

Sorbonne Université

Année universitaire 2025-2026, master 1, *Introduction aux catégories* (UE 182).

Correction de l'examen partiel du 26 février 2026.

Exercice 1. On suppose que F est représentable. Il existe alors un groupe fini H et un élément h de H tel que pour tout groupe G , l'application $f \mapsto f(h)$ mette en bijection $\text{Hom}(H, G)$ et G . Soit n le cardinal de H .

Pour tout groupe fini G et tout élément g de G , il existe un (unique) morphisme f de H vers G tel que $f(h) = g$. Comme H est de cardinal n on a $h^n = e$ et donc $g^n = f(e) = e$.

En prenant $G = \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ et $g = \bar{1}$, on aboutit à une contradiction.

Exercice 2. On sait d'après le cours que le foncteur d'oubli de $\mathbf{Gp}$ vers $\mathbf{Ens}$ est représentable par $(\mathbb{Z}, 1)$. Le lemme de Yoneda (dans sa variante fournie par le lemme 3.1.3) assure alors que $\text{End } F$ et $\text{Aut } F$ s'identifient respectivement à $\text{End } \mathbb{Z}$ et $\text{Aut } \mathbb{Z}$.

Décrivons tout d'abord $\text{End } \mathbb{Z}$ et $\text{Aut } \mathbb{Z}$. Dire que $(\mathbb{Z}, 1)$ représente F signifie que pour tout groupe G et tout élément g de G il existe un unique morphisme f de $\mathbb{Z}$ vers G envoyant 1 sur g (c'est $n \mapsto g^n$). En particulier, en prenant $G = \mathbb{Z}$, on voit que $f \mapsto f(1)$ met en bijection $\mathbb{Z}$ et $\text{End } \mathbb{Z}$. À l'entier relatif n correspond l'endomorphisme $h_n: a \mapsto na$ de $\mathbb{Z}$, qui est un automorphisme si et seulement si $n = \pm 1$.

L'endomorphisme u_n de F correspondant à h_n est égal à $u_{F,1} \circ h_{n,*} \circ u_{F,1}^{-1}$. Concrètement, si l'on part d'un élément g d'un groupe G alors $u_{F,1}^{-1}(g)$ est le morphisme $\lambda: m \mapsto g^m$; le morphisme $h_{n,*}(\lambda)$ est simplement $\lambda \circ h_n$; et $u_n(g)$ est égal à $u_{F,1}(h_{n,*}(\lambda))$, soit à $u_{F,1}(\lambda \circ h_n)$, c'est-à-dire à $\lambda \circ h_n(1) = \lambda(n) = g^n$.

Il découle de ce qui précède que $n \mapsto (g \mapsto g^n)$ met en bijection $\mathbb{Z}$ et $\text{End } F$, et que l'endomorphisme $g \mapsto g^n$ de F est un automorphisme si et seulement si $n = \pm 1$.

Exercice 3.

- (a) Si une application équivariante $f: X \rightarrow Y$ possède une réciproque équivariante, c'est en particulier une réciproque ensembliste et f est donc bijective. Réciproquement supposons f bijective et soit f^{-1} sa réciproque ensembliste. Nous allons montrer que f^{-1} est équivariante, ce qui permettra de conclure. Soit $y \in Y$ et soit $g \in G$. On a alors $y = f(f^{-1}(y))$. Par conséquent

$$gy = gf(f^{-1}(y)) = f(gf^{-1}(y))$$

puisque f est équivariante. Il s'ensuit que $f^{-1}(gy) = gf^{-1}(y)$, ce qu'il fallait démontrer.

- (b) Soit $f: X \rightarrow Y$ une application équivariante entre deux G -ensembles. Il s'agit de vérifier que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\iota_g(X)} & X \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{\iota_g(Y)} & Y \end{array}$$

commute. Soit $x \in X$. On a alors $f(i_g(X)(x)) = f(gx)$ et $i_g(Y)(f(x)) = gf(x)$. Mais puisque f est équivariante on a $f(gx) = gf(x)$, et notre diagramme est bien commutatif.

Si g et h sont deux éléments de G on a pour tout G -ensemble X et tout $x \in X$ les égalités

$$(\iota_g \circ \iota_h)(X)(x) = \iota_g(X)(\iota_h(X)(x)) = \iota_g(X)(hx) = ghx = \iota_{gh}(X)(x).$$

Par conséquent $\iota_g \circ \iota_h = \iota_{gh}$. Comme il est par ailleurs clair que $\iota_e = \text{Id}_F$, on voit que pour tout $g \in G$ on a $\iota_g \circ \iota_{g^{-1}} = \iota_{g^{-1}} \circ \iota_g = \iota_e = \text{Id}_F$. Ainsi ι_g est un automorphisme du foncteur F , de réciproque $\iota_{g^{-1}}$.

- (c) Considérons G comme un G -ensemble en le faisant agir sur lui-même par translations à gauche. Nous allons montrer que (G, e) représente F . Soit X un G -ensemble et soit $x \in X$. Il s'agit de démontrer que pour tout $x \in X$ il existe une et une seule application équivariante f de G vers X telle que $f(e) = x$.

