INTRODUCTION AUX CATÉGORIES (SORBONNE-UNIVERSITÉ, MASTER 1)

par

Antoine Ducros

Table des matières

1. Catégories, foncteurs, morphismes de foncteurs

1.1. Catégories. — Nous allons commencer par présenter la notion fondamentale de ce cours, celle de catégorie, puis nous allons l'illustrer par de nombreux exemples.

Définition 1.1.1. — Une *catégorie* C consiste en les données suivantes :

- ⋄ une classe $\mathrm{Ob}\,\mathsf{C}$ d'objets mathématiques, les *objets* de C ;
- ⋄ pour tout couple (X, Y) d'objets de C, un *ensemble* $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Y)$, ou $\mathrm{Hom}(X, Y)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur C, dont les éléments sont appelés *morphismes* ou *flèches* de X vers Y ;
- ⋄ pour tout objet X de C, un élément Id_X de $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, X)$, appelé *identité* de X ;
- ⋄ pour tout triplet (X, Y, Z) d'objets de C, une application $(g, f) \mapsto g \circ f$ de $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Y)$ vers $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Z)$, appelée la *composition*,

ces données étant sujettes à un certain nombre de conditions :

1. pour tout quadruplet (X, Y, X', Y') d'objets de C tels que $(X, Y) \neq (X', Y')$ l'intersection $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Y) \cap \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X', Y')$ est vide ;
2. pour tout couple (X, Y) d'objets de C et tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Y)$ on a $f \circ \mathrm{Id}_X = f$ et $\mathrm{Id}_Y \circ f = f$ (autrement dit, les identités sont neutres à gauche et à droite)
3. pour tout quadruplet (X, Y, Z, T) d'objets de C, tout $h \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Z, T)$, tout $g \in \mathrm{Hom}_C(Y, Z)$ et tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Y)$ on a $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) f \circ f$ (autrement dit, la composition des morphismes est associative).

1.1.2. — Nous attirons l'attention sur le fait que nous ne demandons pas que $\mathrm{Ob}\,\mathsf{C}$ soit un ensemble mais simplement une «classe», terme que nous utilisons de manière informelle en nous gardant bien de chercher à lui donner un sens précis, et nous verrons que dans de nombreux exemples ci-dessous, $\mathrm{Ob}\,\mathsf{C}$ n'est effectivement pas un ensemble.

En toute rigueur, le développement de la théorie des catégories pose donc quelques problèmes de fondements. On peut les résoudre ou bien en travaillant dans un système d'axiomes qui inclue la notion de classe (et plus seulement d'ensemble), ou bien en demandant que $\mathrm{Ob}\,\mathsf{C}$ soit un ensemble – mais dans ce dernier cas il est nécessaire de fixer un premier ensemble absolument énorme, qu'on appelle un *univers*, et qui joue en quelque sorte le rôle d'ensemble de tous les ensembles : il doit contenir tous les objets mathématiques qu'on aura envie de considérer (les catégories elles-mêmes, leurs objets, leurs morphismes et ensembles de morphismes...) et être stable sous toute une série d'opérations (comme la formation des ensembles de parties...) ; l'existence d'un tel univers n'est pas garantie par les axiomes standard de la théorie des ensembles et doit être rajoutée à ces derniers.

Mais on peut se permettre d'ignorer complètement ce type de questions dans une première approche du sujet, et c'est ce que nous ferons ici. Nous manipulerons donc sans scrupules des «classes» $\mathrm{Ob}\,\mathsf{C}$ qui ne sont pas des ensembles ; par contre comme souligné dans la définition les $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Y)$ seront quant à eux toujours des ensembles. La condition (1) peut sembler un peu étrange ; elle signifie simplement que la donnée d'une flèche f inclut les deux objets X et Y de C tels que f appartienne à $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Y)$; on dit que X est la *source* de f et Y son *but*.

1.1.3. *Premiers exemples.* — Nous allons commencer par quelques exemples classiques mettant en jeu de «vrais» objets et de «vrais» morphismes.

- ◇ La catégorie Ens, dont les objets sont les ensembles et les flèches les applications.
- ◇ La catégorie Gp dont les objets sont les groupes et les flèches les morphismes de groupes.
- ◇ La catégorie Top dont les objets sont les espaces topologiques et les flèches les applications continues.
- ◇ La catégorie Ann dont les objets sont les anneaux commutatifs unitaires, et les flèches les morphismes d'anneaux unitaires.
- ◇ Un corps k étant donné, la catégorie k-Vect dont les objets sont les k-espaces vectoriels et les flèches les applications k-linéaires.
- ◇ Un objet A de Ann étant donné, la catégorie A-Mod dont les objets sont les A-modules et les flèches les applications A-linéaires (un A-module est un groupe abélien $(M,+)$ muni d'une loi externe $A \times M \to M$ qui satisfait les mêmes axiomes que la loi externe des espaces vectoriels ; une application $\varphi \colon M \to N$ entre deux A-modules est A-linéaire si c'est un morphisme de groupes et si $\varphi(am) = a\varphi(m)$ pour tout $(a,m) \in A \times M$).
- ◇ La catégorie GpTop. Un objet de GpTop est un groupe topologique, c'est-à-dire un groupe G muni d'une topologie pour laquelle le produit et l'inversion sont continus ; une flèche de GpTop est un morphisme de groupes continu.

1.1.4. *Sous-catégories.* — Une catégorie C étant donnée, une *sous-catégorie* de C est une catégorie D telle que $\mathrm{Ob}\,\mathsf{D} \subset \mathrm{Ob}\,\mathsf{C}$ et $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X,Y) \subset \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X,Y)$ pour tout couple (X,Y) d'objets de D (la composition des flèches de D se déduisant par restriction de celle des flèches de C). Une sous-catégorie D de C est dite *pleine* si $\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X,Y)$ pour tout couple (X,Y) d'objets de D. Donnons quelques exemples.

- ◇ La catégorie Ab, dont les objets sont les groupes abéliens et les flèches les morphismes de groupes, est une sous-catégorie pleine de Gp.
- ◇ La catégorie des corps, dont les objets sont les corps et les flèches les morphismes d'anneaux, est une sous-catégorie pleine de Ann. On peut également en considérer la sous-catégorie (encore pleine) constituée des corps de caractéristique fixée.
- ◇ La sous-catégorie pleine k-$\mathsf{Vect}^{\mathsf{fin}}$ de k-Vect, constituée des espaces vectoriels de dimension finie.
- ◇ La sous-catégorie de Gp ayant les mêmes objets, mais dont les flèches sont les morphismes de groupes injectifs. On pourrait tout aussi bien remplacer «injectif» par «surjectif» ou «bijectif», l'important (pour avoir une sous-catégorie) étant simplement de choisir une classe de morphismes stable par composition et contenant les identités.

