Sorbonne Université
Année universitaire 2024-2025, licence 3, *Algèbre* (UE 3M270).
Examen partiel, le 21 octobre 2024.
Durée : 1h30. Les appareils électroniques et documents sont interdits.

Dans ce sujet, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$ seront implicitement vus comme des groupes pour l'addition, $\mathbb{R}^\times$ et $\mathbb{C}^\times$ pour la multiplication, et $S_\mathbb{R}$ (ensemble des bijections de $\mathbb{R}$ dans lui-même) pour la composition des applications.

Exercice 1. Questions de cours. Soit G un groupe.

(a) Donnez la définition d'un sous-groupe de G.

(b) Donnez une définition d'un sous-groupe *distingué* de G (le cours mentionne six propriétés équivalentes permettant de définir un sous-groupe distingué ; on attend simplement de vous que vous donniez *l'une* de ces propriétés, de votre choix).

Exercice 2. Décrire (par des formules explicites) tous les morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}^\times$, de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}^\times$, de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}^\times$, et de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}^\times$.

Exercice 3. Soit G un groupe fini et soit p un nombre premier.

(a) Soit g un élément d'ordre p de G. Quels sont les sous-groupes de $\langle g\rangle$ (rappelons que cette dernière expression désigne le sous-groupe de G engendré par g) ? Quels sont les ordres des élements de $\langle g\rangle$ autres que e ?

(b) Soient g et h deux éléments d'ordre p de G. Montrez que l'on a ou bien $\langle g\rangle = \langle h\rangle$ ou bien $\langle g\rangle \cap \langle h\rangle = \{e\}$.

(c) Montrez que le nombre d'éléments d'ordre p de G est multiple de $p-1$.

Exercice 4. Soit G un groupe et soient K et H deux sous-groupes de G. On suppose que $hk = kh$ pour tout couple (h,k) appartenant à $H \times K$.

(a) Montrez que le sous-ensemble HK de G constitué des éléments de la forme hk avec $h \in H$ et $k \in K$ est un sous-groupe de G.

(b) Soit D l'ensemble des éléments de $H \times K$ de la forme (g, g^{-1}) où $g \in H \cap K$. Montrez que D est un sous-groupe distingué de $H \times K$.

(c) Construire un isomorphisme de groupes entre $(H \times K)/D$ et HK.

Exercice 5. Pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}$, on note $u_{a,b}$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui envoie x sur $ax+b$, et l'on pose $G = \{u_{a,b}\}_{a\in\mathbb{R}^\times, b\in\mathbb{R}}$.

(a) Montrez que $(a,b) \mapsto u_{a,b}$ est injective.

(b) Montrez que pour tout (a,b) dans $\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}$ l'application $u_{a,b}$ est bijective, et décrire explicitement sa réciproque.

(c) Montrez que G est un sous-groupe du groupe $S_\mathbb{R}$ des bijections de $\mathbb{R}$ dans lui-même.

(d) Le groupe G est-il abélien ?

(e) Décrire explicitement l'ensemble des éléments de 2-torsion de G.

(f) Soit i l'application $b \mapsto u_{1,b}$ de $\mathbb{R}$ dans G. Montrez que i est un morphisme injectif de groupes. Soit T son image.

(g) Soit φ l'application de G dans $\mathbb{R}^\times$ qui envoie un élément $u_{a,b}$ de G sur a. Expliquez brièvement pourquoi φ est bien définie, et montrez que c'est un morphisme de groupes.

(h) À l'aide de la question précédente, montrez que T est distingué dans G et que G/T est isomorphe à $\mathbb{R}^\times$.

(i) Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^2$ calculez $u_{a,b} \circ u_{1,c} \circ u_{a,b}^{-1}$; retrouvez le fait que T est distingué dans G.