Les outils de la géométrie algébrique

cours introductif de master 2 de l'UPMC

Antoine Ducros

Premier semestre 2013-2014

Table des matières

Introduction

Le but de ce cours est, comme son titre l'indique, de présenter un certain nombre d'outils qui sont abondamment utilisés en géométrie algébrique, notamment (mais pas uniquement) quand on travaille dans le cadre développé par Grothendieck ; il sera considéré comme connu des auditeurs du cours *Introduction à la théorie des schémas* qui le suivra. Il se compose de trois parties nettement distinctes.

• La première porte sur les *catégories*. Comme vous le verrez, on ne vous y présente pas véritablement une théorie [1], mais plutôt un *langage* très commode. Il permet, en dégageant un certain nombre de propriétés formelles qui leur sont communes, de donner une description unifiée de situations rencontrées dans des domaines extrêmement divers. On peut *en principe* l'utiliser dans à peu près n'importe quelle branche des mathématiques ; *en pratique*, les géomètres algébristes à la Grothendieck en sont particulièrement friands.

• La seconde est la plus difficile sur le plan technique. Elle est consacrée à *l'algèbre commutative*, c'est-à-dire à l'étude des anneaux commutatifs, et des idéaux *de* et modules *sur* ces derniers. L'algèbre commutative joue en géométrie algébrique un rôle absolument crucial, analogue à celui de l'analyse réelle en géométrie différentielle : elle constitue en quelque sorte la partie *locale* de la théorie.

Nous commençons par présenter des notions et résultats très généraux : localisation, anneaux locaux et lemme de Nakayama, produit tensoriel, algèbres finies et entières, dimension de Krull, lemme de *going-up*. Puis nous en venons à des théorèmes plus spécifiques et nettement plus délicats, qui concernent les algèbres de type fini sur un corps : normalisation de Noether, *Nullstellensatz*, et calcul de la dimension de Krull d'une telle algèbre.

• La dernière présente les définitions et propriétés de base des *faisceaux* sur un espace topologique. Ceux-ci ont été initialement introduits par Leray en topologie algébrique et c'est Serre qui, dans son article fondateur *Faisceaux algébriques cohérents*, a le premier mis en évidence les services qu'ils pouvaient rendre en géométrie algébrique ; Grothendieck les a ensuite placés au cœur de toute sa théorie.

Celle-ci repose ainsi de façon essentielle sur la notion d'*espace localement annelé* [2] (c'est un espace topologique muni d'un faisceau d'un certain type), à

1. On n'y établit pour ainsi dire qu'un seul énoncé, le *lemme de Yoneda*, dont la preuve est essentiellement triviale, même si elle peut être très déroutante à la première lecture.

2. Les schémas sont ainsi définis comme des espaces localement annelés satisfaisant une condition supplémentaire ; signalons par ailleurs que les objets géométriques plus classiques

laquelle est dévolue la fin de notre chapitre faisceautique [3]. Nous concluons par un joli théorème qui décrit *grosso modo* la façon dont varie la dimension d'une famille ≪raisonnable≫ d'espaces vectoriels paramétrée par un espace localement annelé ; outre qu'il est techniquement très utile, il a l'intérêt de constituer, comme l'atteste sa preuve, une sorte de traduction géométrique d'un résultat *a priori* purement algébrique (le lemme de Nakayama) vu durant la seconde partie du cours.

(variétés différentielles, variétés analytiques complexes ou réelles...) sont aussi de manière naturelle des espaces localement annelés.

3. Le lecteur trouvera sans doute avec raison que l'adjectif ≪faisceautique≫ est très laid ; d'un point de vue strictement linguistique, le bon terme aurait probablement été ≪fasciste≫, mais il n'est évidemment plus utilisable.

Chapitre 1

Le langage des catégories

1.1 Définitions et premiers exemples

(1.1.1) Définition. Une *catégorie* C consiste en les données suivantes.

• Une classe d'objets Ob C.

• Pour tout couple (x, y) d'objets de C, un ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x, y)$ dont les éléments sont appelés les *morphismes de source x et de but y*, ou encore les *morphismes de x vers y*.

• Pour tout $x \in \mathrm{Ob}\ \mathsf{C}$, un élément Id_x de $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x, x)$.

• Pour tout triplet (x, y, z) d'objets de C, une application

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(y, z) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x, z), \quad (f, g) \mapsto g \circ f \ .$$

Ces données sont sujettes aux deux axiomes suivants.

◇ *Associativité* : on a $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ pour tout triplet (f, g, h) de morphismes tels que ces compositions aient un sens.

◇ *Neutralité des identités* : pour tout couple (x, y) d'objets de C et tout morphisme f de x vers y, on a $f \circ \mathrm{Id}_x = \mathrm{Id}_y \circ f = f$.

(1.1.2) Commentaires. La définition ci-dessus est un peu vague : nous n'avons pas précisé ce que signifie ≪classe≫ − ce n'est pas une notion usuelle de théorie des ensembles. Cette imprécision est volontaire : dans le cadre de ce cours, il ne nous a pas paru souhaitable d'entrer dans le détail des problèmes de fondements de la théorie des catégories. Mais il est possible de développer celle-ci rigoureusement, de plusieurs façons différentes :

- on peut travailler avec une variante de la théorie des ensembles dans laquelle la notion de classe a un sens (une classe pouvant très bien ne pas être un ensemble) ;

- on peut imposer à Ob C d'être un ensemble.

Comme on le verra, c'est plutôt la première approche que nous suivrons implicitement : dans les exemples que nous donnons ci-dessous, Ob C n'est en général pas un ensemble.

Pour suivre la deuxième, il faudrait modifier la définition de toutes nos catégories en ne gardant que les objets qui appartiennent à un certain ensemble fixé au préalable, et absolument gigantesque : il doit être assez gros pour qu'on puisse y réaliser toutes les constructions du cours. C'est ce que Grothendieck et son école ont fait dans SGA IV (parce que certaines questions abordées dans cet ouvrage requièrent de manière *impérative* de rester dans le cadre ensembliste traditionnel) ; ils qualifient ce type d'ensembles gigantesques d'*univers*.

(1.1.3) Exemples de catégories.

(1.1.3.1) Commençons par des exemples classiques, qui mettent en jeu de ≪vrais≫ objets et de ≪vrais≫morphismes.

• La catégorie Ens : ses objets sont les ensembles, et ses morphismes les applications.
• La catégorie Gp : ses objets sont les groupes, et ses morphismes les morphismes de groupes.
• La catégorie Ab : ses objets sont les groupes *abéliens*, et ses morphismes les morphismes de groupes.
• La catégorie Ann : ses objets sont les anneaux commutatifs unitaires, et ses morphismes les morphismes d'anneaux unitaires.
• La catégorie A-Mod, où A est un anneau commutatif unitaire : ses objets sont les A-modules, et ses morphismes les applications A-linéaires.
• La catégorie Top : ses objets sont les espaces topologiques, et ses morphismes sont les applications continues.

(1.1.3.2) Partant d'une catégorie, on peut en définir d'autres par un certain nombre de procédés standard.

- Commençons par un exemple abstrait. Soit C une catégorie et soit S un objet de C. On note C/S la catégorie définie comme suit.
  - ◇ Ses objets sont les couples (X, f) où X est un objet de C est où $f : X \to S$ est un morphisme.
  - ◇ Un morphisme de (X, f) vers (Y, g) est un morphisme $\varphi : X \to Y$ te que le diagramme
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$
commute.
- La construction duale existe : on peut définir $S\backslash\mathsf{C}$ comme la catégorie dont les objets sont les couples (X, f) où X est un objet de C est où $f : S \to X$ est un morphisme, et dont les flèches sont définies comme le lecteur imagine (ou devrait imaginer).
- Donnons deux exemples explicites de catégories de la forme $S\backslash\mathsf{C}$.
  - ◇ Si $\mathsf{C} = \mathsf{Ann}$ et si $A \in \mathrm{Ob}\ \mathsf{C}$ alors $A\backslash\mathsf{C}$ n'est autre que la catégorie des A-algèbres.
  - ◇ Si $\mathsf{C} = \mathsf{Top}$ et si $S = \{*\}$ la catégorie $S\backslash\mathsf{C}$ est appelée catégorie des *espaces topologiques pointés* et sera notée TopPt. Comme se donner une application continue de $\{*\}$ dans un espace topologique X revient à choisir un point de X, la catégorie TopPt peut se décrire comme suit :
    - ses objets sont les couples (X, x) où X est un espace topologique et où $x \in X$ (d'où son nom) ;

- un morphisme d'espaces topologiques pointés de (X, x) vers (Y, y) est une application continue $\varphi : X \to Y$ telle que $\varphi(x) = y$.