1.1.5. *Objets au-dessus et en-dessous d'un objet donné.* — Soit C une catégorie et soit S un objet de C. On définit la catégorie des objets de C *au-dessus de S*, et l'on note C/S, la catégorie définie comme suit : ses objets sont les couples (X,f) où X est un objet de C et f un morphisme de X vers S ; un morphisme de(X,f)vers (Y,g) est une flèche $h\colon X\to Y$ telle que $g\circ h=f$, soit encore telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

commute.

On définit de manière duale la catégorie des la catégorie des objets de C *en dessous de S*, et l'on note $S\backslash\mathsf{C}$, la catégorie définie comme suit : ses objets sont les couples (X,f) où X est un objet de C et f un morphisme de S vers X ; un morphisme de (X,f) vers Y,g est une flèche $h\colon X\to Y$ telle que $h\circ f=g$, soit encore telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] & & Y \\ & S \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

commute.

Donnons deux exemples importants en pratique de ce type de construction.

- ◇ Soit A un objet de Ann. La catégorie des anneaux en dessous de A est ce qu'on appelle la catégorie A-Alg des *A-algèbres*.
- ◇ Soit $\{*\}$ un singleton. Choisir une application continue de $\{*\}$ vers un espace topologique X, c'est choisir un point de X (l'image de l'application en question). La catégorie des espaces topologiques en dessous de $\{*\}$ peut donc également se décrire comme suit : ses objets sont les couples (X,x) où X est un espace topologique et x un point de X ; un morphisme de (X,x) vers (Y,y) est une application continue f de X vers Y telle que $f(x)=y$. C'est la catégorie TopPt des *espaces topologiques pointés*.

1.1.6. *Classes d'équivalences de morphismes.* — Nous allons maintenant donner deux exemples (importants) de catégories qui mettent encore en jeu de «vrais» objets, mais seulement des classes d'équivalence de «vrais» morphismes.

- ◇ La catégorie OutGp des groupes *à automorphismes intérieurs près*. Les objets de OutGp sont les groupes. Un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathsf{OutGp}}(G,H)$ est une classe d'équivalence de morphismes de groupes de G vers H pour la relation suivante : $f\sim f'$ si et seulement s'il existe un automorphisme intérieur u de H tel que $f'=u\circ f$.
- ◇ La catégorie hTop des espaces topologiques *à homotopie près*. Ses objets sont les espaces topologiques. Un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathsf{hTop}}(X,Y)$ est une classe d'équivalence d'applications continues de X vers Y pour la relation d'homotopie définie comme suit : $f\sim f'$ si et seulement s'il existe une application continue h de $[0,1]\times X$ vers Y telle que $h(0,\cdot)=f$ et $h(1,\cdot)=f'$.

◇ La catégorie hTopPt des espaces topologiques pointés à homotopie près. Ses objets sont les espaces topologiques pointés. Un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathsf{hTopPt}}((X,x),(Y,y))$ est une classe d'équivalence de morphismes d'espaces topologiques pointés de $(X,x$ vers (Y,y) pour la relation d'homotopie définie comme suit : $f \sim f'$ si et seulement s'il existe une application continue h de $[0,1] \times X$ vers Y telle que $h(0,\cdot) = f$, $h(1,\cdot) = f'$ et $h(x,t) = y$ pour tout t.

Précisons que dans ces deux exemples la composition est induite par la composition usuelle, qui passe à chaque fois au quotient par la relation considérée ; et l'identité d'un objet est la classe de son identité usuelle.

1.1.7. *Exemples abstraits.* — On peut également définir des catégories «abstraites» qui ne mettent en jeu ni vrais objets ni vrais morphismes. Donnons trois exemples.

◇ Soit G un groupe. On lui associe deux catégories (qui jouent un rôle important en topologie algébrique).

La catégorie BG est la catégorie ayant un seul objet $*$ et telle que $\mathrm{Hom}_{BG}(*,*) = G$, la composition étant la loi interne de G et l'identité son élément neutre.

La catégorie EG est la catégorie dont la classe d'objets est l'ensemble G, et telle que pour tout (x,y) de G^2, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{EG}(x,y)$ soit un singleton ; la composition est la seule loi possible, et l'identité de x est l'unique élément de $\mathrm{Hom}_{EG}(x,x)$.

◇ Soit k un corps. La catégorie V_k est la catégorie telle que $\mathrm{Ob}\,\mathsf{V} = \mathbb{N}$ et telle que pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ on ait $\mathrm{Hom}_{\mathsf{V}_k}(m,n) = \mathrm{M}_{nm}(k)$, la composition étant le produit des matrices, et Id_n étant la matrice I_n.

1.1.8. *Petites catégories.* — Une catégorie C est dite *petite* si $\mathrm{Ob}\,\mathsf{C}$ est un ensemble. Par exemple les catégories décrites au 1.1.7 ci-dessus sont petites. Citons deux autres exemples de petites catégories : si E est un ensemble, la catégorie $\mathscr{P}(E)$ dont les objets sont les parties de E et les flèches les inclusions ; et si X est un espace topologique, la catégorie $\mathsf{Ouv}(X)$ dont les objets sont les ouverts de X et les flèches les inclusions.

1.1.9. *Catégorie opposée.* — Soit C une catégorie. On définit la catégorie *opposée* C^{op} comme suit : $\mathrm{Ob}\,\mathsf{C}^{\mathrm{op}} = \mathrm{Ob}\,\mathsf{C}$, et $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Y,X)$ pour tout couple (X,Y) d'objets de C. Les identités de C^{op} sont celles de C, et la composition est renversée.

1.1.10. *Endomorphismes, isomorphismes, automorphismes.* — Soit C une catégorie. Un *endomorphisme* d'un objet X de C est un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X,X)$. Si X et Y sont deux objets de C, un morphisme de X vers Y est appelé un *isomorphisme* s'il existe $g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Y,X)$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$. Un tel g est alors unique, est appelé la *réciproque* de f et est noté f^{-1}. Remarquons que f^{-1} est lui-même un isomorphisme, et que $(f^{-1})^{-1} = f$. Pour tout $X \in \mathrm{Ob}\,\mathsf{C}$, l'identité de X est un isomorphisme. Si f et g sont deux isomorphismes composables, $g \circ f$ est un isomorphisme et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. On dit que X et Y sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de X vers Y.

