{ij}) un cocycle tel qu'il existe une famille (a_i) avec $a_i \in \mathscr{G}(U_i)$ pour tout i et $h_{ij} = a_i g_{ij} a_j^{-1}$ pour tout (i, j). On a alors $g_{ij} = a_i^{-1} h_{ij} a_j$ pour tout (i, j), et la relation de cohomologie est donc symétrique.
Enfin, soient $(f_{ij}), (g_{ij})$ et (h_{ij}) trois cocycles. Supposons que (f_{ij}) et (g_{ij}) sont cohomologues et que $(g_{ij}$ et (h_{ij}) sont cohomologues. Choisissons deux familles (a_i) et (b_i) telles que $g_{ij} = a_i f_{ij} a_j^{-1}$ et $h_{ij} = b_i g_{ij} b_j^{-1}$ pour tout (i, j). On a alors pour tout (i, j)

$$h_{ij} = b_i g_{ij} b_j^{-1} = b_i a_i f_{ij} a_i^{-1} b_j^{-1} = (a_i b_i) f_{ij} (a_j b_j)^{-1}$$

et la relation de cohomologie est donc transitive.

(6)

(6a) Commençons par introduire une notation. Soit U un ouvert de X et soient f_1 et f_2 deux sections de $\mathscr{F}$ sur U. Il résulte de la question (3) qu'il existe un unique élément g de $\mathscr{G}(U)$ tel que $f_1 = g f_2$; nous le noterons $f_1 f_2^{-1}$; insistons sur le fait que *ce n'est qu'une notation* : f_2^{-1} n'a pas de sens, pas plus que le produit de deux sections de $\mathscr{F}$.
La commodité de cette notation vient des remarques qui suivent.

(α) On a $f_1 = e f_1$ si bien que $f_1 f_1^{-1} = e$.

(β) On a

$$(f_2 f_1^{-1})^{-1} f_2 = f_1 = (f_1 f_2^{-1}) f_2$$

si bien que $(f_2 f_1^{-1})^{-1} = f_1 f_2^{-1}$.

(γ) Donnons-nous troisième section f_3 de $\mathscr{F}$ sur U. On a alors

$$(f_1 f_3^{-1}) f_3 = f_1 = (f_1 f_2^{-1}) f_2 = (f_1 f_2^{-1})(f_2 f_3^{-1}) f_3$$

si bien que $(f_1 f_2^{-1})(f_2 f_3^{-1}) = f_1 f_3^{-1}$.

Considérons maintenant des isomorphismes λ_i comme dans l'énoncé. Posons $f_i = \lambda_i(e)$ (on sait d'après (1) et (2) que se donner λ_i revient à se donner f_i, que l'on peut choisir égal à n'importe quel élément de $\mathscr{F}(U_i)$).
Pour tout (i, j), notons g_{ij} l'élément $f_i f_j^{-1}$ de $\mathscr{G}(U_i \cap U_j)$, avec les conventions ci-dessus. Les propriétés $(\alpha), (\beta)$ et (γ) entraînent alors immédiatement que (g_{ij}) est un cocycle.

Supposons donnée une seconde famille d'isomorphismes (μ_i) ; posons $\varphi_i = \mu_i(e)$. Le cocycle correspondant est alors (h_{ij}) avec $h_{ij} = \varphi_i\varphi_j^{-1}$ pour tout (i,j).
Des propriétés (γ) puis (β) ci-dessus il résulte que l'on a pour tout (i,j) les égalités

$$h_{ij} = \varphi_i\varphi_j^{-1} = (\varphi_i f_i^{-1})(f_i^{-1}f_j)(f_j\varphi_j^{-1}) = (\varphi_i f_i^{-1})g_{ij}(\varphi_j f_j^{-1})^{-1}$$