(1.1.3.3) On peut aussi, partant d'une catégorie, conserver ses objets mais ne plus considérer ses morphismes que modulo une certaine relation d'équivalence. Nous n'allons pas détailler le formalisme général, mais simplement illustrer ce procédé par un exemple. Si X et Y sont deux espaces topologiques et si f et g sont deux applications continues de X vers Y, on dit qu'elles sont *homotopes* s'il existe une application h continue de $[0; 1] \times X$ vers Y telle que $h(0, .) = f$ et $h(1, .) = g$; on définit ainsi ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des applications continues de X vers Y.

On construit alors la catégorie $\mathsf{Top/h}$ des *espaces topologiques à homotopie près* comme suit : ses objets sont les espaces topologiques ; et si X et Y sont deux espaces topologiques, $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Top/h}}(X, Y)$ est le quotient de l'ensemble des applications continues de X vers Y par la relation d'homotopie (les morphismes de X vers Y dans $\mathsf{Top/h}$ ne sont donc plus tout à fait de «vrais» morphismes).

On peut combiner cette construction avec celle des espaces topologiques pointés, et obtenir ainsi la catégorie $\mathsf{TopPt/h}$ des *espaces topologiques pointés à homotopie près* : ses objets sont les espaces topologiques pointés ; et si (X, x) et (Y, y) sont deux espaces topologiques pointés, $\mathrm{Hom}_{\mathsf{TopPt}}/\mathsf{h}(X, Y)$ est le quotient de l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathsf{TopPt}}((X, x), (Y, y))$ par la relation d'homotopie, qui est définie dans ce contexte exactement comme ci-dessus avec la condition supplémentaire $h(t, x) = y$ pour tout t.

(1.1.3.4) On peut également construire des catégories par décret, sans chercher à donner une interprétation tangible des objets et morphismes ; donnons quelques exemples.

- Soit G un groupe. On lui associe traditionnellement deux catégories :
  - ◇ la catégorie BG ayant un seul objet $*$ avec $\mathrm{Hom}(*, *) = G$ (la composition est définie comme étant égale à la loi interne de G)
  - ◇ la catégorie $\widetilde{BG}$ telle que $\mathrm{Ob}\, \widetilde{BG} = G$ et telle qu'il y ait un et un seul morphisme entre deux objets donnés de $\widetilde{BG}$.
- Soit k un corps. On définit comme suit la catégorie $\mathbb{V}_k$.
  - ◇ $\mathrm{Ob}\, \mathbb{V}_k = \mathbb{N}$.
  - ◇ $\mathrm{Hom}_{\mathbb{V}_k}(m, n) = M_{n,m}(k)$ pour tout (m, n), la composition de deux morphismes étant définie comme égale au produit des deux matrices correspondantes.

(1.1.3.5) Catégorie opposée. Si C est une catégorie, on définit sa catégorie *opposée* C^{op} comme suit : $\mathrm{Ob}\, \mathsf{C}^{\mathrm{op}} = \mathrm{Ob}\, C$, et $\mathrm{Hom}_{C^{\mathrm{op}}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Y, X)$ pour tout couple (X, Y) d'objets de C.

(1.1.4) Soit C une catégorie et soient X et Y deux objets de C.

(1.1.4.1) Un *endomorphisme* de X est un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, X)$.

(1.1.4.2) On dit qu'un morphisme $f : X \to Y$ est un *isomorphisme* s'il existe un morphisme $g : Y \to X$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_X$. On vérifie immédiatement que si un tel g existe, il est unique ; et on le note alors en général f^{-1}.

Un *automorphisme* de X est un isomorphisme de X vers X.

(1.1.4.3) Il arrivera souvent que l'on emploie le terme *flèche* au lieu de morphisme.

1.2 Foncteurs

(1.2.1) Définition. Soient C et D deux catégories. Un *foncteur* F de C vers D est la donnée :

- pour tout $X \in \mathrm{Ob}\,\mathsf{C}$, d'un objet $F(X)$ de D ;
- pour tout morphisme $f : X \to Y$ de C, d'un morphisme $F(f) : F(X) \to F(Y)$ de D.

On impose de plus les propriétés suivantes :

- $F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$ pour tout $X \in \mathrm{Ob}\,\mathsf{C}$;
- $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ pour tout couple (f, g) de flèches composables de C.

(1.2.2) Commentaires.

(1.2.2.1) Il est immédiat qu'un foncteur transforme un isomorphisme en un isomorphisme.

(1.2.2.2) La notion définie au 1.2.1 est en fait la notion de foncteur *covariant*. Il existe une notion de foncteur *contravariant* ; la définition est la même, à ceci près que si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Y)$ alors $F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(F(Y), F(X))$ (en termes imagés, F renverse le sens des flèches), et que $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$ pour tout couple (f, g) de flèches composables.

(1.2.2.3) La plupart des résultats et notions que nous présenterons ci-dessous seront relatifs aux foncteurs *covariants*, mais ils se transposent *mutatis mutandis* au cadre des foncteurs contravariants (nous laisserons ce soin au lecteur, et utiliserons librement à l'occasion ces transpositions) : il suffit de renverser certaines flèches et/ou l'ordre de certaines compositions.

Cette assertion peut paraître imprécise, mais on peut lui donner un sens rigoureux – et la justifier – en remarquant qu'un foncteur contravariant de C vers D n'est autre, par définition, qu'un foncteur covariant de C^{op} vers D (ou de C vers D^{op}).

(1.2.3) Exemples.

(1.2.3.1) Sur toute catégorie C on dispose d'un foncteur identité $\mathrm{Id}_{\mathsf{C}} : \mathsf{C} \to C$ défini par les égalités $\mathrm{Id}_{\mathsf{C}}(X) = X$ et $\mathrm{Id}_{\mathsf{C}}(f) = f$ pour tout objet X et toute flèche f de C.

Si C, D et E sont trois catégories, si F est un foncteur de C vers D et si G est un foncteur de D vers E on définit de façon évidente le foncteur composé $G \circ F : \mathsf{C} \to E$. La composition des foncteurs est associative, et les foncteurs identité sont neutres pour celle-ci.

Le composé de deux foncteurs de même variance est covariant, celui de deux foncteurs de variances opposées est contravariant.

(1.2.3.2) Les foncteurs d'oublis. Ce sont des foncteurs covariants dont l'application revient, comment leur nom l'indique, à oublier certaines des structures en jeu.

Par exemple, on dispose d'un foncteur d'oubli de Gp vers Ens : il associe à un groupe l'ensemble sous-jacent, et à un morphisme de groupes l'application ensembliste sous-jacente. On dispose de même d'un foncteur d'oubli de Ann vers Ens, de Top vers Ens.... ou encore, un anneau commutatif unitaire A étant donné, de A-Mod vers Ab (on n'oublie alors qu'une partie de la structure).

(1.2.3.3) Les deux foncteurs associés à un objet. Soit C une catégorie et soit X un objet de C. On lui associe naturellement deux foncteurs de C vers Ens :

• Le foncteur covariant h_X, qui envoie un objet Y sur $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X,Y)$ et une flèche $f : Y \to Y'$ sur l'application $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X,Y'), g \mapsto f \circ g$.

• Le foncteur contravariant h^X, qui envoie un objet Y sur $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Y,X)$ et une flèche $f : Y \to Y'$ sur l'application $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Y',X) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Y,X), g \mapsto g \circ f$.

(1.2.3.4) Soit A un anneau commutatif unitaire. En appliquant la construction du 1.2.3.3 ci-dessus à l'objet A de A-Mod, on obtient un foncteur contravariant $h^A : A\text{-}\mathsf{Mod} \to \mathsf{Ens}$ qui envoie M sur $\mathrm{Hom}_{A\text{-}\mathsf{Mod}}(M,A)$.

En fait, $\mathrm{Hom}_{A\text{-}\mathsf{Mod}}(M,A)$ n'est pas un simple ensemble : il possède une structure naturelle de A-module, et la formule $M \mapsto \mathrm{Hom}_{A\text{-}\mathsf{Mod}}(M,A)$ définit un foncteur contravariant de A-Mod dans elle-même, souvent noté $M \mapsto M^\vee$ (en termes pédants, le foncteur h^A ci-dessus est la composée de $M \mapsto M^\vee$ avec le foncteur oubli de A-Mod vers Ens).

(1.2.3.5) Le groupe fondamental. On définit en topologie algébrique un foncteur $(X,x) \mapsto \pi_1(X,x)$, qui va de la catégorie TopPt vers celle des groupes (on appelle $\pi_1(X,x)$ le *groupe fondamental* de (X,x)). Par construction, deux applications continues homotopes entre espaces topologiques pointés induisent le même morphisme entre les groupes fondamentaux ; autrement dit, on peut voir $(X,x) \mapsto \pi_1(X,x)$ comme un foncteur de $\mathsf{TopPt/h}$ vers Ens.

