Sorbonne Université
Année universitaire 2025-2026, licence 3, *Algèbre* (UE 3M270).
Examen terminal, le 14 janvier 2026.
*Durée : 2h00. Les appareils électroniques et documents sont interdits. Même si certaines questions ont été vues à l'occasion d'exercices en TD, elles doivent être intégralement retraitées ; les seuls résultats utilisables directement sont ceux vus en cours. On pourra bien sûr admettre et utiliser les résultats des questions non traitées, et faire les exercices dans n'importe quel ordre.*

**Exercice 1. Question de cours.** Soit $G$ un groupe et soit $H$ un sous-groupe distingué de $G$. Énoncer la propriété universelle du quotient $G/H$.

**Exercice 2.** Soit $\sigma$ l'élément

$$(1\,6\,7\,8\,9\,2\,5\,4\,3)(3\,4\,1\,5)(1\,3\,2)$$

de $S_9$.

(a) Donnez avec un minimum de calcul la signature de $\sigma$.

(b) Calculez l'ordre de $\sigma$.

**Exercice 3.** Soit $G$ un groupe de cardinal 84. Pour tout nombre premier $p$, on note $n_p$ le nombre de $p$-sous-groupes de Sylow de $G$.

(a) Que vaut $n_p$ si $p \notin \{2, 3, 7\}$ ?

(b) Quelles informations arithmétiques fournissent les théorèmes de Sylow sur $n_2, n_3$ et $n_7$ ?

(c) Montrez que $G$ possède un sous-groupe distingué différent de $\{e\}$ et différent de $G$.

**Exercice 4.** Donnez à isomorphisme près la liste de tous les groupes abéliens de cardinal 260.

**Exercice 5.** Soit $p$ un nombre premier, soit $n$ un entier et soit $G$ un groupe de cardinal $p^n$. On se propose de montrer que pour tout $m \leqslant n$ il existe un sous-groupe de $G$ de cardinal $p^m$. On procède par récurrence sur $n$.

(a) Montrez que le résultat est vrai si $n = 0$. On suppose désormais $n > 0$ et le résultat vrai pour tout entier $< n$, et on veut montrer le résultat pour l'entier $n$.

(b) Montrez que $\mathrm{Z}(G)$ possède un élément $x$ d'ordre $p$.

(c) Montrez que $\langle x \rangle$ est un sous-groupe distingué de $G$.

(d) Conclure en appliquant l'hypothèse de récurrence à $G/\langle x \rangle$.

**Exercice 6. Probablilité que deux éléments commutent.** Soit $G$ un groupe fini. On note $n$ le cardinal de $G$ et $p$ la probabilité que deux éléments de $G$ tirés au hasard indépendamment (pour la loi uniforme sur $G$) commutent ; autrement dit,

$$p = \frac{|\{(x, y) \in G^2 \text{ tels que } xy = yx\}|}{n^2}.$$

(a) Montrez que si $G/\mathrm{Z}(G)$ est cyclique, $G$ est abélien.

(b) Que vaut $p$ si $G$ est abélien ?

(c) *À partir de maintenant et jusqu'à la fin de l'exercice on suppose $G$ non abélien.* On pose $m = |\mathrm{Z}(G)|$. Montrez que $m \leqslant n/4$ (on pourra utiliser la question (a)).

(d) Pour tout $x \in G$ on note $C_x$ le commutant ou centralisateur de $x$ dans $G$, c'est-à-dire l'ensemble des $y \in G$ tels que $xy = yx$. Décrivez $C_x$ comme le stabilisateur de $x$ pour une action convenable (que l'on précisera).

(e) Montrez que $p = \frac{1}{n^2} \sum_{x \in G} |C_x|$.

(f) Que vaut $|C_x|$ si $x \in \mathrm{Z}(G)$ ?

(g) Soit $x$ un élément de $G$ n'appartenant pas à $\mathrm{Z}(G)$. Montrez que $|C_x|$ est inférieur ou égal à $n/2$.

(h) Montrez que $\sum_{x \in G} |C_x| \leqslant nm + (n-m)(n/2)$.

(i) Montrez que $p \leqslant 5/8$.

(j) (Question bonus, plus longue et plus difficile). Montrez que $p$ est égal à $5/8$ si et seulement si $m = n/4$.

**Exercice 7.** Pour tout nombre complexe $u$ de module 1 on note respectivement $r_u$ et $s_u$ les applications $z \mapsto uz$ et $z \mapsto u\bar{z}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

(a) Vérifiez que pour tout $u$ les applications $r_u$ et $s_u$ sont bijectives, et calculez leurs bijections réciproques.

(b) Pour tout couple $(u, v)$ de nombres complexes de module 1 calculez les composées $r_u \circ r_v, r_u \circ s_v, s_v \circ r_u$ et $s_u \circ s_v$.

(c) Montrez que l'ensemble $G = \{r_u\}_{|u|=1} \cup \{s_v\}_{|v|=1}$ est un sous-groupe de $S_{\mathbb{C}}$.

(d) On considère l'action induite de $G$ sur les parties de $\mathbb{C}$. Décrire le stabilisateur $H$ de $\{1, i, -i, -1\}$.

(e) Montrez que $H$ n'est pas commutatif, et exhibez un élément non trivial de $\mathrm{Z}(H)$. À l'aide de la question (c) de l'exercice précédent, en déduire sans calcul la description complète de $\mathrm{Z}(H)$.

(f) Quelle est la probabilité que deux éléments de $H$ commutent ? (Répondre sans calcul à l'aide de l'exercice précédent).