Dans les catégories algébriques comme $\mathsf{Ens}, \mathsf{Gp}, \mathsf{Ann}, k\text{-}\mathsf{Vect}, A\text{-}\mathsf{Mod}, A\text{-}\mathsf{Alg}\ldots$ les isomorphismes sont simplement les morphismes bijectifs. Mais ce n'est plus le cas dans la catégorie Top : les isomorphismes de cette catégorie sont les bijections continues *dont la réciproque est continue*, condition qui n'a rien d'automatique, comme en attestent l'identité de $\mathbb{R}$ muni de la topologie discrète vers $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle ou l'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$ de $[0, 2\pi[$ sur l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Un *automorphisme* d'un objet X de C est un isomorphisme de X sur lui-même (ou encore, c'est un endomorphisme de X qui est un isomorphisme). Les automorphismes de X forment un groupe pour la composition, de neutre Id_X.

Un *groupoïde* est une catégorie dont toutes les flèches sont des isomorphismes. Les catégories BG et EG de 1.1.7 sont des exemples de groupoïdes. On peut fabriquer de manière naturelle en partant d'une catégorie C quelconque une sous-catégorie de C qui est un groupoïde : on garde les mêmes objets, et on prend uniquement pour flèches les isomorphismes de C.

Exercice 1.1.11. — Soit n un entier et soit B la boule unité de $\mathbb{R}^n$. Montrez que (la classe de) l'inclusion $\{0\} \hookrightarrow B$ est un isomorphisme de hTop.

1.2. Foncteurs. — Nous allons maintenant présenter la seconde notion fondamentale de ce cours, celle de foncteur. Les foncteurs sont essentiellement aux catégories ce que les applications sont aux ensembles.

Définition 1.2.1. — Soient C et D deux catégories. Un *foncteur* F de C vers D consiste en les données suivantes :

- ⋄ pour tout objet X de C, un objet $F(X)$ de D ;
- ⋄ pour toute flèche $f\colon X \to Y$ de C, une flèche $F(f)\colon F(X) \to F(Y)$ de D,

telles que $F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$ pour tout X et $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ dès que g et f sont composables.

Remarque 1.2.2. — Ce que nous venons de définir est ce qu'on appelle plus précisément un foncteur *covariant.* Il y a aussi une notion de foncteur *contravariant*, qui, est la même à ceci près qu'elle renverse le sens des flèches : si F est contravariant et si f est une flèche de X vers Y alors $F(f)$ appartient à $\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(F(Y), F(X))$ et on a la formule $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

Pour éviter de fastidieuses répétitions, nous nous contenterons souvent de ne donner des définitions et énoncés que pour des foncteurs covariants, en laissant au lecteur le soin de formuler et/ou prouver leurs déclinaisons contravariantes. Qu'on peut en fait la plupart du temps déduire formellement du cas covariant, grâce à la remarque suivante : un foncteur contravariant de C vers D peut alternativement être défini comme un foncteur covariant de C vers D^{op} ou de C^{op} vers D. (Ces deux points de vue sont en théorie équivalents, mais ils ne le sont pas en pratique : pour des raisons psychologiques on préfère le plus souvent conserver le sens normal de travail dans la catégorie d'arrivée, et donc voir un foncteur contravariant de C vers D comme un foncteur de C^{op} vers D.)

Dans ce qui suit les foncteurs seront donc par défaut covariants.

1.2.3. *Identité, composition de foncteurs.* — Si C est une catégorie, on définit l'identité de C, notée Id_C, comme le foncteur tel que $\mathrm{Id}_{\mathsf{C}}(X) = X$ pour tout objet X et $\mathrm{Id}_{\mathsf{C}}(f) = f$ pour toute flèche f.

Si $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ et $G\colon \mathsf{D} \to \mathsf{E}$ sont deux foncteurs, on définit le foncteur $G \circ F$ de C vers E par les formules $(G \circ F)(X) = G(F(X))$ (pour tout objet X) et $(G \circ F)(f) = G(F(f))$ (pour toute flèche f). C'est plus précisément un foncteur covariant si F et G sont tous deux covariants ou bien tous deux contravariants, et un foncteur contravariant si F et G sont de variances opposées.

La composition des foncteurs est une opération associative, pour laquelle les foncteurs identité sont neutres.

1.2.4. *Exemples.* — Nous allons donner quelques exemples élémentaires de foncteurs entre certaines des catégories décrites plus haut.

- ◇ On peut définir dans différents contextes des *foncteurs d'oubli* qui comme leur nom l'indiquent «oublient» une partie de la structure. On dispose ainsi d'un foncteur d'oubli de Gp dans Ens qui associe à un groupe l'ensemble sous-jacent et à un morphisme de groupes l'application ensembliste sous-jacente ou d'autres de Ann dans Ens, de k-Vect dans Ens, de Top dans Ens, mais aussi de k-Vect dans Ab, de Ann dans Ab, de A-Alg dans A-Mod...
- ◇ Si D est une sous-catégorie de C on dispose d'un foncteur d'inclusion de D dans C qui envoie un objet X de D sur le même X vu comme objet de C et une flèche f de D sur la même f vue comme flèche de C.
- ◇ Le foncteur d'abélianisation de Gp vers Ab qui envoie un groupe G sur le quotient $G/[G,G]$ où $[G,G]$ désigne le sous-groupe de G engendré par les commutateurs. (Nous commettons ici un abus très fréquent : nous nous contentons pour définir un foncteur de donner son effet sur les objets, en considérant que son effet sur les flèches est évident ; vérifiez tout de même à chaque fois que cela se produit, et donc ici par exemple, que vous arrivez effectivement à deviner son effet sur les flèches).
- ◇ On construit en topologie le foncteur *groupe fondamental* $(X,x) \mapsto \pi_1(X,x)$ de TopPt vers Gp.
- ◇ Si C est une catégorie et S un objet de C on dispose d'un foncteur d'oubli de C/S vers C, qui envoie un couple (X,f) sur X ; on dispose d'un foncteur d'oubli analogue de $S\backslash\mathsf{C}$ vers C.
- ◇ Les constructions de catégories par passage au quotient au niveau des morphismes (1.1.6) donnent naturellement lieu à des «foncteurs quotient». On définit ainsi un foncteur Gp vers OutGp (1.1.6) qui est l'identité sur les objets, et qui au niveau des morphismes est donné par les applications quotient $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Gp}}(G,G') \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{OutGp}}(G,G')$. On définit de même des foncteurs quotient de Top vers hTop et de TopPt vers hTopPt.
- ◇ Si deux morphismes d'espaces pointés f et f' de (X,x) vers (Y,y) sont homotopes, ils induisent le même morphisme de groupes de $\pi_1(X,x)$ vers $\pi_1(Y,y)$. Il existe donc un unique foncteur $\overline{\pi}_1\colon \mathsf{hTopPt} \to \mathsf{Gp}$ tel que le

diagramme de foncteurs

$$\begin{tikzcd} \mathsf{TopPt} \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "Q"'] & \mathsf{Gp} \\ \mathsf{hTopPt} \arrow[ur, "\overline{\pi}_1"'] & \end{tikzcd},$$

où Q est le foncteur quotient, commute.