(1.2.3.6) Nous allons décrire deux foncteurs mettant en jeu les catégories un peu artificielles du 1.1.3.4.

• Soit G un groupe. On définit comme suit un foncteur covariant de $\widetilde{BG}$ vers BG : il envoie n'importe quel élément g de G sur $*$, et l'unique flèche entre deux éléments g et h de g sur gh^{-1}.

• On définit comme suit un foncteur covariant de $\mathbb{V}_k$ dans la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur k : il envoie n sur k^n, et il envoie une matrice M sur l'application linéaire de matrice M dans les bases canoniques.

(1.2.4) Définition. Soient C et D deux catégories, et soit $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ un foncteur covariant. On dit que F est *fidèle* (resp. *plein*, resp. *pleinement fidèle*) si pour tout couple (X,Y) d'objets de C, l'application $f \mapsto F(f)$ de $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X,Y)$ vers $\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(F(X),F(Y))$ est injective (resp. surjective, resp. bijective).

(1.2.5) Définition. Soit C une catégorie. Une *sous-catégorie* de C est une catégorie D telle que $\mathrm{Ob}\ D \subset \mathrm{Ob}\ \mathsf{C}$ et telle que $\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(X,Y) \subset \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X,Y)$ pour tout couple (X,Y) d'objets de D.

Elle est dit *pleine* si $\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X,Y)$ pour tout couple (X,Y) d'objets de D.

(1.2.6) Si D est une sous-catégorie d'une catégorie C, on dispose d'un foncteur covariant naturel d'inclusion de C dans D. Il est fidèle, et pleinement fidèle si D est une sous-catégorie pleine de C.

1.3 Morphismes de foncteurs et équivalences de catégories

(1.3.1) Définition. Soient C et D deux catégories et soient F et $G : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ deux foncteurs covariants. Un *morphisme* (ou *transformation naturelle*) φ de F vers G est la donnée, pour tout objet X de C, d'un morphisme

$$\varphi(X) : F(X) \to G(X)$$

de la catégorie D, de sorte que pour toute flèche $f : X \to Y$ de C, le diagramme

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\varphi(X)"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\varphi(Y)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

commute.

(1.3.1.1) On résume parfois ces conditions en disant simplement qu'un morphisme de F vers G est la donnée pour tout X d'un morphisme de $F(X)$ dans $G(X)$ qui est *fonctoriel en X*.

(1.3.1.2) L'identité Id_F du foncteur F est le morphisme de F dans lui-même induit par la collections des $\mathrm{Id}_{F(X)}$ où X parcourt $\mathrm{Ob}\ \mathsf{C}$. Les morphismes de foncteurs se composent de façon évidente. Attention toutefois : on ne peut pas dire que les foncteurs de C vers D constituent eux-mêmes une catégorie, car rien n'indique *a priori* que les morphismes entre deux tels foncteurs (qui mettent en jeu une collection de données paramétrée par $\mathrm{Ob}\ \mathsf{C}$) forment un ensemble.

(1.3.2) Exemples.

(1.3.2.1) Soit A un anneau commutatif unitaire. Pour tout A-module M, on dispose d'une application naturelle $\iota(M) : M \to M^{\vee\vee}$ définie par la formule

$$m \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(m)).$$

La collection des $\iota(M)$ pour M variable définit un morphisme ι du foncteur $\mathrm{Id}_{A\text{-}\mathsf{Mod}}$ vers le foncteur $M \mapsto M^{\vee\vee}$ de A-Mod dans elle-même (notons que ce dernier foncteur est bien covariant, en tant que composée de deux foncteurs contravariants).

(1.3.2.2) Soit C une catégorie, soient X et Y deux objets de C et soit f un morphisme de X vers Y. Pour tout $Z \in \mathrm{Ob}\ \mathsf{C}$, on dispose de deux applications naturelles fonctorielles en Z

$$\mathrm{Hom}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}(X, Z), g \mapsto g \circ f \ \text{ et } \mathrm{Hom}(Z, X) \to \mathrm{Hom}(Z, Y), g \mapsto f \circ g,$$

qui constituent deux morphismes de foncteurs $f^* : h_Y \to h_X$ et $f_* : h^X \to h^Y$.

On vérifie aisément qu'on a les égalités $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ et $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ à chaque fois qu'elles ont un sens. On a aussi $(\mathrm{Id}_X)^* = \mathrm{Id}_{h_X}$ et $(\mathrm{Id}_X)_* = \mathrm{Id}_{h^X}$.

(1.3.3) Définition. Soient C et D deux catégories et soient F et G deux foncteurs de C vers D. On dit qu'un morphisme $\varphi : F \to G$ est un *isomorphisme* s'il existe $\psi : G \to F$ tel que $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_F$ et $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}\, G$. Un tel ψ est dans ce cas unique, et est noté φ^{-1}.

Le morphisme φ est un isomorphisme si et seulement si $\varphi(X)$ est un isomorphisme pour tout $X \in \mathrm{Ob}\ \mathsf{C}$, et l'on a alors $\varphi^{-1}(X) = \varphi(X)^{-1}$ pour tout tel X.

(1.3.4) Exemple : la bidualité. Soit A un anneau commutatif unitaire, et soit C la sous-catégorie pleine de A-Mod constituée des modules libres de rang fini (*i.e.* qui possèdent une base finie, ou encore qui sont isomorphes à A^n pour un certain n). Si $M \in \mathrm{Ob}\ \mathsf{C}$ alors $M^{\vee\vee} \in \mathrm{Ob}\ C$, et le morphisme ι du 1.3.2.1 ci-dessus induit un *isomorphisme* entre le foncteur Id_{C} et le foncteur $M \mapsto M^{\vee\vee}$ de C dans C.

Cette assertion est simplement l'énoncé rigoureux traduisant le fait q'un module libre de rang fini est *canoniquement* isomorphe à son bidual.

(1.3.5) Définitions. Soient C et D deux catégories, et soit F un foncteur de C vers D. Un *quasi-inverse* de F est un foncteur $G : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ tel que $F \circ G \simeq \mathrm{Id}_{\mathsf{D}}$ et $G \circ F \simeq \mathrm{Id}_{\mathsf{C}}$.

On dit que F est une *équivalence de catégories* s'il admet un quasi-inverse.

(1.3.5.1) Il résulte immédiatement des définitions que si G est un quasi-inverse de F alors F est un quasi-inverse de G, et que la composée de deux équivalences de catégories est une équivalence de catégories.

Si G et H sont deux quasi-inverses de F ils sont isomorphes *via* la composition d'isomorphismes

$$G = G \circ \mathrm{Id}_{\mathsf{D}} \simeq G \circ (F \circ H) = (G \circ F) \circ H \simeq \mathrm{Id}_{\mathsf{C}} \circ H = H.$$

(1.3.5.2) Exercice. Montrez qu'un foncteur $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ est une équivalence de catégories si et seulement si F est pleinement fidèle et *essentiellement surjectif*, ce qui veut dire que pour tout objet Y de D il existe un objet X de C tel que $F(X)$ soit *isomorphe* à Y.

(1.3.6) Exemples d'équivalences de catégories.

(1.3.6.1) Les isomorphismes de catégories. Un foncteur $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ est appelé un *isomorphisme* de catégories s'il possède un inverse, c'est-à-dire un foncteur $G : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ tel que $F \circ G$ et $G \circ F$ soient respectivement *égaux* (et pas seulement isomorphes) à Id_{D} et Id_{C}.Un tel G est unique s'il existe.

Les isomorphismes de catégories sont des cas particuliers d'équivalences de catégories que l'on rencontre très rarement en pratique. Citons deux exemples ; le premier est trivial, le second est nettement plus intéressant.

• Si C est une catégorie alors Id_{C} est un isomorphisme de catégories.

• Soit A un anneau commutatif unitaire. Soit C la catégorie des $A[T]$-modules, et soit D la catégorie dont les objets sont les couples (M, u) où M est un A-module et u un endomorphisme de M, et où un morphisme de (M, u) vers (N, v) est une application A-linéaire $f : M \to N$ telle que $v \circ f = f \circ u$. Soit F le foncteur qui envoie un $A[T]$-module M sur le A-module sous-jacent à M muni de $m \mapsto Tm$; soit G le foncteur qui envoie un couple (M, u) sur le $A[T]$-module de groupe additif sous-jacent $(M, +)$ et de loi externe $(P, m) \mapsto P(u)(m)$. Le foncteur F induit alors un isomorphisme entre les catégories C et D, et G est son inverse.