dans $\mathscr{G}(U_i \cap U_j)$, et les cocycles (g_{ij}) et (h_{ij}) sont donc cohomologues *via* la famille $(\varphi_i f_i^{-1})_i$.
Enfin, soit $\mathscr{F}'$ un $\mathscr{G}$-faisceau isomorphe à $\mathscr{F}$. Fixons un isomorphisme $u\colon \mathscr{F} \simeq \mathscr{F}'$. Pour tout i, la composée $u|_{U_i} \circ \lambda_i$ est un isomorphisme $\mathscr{G}|_{U_i} \simeq \mathscr{F}'|_{U_i}$, qui envoie e sur $u(f_i)$. Si i et j sont deux indices l'égalité $f_i = (f_i f_j^{-1})f_j$ entraîne que $u(f_i) = (f_i f_j^{-1})u(f_j)$; autrement dit, $u(f_i)u(f_j)^{-1} = f_i f_j^{-1}$. Le cocycle associé à la famille d'isomorphismes $(u\circ\lambda_i)$ est donc égal à (g_{ij}) ; la classe de cohomologie associé à $\mathscr{F}'$ est par conséquent la même que celle associé à $\mathscr{F}$, ce qu'il fallait démontrer.

(6b) Soit U un ouvert de X et soit (γ_i) une section de $\mathscr{F}$ sur U. Soit $g \in \mathscr{G}(U)$. On a alors $g\gamma_i = g\gamma_j g_{ji}$ pour tout (i,j) (dans $\mathscr{G}(U\cap U_i\cap U_j)$, et $(g\gamma_i)_i$ est par conséquent encore une section de $\mathscr{F}$; il est alors immédiat que la formule $(g,(\gamma_i)) \mapsto (g\gamma_i)$ définit un morphisme de faisceaux de $\mathscr{G} \times \mathscr{F}$ vers $\mathscr{F}$ faisant de $\mathscr{F}$ un $\mathscr{G}$-faisceau.
Fixons j, et soit U un ouvert de X contenu dans U_j. Soit $g \in \mathscr{G}(U)$. La famille $(gg_{ji})_i$ (où gg_{ji} est vu comme section de $\mathscr{G}$ sur l'ouvert $U \cap U_i \cap U_j = U \cap U_i$) est alors un élément de $\mathscr{F}(U)$: en effet si i et k sont deux indices, on a

$$gg_{ji} = gg_{jk}g_{ki}$$

(en vertu des formules vérifiées par les cocycles), ce qu'il fallait démontrer. Notons $u_j(g)$ la section $(gg_{ji})_i$ de $\mathscr{F}$ sur U. Il est immédiat que u_j définit un morphisme de $\mathscr{G}$-faisceaux de $\mathscr{G}|_{U_j}$ vers $\mathscr{F}|_{U_j}$.
Montrons que ce morphisme est un isomorphisme. Soit U un ouvert de X contenu dans U_j et soit $\gamma = (\gamma_i)$ une section de $\mathscr{F}$ sur U. Posons $v_j(\gamma) = \gamma_j$. Il est clair que v_j définit un morphisme de $\mathscr{G}$-faisceaux de $\mathscr{F}|_{U_i}$ vers $\mathscr{G}|_{U_i}$, et il découle immédiatement des définitions que $v_j \circ u_j = \mathrm{Id}_{\mathscr{G}|_{U_j}}$. Par ailleurs si $\gamma = (\gamma_i)$ est une section de $\mathscr{F}$ sur un ouvert de U_j, la définition même de $\mathscr{F}$ montre que $\gamma_i = \gamma_j g_{ji}$ pour tout (i,j) (sur $U \cap U_j$) ; autrement dit, $(\gamma_i)_i = u_j(\gamma_j) = u_j(v_j(\gamma))$; par conséquent $u_j \circ v_j = \mathrm{Id}_{\mathscr{F}|_{U_j}}$. Il s'ensuit que $\mathscr{F}|_{U_j}$ est isomorphe à $\mathscr{G}|_{U_j}$ pour tout j. Le $\mathscr{G}$-faisceau $\mathscr{F}$ est donc un $\mathscr{G}$-torseur.
Soit (h_{ij}) un cocycle cohomologue à (g_{ij}). Choisissons une famille (a_i) avec $a_i \in \mathscr{G}(U_i)$ pour tout i, telle que $h_{ij} = a_i g_{ij} a_j^{-1}$ pour tout i. Soit $\mathscr{F}'$ le $\mathscr{G}$-torseur associé à (h_{ij}). Soit (γ_i) une section de $\mathscr{F}$ sur un ouvert U de X. On a alors pour tout (i,j) les égalités