- ◇ Soit G un groupe. On dispose d'un foncteur naturel F de EG vers BG (ces catégories ont été définies en 1.1.7), défini comme suit : on demande que $F(g)$ soit égal à $*$ pour tout $g \in G$ (on n'a de toutes façons pas le choix) et que pour tout $(g_1, g_2) \in G^2$ le foncteur F envoie l'unique flèche de E de source g_1 et de but g_2 vers l'automorphisme $g_2 g_1^{-1}$ de $*$.
- ◇ Soit k un corps. On dispose d'un foncteur naturel F de la catégorie V_k définie en 1.1.7 vers la catégorie k-$\mathsf{Vect}^{\mathsf{fin}}$ définie en 1.1.4, construit comme suit : pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $F(n) = k^n$, et si M est un élément de $\mathrm{M}_{nm}(k)$ on définit $F(M)$ comme l'application linéaire de k^m vers k^n de matrice M dans les bases canoniques.

1.2.5. *Foncteurs et isomorphismes.* — Soient C et D deux catégories et soit F un foncteur de C vers D. Soit $f \colon X \to Y$ une flèche de C. Supposons que f soit un isomorphisme. On a alors les égalités $F(f) \circ F(f^{-1}) = F(f \circ f^{-1}) = F(\mathrm{Id}_Y) = \mathrm{Id}_{F(Y)}$ et de même $F(f^{-1} \circ f) = \mathrm{Id}_{F(X)}$. Il s'ensuit que $F(f)$ est un isomorphisme et que $F(f)^{-1} = F(f^{-1})$.

On dit que F est *conservatif* si l'implication réciproque est vraie, c'est-à-dire si pour toute flèche f de C, on a *équivalence* entre «f est un isomorphisme» et «$F(f)$ est un isomorphisme».

Ainsi la phrase «Un morphisme de groupes est un isomorphisme si et seulement si il est ensemblistement bijectif» peut se reformuler de manière conceptuelle (ou pédante, c'est une question de point de vue) en disant que le foncteur d'oubli de Gp vers Ens est conservatif ; les foncteurs d'oubli de Ann ou k-Vect vers Ens le sont aussi. Par contre, l'existence de bijections continues qui ne sont pas des homéomorphismes signifie que le foncteur d'oubli de Top vers Ens *n'est pas* conservatif.

1.2.6. *Plénitude et fidélité.* — Soient Cet D deux catégories et soit F un foncteur de C vers D. Le foncteur F est dit *plein*, resp. *fidèle*, resp. *pleinement fidèle* si pour tout couple (X, Y) d'objets de C l'application $f \mapsto F(f)$ de $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Y)$ vers $\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(F(X), F(Y))$ est surjective (resp. injective, resp. bijective).

Par exemple si C est une sous-catégorie de D le foncteur d'inclusion de C dans D est toujours fidèle, et pleinement fidèle si et seulement si C est une sous-catégorie pleine de D.

Les foncteurs d'oubli de $\mathsf{Gp}, \mathsf{Ann}, A$-$\mathsf{Mod}, A$-$\mathsf{Alg}$ ou Top vers Ens ainsi que ceux de A-Alg vers A-Mod ou de A-Mod vers Ab sont fidèles, mais pas pleinement fidèles.

Les foncteurs quotient de Gp vers OutGp ou de Top vers hTop sont pleins mais pas fidèles.

La composée de deux foncteurs pleins, resp. fidèles, resp. pleinement fidèles est pleine, resp. fidèle, resp. pleinement fidèle.

1.2.7. *Les deux foncteurs associés à un objet.* — Soit C une catégorie et soit X un objet de C. On lui associe un foncteur covariant h_X et un foncteur contravariant h^X de C dans Ens comme suit (les notations h_X et h^X ne sont pas standard) :

- ◇ $h_X(Y)$ est égal à $\mathrm{Hom}(X,Y)$ pour tout objet Y de C, et $h_X(g)$ est l'application $f \mapsto g \circ f$ de $\mathrm{Hom}(X,Y)$ vers $\mathrm{Hom}(Y,Z)$ pour toute flèche $g \in \mathrm{Hom}(Y,Z)$.
- ◇ $h^X(Y)$ est égal à $\mathrm{Hom}(Y,X)$ pour tout objet Y de C, et $h^X(g)$ est l'application $f \mapsto f \circ g$ de $\mathrm{Hom}(Z,X)$ vers $\mathrm{Hom}(Y,X)$ pour toute flèche $g \in \mathrm{Hom}(Y,Z)$.

Vous avez certainement déjà rencontré ce type de foncteurs (sans que ce soit présenté ainsi). Par exemple, soit k un corps. Le foncteur contravariant h^k de k-Vect dans Ens envoie un espace V sur $\mathrm{Hom}(V,k)$. Ce dernier est en fait un peu plus qu'un ensemble : il a une structure naturelle de k-espace vectoriel, et est appelé le *dual* de V et souvent noté $V^\vee$; si f est une application k-linéaire de V vers W l'application $h^k(f)\colon W^\vee \to V^\vee$ est k-linéaire et est appelée la *transposée* de f. Ainsi $V \mapsto V^\vee$ apparaît comme un foncteur contravariant de k-Vect dans lui-même, et h^k est sa composée avec le foncteur d'oubli de k-Vect vers Ens (qui est covariant).

Exercice 1.2.8. — Montrez que tout foncteur pleinement fidèle est conservatif.

Exercice 1.2.9. — Soient X et Y deux objets isomorphes d'une catégorie C. Montrez que les groupes $\mathrm{Aut}\,X$ et $\mathrm{Aut}\,Y$ sont isomorphes.

Exercice 1.2.10. — Montrez que le foncteur quotient $Q\colon \mathsf{Gp} \to \mathsf{OutGp}$ est conservatif.

Exercice 1.2.11. — Soit k un corps. Soient n et m deux entiers. Quels sont les isomorphismes entre n et m dans la catégorie V_k définie en 1.1.7 ? Le foncteur F de V_k vers k-$\mathsf{Vect}^{\mathsf{fin}}$ défini en *loc. cit.* est-il plein ? Fidèle ? Pleinement fidèle ?