(1.3.6.2) Soit k un corps On a défini au 1.2.3.6 un foncteur covariant de la catégorie $\mathbb{V}_k$ (1.1.3.4) vers celle des espaces vectoriels de dimension finie sur k. *Ce foncteur est une équivalence de catégories* – cette assertion est essentiellement une reformulation conceptuelle (ou pédante) de l'existence de bases.

En effet, on peut construire son quasi-inverse comme suit. On commence par choisir [1] pour tout k-espace vectoriel E de dimension finie, une base $b(E)$ de E. On envoie alors un k-espace vectoriel E de dimension finie sur $\dim E$, et une application linéaire $f : E \to F$ entre deux tels espaces sur $\mathrm{Mat}_{b(E),b(F)} f$.

(1.3.6.3) La théorie des revêtements Nous allons maintenant indiquer (sans la moindre démonstration) comment la théorie qui relie lacets tracés sur un espace topologique et revêtements de ce dernier peut être reformulée en termes d'équivalence de catégories.

On se donne donc un espace topologique pointé (X, x). La catégorie des $\pi_1(X, x)$-ensembles est celle dont les objets sont les ensembles munis d'une action à droite de $\pi_1(X, x)$, et les flèches les applications $\pi_1(X, x)$-équivariantes.

On suppose que X est connexe, et qu'il est par ailleurs semi-localement simplement connexe [2].

Un *revêtement* de X est un espace topologique Y muni d'une application continue $f : Y \to X$ tel que tout point de X possède un voisinage ouvert U pour lequel il existe un ensemble discret E_U et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(U) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & E_U \times U \arrow[dl] \\ U & \end{tikzcd} .$$

Un morphisme entre deux revêtements $(Y \to X)$ et $(Z \to X)$ est une application continue $Y \to Z$ telle que

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr] \arrow[dr] & & Z \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

commute.

Si Y est un revêtement de X, sa fibre Y_x en x hérite d'une action naturelle de $\pi_1(X, x)$ à droite (un lacet ℓ et un point y de Y_x étant donnés, on relève ℓ en partant de y ; à l'arrivée, on ne retombe pas nécessairement sur ses pieds : on atteint un antécédent z de x qui en général diffère de y, et l'on pose $y.\ell = z$).

Le lien entre lacets et revêtements peut alors s'exprimer ainsi : le foncteur $Y \mapsto Y_x$ établit une équivalence entre la catégorie des revêtements de X et celle des $\pi_1(X, x)$-ensembles.

1. Cette opération requiert une forme redoutablement puissante d'axiome du choix, puisque les k-espaces vectoriels de dimension finie ne constituent pas un ensemble.
2. Bourbaki propose de remplacer cette expression peu engageante par *délaçable*.

Description d'un quasi-inverse. On choisit un revêtement universel $\tilde{X}$ de X (c'est-à-dire un revêtement de X connexe, non vide et simplement connexe). Le foncteur qui envoie un $\pi_1(X,x)$-ensemble E sur le produit contracté

$$\tilde{X} \times^{\pi_1(X,x)} E := \tilde{X} \times E/((y.\ell, e) \sim (y, e.\ell))$$

est alors un quasi-inverse de $Y \mapsto Y_x$.

(1.3.6.4) La transformation de Gelfand. Soit Comp la sous-catégorie pleine de Top formée des espaces topologiques compacts. Soit X un espace topologique compact. L'algèbre $\mathscr{C}^0(X,\mathbb{C})$ est une $\mathbb{C}$-algèbre commutative de Banach (pour la norme $f \mapsto \sup_{x\in X} |f(x)|$) ; elle possède une involution $f \mapsto \overline{f}$ qui prolonge la conjugaison complexe, et l'on a par construction $||f|| = \sqrt{||f\overline{f}||}$ pour tout f.

Soit C la catégorie définie comme suit.

• Un objet de C est une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach commutative A munie d'une involution $a \mapsto \overline{a}$ prolongeant la conjugaison complexe et telle que $||a|| = \sqrt{||a\overline{a}||}$ pour tout $a \in A$.

• Si A et B sont deux objets de C un morphisme de A dans B est un morphisme d'algèbres $f : A \to B$ tel que $||f(a)|| \leqslant ||a||$ et $f(\overline{a}) = \overline{f(a)}$ pour tout $a \in A$.

Il est immédiat que $\mathscr{C} : X \mapsto \mathscr{C}^0(X,\mathbb{C})$ définit un foncteur contravariant de Comp vers C.

On démontre en analyse fonctionnelle (théorie de Gelfand) que le foncteur $\mathscr{C}$ est anti-équivalence de catégories («anti» signifiant simplement qu'il est contravariant).

Décrivons partiellement un quasi-inverse Sp (le «spectre») de $\mathscr{C}$. Si $A \in C$, l'*ensemble* sous-jacent à l'espace topologique compact Sp A est l'ensemble des idéaux maximaux de A (nous ne préciserons pas ici la construction de la topologie de Sp A).

Remarque. Un point d'un espace topologique X définit bien un idéal maximal de l'algèbre $\mathscr{C}^0(X,\mathbb{C})$, à savoir l'ensemble des fonctions qui s'y annulent ; vous pouvez à titre d'exercice vérifier que si X est compact, on obtient ainsi une *bijection* entre X et l'ensemble des idéaux maximaux de $\mathscr{C}^0(X,\mathbb{C})$.

1.4 Foncteurs représentables et lemme de Yoneda

(1.4.1) Définition. Soit C une catégorie. Un foncteur covariant de $F : \mathsf{C} \to \mathsf{Ens}$ est dit *représentable* s'il existe $X \in \mathrm{Ob}\,\mathsf{C}$ et un isomorphisme $h_X \simeq F$.

(1.4.2) Exemples. Dans ce qui suit, les anneaux et algèbres sont commutatifs et unitaires, et les morphismes d'anneaux ou algèbres sont unitaires.

(1.4.2.1) Soit A un anneau et soit P une partie de A. Le foncteur F qui envoie un anneau B sur l'ensemble des morphismes de A dans B s'annulant sur les éléments de P est représentable : en effet, si π désigne l'application quotient $A \to A/\langle P \rangle$, alors $f \mapsto f \circ \pi$ établit une bijection, fonctorielle en B, entre $\mathrm{Hom}(A/\langle P \rangle, B)$ et $F(B)$.

(1.4.2.2) Soit A un anneau et soit n un entier. Le foncteur qui envoie une A-algèbre B sur B^n est représentable. En effet, l'application $f \mapsto (f(T_1), \ldots, f(T_n))$ établit une bijection fonctorielle en B entre $\mathrm{Hom}(A[T_1, \ldots, T_n], B)$ et B^n.

(1.4.2.3) Soit A un anneau, soit n un entier et soit (P_i) une famille de polynômes appartenant à $A[T_1, \ldots, T_n]$. Le foncteur G qui envoie une A-algèbre B sur

$$\{(b_1, \ldots, b_n) \in B^n, P_i(b_1, \ldots, b_n) = 0 \; \forall i\}$$

est représentable. En effet, l'application $f \mapsto (f(\overline{T_1}), \ldots, f(\overline{T_n}))$ établit une bijection fonctorielle en B entre $\mathrm{Hom}(A[T_1, \ldots, T_n]/(P_i)_i, B)$ et $G(B)$.

(1.4.2.4) Le foncteur $(X, x) \mapsto \pi_1(X, x)$ de $\mathsf{TopPt/h}$ vers Ens est représentable : il s'identifie naturellement, par sa définition même, à $\mathrm{Hom}((S_1, o), .)$, où S_1 est le cercle et o un point quelconque choisi sur S_1.

(1.4.3) Montrer qu'un foncteur F est représentable revient à exhiber un objet X *et un isomorphisme* $h_X \simeq F$. Ce dernier point peut sembler délicat, étant donnée la définition d'un morphisme de foncteurs comme une gigantesque collection de morphismes (sujette à des conditions de compatibilité). On va voir un peu plus bas (1.4.6) qu'il n'en est rien, et qu'un tel isomorphisme $h_X \simeq F$ admet toujours une description concrète simple et maniable.

(1.4.4) Soit C une catégorie et soit $X \in \mathrm{Ob}\,\mathsf{C}$. Soit F un foncteur covariant de C dans Ens, et soit $\xi \in F(X)$. On vérifie immédiatement que la collection d'applications

$$h_X(Y) = \mathrm{Hom}(X, Y) \to F(Y), \; f \mapsto F(f)(\xi)$$

définit, lorsque Y parcourt $\mathrm{Ob}\,\mathsf{C}$, un morphisme de h_X dans F ; nous le noterons φ_ξ.