$$\gamma_i a_i^{-1} = \gamma_j a_j g_{ji} a_i^{-1} = \gamma_j a_j^{-1} a_j g_{ji} a_i^{-1} = \gamma_j a_j^{-1} h_{ji}$$

dans $\mathscr{G}(U \cap U_i \cap U_j)$. Par conséquent, $(\gamma_i a_i^{-1})$ est une section de $\mathscr{F}'$. Il est immédiat que $(\gamma_i) \mapsto (\gamma_i a_i^{-1})$ est un morphisme de $\mathscr{G}$-faisceaux de $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{F}'$, et c'est donc un isomorphisme d'après (2) (ou

directement parce que $(\delta_i) \mapsto (\delta_i a_i)$ en est visiblement le morphisme réciproque). La classe d'isomorphie du $\mathscr{G}$-torseur construit ne dépend donc effectivement que de la classe de cohomologie du cocycle de départ.

(6c) Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{G}$-torseur trivialisé par (U_i). Pour tout i, fixons une section f_i de $\mathscr{F}$ sur U_i ; pour tout (i,j), notons g_{ij} l'élément $f_i f_j^{-1}$ de $\mathscr{G}(U_i \cap U_j)$. On a vu plus haut que la famille (g_{ij}) est un cocycle, et la classe de cohomologie associée à $\mathscr{F}$ par la question (6a) est précisément celle de g_{ij}.
Soit $\mathscr{F}'$ le $\mathscr{G}$-torseur associé à (g_{ij}) par la question (6b). Montrons que $\mathscr{F}'$ est isomorphe à $\mathscr{F}$.
Soit $\gamma = (\gamma_i)$ une section de $\mathscr{F}'$ sur un ouvert U de X. Les égalités

$$\gamma_i = \gamma_j g_{ji} = \gamma_j f_j f_i^{-1}$$

entraînent que $\gamma_i f_i = \gamma_j f_j$ (dans $\mathscr{F}(U \cap U_i \cap U_j)$). On peut donc recoller les sections $\gamma_i f_i$ de $\mathscr{F}$ sur les différents $U \cap U_i$ en une section $s(\gamma)$ de $\mathscr{F}$ sur U. Il est immédiat que s est un morphisme de $\mathscr{G}$-faisceaux, et donc un isomorphisme d'après (2) puisque $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ sont des $\mathscr{G}$-torseurs (on peut aussi exhiber sa réciproque : elle envoie f sur la section $(f f_i^{-1})$ de $\mathscr{F}'$).
Réciproquement, soit (g_{ij}) un cocycle et soit $\mathscr{F}$ le $\mathscr{G}$-torseur qui lui est associé par la question (6b). Pour tout i, la famille $(g_{ik})_k$ est une section f_i de $\mathscr{F}$ sur U_i (c'est $u_i(e)$ avec les notations du corrigé de (6b)). Soient i et j deux indices. On a pour tout indice k l'égalité $g_{ik} g = g_{ij} g_{jk}$ (dans $\mathscr{G}(U_i \cap U_j \cap U_k)$), ce qui entraîne que $f_i = g_{ij} f_j$. La classe de cohomologie associée à $\mathscr{F}$ est celle du cocycle $(f_i f_j^{-1})$, qui par ce qui précède n'est autre que (g_{ij}).
Nos deux constructions mettent donc bien H en bijection avec l'ensemble des classes d'isomorphie de $\mathscr{G}$-torseurs trivialisés par $\mathscr{U}$.

Exercice 2. Supposons qu'il existe une équivalence de catégories F de Ens vers $\mathsf{Ens}^{\mathrm{op}}$, à laquelle on pense comme à un foncteur contravariant de Ens dans elle-même. Le foncteur F échange alors objet initial et objet final et on aurait donc $F(\{*\}) = \emptyset$, et partant

$$\mathrm{Hom}(\{*\}, X) \simeq \mathrm{Hom}(F(X), \emptyset)$$

pour tout ensemble X. Appliquons ceci en prenant pour X n'importe quel ensemble de cardinal au moins 2. L'ensemble $\mathrm{Hom}(\{*\}, X)$ est en bijection avec X (considérer l'image de $*$) et est en particulier non vide. Par ailleurs comme X n'est pas un singleton, ce n'est pas un objet final de Ens, et $F(X)$ n'est donc pas un objet initial de Ens ; autrement dit, $F(X)$ est non vide, ce qui entraîne que $\mathrm{Hom}(F(X), \emptyset)$ est vide et aboutit à une contradiction.