1.3. Morphismes de foncteurs. — On a dit plus haut que les foncteurs sont aux catégories ce que les applications sont aux ensembles. Mais nous allons maintenant introduire une notion spécifiquement catégorique, qu'on ne peut plus inscrire dans cette analogie avec la théorie des ensembles : c'est la notion de *morphisme de foncteurs*. Elle témoigne que le monde catégorique permet, en quelque sorte, d'aller «un cran plus loin» que le monde ensembliste – c'est une des difficultés du sujet (1).

Définition 1.3.1. — Soient C et D deux catégories et soient $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ et $G\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ deux foncteurs. Un *morphisme de foncteurs* u de F dans G consiste en la donnée pour tout $X \in \mathrm{Ob}\,\mathsf{C}$ d'un morphisme $u(X) \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(F(X), G(X))$, avec les conditions

1. On peut poursuivre cette montée en complexité avec la notion de 2-catégorie, puis celle de 3-catégorie, etc. jusqu'à celle de ∞-catégorie, qui joue un rôle majeur dans les développements récents de la topologie et de la géométrie algébriques. Mais tous ces thèmes sont très largement au-delà du niveau de ce cours introductif.

de compatiblité suivantes : on demande que pour toute flèche $f\colon Y \to X$ de C, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
F(Y) \arrow[r, "u(Y)"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(Y) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(X) \arrow[r, "u(X)"] & G(X)
\end{tikzcd}$$

(qui vit dans la catégorie D) commute.

On dit parfois aussi d'un tel u que c'est une *transformation naturelle* de F vers G.

1.3.2. *Identité, composition de morphismes de foncteurs.* — Soient C et D deux catégories et soit $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$. On appelle *identité de* F et l'on note Id_F le morphisme de foncteurs de F dans lui-même tel que $\mathrm{Id}_F(X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$ pour tout $X \in \mathrm{Ob}\,\mathsf{C}$.

Soient G et H deux autres foncteurs de C vers D, soit u est un morphisme de F vers G et soit v un morphisme de G vers H. On définit la composée $v \circ u$ comme le morphisme de foncteurs de F vers H tel que $(v \circ u)(X) = v(X) \circ u(X)$ pour tout $X \in \mathrm{Ob}\,\mathsf{C}$.

La composition des morphismes de foncteurs est associative, et les identités de foncteurs sont neutres pour cette composition.

Un *endomorphisme* de F est un morphisme de foncteurs de F dans lui-même. On dit que $u\colon F \to G$ est un *isomorphisme de foncteurs* s'il existe un morphisme de foncteurs $w\colon G \to F$ tel que $w \circ u = \mathrm{Id}_F$ et $u \circ w = \mathrm{Id}_G$. C'est le cas si et seulement si $u(X)$ est un isomorphisme de D pour tout $X \in \mathrm{Ob}\,C$, et sous cette hypothèse w est alors unique, et l'on a $w(X) = u(X)^{-1}$ pour tout $X \in \mathrm{Ob}(C)$; on l'appelle l'isomorphisme réciproque de u et on le note u^{-1}.

L'identité de F est un isomorphisme de foncteurs. Si u et v sont des isomorphismes de foncteurs, $v \circ u$ est un isomorphisme de foncteurs et $(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}$.

Un *automorphisme de foncteur* de F est un isomorphisme de foncteurs de F dans lui-même.

Remarque 1.3.3. — Nous attirons votre attention sur le fait que les morphismes de foncteurs de F vers G n'ont *a priori* aucune raison de constituer un ensemble (et pour cette même raison, on ne peut pas affirmer que les automorphismes d'un foncteur F constituent un groupe pour la composition).

Notons toutefois que si C est une petite catégorie les morphismes de F vers G forment effectivement un ensemble (et les automorphismes de F forment un groupe).

Quoi qu'il en soit, nous noterons $\mathrm{Hom}(F, G)$ la classe des morphismes de foncteurs de F vers G, qu'elle soit ou non un ensemble.

1.3.4. *Exemple : les sous-foncteurs.* — Soit C une catégorie et soient F et G deux foncteurs de C dans Ens. On dit que F est un *sous-foncteur* de G si $F(X) \subset G(X)$ pour tout objet X de C et si $F(f)(\xi) = G(f)(\xi)$ pour toute flèche $f\colon X \to Y$ de C et tout $\xi \in F(X)$.

Si c'est le cas, la donnée pour tout $X \in \mathrm{Ob}\,\mathsf{C}$ de l'inclusion $F(X) \subset G(X)$ définit un morphisme de foncteurs de F dans G, qu'on appelle le morphisme d'inclusion.

1.3.5. *Exemple : équations polynomiales, applications polynomiales.* — Soit A un anneau et soient $P_1, \ldots, P_m$ des polynômes en n variables $X_1, \ldots, X_n$ à coefficients dans A.

Soit F (resp. G) le foncteur de A-Alg dans Ens qui associe à une A-algèbre B l'*ensemble* B^n (resp. B^m). Pour toute A-algèbre B, notons $u(B)$ l'application

$$(b_1, \ldots, b_n) \mapsto (P_1(b_1, \ldots, b_n), \ldots, P_m(b_1, \ldots, b_n))$$

de B^n dans B^m. Alors u est un morphisme de foncteurs de F dans G.

Soit E le foncteur de A-Alg dans Ens qui envoie B sur l'ensemble des éléments $(b_1, \ldots, b_n)$ de B^n tels que $P_i(b_1, \ldots, b_n) = 0$ pour tout i entre 1 et n. Alors E est un sous-foncteur de F. Si i désigne l'inclusion de E dans F alors $u \circ i$ est est le morphisme de foncteurs *constant* $(b_1, \ldots, b_n) \mapsto (0, \ldots, 0)$ de E dans G.

1.3.6. *Exemple : la bidualité.* — Soit k un corps. En composant avec lui-même le foncteur contravariant $V \mapsto V^\vee$ de k-Vect dans elle-même on obtient un foncteur covariant $V\colon V^{\vee\vee}$ de k-Vect dans elle-même (on parlera aussi d'*endofoncteur* de k-Vect). Notons Θ ce foncteur (ce n'est pas une notation standard ; nous l'introduisons simplement ici par commodité).

Soit V un k-espace vectoriel. Notons $\iota(V)$ l'application k-linéaire $v \mapsto [\varphi \mapsto \varphi(v)]$ de V dans $V^{\vee\vee}$. On vérifie aussitôt que la collection des $\iota(V)$ définit un morphisme d'endofoncteurs de k-Vect de $\mathrm{Id}_{k\text{-}\mathsf{Vect}}$ vers Θ. On démontre que $\iota(V)$ est injectif pour tout V.