(1.4.5) Lemme de Yoneda. *Soit ψ un morphisme de h_X dans F. Il existe un unique $\xi \in F(X)$ tel que $\psi = \varphi_\xi$, à savoir $\psi(X)(\mathrm{Id}_X)$.*

Démonstration. Commençons par remarquer que l'énoncé a bien un sens : on a $\mathrm{Id}_X \in \mathrm{Hom}(X, X) = h_X(X)$, d'où il résulte que $\psi(X)(\mathrm{Id}_X)$ est un élément bien défini de $F(X)$.

Preuve de l'unicité. Soit ξ tel que $\psi = \varphi_\xi$. On a alors

$$\psi(X)(\mathrm{Id}_X) = \varphi_\xi(X)(\mathrm{Id}_X) = F(\mathrm{Id}_X)(\xi) = \mathrm{Id}_{F(X)}(\xi) = \xi,$$

d'où l'assertion requise.

Preuve de l'existence. On pose $\xi = \psi(X)(\mathrm{Id}_X)$, et l'on va démontrer que $\psi = \varphi_\xi$. Soit $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathsf{C}$ et soit $f : X \to Y$ un élément de $h_X(Y)$.

On a par définition d'un morphisme de foncteurs un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} h_X(X) \arrow[r, "h_X(f)"] \arrow[d, "\psi(X)"'] & h_X(Y) \arrow[d, "\psi(Y)"] \\ F(X) \arrow[r, "F(f)"] & F(Y) \end{tikzcd}$$

Comme $h_X(f)$ est la composition avec f, on a $h_X(f)(\mathrm{Id}_X) = f$. L'image de Id_X par $\psi(X)$ est par ailleurs égale à ξ par définition de ce dernier. Par commutativité du diagramme il vient alors $\psi(Y)(f) = F(f)(\xi) = \varphi_\xi(Y)(f)$, ce qu'il fallait démontrer. □

(1.4.5.1) Remarque. En particulier, les morphismes de h_X vers F constituent un ensemble (en bijection naturelle avec $F(X)$), ce qui n'était pas évident *a priori.*

(1.4.5.2) Plaçons-nous dans le cas particulier où $F = h_Y$ pour un certain $Y \in \mathrm{Ob}\ \mathsf{C}$. L'élément ξ du lemme appartient alors à $h_Y(X) = \mathrm{Hom}(Y, X)$, et le morphisme $\psi = \varphi_\xi$ est donné par la formule $f \mapsto h_Y(f)(\xi) = f \circ \xi$. En conséquence, ψ est le morphisme $\xi^* : h_X \to h_Y$ induit par ξ (*cf.* 1.3.2.2).

Il s'ensuit que $\xi \mapsto \xi^*$ *établit une bijection entre* $\mathrm{Hom}(Y, X)$ *et l'ensemble des morphismes de foncteurs de* h_X *vers* h_Y.

(1.4.5.3) Soit $\xi \in \mathrm{Hom}(Y, X)$. C'est un isomorphisme si et seulement si ξ^* est un isomorphisme. En effet, si ξ est un isomorphisme d'inverse ζ, on a

$$\zeta^* \circ \xi^* = (\xi \circ \zeta)^* = \mathrm{Id}_Y^* = \mathrm{Id}_{h_Y},$$

et de même $\xi^* \circ \zeta^* = \mathrm{Id}_{h_X}$.

Réciproquement, supposons que ξ^* soit un isomorphisme. Sa réciproque est alors d'après 1.4.5.2 de la forme ζ^* pour un certain $\zeta \in \mathrm{Hom}(X, Y)$. On a

$$(\xi \circ \zeta)^* = \zeta^* \circ \xi^* = \mathrm{Id}_{h_X} = \mathrm{Id}_X^*$$

et donc $\xi \circ \zeta = \mathrm{Id}_X$ d'après *loc. cit.* De même, $\zeta \circ \xi = \mathrm{Id}_Y$.

(1.4.6) Soit C une catégorie et soit F un foncteur covariant de C dans Ens. Le foncteur F est représentable si et seulement si il existe un objet X de C et un isomorphisme $h_X \simeq F$. En vertu du lemme de Yoneda, cela revient à demander qu'il existe un objet X de C et un élément ξ de $F(X)$ tel que φ_ξ soit un isomorphisme, c'est-à-dire tel que $f \mapsto F(f)(\xi)$ établisse pour tout $Y \in \mathrm{Ob}\ \mathsf{C}$ une bijection $\mathrm{Hom}(X, Y) \simeq F(Y)$. Nous dirons qu'un tel couple (X, ξ) est un *représentant* de F.

(1.4.7) Canonicité du représentant. Soient F et G deux foncteurs covariants d'une catégorie C dans Ens. On les suppose représentables ; soit (X, ξ) un représentant de F et soit (Y, η) un représentant de G.

(1.4.7.1) Soit ρ un morphisme de foncteurs de F dans G. Il existe un unique morphisme $\psi : h_X \to h_Y$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} h_X \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi_\xi"', "\simeq"] & h_Y \arrow[d, "\varphi_\eta"', "\simeq"] \\ F \arrow[r, "\rho"] & G \end{tikzcd},$$

à savoir $\varphi_\eta^{-1} \circ \rho \circ \varphi_\xi$; comme φ_η^{-1} et φ_ξ sont des isomorphismes, ψ est un isomorphisme si et seulement si ρ est un isomorphisme.

D'après 1.4.5.2, on peut reformuler ceci en disant qu'il existe un unique λ appartenant à $\mathrm{Hom}(Y, X)$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} h_X \arrow[r, "\lambda^*"] \arrow[d, "\varphi_\xi"', "\simeq"] & h_Y \arrow[d, "\varphi_\eta"', "\simeq"] \\ F \arrow[r, "\rho"] & G \end{tikzcd}$$

commute. En vertu de 1.4.5.3, λ est un isomorphisme si et seulement si λ^* est un isomorphisme, c'est-à-dire par ce qui précède si et seulement si ρ est un isomorphisme.

En appliquant la commutativité du diagramme à l'élément Id_X de $\mathrm{Hom}(X, X) = h_X(X)$, et en remarquant que $\lambda^*(X)(\mathrm{Id}_X) = \lambda$, on obtient l'égalité

$$\varphi_\eta(X)(\lambda) = \rho(X)\left(\varphi_\xi(X)(\mathrm{Id}_X)\right),$$

qui *caractérise* λ puisque $\varphi_\eta(X)$ est une bijection ; par définition de φ_η et φ_ξ, elle se récrit

$$G(\lambda)(\eta) = \rho(X)(\xi)$$

(notons que c'est une égalité entre éléments de $G(X)$).

(1.4.7.2) En appliquant ce qui précède lorsque $G = F$ et $\rho = \mathrm{Id}_F$, on obtient l'assertion suivante : *il existe un unique morphisme λ de Y vers X tel que $F(\lambda)(\eta) = \xi$; ce morphisme est un isomorphisme, et peut également être caractérisé par la commutativité du diagramme*

$$\begin{tikzcd} h_X \arrow[rr, "\lambda^*"] \arrow[dr, "\simeq", "\varphi_\xi"'] & & h_Y \arrow[dl, "\simeq"', "\varphi_\eta"] \\ & F & \end{tikzcd} .$$

Il existe en particulier un unique isomorphisme $\lambda : Y \simeq X$ tel que $F(\lambda)(\eta) = \xi$; les couples (X, ξ) et (Y, η) sont donc en un sens *canoniquement isomorphes*. Pour cette raison, nous nous permettrons souvent de parler par abus *du* représentant (X, ξ) d'un foncteur représentable F ; et nous dirons que ξ est *l'objet universel relatif à F*.

Il arrivera qu'on omette de mentionner ξ et qu'on se contente de dire que X est le représentant de F ; mais attention, c'est un peu imprudent, car pour un même X, plusieurs ξ peuvent convenir.

(1.4.7.3) On peut alors reformuler le lemme de Yoneda, ou plus précisément la déclinaison qui en est faite en 1.4.7.1 en disant que *se donner un morphisme entre foncteurs représentables, c'est se donner un morphisme entre leurs représentants.*

(1.4.8) Nous allons revisiter les exemples de 1.4.2 en donnant à chaque fois le représentant du foncteur considéré, et en insistant sur son objet universel.

(1.4.8.1) Soit A un anneau et soit P une partie de A. Le foncteur qui envoie un anneau B sur l'ensemble des morphismes de A dans B s'annulant sur les éléments de P est représentable. Si π désigne l'application quotient $A \to A/\langle P\rangle$, alors $(A/(P), \pi)$ est son représentant.

Le morphisme π est le ≪morphisme universel s'annulant sur P≫.

(1.4.8.2) Soit A un anneau et soit n un entier. Le foncteur qui envoie une A-algèbre B sur B^n est représentable. Le couple $(A[T_1, \ldots, T_n], (T_1, \ldots, T_n))$ est son représentant.