Exercice 3.

(1) Soit $x = \sum a_i \otimes m_i$ un élément de $I \otimes_A M$ dont l'image $\sum a_i m_i$ dans M est nulle. Soit J l'idéal de A engendré par les a_i et désignons par y l'élément $\sum a_i \otimes m_i$ de $J \otimes_A M$; on remarque que x est l'image de y par le morphisme naturel $J \otimes_A M \to \otimes_A M$ déduit de l'inclusion $J \subset I$. L'image de y dans M par le morphisme $J \otimes_A M \to M$ est égale à $\sum a_i m_i$ et est donc nulle. Comme J est de type fini, notre hypothèse sur M assure que

y est nulle ; son image x dans $I \otimes_A M$ est donc nulle, et $I \otimes_A M \to M$ est bien injective.

(2)

(2a) Le A-module L/M est engendré par $\overline{x}$; si l'on note I le noyau de la surjection $A \to N/L, a \mapsto a\overline{x}$ alors N/L s'identifie à A/I.
Pour construire un diagramme commutatif comme dans l'énoncé, il suffit de décrire les flèches de la ligne $0 \to I \to L \oplus A \to N \to 0$, les autres étant évidentes (la flèche $N \to A/I$ est celle qui se déduit de l'isomorphisme $N/L \simeq A/I$ que l'on a exhibé).
La flèche $L \oplus A \to N$ est simplement $(\ell, a) \mapsto \ell + ax$, qui est surjective car $N = L + Ax$. Son noyau est par définition constitué des couples (ℓ, a) tels que $\ell = -ax$. Or I étant le noyau de $a \mapsto a\overline{x}$ de A dans N/L, on voit que $ax \in L$ si et seulement si $a \in I$. Le noyau de $L \oplus A \to N$ est en conséquence égal à l'image de l'application A-linéaire $i \mapsto (-ix, i)$ de I vers $L \oplus A$, et cette application est injective (c'est immédiat sur sa seconde composante). C'est elle que nous prenons comme flèche $I \to L \oplus A$, et ceci achève la construction du diagramme commutatif requis.

(2b) Pour établir les propriétés d'exactitude du diagramme obtenu par tensorisation avec M, nous allons utiliser les trois faits suivants :
- ◇ le produit tensoriel est exact à droite ;
- ◇ la flèche $I \otimes_A M \to M$ déduite de $I \hookrightarrow A$ est injective d'après la question (2) ;
- ◇ le produit tensoriel commute aux sommes directes ; en particulier, $M \otimes_A (L \oplus A)$ s'identifie à $M \otimes_A L \oplus M$, et $M \otimes_A L \to M \otimes_A (L \oplus A)$ est donc injectif.

Il en résulte que dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & M \otimes_A L \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d] & M \otimes_A L \arrow[d] & \\
 & M \otimes_A I \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & (M \otimes_A L) \oplus M \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes_A N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \otimes_A I \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & M/IM \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

toutes les lignes et les colonnes sont exactes.
Il reste à montrer que $M \otimes_A L \to M \otimes_A N$ est injectif. On le fait par «chasse au diagramme». Donnons-nous un élément x de $M \otimes_A L$ d'image nulle dans $M \otimes_A N$. L'image y de x dans $(M \otimes_A L) \oplus M$ s'envoyant sur 0 dans $M \otimes_A N$, elle provient d'un élément z de $M \otimes_A I$. L'image de z dans M est égale à l'image de y dans M, laquelle est nulle puisque y provient de l'élément x de $M \otimes_A L$. Par injectivité de $M \otimes_A I \to M$, il vient $z = 0$. Puisque y est l'image de z on a également $y = 0$; puisque $M \otimes_A L \to (M \otimes_A L) \oplus M$ est injectif, il

vient $x = 0$.

