Université Paris 6
Année universitaire 2011-2012
Master enseignement première année, cours d'algèbre
Résumé des séances des 26 et 28 septembre

On désigne toujours par K un corps de caractéristique nulle.

La trace

Définition de la trace d'une matrice carrée. La trace est une forme linéaire sur $M_n(K)$ qui satisfait la propriété $\mathrm{Tr}\ (MN) = \mathrm{Tr}\ (NM)$ pour tout couple (M, N) de matrices. Si $M \in M_n(K)$ et si P appartient au groupe $\mathrm{GL}_n(K)$ des matrices carrées inversibles à coefficients dans K alors $\mathrm{Tr}\ (P^{-1}MP) = \mathrm{Tr}\ M$.

Il s'ensuit que si u est un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E de dimension finie et si $\mathcal{B}$ est une base de E alors $\mathrm{Tr}\ (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\ u)$ ne dépend que de u, et pas de $\mathcal{B}$. On appelle ce scalaire la trace de u et on le note $\mathrm{Tr}\ u$. Les formules matricielles mentionnées ci-dessus ont leur pendant dans le monde des endomorphismes : $\mathrm{Tr}\ (u \circ v) = \mathrm{Tr}\ (v \circ u)$ si u et v sont deux endomorphsimes de E, et $\mathrm{Tr}\ (w^{-1} \circ u \circ w) = \mathrm{Tr}\ u$ si u est un endomorphisme de E et w une bijection linéaire de E dans E.

Matrices semblables, matrices équivalentes

Définition de deux matrices carrées semblables . La similitude est une relation d'équivalence. Deux matrices M et N appartenant à $M_n(K)$ sont semblables si et seulement si il existe un K-espace vectoriel E de dimension n, un endomorphisme u de E, et deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\ u = M$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\ u = N$.

Définition de deux endomorphismes semblables. Si E est un K-espace vectoriel de dimension finie, si u et v sont deux endomorphismes de E et si $\mathcal{B}$ est une base de E les assertions suivantes sont équivalentes :

1) u est semblable à v ;
2) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\ u$ est semblable à $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\ v$;
3) il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\ v = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\ u$.

Deux matrices (ou endomorphismes) semblables ont même trace.

Définition de deux matrices équivalentes. L'équivalence de matrices est (heureusement !!) une relation d'équivalence. Deux matrices M et N appartenant à $M_{n,m}(K)$ sont semblables si et seulement si il existe un K-espace vectoriel E de dimension m, un K-espace vectoriel F de dimension n, une application linéaire u de E vers F, deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E et deux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de F telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\ u = M$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}\ u = N$.

Définition de deux applications linéaires équivalentes (je ne sais pas si cette terminologie est très standard). Si E et F sont deux K-espaces vectoriels de dimension finie, si u et v sont deux applications linéaires de E vers F, si $\mathcal{B}$ est une base de E et si $\mathcal{C}$ est une base de F les assertions suivantes sont équivalentes :

1) u est équivalente à v ;
2) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\ u$ est équivalente à $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\ v$;

3) il existe une base $\mathcal{B}'$ de E et une base $\mathcal{C}'$ de F telles que l'on ait $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}\ v = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\ u$.

Deux matrices (ou applications linéaires) sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang. On a vu à cette occasion la définition d'un système de représentants d'une relation d'équivalence. Fixons n et m ; pour tout r inférieur ou égal à $\min(n,m)$, notons $J_{n,m,r}$ la matrice à n lignes et m colonnes de de terme général $(a_{i,j})$ avec $a_{i,j} = 1$ si $1 \leqslant i \leqslant r$ et $i = j$, et 0 sinon. L'ensemble $\{J_{n,m,r}\}_{1\leqslant r\leqslant \min(n,m)}$ constitue un système de représentants de la relation d'équivalence sur $M_{n,m}(K)$.

Deux matrices carrées semblables sont équivalentes. La réciproque est fausse :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

sont toutes deux de rang 2, et donc équivalentes ; mais leurs traces diffèrent, et elles ne sont donc pas semblables.

Le déterminant

Soit E un K-espace vectoriel et n un entier. Une *forme n-linéaire alternée* sur E est une application de E^n dans K linéaire en chaque facteur et telle que $\varphi(v_1,\ldots,v_n) = 0$ dès qu'il existe deux indices i et$j$ distincts tels que $v_i = v_j$. Cela équivaut à demander que

$$\varphi(v_1,\ldots,v_{i-1},v_j,v_{i+1},\ldots,v_{j-1},v_i,v_{j+1},\ldots,v_n) = -\varphi(v_1,\ldots,v_n)$$

pour tout $(v_1,\ldots,v_n) \in E^n$; en d'autres termes, φ change de signe lorsqu'on échange deux vecteurs.

L'ensemble $\mathrm{Alt}_n(E)$ des formes n-linéaires alternées sur E peut être muni d'une structure naturelle de K-espace vectoriel.