Le n-uplet $(T_1, \ldots, T_n)$ est le ≪n-uplet universel d'éléments d'une A-algèbre≫.

(1.4.8.3) Soit A un anneau, soit n un entier et soit (P_i) une famille de polynômes appartenant à $A[T_1, \ldots, T_n]$. Le foncteur qui envoie une A-algèbre B sur

$$\{(b_1, \ldots, b_n) \in B^n, P_i(b_1, \ldots, b_n) = 0 \ \forall i\}$$

est représentable. Le couple $(A[T_1, \ldots, T_n]/(P_i)_i, (\overline{T_1}, \ldots, \overline{T_n}))$ est son représentant.

Le n-uplet $(\overline{T_1}, \ldots, \overline{T_n})$ est le ≪n-uplet universel d'éléments d'une A-algèbre en lequel les P_i s'annulent≫ .

(1.4.8.4) Le foncteur $(X, x) \mapsto \pi_1(X, x)$ de $\mathsf{TopPt/h}$ vers Ens est représentable ; le couple $((S_1, o), \mathrm{Id}_{(S_1,o)})$ est son représentant.

L'application identité de (S_1, o) est le ≪lacet universel à homotopie près≫.

(1.4.9) Exemple d'application du lemme de Yoneda. Soient m et n deux entiers. Soit A un anneau commutatif unitaire, et soient F et G les foncteurs $B \mapsto B^n$ et $B \mapsto B^m$ sur la catégorie des A-algèbres. Ils sont représentables, de représentants respectifs $(A[T_1, \ldots, T_n], (T_1, \ldots, T_n))$ et $(A[S_1, \ldots, S_m], (S_1, \ldots, S_m))$. Soit φ un morphisme de F vers G. Par le lemme de Yoneda, il provient d'un unique morphisme de $A[S_1, \ldots, S_m]$ vers $A[T_1, \ldots, T_n]$. Un tel morphisme est lui-même donné par m polynômes $P_1, \ldots, P_m$ appartenant à $A[T_1, \ldots, T_n]$ (les images des S_i). On vérifie immédiatement que φ est alors décrit par les formules

$$(b_1, \ldots, b_n) \mapsto (P_1(b_1, \ldots, b_n), \ldots, P_m(b_1, \ldots, b_n)).$$

Ce résultat est un sens assez intuitif : la seule façon d'associer de façon naturelle à tout n-uplet d'éléments d'une A-algèbre B un m-uplet d'éléments de B consiste à utiliser une formule polynomiale à coefficients dans A ; on pouvait s'y attendre, puisque les seules opérations que l'on sache effectuer dans une A-algèbre générale sont l'addition, la multiplication interne, et la multiplication par les éléments de A.

(1.4.10) Objet initial, objet final. Soit C une catégorie. Comme il existe une et une seule application d'un singleton dans un autre, la flèche $C \to \mathsf{Ens}$ qui envoie un objet X sur un singleton $\{*\}$ peut être vue d'une unique manière comme un foncteur covariant F, et d'une unique manière comme un foncteur contravariant G.

Si F est représentable, on appelle *objet initial* de C tout représentant de F. Un objet X de C est initial si et seulement si $\mathrm{Hom}(X, Y)$ est un singleton pour tout objet Y de C.

Si G est représentable, on appelle *objet final* de C tout représentant de F. Un objet X de C est final si et seulement si $\mathrm{Hom}(Y, X)$ est un singleton pour tout objet Y de C.

(1.4.11) Exemples.

(1.4.11.1) Dans la catégorie des ensembles, $\varnothing$ est initial, et $\{*\}$ est final.

(1.4.11.2) Dans la catégorie des groupes, $\{e\}$ est initial et final.

(1.4.11.3) Dans la catégorie des modules sur un anneau commutatif unitaire A donné, $\{0\}$ est initial et final.

(1.4.11.4) Dans la catégorie des anneaux, $\mathbb{Z}$ est initial, et $\{0\}$ est final.

(1.4.11.5) La catégorie des corps n'a ni objet initial, ni objet final. Celle des corps de caractéristique nulle a $\mathbb{Q}$ comme objet initial, et n'a pas d'objet final ; celle des corps de caractéristique $p > 0$ a $\mathbb{F}_p$ comme objet initial, et n'a pas d'objet final.

1.5 Produits cartésiens et produits fibrés

(1.5.1) Le produit cartésien. Le produit cartésien ensembliste $X \times Y$ de deux ensembles X et Y est par définition l'ensemble des couples (x, y) où $x \in X$ et $y \in Y$. Soit C une catégorie et soient X et Y deux objets de C. Si le foncteur contravariant

$$h^X \times h^Y := T \mapsto h^X(T) \times h^Y(T) = \mathrm{Hom}(T, X) \times \mathrm{Hom}(T, Y)$$

est représentable, son représentant est en général noté $X \times Y$ et est appelé le *produit cartésien* de X et Y.

On prendra garde que ce représentant est en réalité constitué de $X \times Y$ *et d'un couple* (p, q) *de morphismes où* p *va de* $X \times Y$ *vers* X *et* q *de* $X \times Y$ *vers* Y. Ces morphismes n'ont pas de notation standard ; on les appelle les première et seconde projections.

La définition du couple $(X \times Y), (p, q))$ comme représentant de $h^X \times h^Y$ signifie que pour tout objet T de C, tout morphisme $\lambda : T \to X$ et tout morphisme $\mu : T \to Y$, il existe un et un seul morphisme $\pi : T \to X \times Y$ tel que $\lambda = p \circ \pi$ et $\mu = q \circ \pi$. Ou encore que pour tout objet T de C, l'application $\pi \mapsto (p \circ \pi, q \circ \pi)$ établit une bijection entre $\mathrm{Hom}(T, X \times Y)$ et $\mathrm{Hom}(T, X) \times \mathrm{Hom}(T, Y)$. En termes plus imagés : se donner un morphisme d'un objet T vers $X \times Y$, c'est se donner un morphisme de T vers X et un morphisme de T vers Y.

(1.5.2) Quelques exemples de catégories dans lesquelles les produits cartésiens existent.

(1.5.2.1) Dans la catégorie des ensembles, le produit cartésien de deux ensembles est leur produit cartésien ensembliste.

(1.5.2.2) Dans la catégorie des espaces topologiques, le produit cartésien de deux espaces topologiques est leur produit cartésien ensembliste *muni de la topologie produit.*

(1.5.2.3) Dans la catégorie des groupes (resp. des anneaux, resp. des modules sur un anneau commutatif unitaire), le produit cartésien de deux objets est leur produit cartésien ensembliste, la ou les opérations étant définies coordonnée par coordonnée.

(1.5.3) Le produit fibré.

(1.5.3.1) Le cas ensembliste. Soient X, Y et S trois ensembles, et soit $f : X \to S$ et $g : Y \to S$ deux applications. Le *produit fibré ensembliste* $X \times_{f,g} Y$ (ou plus simplement $X \times_S Y$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la définition des flèches f et g) est par définition l'ensemble des couples (x, y) où $x \in X$, où $y \in Y$ et où $f(x) = g(y)$. Il est muni d'une application naturelle h de but S, qui envoie (x, y) sur $f(x) = g(y)$, et l'on a pour tout s appartenant à S l'égalité $h^{-1}(s) = f^{-1}(s) \times g^{-1}(s)$: ainsi, $X \times_S Y$ est un «produit cartésien fibre à fibre», d'où l'expression produit fibré.

(1.5.3.2) Le cas général. Soit C est une catégorie, soient X, Y et S trois objets de C, et soient $f : X \to S$ et $g : Y \to S$ deux morphismes. Si le foncteur contravariant

$$h^X \times_{h^S} h^Y := T \mapsto \mathrm{Hom}(T, X) \times_{\mathrm{Hom}(T,S)} \mathrm{Hom}(T, Y)$$

est représentable, on note en général $X \times_S Y$ ou $X \times_{f,g} Y$ son représentant, que l'on appelle *produit fibré de X et Y au-dessus de S (ou le long de (f, g))*. On prendra garde que ce représentant est en réalité constitué de $X \times_S Y$ *et d'un couple* (p, q) *de morphismes où p va de $X \times_S Y$ vers X et q de $X \times_S Y$ vers Y, et où $f \circ p = g \circ q$*. Ces morphismes n'ont pas de notation standard ; on les appelle les première et seconde projections.