Si V est de dimension finie il en va de même que $\Theta(V)$, qui aura alors même dimension que V, et Θ induit ainsi un endofoncteur $\Theta|_{k\text{-}\mathsf{Vect}^{\mathsf{fin}}}$ de k-$\mathsf{Vect}^{\mathsf{fin}}$; la formule du rang assure que $\iota(V)$ est un isomorphisme. En conséquence, ι induit un isomorphisme de foncteurs de $\mathrm{Id}_{k\text{-}\mathsf{Vect}^{\mathsf{fin}}}$ vers $\Theta|_{k\text{-}\mathsf{Vect}^{\mathsf{fin}}}$.

Le langage des catégories permet ainsi de donner un sens rigoureux au fait qu'un espace vectoriel de dimension finie est *canoniquement* ou *naturellement* isomorphe à son bidual alors que jusqu'à présent on ne vous avait probablement pas défini précisément ces adverbes, se contenant de vous dire que l'isomorphisme construit «ne dépend d'aucun choix» (en particulier, pas du choix d'une base).

1.3.7. *Le cas des foncteurs h_X et h^X.* — Soit C une catégorie, soient X et Y deux objets de C et soit f une flèche de X vers Y. Rappelons que nous avons défini en 1.2.7 un foncteur covariant $h_X = \mathrm{Hom}(X, \cdot)$ et un foncteur contravariant $h^X = \mathrm{Hom}(\cdot, X)$ de C vers Ens.

1.3.7.1. — Pour tout $\in \mathrm{Ob}\,\mathsf{C}$, notons $f^*(Z)$ l'application de $h_Y(Z) = \mathrm{Hom}(Y, Z)$ vers $h_X(Z) = \mathrm{Hom}(X, Z)$ qui envoie φ sur $\varphi \circ f$. On vérifie immédiatement que f^* est un morphisme de foncteurs de h_Y vers h_X, que $\mathrm{Id}_X^* = \mathrm{Id}_{h_X}$, et qu'on a la formule $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. Il en résulte que si f est un isomorphisme alors f^* est un isomorphisme de foncteurs et $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

1.3.7.2. — Pour tout $Z \in \mathrm{Ob}\,\mathsf{C}$, notons $f_*(Z)$ l'application de $h^X(Z) = \mathrm{Hom}(Z, X)$ vers $h^Y(Z) = \mathrm{Hom}(Z, Y)$ qui envoie φ sur $f \circ \varphi$. On vérifie immédiatement que f_* est un morphisme de foncteurs de h^X vers h^Y, que $(\mathrm{Id}_X)_* = \mathrm{Id}_{h_X}$, et qu'on a la formule $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. Il en résulte que si f est un isomorphisme alors f_* est un isomorphisme de foncteurs et $(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$.

1.3.7.3. *Commentaires sur les variances.* — Notons que h_X et h_Y sont covariants, donc préservent le sens des flèches ; mais qu'une flèche f de X vers Y induit une flèche f^* «dans le mauvais sens» entre ces foncteurs, c'est-à-dire de h_Y vers h_X. Inversement, h^X et h^Y sont contravariants, donc changent le sens des flèches ; mais une flèche f de X vers Y induit une flèche f_* «dans le bon sens» entre ces foncteurs, c'est-à-dire de h^X vers h^Y.

En résumé : la formation du foncteur covariant h_X est contravariante en X ; et la formation du foncteur contravariant h^X est covariante en X.

1.3.8. *Exemples de morphismes de h_X ou h^X vers un foncteur quelconque.* — Soit C une catégorie, soit X un objet de C et soit $F\colon C \to \mathsf{Ens}$ un foncteur. Soit ξ un élément de l'ensemble $F(X)$. Pour tout objet Y de C, notons $u_{F,\xi}(Y)$ l'application de $h_X(Y) = \mathrm{Hom}(X,Y)$ vers $F(Y)$ qui envoie φ sur $F(\varphi)(\xi)$. Notons que ceci a bien un sens : φ est un morphisme de X vers Y, donc $F(\varphi)$ est une application de $F(X)$ vers $F(Y)$, et $F(\varphi)(\xi)$ est donc bien un élément de $F(Y)$. On vérifie aussitôt que $u_{F,\xi}$ est un morphisme de foncteurs de h_X dans F.

De même si G est foncteur contravariant de C vers Ens et η un élément de $G(X)$ on définit un morphisme de foncteurs (contravariants) $v_{G,\eta}$ de h^X vers G par la formule $v_{G,\eta}(Y)(\psi) = G(\psi)(\eta)$; ici ψ est un élément de $h^X(Y)$, c'est-à-dire un morphisme de Y vers X ; comme G est contravariant $G(\psi)$ est une application de $G(X)$ vers $G(Y)$, et $G(\psi)(\eta)$ appartient donc bien à $G(Y)$.

Précisons que les notations $u_{F,\xi}$ et $v_{G,\eta}$ ne sont pas standard ; nous les avons introduites par commodité en vue du lemme de Yoneda (1.3.10 ci-dessous).

1.3.9. — En général décrire tous les morphismes entre deux foncteurs donnés peut sembler hors de portée, un tel morphisme consistant en une gigantesque collection de données (paramétrée par les objets de la catégorie source, donc ne formant même pas un ensemble *a priori*) sujette à une gigantesque collection de conditions de compatibilité.

Mais nous allons voir que concernant les morphismes de h_X (resp. h^X) vers un foncteur covariant (resp. contravariant) à valeurs dans Ens, une telle description est possible, et très simple.

***Lemme 1.3.10* (Lemme de Yoneda).** — *Soit C une catégorie et soit X un objet de C.*

(1) *Soit F un foncteur covariant de C vers Ens. Soit u un morphisme de foncteurs de h_X vers F. Il existe un unique objet ξ de $F(X)$ tel que que $u = u_{F,\xi}$ (1.3.8) ; cet objet ξ est plus précisément égal à $u(X)(\mathrm{Id}_X)$.*

(2) *Soit G un foncteur contravariant de C vers Ens. Soit v un morphisme de foncteurs de h^X vers G. Il existe un unique objet η de $G(X)$ tel que que $v = v_{G,\eta}$ (1.3.8) ; cet objet η est plus précisément égal à $v(X)(\mathrm{Id}_X)$.*

1.3.11. *Commentaires.* — Notons que par définition, $u(X)$ est un morphisme de $h_X(X) = \mathrm{Hom}(X,X)$ vers $F(X)$, et $u(X)(\mathrm{Id}_X)$ est donc un élément bien défini de

$F(X)$. De même, $v(X)$ est un morphisme de $h^X(X) = \mathrm{Hom}(X,X)$ vers $G(X)$, et $v(X)(\mathrm{Id}_X)$ est donc un élément bien défini de $G(X)$.

Démonstration du lemme de Yoneda. — Nous allons nous contenter de démontrer (1). La preuve de (2) est *mutatis mutandis* la même, et l'on peut aussi remarquer que (2) s'obtient en appliquant (1) à C^{op}.