(3) Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des sous-modules Λ de N contenant L et tels que la flèche naturelle $M \otimes_A L \to M \otimes_A \Lambda$ soit injective, que l'on ordonne par inclusion.
C'est un ensemble inductif. En effet, il est non vide (il contient L). Donnons-nous maintenant un sous-ensemble totalement ordonné et non vide $\mathscr{E}'$ de $\mathscr{E}$, et notons R la réunion des modules appartenant à $\mathscr{E}'$; comme $\mathscr{E}'$ est non vide et totalement ordonné, R est un sous-module de M contenant L, qui majore $\mathscr{E}'$; nous allons vérifier qu'il appartient à $\mathscr{E}$, ce qui prouvera que ce dernier est inductif.
Soit x un élément de $M \otimes_A L$ d'image nulle dans $M \otimes_A R$. Par construction, $R = \operatorname{colim}_{\Lambda \in \mathscr{E}'} \Lambda$. Par commutation du produit tensoriel aux colimites il vient $M \otimes_A R = \operatorname{colim}_{\Lambda \in \mathscr{E}'} M \otimes_A \Lambda$. Les colimites en jeu sont filtrantes (puisque $\mathscr{E}'$ est totalement ordonné) ; par la description explicite de ces dernières, la nullité de l'image de x dans $M \otimes_A R$ signifie qu'il existe $\Lambda \in \mathscr{E}'$ tel que l'image de x dans $M \otimes_A \Lambda$ soit déjà nulle. Mais comme $\Lambda \in \mathscr{E}$ la flèche $M \otimes_A L \to M \otimes_A \Lambda$ est injective, si bien que x est nul ; ainsi, $R \in \mathscr{E}$, ce qu'on souhaitait établir.
L'ensemble $\mathscr{E}$ étant inductif, il admet par le lemme de Zorn un élément maximal Λ ; il suffit pour conclure de s'assurer que $\Lambda = N$. Supposons que ce ne soit pas le cas ; il existe alors $x \in N \setminus \Lambda$, et $\Lambda' := \Lambda + Ax$ contient *strictement* Λ.
Or comme $\Lambda \in \mathscr{E}$ la flèche $M \otimes_A L \to M \otimes_A \Lambda$ est injective ; et comme $\Lambda' = \Lambda + Ax$ il découle de (2) que $M \otimes_A \Lambda \to M \otimes_A \Lambda'$ est injective. Il s'ensuit que $M \otimes_A L \to M \otimes_A \Lambda'$ est injective, ce qui veut dire que Λ' appartient à $\mathscr{E}$ et contredit la maximalité de Λ.

Exercice 4. Soit A un anneau et soit M un A-module.

(1) On a
$$\sum_j a_j m_j = \sum_{i,j} a_j m v_{ij} n_i = \sum_i (\sum_j a_j v_{ij}) n_i = 0.$$

(2) Supposons que M est plat et que $\sum a_j m_j = 0$ où les a_j et les m_j sont comme dans l'énoncé. Soit u l'application A-linéaire de M^n dans M qui envoie (μ_j) sur $\sum a_j \mu_j$; notre hypothèse sur les m_j signifie que $(m_1, \ldots, m_n)$ appartient au noyau de u.
L'application u se déduit par tensorisation avec M de l'application A-linéaire $v\colon A^n \to A, (b_1, \ldots, b_n) \mapsto \sum a_i b_j$. Soit K le noyau de cette dernière. Puisque
$$0 \longrightarrow K \longrightarrow A^n \xrightarrow{v} A$$
est exacte, la platitude de M assure que
$$0 \longrightarrow K \otimes_A M \longrightarrow M^n \xrightarrow{u} M$$
est exacte. En particulier, $(m_1, \ldots, m_n)$ appartient à l'image de la flèche $K \otimes_A M \to M$.
Il existe donc une famille $(v_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant m}$ d'éléments de A et une famille $(n_1, \ldots, n_r)$ d'éléments de M telles que pour tout i l'on ait $\sum_j a_i v_{ij} = 0$ et telles que $(m_1, \ldots, m_r)$ soit l'image de $\sum_i (v_{i1}, \ldots, v_{im}) \otimes n_i$, ce qui

signifie exactement que $m_j = \sum_i v_{ij} n_i$ pour tout j ; ainsi, $\sum a_j m_j$ est nulle pour des raisons triviales, ce qu'il fallait démontrer.