Si $\varphi \in \mathrm{Alt}_n(E)$ et si $(v_1,\ldots,v_n)$ est liée alors $\varphi(v_1,\ldots,v_n) = 0$; et l'on a par ailleurs pour tout $(v_1,\ldots,v_n) \in E^n$ et toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ l'égalité

$$\varphi(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\varphi(v_1,\ldots,v_n).$$

Supposons maintenant que E est de dimension finie n et soit $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ une base de E. On démontre que pour tout $a \in K$ il existe une et une seule $\varphi \in \mathrm{Alt}_n(E)$ telle que $\varphi(e_1,\ldots,e_n) = a$; elle est donnée par la formule

$$\varphi(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n,1}e_n, a_{1,2}e_1 + \ldots + a_{n,2}e_n, \ldots, a_{1,n}e_1 + \ldots + a_{n,n}e_n)$$
$$= a \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}.a_{\sigma(2),2}.\cdots.a_{\sigma(n),n}.$$

On appelle *déterminant dans la base $\mathcal{B}$*, et l'on note $\det_{\mathcal{B}}$, l'unique forme appartenant à $\mathrm{Alt}_n(E)$ et valant 1 sur $(e_1,\ldots,e_n)$. Elle est donnée par la formule

$$\det_{\mathcal{B}}(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n,1}e_n, a_{1,2}e_1 + \ldots + a_{n,2}e_n, \ldots, a_{1,n}e_1 + \ldots + a_{n,n}e_n)$$
$$= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}.a_{\sigma(2),2}.\cdots.a_{\sigma(n),n}.$$

Définissions le déterminant d'une matrice carrée M de terme général (a_{ij}) par la formule

$$\det M = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}.a_{\sigma(2),2}.\cdots.a_{\sigma(n),n}.$$

Si $(v_1, \dots, v_n) \in E^n$ alors $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$ est alors par définition le déterminant de la matrice dont la j-ième colonne est formée des coordonnées de v_j dans la base $\mathcal{B}$.

L'espace $\mathrm{Alt}_n(E)$ est de dimension 1 ; la famille singleton constituée par $\det_{\mathcal{B}}$ en est une base. Si u est un endomorphisme de E, l'application $\varphi_u := (v_1, \dots, v_n) \mapsto \varphi(u(v_1), \dots, u(v_n)$ appartient encore à $\mathrm{Alt}_n(E)$, et $\varphi \mapsto \varphi_u$ est un endomorphisme de l'espace $\mathrm{Alt}_n(E)$; comme celui-ci est de dimension 1, cet endomorphisme est une homothétie dont le rapport est appelé le *déterminant* de u et est noté $\det u$. On vérifie, en appliquant la formule $\varphi_u = (\det u)\varphi$ à $\varphi = \det_{\mathcal{B}}$ puis en évaluant l'égalité en $(e_1, \dots, e_n)$, que $\det u$ est égal à $\det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$, c'est-à-dire encore à $\det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u)$. Ce dernier *ne dépend donc pas de $\mathcal{B}$.*

De la définition du déterminant de u comme un rapport d'homothétie l'on déduit que $\det(u \circ v) = (\det u).(\det v)$ pour tout couple (u, v) d'endomorphismes de E. On utilise ce fait pour prouver qu'un endomorphisme u est bijectif si et seulement si $\det u \neq 0$ (et dans ce cas, $\det(u^{-1}) = (\det u)^{-1}$).

Ceci se décline en version matricielle : $\det(MN) = (\det M).(\det N)$ pour tout couple (M, N) de matrices appartenant à $M_n(K)$; une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Et au niveau vectoriel, on en déduit qu'une famille $(v_1, \dots, v_n)$ est libre si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) \neq 0$.

On a terminé par quelques formules à propos du déterminant : déterminant d'une matrice 2-2, 3-3, d'une matrice triangulaire supérieure ; développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou à une colonne ; égalité entre $\det M$ et $\det {}^t M$.

Le déterminant est invariant par toute transformation élémentaire de la forme $L_i \to L_i + \lambda L_j$ ou $C_i \to C_i + \lambda C_j$ (lorsque $i \neq j$) ; si l'on échange deux lignes ou deux colonnes, il est multiplié par -1 ; si l'on multiplie une ligne ou une colonne (resp. la matrice) par λ il est multiplié par λ (resp. par λ^n, où n est la taille de la matrice).

Ces remarques sont absolument fondamentales pour le calcul pratique des déterminant, le pivot étant bien plus rentable que la formule brutale, qui met en jeu la somme de $n!$ produits de n termes...

Définition de la comatrice $\tilde{M}$, formule

$$M.{}^t\tilde{M} = {}^t\,\tilde{M}.M = (\det M).I_n,$$

et son corollaire $M^{-1} = \dfrac{{}^t\tilde{M}}{\det M}$ lorsque M est inversible.

Formules de Cramer : soit A une matrice carrée inversible de taille n et soit B un vecteur colonne de longueur n. Pour tout i compris entre 1 et n, notons

A_i la matrice obtenue à partir de A en remplaçant sa i-ème colonne par B. Si C désigne l'unique solution du système $AX = B$ alors le i-ème terme de C est égal à $\dfrac{\det A_i}{\det A}$.

Exercices

Presque toute la feuille 2 a été traitée, seule une partie de l'exercice 1 ne l'a pas été (on a vu à son propos sur un ou deux exemples pratiques comment reconstruire une matrice échelonnée à partir de son noyau, et évoqué à cette occasion les variables libres d'un système linéaire).

Concernant les déterminants, j'ai fait calculer un déterminant 4-4 par manipulation des lignes et colonnes, et traité le calcul des déterminants de Vandermonde.