Commençons par l'unicité. Soit donc f une telle application et soit g un élément de G . On a alors

$$f(g) = f(ge) = gf(e) = gx,$$

où la seconde égalité provient du caractère équivariant de f . Ainsi f est uniquement déterminée, ce qui montre l'unicité.

Pour l'existence, on s'inspire de la seule formule possible exhibée ci-dessus. On pose donc $f(g) = gx$ pour tout $g \in G$. On a bien $f(e) = ex = x$, et il reste pour conclure à vérifier que f est équivariante. Soient h et g deux éléments de G . On a alors

$$f(hg) = (hg)x = h(gx) = hf(g),$$

ce qui est l'égalité cherchée. Le couple (G, e) représente donc F .

Fixons maintenant g . D'après le lemme 3.1.3 l'automorphisme de foncteurs u_g qui correspond à ι_g est caractérisé par le fait que $u_g(e) = \iota_g(G)(e) = ge = g$. Cet automorphisme u_g envoie donc un élément h de G sur $hu_g(e) = hg$. Ainsi u_g est la translation à droite par g .

- (d) Puisque (G, e) représente F l'application $f \mapsto f(e)$ met en bijection $\text{End } G$ et G . Pour tout G l'unique morphisme de G dans lui-même qui envoie e sur g est nécessairement l'automorphisme u_g de la question précédente. Ainsi $\text{End } G$ est égal à $\text{Aut } G$ et $g \mapsto u_g$ induit une bijection $G \simeq \text{Aut } G$. Il s'ensuit que $\text{End } F = \text{Aut } F$, et que $g \mapsto \iota_g$ induit une bijection de G vers $\text{Aut } F$. La formule $\iota_{gh} = \iota_g \circ \iota_h$ assure que cette bijection est un isomorphisme de groupes.

Exercice 4. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et soit $f: Y \rightarrow X$ une flèche de $\mathcal{C}$.

- (a) Il découle immédiatement de la définition que f est un monomorphisme si et seulement si le morphisme de foncteurs induits $f_*: h^Y \rightarrow h^X$ est injectif (objet par objet), et que c'est un épimorphisme si et seulement si $f^*: h_X \rightarrow h_Y$ est injectif.

- (b) Le morphisme de foncteurs

$$\delta_*: h^Y \rightarrow h^{Y \times_X Y} = h^Y \times_{h^X} h^Y$$

induit par δ est simplement $\lambda \mapsto (\lambda, \lambda)$.

Le lemme de Yoneda et la question précédente permettent alors de ramener le problème à l'énoncé ensembliste suivant : si f est une application entre deux ensembles Y et X , alors f est injective si et seulement si la diagonale $\delta: y \mapsto (y, y)$ de Y vers $Y \times_X Y$ est bijective. La diagonale δ étant évidemment injective, il s'agit de démontrer que f est injective si et seulement si δ est surjective. Mais $Y \times_X Y$ est l'ensemble des couples (y, y') tels que $f(y) = f(y')$, et un tel couple est dans l'image de δ si et seulement si $y = y'$. On voit donc que δ est surjective si et seulement si

$$(f(y) = f(y')) \Rightarrow (y = y'),$$

c'est-à-dire si et seulement si f est injective.

- (c) Supposons que $\mathbf{C}$ admet des sommes amalgamées. Soit π le morphisme de $X \coprod_Y X$ vers X induit par $(\text{Id}_X, \text{Id}_X)$. Alors f est un épimorphisme si et seulement si π est un isomorphisme.
- (d) Soient p et q les deux projections de $Z \times_Y Z$ vers Z . Comme $g \circ p = g \circ q$ (par définition du produit fibré $Z \times_Y Z$ et des deux projections avec lesquelles il est fourni), on a $f \circ g \circ p = f \circ g \circ q$, et le couple (p, q) définit donc bien un morphisme de $Z \times_Y Z$ vers $Z \times_X Z$, par la propriété universelle de ce dernier. Quant à w , c'est le morphisme $g \circ p = g \circ q$.
- (e) Comme expliqué dans le poly en 4.4.3, la seule façon raisonnable d'aborder ce type de question est d'utiliser le lemme de Yoneda pour se ramener à l'assertion ensembliste correspondante. On suppose donc désormais que $\mathbf{C} = \mathbf{Ens}$.

Le produit fibré $Z \times_Y Z$ est $\{(z_1, z_2) \in Z^2, g(z_1) = g(z_2)\}$, le produit fibré $Z \times_X Z$ est l'ensemble $\{(z_1, z_2) \in Z^2; f(g(z_1)) = f(g(z_2))\}$, et $Y \times_X Y$ est l'ensemble $\{(y_1, y_2) \in Y^2, f(y_1) = f(y_2)\}$.

L'application w envoie (z_1, z_2) sur $g(z_1) = g(z_2)$; l'application u envoie (z_1, z_2) sur (z_1, z_2) ; l'application v envoie (z_1, z_2) sur $(g(z_1), g(z_2))$; et l'application δ envoie y sur (y, y) .