(3) Prenons $A = \mathbf{Z}$ et $M = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et considérons la combinaison linéaire à un terme $2 \cdot \overline{1}$; elle est nulle. Mais elle ne l'est pas pour des raisons triviales : en effet si c'était le cas il existerait des éléments $a_1, \ldots, a_r$ de $\mathbf{Z}$ et des éléments $n_1, \ldots, n_r$ de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ tels que $2a_i = 0$ pour tout i et tels que $\overline{1} = \sum a_i n_i$. Mais la relation $2a_i = 0$ force a_i à être nul, et l'élément $\overline{1}$ de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ serait alors nul, ce qui est absurde.

(4) Pour montrer que M est plat, il suffit d'après l'exercice 3 de s'assurer que $I \otimes_A M \to M$ est injectif pour tout idéal I de A (on peut même se contenter d'après *loc. cit.* de le vérifier lorsque I est de type fini, mais ce raffinement ne nous servira pas ici).
Soit donc I un idéal de A, et soit $\sum_j a_j \otimes m_j$ un élément de $I \otimes_A M$ s'envoyant sur 0 dans M, ce qui signifie que $\sum a_j m_j = 0$.
Par hypothèse sur M, la combinaison $\sum a_j m_j$ est alors nulle pour des raisons triviales. Soient (v_{ij}) et (n_i) comme dans la question (1). On a

$$\sum_j a_j \otimes m_j = \sum_{i,j} a_j \otimes v_{ij} n_i = \sum_{i,j} a_j v_{ij} \otimes n_i = \sum_i (\sum_j a_j v_{ij}) \otimes n_i = 0$$

et $I \otimes_A M \to M$ est bien par conséquent injective.

(5) Montrons l'assertion requise par récurrence sur n. Si $n = 0$ la famille (e_i) est vide, et partant libre. Supposons $n > 0$ et le résultat vrai au rang $n - 1$.
On a $\sum_j a_j e_j = 0$. Puisque M est plat, il résulte de (2) que cette combinaison linéaire est nulle pour des raisons triviales. Il existe donc une famille $(v_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant n}$ d'éléments de A et une famille $(f_1, \ldots, f_r)$ d'éléments de M tels que $\sum_j a_j v_{ij} = 0$ pour tout i et $e_j = \sum_i v_{ij} f_i$ pour tout j.
En particulier, on a $e_n = \sum_n v_{in} f_i$. Or comme $(\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_n})$ est libre dans le $A/\mathfrak{m}$-espace vectoriel $M/\mathfrak{m}M$, le vecteur $\overline{e_n}$ est non nul. Dès lors il existe nécessairement i tel que $v_{in} \notin \mathfrak{m}$, c'est-à-dire encore tel que v_{in} soit inversible. En multipliant l'égalité $\sum_j a_j v_{ij} = 0$ par v_{in}^{-1} on voit que a_n s'écrit $\sum_{1 \leqslant j \leqslant n-1} b_j a_j$ pour une certaine famille (b_j) d'éléments de A. L'égalité $\sum_j a_j e_j = 0$ peut alors se récrire

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant n-1} a_j (e_j + b_j e_n) = 0.$$

Comme les $\overline{e_j}$ forment une famille libre de $M/\mathfrak{m}M$, il en va de même des $\overline{e_j} + \overline{b_j}\overline{e_n}$ pour j parcourant $1, \ldots, n-1$. On peut dès lors appliquer l'hypothèse de récurrence à la famille $(e_j + b_j e_n)_{1 \leqslant j \leqslant n-1}$. On en déduit que celle-ci est libre, et donc que $a_j = 0$ pour tout j compris entre 1 et $n-1$. Puisque $a_n = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n-1} b_j a_j$ on a aussi $a_n = 0$, et $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre.
Supposons maintenant M de type fini. Le $A/\mathfrak{m}$-espace vectoriel $M/\mathfrak{m}M$ est alors de dimension finie ; soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille d'éléments de M telle que $(\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_n})$ soit une base de $M/\mathfrak{m}M$. Puisque $(\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_n})$ est une famille génératrice de $M/\mathfrak{m}M$, la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ engendre M (par l'un des corollaires du lemme de Nakayama) ; puisque $(\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_n})$ est une famille libre de $M/\mathfrak{m}M$, la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ de M est libre par ce qui précède. C'est donc une base de M et ce dernier est libre.