Supposons donné $\xi \in F(X)$ tel que $u = u_{F,\xi}$. Alors

$$u(X) = u_{F,\xi}(X) = \varphi \mapsto F(\varphi)(\xi),$$

où φ parcourt $\mathrm{Hom}(X,X)$. En particulier $u(X)(\mathrm{Id}_X) = F(\mathrm{Id}_X)(\xi) = \mathrm{Id}_{F(X)}(\xi) = \xi$. Ainsi ξ est nécessairement égal à $u(X)(\mathrm{Id}_X)$.

Réciproquement, posons $\xi = u(X)(\mathrm{Id}_X)$, et montrons que $u_{F,\xi} = u$. Soit Y un objet de C. Il s'agit de montrer que $u(Y) = u_{F,\xi}(Y)$, c'est-à-dire que pour tout φ appartenant à $h_Y(X) = \mathrm{Hom}(X,Y)$ on a $u(Y)(\varphi) = u_{F,\xi}(\varphi) = F(\varphi)(\xi)$.

Soit donc $\varphi \in \mathrm{Hom}(X,Y)$. Par définition d'un morphisme de foncteurs, le diagramme

$$\begin{tikzcd} h_X(X) \arrow[r, "u(X)"] \arrow[d, "h_X(\varphi)"'] & F(X) \arrow[d, "F(\varphi)"] \\ h_X(Y) \arrow[r, "u(Y)"] & F(Y) \end{tikzcd}$$

est commutatif ; rappelons que $h_X(X) = \mathrm{Hom}(X,X)$, que $h_X(Y) = \mathrm{Hom}(X,Y)$, et que $h_X(\varphi) = \psi \mapsto \varphi \circ \psi$. La commutativité de ce diagramme entraîne que

$$F(\varphi)(u(X)(\mathrm{Id}_X)) = u(Y)(h_X(\varphi)(\mathrm{Id}_X)),$$

c'est-à-dire que $F(\varphi)(\xi) = u(Y)(\varphi \circ \mathrm{Id}_X) = u(Y)(\varphi)$, ce qu'il fallait démontrer. □

1.3.12. *Commentaires.* — L'énoncé même du lemme de Yoneda et sa preuve peuvent être un peu déstabilisants en raison de leur caractère très abstrait. Et la complexité syntaxique des objets en jeu met le cerveau à rude épreuve, par exemple lorsqu'il essaie de comprendre qui habite où dans une égalité comme

$$F(\varphi)(u(X)(\mathrm{Id}_X)) = u(Y)(h_X(\varphi)(\mathrm{Id}_X)).$$

Mais il faut prendre conscience que ce sont des difficultés essentiellement psychologiques : sur le fond, le lemme de Yoneda est une tautologie ; une tautologie qui fait mal au crâne, mais une tautologie tout de même.

Il ne se passe en effet essentiellement rien dans sa preuve. Les hypothèses sont de toutes façons tellement faibles (une catégorie C quelconque, un objet X quelconque, un foncteur F quelconque) qu'il ne peut pas se passer grand-chose, faute de suffisamment d'informations disponibles ; et donc ce qu'on peut faire, c'est utiliser X et Id_X, qui sont respectivement le seul objet et le seul morphisme de C qu'on ait à notre disposition.

1.3.13. *Une première conséquence.* — Soient X, F et G comme dans l'énoncé du lemme de Yoneda. Ce dernier fournit une bijection explicite entre $F(X)$ et $\mathrm{Hom}(h_X, F)$, et entre $G(X)$ et $\mathrm{Hom}(h^X, G)$. En particulier $\mathrm{Hom}(h_X, F)$ et $\mathrm{Hom}(h^X, G)$ sont des ensembles.

1.3.14. *Morphismes de h_X vers h_Y et de h^X vers h^Y.* — Soit C une catégorie et soient X et Y deux objets de C.

1.3.14.1. — Soit ξ un élément de $h_Y(X) = \mathrm{Hom}(Y, X)$. Le morphisme ξ induit un morphisme de foncteurs $u_{h_Y,\xi}$ de h_X vers h_Y, défini par la formule suivante : pour tout objet Z de C l'application $u_{h_Y,\xi}(Z)$ de $\mathrm{Hom}(X, Z)$ vers $\mathrm{Hom}(Y, Z)$ envoie φ sur $h_Y(\varphi)(\xi) = \varphi \circ \xi$.On reconnaît alors le morphisme de foncteurs ξ^* défini en 1.3.7.1.

De même on vérifie que si η est un élément de $h^Y(X) = \mathrm{Hom}(X, Y)$ le morphisme de foncteurs $v_{h^Y,\eta}$ de h^X vers h^Y coïncide avec le morphisme de foncteurs η_* défini en 1.3.7.2.

1.3.14.2. — Il découle de ce qui précède et du lemme de Yoneda que $f \mapsto f^*$ met en bijection $\mathrm{Hom}(Y, X)$ et $\mathrm{Hom}(h_X, h_Y)$, et que $f \mapsto f_*$ met en bijection $\mathrm{Hom}(X, Y)$ et $\mathrm{Hom}(h^Y, h^X)$.

1.3.14.3. — Soit f un morphisme de Y vers X. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est un isomorphisme

(ii) $f^* \colon h_X \to h_Y$ est un isomorphisme de foncteurs ;

(iii) $f_* \colon h^Y \to h^X$ est un isomorphisme de foncteurs.

Pour le voir il suffit de montrer que (i) $\iff$ (ii), l'équivalence (i) $\iff$ (iii) se démontrant de manière analogue, ou s'en déduisant par passage à C^{op}. On a déjà vu en 1.3.7.1 que (i)$\Rightarrow$(ii). Supposons maintenant que f^* est un isomorphisme. Sa réciproque est un morphisme de foncteurs de h_Y vers h_X donc en vertu de 1.3.14.2 est de la forme g^* pour un (unique) morphisme g de X vers Y. On a alors les égalités $(g \circ f)^* = f^* \circ g^* = \mathrm{Id}_{h_X} = \mathrm{Id}_X^*$, si bien que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ par 1.3.14.2 ; on montre de même que $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$.

Exercice 1.3.15. — On travaille dans la catégorie des ensembles. On note F (resp. G) le foncteur covariant (resp. contravariant) de Ens dans Ens tel que $F(X) = \{*\}$ pour tout X (resp. $G(X) = \{*\}$ pour tout X) où $\{*\}$ est un singleton choisi une fois pour toutes.

