

Sorbonne Université

Année universitaire 2025-2026, master 1, *Introduction aux catégories* (UE 182).

Examen partiel, le 26 février 2026.

Durée : 2h00. Les appareils électroniques et documents sont interdits. Il ne sera pas nécessaire de tout traiter pour avoir le maximum des points.

Dans ce sujet nous utiliserons les conventions suivantes (non standard) vues en cours : si X est un objet d'une catégorie $\mathbf{C}$ nous noterons h_X (resp. h^X) le foncteur covariant (resp. contravariant) $\text{Hom}(X, \cdot)$ (resp. $\text{Hom}(\cdot, X)$) de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{Ens}$.

Exercice 1. Soit $\mathbf{C}$ la catégorie des groupes finis, vue comme une sous-catégorie pleine de $\mathbf{Gp}$. Soit F le foncteur d'oubli de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{Ens}$. Montrez que F n'est pas représentable.

Exercice 2. Soit $F: \mathbf{Gp} \rightarrow \mathbf{Ens}$ le foncteur d'oubli. Décrire entièrement $\text{End } F$ et $\text{Aut } F$.

Exercice 3. Soit G un groupe et soit $\mathbf{C}$ la catégorie des G -ensembles à gauche, définie comme suit : un objet de $\mathbf{C}$ est un ensemble X muni d'une action à gauche $(g, x) \mapsto gx$ de G sur X ; un morphisme de X vers Y dans la catégorie $\mathbf{C}$ est une application f de X vers Y qui est *équivariante*, c'est-à-dire que $f(gx) = gf(x)$ pour tout $(g, x) \in G \times X$. On note $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$ le foncteur d'oubli.

- (a) Montrez qu'un morphisme de $\mathbf{C}$ est un isomorphisme si et seulement s'il est ensemblistement bijectif.
- (b) Soit g un élément de G . Pour tout objet X de $\mathbf{C}$, notons $\iota_g(X)$ la bijection $x \mapsto gx$ de X dans X . Vérifiez soigneusement que la collection des $\iota_g(X)$ définit un morphisme de foncteurs ι_g de F dans lui-même. Que vaut $\iota_g \circ \iota_h$ (pour g et h dans G) ? En déduire que chacun des ι_g est un automorphisme du foncteur F dont on donnera l'inverse.
- (c) Montrez que F est représentable. Si (R, r) désigne un représentant de F , décrire l'automorphisme de R qui correspond à ι_g via le lemme de Yoneda.
- (d) Montrez que $g \mapsto \iota_g$ établit un isomorphisme de groupes entre G et $\text{Aut } F$, et que $\text{End } F = \text{Aut } F$.

Exercice 4. Soit $\mathbf{C}$ une catégorie et soit $f: Y \rightarrow X$ une flèche de $\mathbf{C}$.

- (a) On rappelle que f est appelée un *monomorphisme* (resp. un *épimorphisme*) si pour tout objet Z de $\mathbf{C}$ l'application $\varphi \mapsto f \circ \varphi$ (resp. $\psi \mapsto \psi \circ f$) de $\text{Hom}(Z, Y)$ vers $\text{Hom}(Z, X)$ (resp. de $\text{Hom}(X, Z)$ vers $\text{Hom}(Y, Z)$) est injective. Reformulez ces propriétés en termes des foncteurs h^X, h^Y, h_X et h_Y .
- (b) On suppose que $\mathbf{C}$ admet des produits fibrés. Soit $\delta: Y \rightarrow Y \times_X Y$ la *diagonale* de f , c'est-à-dire le morphisme correspondant au couple $(\text{Id}_Y, \text{Id}_Y)$. En raisonnant sur les foncteurs h^X et h^Y montrez que f est un monomorphisme si et seulement si δ est un isomorphisme.

- (c) Lorsque $\mathbf{C}$ admet des sommes amalgamées, énoncez (sans justification) l'assertion duale de la précédente.
- (d) On revient à l'hypothèse que $\mathbf{C}$ admet des produits fibrés. Soit $g: Z \rightarrow Y$ un morphisme ; dans ce qui suit la notation $Z \times_X Z$ fait référence au morphisme composé $f \circ g: Z \rightarrow X$. On note u le morphisme de $Z \times_Y Z$ vers $Z \times_X Z$ induit par les deux projections de $Z \times_Y Z$ vers Z et v le morphisme de $Z \times_Y Z$ vers $Y \times_X Y$ défini par le couple (g, g) . Justifiez que u et v sont bien définis, et rappelez la définition du morphisme naturel w de $Z \times_Y Z$ vers Y .
- (e) Montrez que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z \times_Y Z & \xrightarrow{u} & Z \times_X Z \\ w \downarrow & & \downarrow v \\ Y & \xrightarrow{\delta} & Y \times_X Y \end{array}$$

identifie $Z \times_Y Z$ au produit fibré de Y et $Z \times_X Z$ au-dessus de $Y \times_X Y$ (relativement aux morphismes δ et v).

Exercice 5. Nous allons faire référence dans ce qui suit aux notions de monomorphisme et d'épimorphisme rappelées à la question (a) de l'exercice précédent. On note $\mathbf{Top}^{\text{sep}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Top}$ constituée des espaces topologiques *séparés* (rappelons que X est séparé si et seulement si pour tout couple (x, y) de points de X avec $x \neq y$ il existe deux ouverts U et V de X avec $x \in U, y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$).

- (a) Soit f l'inclusion de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, vue comme une application continue (où $\mathbb{Q}$ est muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$). Montrez que f est un épimorphisme de $\mathbf{Top}^{\text{sep}}$, mais que ce n'est pas un épimorphisme de $\mathbf{Top}$.
- (b) Soit g l'application $t \mapsto \exp(2i\pi t)$ de $[0, 1[$ sur l'ensemble U des nombres complexes de module 1. Montrez que g est un monomorphisme et un épimorphisme de $\mathbf{Top}^{\text{sep}}$, mais n'est pas un isomorphisme de $\mathbf{Top}^{\text{sep}}$.

Exercice 6. Une condition nécessaire de représentabilité dans $\mathbf{Top}$.

- (a) Soit F un foncteur contravariant représentable de $\mathbf{Top}$ dans $\mathbf{Ens}$. Soit X un espace topologique et soit (U_i) un recouvrement ouvert de X . Pour tout indice i , on note u_i l'inclusion $U_i \hookrightarrow X$ et pour tout (i, j) on note u_{ij} l'inclusion $U_i \cap U_j \hookrightarrow U_i$. Soit (s_i) un élément de $\prod_i F(U_i)$ tel que pour tout (i, j) on ait $F(u_{ij})(s_i) = F(u_{ji})(s_j)$ dans $F(U_i \cap U_j)$. Montrez qu'il existe un unique $s \in F(X)$ tel que $F(u_i)(s) = s_i$ quel que soit i .
- (b) Soit G le sous-foncteur (contravariant) de $h^{\mathbb{R}}: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ens}$ qui envoie un espace topologique X sur l'ensemble $G(X)$ des applications continues *bornées* de X vers $\mathbb{R}$. Montrez que G n'est pas représentable.