La définition du couple $((X \times_S Y), (p, q))$ comme représentant de $h^X \times_{h^S} h^Y$ signifie la chose suivante : pour tout objet T de C, tout morphisme $\lambda : T \to X$ et tout morphisme $\mu : T \to Y$ tel que $f \circ \lambda = g \circ \mu$, il existe un et un seul morphisme $\pi : T \to X \times_S Y$ tel que $\lambda = p \circ \pi$ et $\mu = q \circ \pi$. Ou encore que pour tout objet T de C, l'application $\pi \mapsto (p \circ \pi, q \circ \pi)$ établit une bijection entre $\mathrm{Hom}(T, X \times_S Y)$ et $\mathrm{Hom}(T, X) \times_{\mathrm{Hom}(T,S)} \mathrm{Hom}(T, Y)$. En termes plus imagés : se donner un morphisme d'un objet T vers $X \times_S Y$, c'est se donner un morphisme de T vers X et un morphisme de T vers Y dont les composés respectifs avec f et g coïncident.

(1.5.3.3) On peut schématiser ce qui précède par le diagramme commutatif suivant, dans lequel les flèches en dur sont données, et où la flèche en pointillés est celle fournie par la propriété universelle.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dotted, "\pi"] \arrow[drr, bend left, "\mu"] \arrow[ddr, bend right, "\lambda"'] & & \\
& X \times_S Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & S
\end{tikzcd}$$

(1.5.3.4) Notons que le produit fibré $X \times_S Y$ est muni d'un morphisme naturel vers S, à savoir $f \circ p = g \circ q$.

(1.5.4) Quelques exemples de catégories dans lesquelles les produits fibrés existent.

(1.5.4.1) Dans la catégorie des ensembles, le produit fibré de deux ensembles au-dessus d'un troisième est leur produit fibré ensembliste.

(1.5.4.2) Dans la catégorie des espaces topologiques, le produit fibré de deux espaces topologiques au-dessus d'un troisième est leur produit fibré ensembliste *muni de la topologie induite par la topologie produit.*

(1.5.4.3) Dans la catégorie des groupes (resp. des anneaux, resp. des modules sur un anneau commutatif unitaire A), le produit fibré de deux objets au-dessus d'un troisième est leur produit fibré ensembliste, la ou les opérations étant définies coordonnée par coordonnée.

1.6 Quelques tautologies

Les démonstrations des assertions qui suivent sont laissées en exercice, à l'exception d'une d'entre elles qui est rédigée à titre d'exemple.

(1.6.1) Si C est une catégorie dans laquelle les produits fibrés existent et si Y est un objet de C, alors $X \mapsto X \times Y$ est de manière naturelle un foncteur covariant en X de C dans elle-même.

(1.6.2) Si C est une catégorie admettant un objet final S, et si X et Y sont deux objets de C tels que $X \times Y$ existe, alors $X \times_S Y$ existe[3] et s'identifie à $X \times Y$: les produits cartésiens sont donc des produits fibrés, pour peu qu'il existe un objet final.

(1.6.3) Soit C une catégorie et soit S un objet de C. Rappelons que la catégorie C/S a été définie au 1.1.3.2.

(1.6.3.1) Soient $X \to S$ et $Y \to S$ deux objets de C/S (1.1.3.2). Alors le produit cartésien de $(X \to S)$ et $(Y \to S)$ existe dans C/S si et seulement si $X \times_S Y$ existe dans C, et si c'est le cas alors

$$(X \to S) \times (Y \to S) = X \times_S Y$$

(ce dernier est vu comme objet de C/S *via* son morphisme naturel vers S, *cf.* la fin de 1.5.3).

On en déduit, à l'aide de 1.6.1 que si les produits fibrés existent dans C alors pour tout objet $(Y \to S)$ de C/S la formule $(X \to S) \mapsto X \times_S Y$ définit un foncteur covariant en $(X \to S)$ de C/S dans elle-même.

(1.6.3.2) Soit X un objet de C. Supposons que $X \times S$ existe, et considérons-le comme un objet de C/S *via* la seconde projection. La restriction à C/S du foncteur h^X est alors égale à $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}/S}(., X \times S)$.

(1.6.4) Soit C une catégorie dans laquelle les produits fibrés existent, et soient X, Y, Z et T des objets de C. Supposons donnés un morphisme $f : X \to Z$,

3. En toute rigueur, il faudrait préciser quels sont les morphismes $X \to S$ et $Y \to S$ que l'on considère ; mais comme S est final, il n'y a pas le choix.

un morphisme $g : Y \to Z$, et un morphisme $h : T \to Y$. On a alors un isomorphisme naturel

$$(X \times_Z Y) \times_Y T \simeq X \times_Z T,$$

où T est vu comme muni du morphisme $\lambda : T \to Z$ composé de $T \to Y$ et $Y \to Z$.

Nous allons justifier cette assertion. L'idée de la preuve consiste à se ramener grâce au lemme de Yoneda à l'assertion ensembliste correspondante [4].

(1.6.4.1) *Réduction au cas ensembliste.* Grâce au lemme de Yoneda, il suffit, pour exhiber un isomorphisme entre deux objets, d'en exhiber un entre les foncteurs qu'ils représentent. On va donc chercher à montrer que

$$(h^X \times_{h^Z} h^Y) \times_{h^Y} h^T \simeq h^X \times_{h^Z} h^T,$$

c'est-à-dire encore qu'il existe, pour tout objet S de C, une bijection fonctorielle en S

$$\begin{aligned}(\mathrm{Hom}(S,X) \times_{\mathrm{Hom}(S,Z)} \mathrm{Hom}(S,Y)) &\times_{\mathrm{Hom}(S,Y)} \mathrm{Hom}(S,T)\\ &\simeq \mathrm{Hom}(S,X) \times_{\mathrm{Hom}(S,Z)} \mathrm{Hom}(S,T).\end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer l'existence d'un isomorphisme comme dans l'énoncé lorsque C est la catégorie des ensembles, en s'assurant en plus qu'il est bien fonctoriel en les données.

(1.6.4.2) *Le cas ensembliste.*
On a

$$(X \times_Z Y) \times_Y T = \{((x,y),t), f(x) = g(y) \text{ et } h(t) = y\}$$

et

$$X \times_Z T = \{(x,t), f(x) = \lambda(t) = g(h(t))\}.$$

La bijection cherchée est alors $((x,y),t) \mapsto (x,t)$, sa réciproque étant égale à $(x,t) \mapsto ((x,h(t)),t)$; la fonctorialité en les données est évidente.

1.7 Sommes disjointes et sommes amalgamées

Il s'agit des notions duales de celles de produit cartésien et de produit fibré.

(1.7.1) La somme disjointe. La somme disjointe ensembliste $X \coprod Y$ de deux ensembles X et Y est par définition la réunion d'une copie de X et d'une copie de Y, rendues disjointes (pour le faire proprement, on peut par exemple la définir comme le sous-ensemble de $X \cup Y) \times \{0,1\}$ formé des couples de la forme $(x,0)$ avec $x \in X$ ou $(y,1)$ avec $y \in Y$).

Si C est une catégorie et si X et Y sont deux objets de C, et si le foncteur covariant

$$h_X \times h_Y$$

4. On trouve quelque part dans les SGA l'expression ≪procédé ensembliste breveté≫ à propos de ce type de méthode.

est représentable, on note en général $X \coprod Y$ son représentant, que l'on appelle la *somme disjointe* de X et Y. Attention : ce représentant est en réalité constitué de $X \coprod Y$ et d'un couple (i, j) de morphismes où i va de X vers $X \coprod Y$ et j de Y vers $X \coprod Y$. Ces morphismes n'ont pas de notation standard.

La définition du couple $(X \coprod Y, (i, j))$ comme représentant de $h_X \times h_Y$ signifie la chose suivante : pour tout objet T de C, tout morphisme $\lambda : X \to T$ et tout morphisme $\mu : Y \to T$, il existe un et un seul morphisme $\sigma : X \coprod Y \to T$ tel que $\lambda = \sigma \circ i$ et $\mu = \sigma \circ j$. Ou encore que pour tout objet T de C, l'application $\pi \mapsto (\pi \circ i, \pi \circ j)$ établit une bijection entre $\mathrm{Hom}(X \coprod Y, T)$ et $\mathrm{Hom}(X, T) \times \mathrm{Hom}(Y, T)$. En termes plus imagés : se donner un morphisme de $X \coprod Y$ vers un objet T, c'est se donner un morphisme de X vers T et un morphisme de Y vers T.

(1.7.2) Quelques exemples de catégories dans lesquelles les sommes disjointes existent.

(1.7.2.1) Dans la catégorie des ensembles, la somme disjointe de deux ensembles est leur somme disjointe ensembliste.

(1.7.2.2) Dans la catégorie des espaces topologiques, la somme disjointes de deux espaces topologiques X et Y est leur somme disjointe ensembliste $X \coprod Y$ munie de la topologie définie comme suit : sa restriction à X (resp. Y) identifié à une partie de $X \coprod Y$ est la topologie de X (resp. de Y) ; les parties X et Y de $X \coprod Y$ sont toutes deux ouvertes.