Montrez que $h_\varnothing$ est isomorphe à F et $h^{\{*\}}$ à G. Montrez que $h^\varnothing$ est isomorphe à un sous-foncteur de G que l'on décrira. Montrez que h_* est isomorphe à $\mathrm{Id}_{\mathsf{Ens}}$.

Exercice 1.3.16. — On travaille dans la catégorie des ensembles. Soit F le foncteur contravariant de Ens dans elle-même donné par les formules

$$F(X) = \mathscr{P}(X) \text{ et } F(f) = (\mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(X),\ Z \mapsto f^{-1}(Z))$$

pour tout $X \in \mathsf{Ens}$ et toute application $f \colon X \to Y$. Construire un isomorphisme $u \colon h^{\{0,1\}} \to F$. Soit τ la bijection $0 \mapsto 1, 1 \mapsto 0$ de $\{0, 1\}$ dans lui-même. Décrire l'automorphisme $u \circ \tau_* \circ u^{-1}$ de F.

Exercice 1.3.17. — On travaille dans la catégorie des groupes. Soit n un entier positif ou nul. Soit F le foncteur d'oubli de Gp vers Ens. Construire un isomorphisme de $h_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ vers un sous-foncteur de F. Pour quelle valeur de n ce sous-foncteur est-il égal à F tout entier ?

2. Équivalences de catégories

La notion d'isomorphisme est fondamentale en mathématiques. Pour la raison suivante : les propriétés auxquelles on s'intéresse lorsqu'on travaille dans une catégorie C fixée sont le plus souvent invariantes par isomorphisme. Par exemple si E et F sont deux ensembles en bijection alors E est fini si et seulement si F est fini ; si G et G' sont deux groupes isomorphes, G est abélien si et seulement si G' est abélien ; si X et Y sont deux espaces topologiques homéomorphes, Xest compact si et seulement si Y est compact, etc.

Le but de ce chapitre va être de dégager la notion analogue au niveau des catégories.

2.1. Isomorphismes de catégories. — Nous allons faire une première tentative consistant à simplement décalquer la notion d'isomorphisme en remplaçant les morphismes entre objets par les foncteurs entre catégories.

Définition 2.1.1. — Soient C et D deux catégories. Un *isomorphisme de catégories* de C vers D est un foncteur $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ tel qu'il existe un foncteur G de D vers C vérifiant les égalités $F \circ G = \mathrm{Id}_{\mathsf{D}}$ et $G \circ F = \mathrm{Id}_C$.

2.1.2. *Unicité de l'inverse.* — Si $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ est un isomorphisme de catégories, le foncteur G de la définition ci-dessus est unique : pour tout objet Y de D, l'objet $G(Y)$ de C est l'unique objet X de C tel que $F(X) = Y$; pour toute flèche $f\colon Y_1 \to Y_2$ entre objets de D la flèche $G(f)$ est l'unique flèche $g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(G(Y_1), G(Y_2))$ telle que $F(g) = f$. On dit alors que G est l'inverse de F et on le note F^{-1}.

2.1.3. *Premiers exemples.* — L'identité Id_{C} est un isomorphisme de catégories qui est son propre inverse. Si F et G sont deux isomorphismes de catégories composables, $G \circ F$ est un isomorphisme de catégories et $(G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}$.

2.1.4. *Un exemple plus intéressant.* — Soit k un corps. Soit C la catégorie définie comme suit : ses objets sont les couples (E, u) où E est un k-espace vectoriel et u un endomorphisme de E ; une flèche de (E, u) vers (F, v) est une application k-linéaire f telle que le diagramme le diagramme

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & E \arrow[d, "f"] \\ F \arrow[r, "v"] & F \end{tikzcd}$$

commute. Soit D la catégorie des $k[T]$-modules.

On définit comme suit un foncteur F de C vers D. Au niveau des objets, F envoie (E, u) sur le $k[T]$-module de groupe abélien sous-jacent $(E, +)$ et de loi externe $(P, x) \mapsto P \cdot x := P(u)(x)$. Au niveau des flèches il envoie $f\colon (E, u) \to (E, v)$ sur f vue comme application du $k[T]$-module E vers le $k[T]$-module F. C'est bien une application $k[T]$-linéaire : on a en effet pour tout $P \in k[T]$ et tout $x \in E$ les égalités $f(P \cdot x) = f(P(u)(x)) = P(v)(f(x)) = P \cdot f(x)$ où la deuxième égalité est due au fait que $f \circ u = v \circ f$ par définition des flèches de C, d'où on déduit que $f \circ P(u) = P(v) \circ f$ pour tout $P \in k[T]$.

On définit comme suit un foncteur G de D vers C. Au niveau des objets, il associe à un $k[T]$-module E le k-espace vectoriel obtenu en restreignant la loi externe de $k[T] \times E$ vers E à $k \times E$ (on oublie qu'on sait aussi multiplier les éléments de E par les puissances de T), muni de l'endomorphisme $x \mapsto T \cdot x$. Au niveau des flèches, il associe à une application $k[T]$-linéaire $f \colon E \to F$ l'application k-linéaire f du k-espace vectoriel E vers le k-espace vectoriel F ; on a par définition $f(T \cdot x) = T \cdot f(x)$ pour tout $x \in E$, si bien que f appartient à $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}((E, x, \mapsto T \cdot x), (F, y \mapsto (T \cdot y))$.

On vérifie aussitôt que F est un isomorphisme de catégories d'inverse G.

Cette construction est très utile en pratique pour l'étude de la réduction des endomorphismes sur un corps quelconque (non nécessairement algébriquement clos) en algèbre linéaire. Elle ne fait bien sûr pas disparaître les difficultés du problème mais elle permet de les voir sous un autre angle : on remplace un couple formé d'un module sur un anneau très gentil (un corps !) et d'un endomorphisme de ce module par un simple module, mais sur un anneau un peu plus compliqué ($k[T]$) ; l'expérience a montré la fécondité de cette approche.

Exercice 2.1.5. — Nous avons dit plus haut que les propriétés auxquelles on s'intéresse (dans une catégorie donnée) sont le plus souvent invariantes par isomorphisme. Pouvez-vous donner un exemple (dans la catégorie des ensemble, disons) d'une propriété qui *n'est pas* invariante par isomorphisme ?

Exercice 2.1.6. — Construire un isomorphisme entre la catégorie des $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels et celle des groupes abéliens G dont tous les éléments sont de p-torsion.

Exercice 2.1.7. — Contruire un isomorphisme entre la catégorie des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels et celle des groupes abéliens G *uniquement divisibles*, c'est-à-dire tels que pour tout $(g, n) \in G \times (\mathbb{N} \backslash \{0\})$ il existe un unique $h \in G$ tel que $nh = g$.

Année universitaire 2025-2026
Antoine Ducros