Le produit fibré P de Y et $Z \times_X Z$ au-dessus de $Y \times_X Y$ est dès lors l'ensemble des triplets $(y, z_1, z_2) \in Y \times Z^2$ tels que $f(g(z_1)) = f(g(z_2))$ et tels que $(g(z_1), g(z_2)) = (y, y)$, c'est-à-dire tels que $g(z_1) = g(z_2) = y$.

L'application de $Z \times_Y Z$ vers P induite par le diagramme commutatif ci-dessus est simplement $(z_1, z_2) \mapsto (g(z_1), z_1, z_2)$. C'est une bijection : sa réciproque envoie un élément (y, z_1, z_2) de P sur (z_1, z_2) .

Exercice 5.

- (a) Soient φ et ψ deux applications continues sur $\mathbb{R}$ vers un espace topologique séparé X qui coïncident sur $\mathbb{Q}$; il s'agit de montrer qu'elles coïncident. Soit t un nombre réel; posons $x = \varphi(t)$ et $y = \psi(t)$. Soit U un voisinage ouvert de x et soit V un voisinage ouvert de y . L'intersection $\varphi^{-1}(U) \cap \psi^{-1}(V)$ est un

voisinage ouvert de t . Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, ce voisinage ouvert contient un nombre rationnel r . Par construction, $\varphi(r) \in U$ et $\psi(r) \in V$, et l'on a d'autre part $\varphi(r) = \psi(r)$ car φ et ψ coïncident sur $\mathbb{Q}$; on a ainsi exhibé un élément de $U \cap V$.

On vient donc de démontrer que tout voisinage ouvert de x rencontre tout voisinage ouvert de y . Puisque X est séparé, ceci entraîne que $x = y$ et achève la preuve que f est un épimorphisme de $\mathbf{Top}^{\text{sep}}$.

Munissons le groupe quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ de la topologie grossière. Soit $\pi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ l'application quotient, et soit $\chi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ l'application constante de valeur $\bar{0}$. Alors π et χ sont continues et coïncident sur $\mathbb{Q}$, mais sont néanmoins différentes. Ainsi f n'est pas un épimorphisme de $\mathbf{Top}$.

- (b) Soient φ et ψ deux applications continues de U vers un espace topologique séparé X telles que $\varphi \circ g = \psi \circ g$. On a alors $\varphi(g(t)) = \psi(g(t))$ pour tout $t \in [0, 1[$; comme g est surjective il s'ensuit que $\varphi(x) = \psi(x)$ pour tout $x \in U$, si bien que $\varphi = \psi$; par conséquent g est un épimorphisme.

Soient maintenant λ et μ deux applications continues d'un espace topologique séparé Y vers $[0, 1[$ telles que $g \circ \lambda = g \circ \mu$. Pour tout y appartenant à Y on a $g(\lambda(y)) = g(\mu(y))$, et partant $\lambda(y) = \mu(y)$ puisque g est injective. Ainsi $\lambda = \mu$ et g est un monomorphisme.

Si g était un isomorphisme de $\mathbf{Top}^{\text{sep}}$, ce serait un homéomorphisme de $[0, 1[$ sur U , ce qui est absurde puisque U est compact et que $[0, 1[$ ne l'est pas.

Exercice 6.

- (a) Par définition, F est isomorphe à h^Y pour un certain espace topologique Y , et un isomorphisme de foncteurs préserve la propriété qu'on cherche à montrer; ceci permet de supposer que $F = h^Y$. Il s'agit alors de vérifier que si l'on se donne pour tout i une application continue s_i de U_i vers Y , et si l'on suppose que $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ pour tout (i, j) il existe une unique application continue s de X vers Y telle que $s|_{U_i} = s_i$ pour tout i . L'unicité d'une telle s est claire : si elle existe on aura pour tout $x \in X$ l'égalité $s(x) = s_i(x)$ où i est n'importe quel indice tel que $x \in U_i$ (il y en a au moins un puisque les U_i recouvrent X). Réciproquement, pour tout $x \in X$ posons $s(x) = s_i(x)$ où i est n'importe quel indice tel que $x \in U_i$; cela ne dépend pas de i puisque $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ pour tout (i, j) . L'application s de X vers Y vérifie alors $s|_{U_i} = s_i$ pour tout i . Comme chaque s_i est continue et que la continuité est une propriété locale, s est continue.
- (b) Pour tout $i > 0$ notons U_i l'intervalle ouvert $] - i, i[$ de $\mathbb{R}$; et soit s_i l'inclusion de U_i dans $\mathbb{R}$. Chaque s_i est une application continue et bornée de U_i dans $\mathbb{R}$, et si i et j sont deux entiers, les restrictions de s_i et s_j à $U_i \cap U_j$ (qui ici est $U_{\min(i, j)}$) coïncident. Mais la seule application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ se restreignant à s_i sur chaque U_i est l'identité, qui n'est pas bornée. La propriété (a) des foncteurs représentables dans $\mathbf{Top}$ est donc prise en défaut pour G . En conséquence, ce dernier n'est pas représentable.