(1.7.2.3) Dans la catégorie des modules sur un anneau commutatif unitaire A, la somme disjointe de deux modules est leur somme directe. *L'ensemble sous-jacent n'est donc pas leur somme disjointe ensembliste* (on a identifié les zéros des deux modules, et rajouté les sommes d'éléments).

(1.7.2.4) Dans la catégorie des groupes, le même type de phénomène se reproduit. Si G et H sont deux groupes, leur somme disjointe dans la catégorie des groupes est le *produit libre* $G * H$ *de* G *et* H, défini comme suit. Un élément de $G * H$ est une suite finie $x_1 \ldots x_n$ où chaque x_i est un élément non trivial de $G \coprod H$, et telle qu'éléments de G et éléments de H alternent (une telle suite est souvent appelée un *mot*, dont les x_i sont les *lettres*.) On fait le produit de deux mots en les concaténant, puis en contractant le résultat obtenu selon l'algorithme suivant.

- Si le mot contient une séquence de la forme xy avec x et y appartenant tous deux à G (resp. H), et si l'on note z le produit xy calculé dans G (resp. H) alors :
  - ◇ si $z \neq e$ on remplace la séquence xy par la lettre z ;
  - ◇ si $z = e$ on supprime la séquence xy.
- On recommence l'opération jusqu'à ce que le mot ne contienne plus de séquence de la forme xy avec x et y appartenant tous deux à G ou tous deux à H.

On prendra garde que les x_i sont des éléments de la réunion *disjointe* de G et H : même si $G = H$ on considère dans cette construction G et H comme deux groupes *distincts*, ce qui veut dire qu'on ne simplifie *jamais* un produit xy avec $x \in G$ et $y \in H$ ou le contraire. Notons que l'élément neutre de $G * H$ est le mot vide.

Par exemple, si $G = H = \mathbb{Z}$, et si l'on écrit $G = a^{\mathbb{Z}}$ et $H = b^{\mathbb{Z}}$ pour distinguer les deux groupes, on voit que $G * H$ est constitué des mots en les lettres a, a^{-1}, b et b^{-1} : c'est le groupe libre sur deux générateurs.

(1.7.3) La somme amalgamée.

(1.7.3.1) Le cas ensembliste. Soient X, Y et S trois ensembles, et soit $f : S \to X$ et $g : S \to Y$ deux applications. La *somme amalgamée ensembliste* $X \coprod_{f,g} Y$ (ou plus simplement $X \coprod_S Y$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la définition des flèches f et g) est par définition le quotient de $X \coprod Y$ par la relation d'équivalence engendrée par les relations $f(s) \sim g(s)$ pour s parcourant S. On dispose de deux applications naturelles $X \to X \coprod_S Y$ et $Y \to X \coprod_S Y$.

(1.7.3.2) Le cas général. Si C est une catégorie, si X, Y et S sont trois objets de C, si $f : S \to X$ et $g : S \to Y$ sont deux morphismes, et si le foncteur covariant $h_X \times_{h_S} h_Y$ est représentable, on note en général $X \coprod_S Y$ ou $X \coprod_{f,g} Y$ son représentant, que l'on appelle la *somme amalgamée de X et Y le long de S (ou le long de (f, g)).* Attention : ce représentant est en réalité constitué de $X \coprod_S Y$ et d'un couple (i, j) de morphismes où i va de X vers $X \coprod_S Y$ et j de Y vers $X \coprod_S Y$, et où $i \circ f = j \circ g$. Ces morphismes n'ont pas de notation standard.

La définition du couple $(X \coprod_S Y, (i, j))$ comme représentant du foncteur $h_X \times_{h_S} h_Y$ signifie la chose suivante : pour tout objet T de C, tout morphisme $\lambda : X \to T$ et tout morphisme $\mu : Y \to T$ tel que $\lambda \circ i = \mu \circ j$, il existe un et un seul morphisme $\sigma : X \coprod_S Y \to T$ tel que $\lambda = \sigma \circ i$ et $\mu = \sigma \circ j$. Ou encore que pour tout objet T de C, l'application $\pi \mapsto (\pi \circ i, \pi \circ j)$ établit une bijection entre $\operatorname{Hom}(X \coprod_S Y, T)$ et $\operatorname{Hom}(X, T) \times_{\operatorname{Hom}(S,T)} \operatorname{Hom}(Y, T)$. En termes plus imagés : se donner un morphisme de $X \coprod_S Y$ vers un objet T, c'est se donner un morphisme de X vers T et un morphisme de Y vers T dont les composés respectifs avec i et j coïncident.

(1.7.3.3) On peut schématiser ce qui précède par le diagramme commutatif suivant, dans lequel les flèches en dur sont données, et où la flèche en pointillés est celle fournie par la propriété universelle.

$$\begin{tikzcd}
T & & \\
& X \coprod_S Y \arrow[ul, dotted, "\sigma"'] & Y \arrow[l, "j"'] \arrow[ull, bend right, "\mu"'] \\
& X \arrow[u, "i"] \arrow[uul, bend left, "\lambda"] & S \arrow[l, "f"] \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

(1.7.3.4) Notons que S est muni d'un morphisme naturel vers $X \coprod_S Y$, à savoir $i \circ f = j \circ g$.

(1.7.4) Quelques exemples de catégories dans lesquelles les sommes amalgamées existent.

(1.7.4.1) Dans la catégorie des ensembles, la somme amalgamée de deux ensembles le long d'un troisième est leur somme amalgamée ensembliste.

(1.7.4.2) Dans la catégorie des espaces topologiques, le somme amalgamée de deux espaces topologiques X et Y le long d'un troisième espace S est leur somme amalgamée ensembliste, munie de la topologie quotient (la somme disjointe $X \coprod Y$ étant munie quant à elle de sa topologie décrite plus haut).

(1.7.4.3) Dans la catégorie des groupes, la somme amalgamée de deux groupes G et H le long d'un groupe K muni de deux morphismes $g : K \to G$ et $h : K \to H$ existe, et est notée $G *_K H$. On peut par exemple la construire comme le quotient du produit libre $G * H$ par son plus petit sous-groupe distingué D contenant les éléments de la forme $g(k)h(k)^{-1}$ pour $k \in K$. Cette présentation a l'avantage de rendre triviale la vérification de la propriété universelle, mais l'inconvénient de ne pas être très maniable en pratique : elle ne dit pas comment décider si deux mots de $G * H$ ont même classe modulo D.

Toutefois, *si g et h sont injectives*, on dispose d'une description plus tangible de $G *_K H$ (qui revient peu ou prou à exhiber un système de représentants explicite de représentants de la congruence modulo D), que nous allons maintenant détailler. Pour alléger les notations, nous utilisons les injections f et g pour identifier K à un sous-groupe de G aussi bien que de H.

On fixe un système de représentants S des classes non triviales de G modulo K, et un système de représentants T des classes non triviales de H modulo K. Un élément de $G *_K H$ est alors un mot $x_1 \dots x_n$ où chaque x_i est un élément de $(K \setminus \{e\}) \coprod S \coprod T$ et où :

- l'ensemble des indices i tels que $x_i \in K \setminus \{e\}$ est vide ou égal à $\{1\}$;
- pour tout indice $i \leqslant n-1$, on a $x_{i+1} \in T$ si $x_i \in S$, et $x_{i+1} \in S$ si $x_i \in T$.

On fait le produit de deux mots en les concaténant, puis en transformant le mot obtenu par l'algorithme suivant.

- Si le mot contient une séquence de la forme kk' où k et k' appartiennent à K, et si z désigne le produit kk' calculé dans K, alors :
  - ◇ si $z = e$ on supprime la séquence kk' ;
  - ◇ si $z \neq e$ on remplace la séquence kk' par la lettre z.
- Si le mot contient une séquence de la forme sy avec $s \in S$ et $y \in K \setminus \{e\}$ ou $y \in S$ on pose $z = sy \in G$; puis on écrit $z = ks'$ avec $k \in K$ et $s' \in S \cup \{e\}$, et l'on procède comme suit :
  - ◇ si $k = e$ et $s' = e$ on supprime la séquence sy ;
  - ◇ si $k = e$ et $s' \neq e$ on remplace la séquence sy par la lettre s' ;
  - ◇ si $k \neq e$ et $s' = e$ on remplace la séquence sy par la lettre k ;
  - ◇ si $k \neq e$ et $s' \neq e$ on remplace la séquence sy par la séquence ks'.
- Si le mot contient une séquence de la forme ty avec $t \in T$ et $y \in K \setminus \{e\}$ ou $y \in T$ on pose $z = ty \in H$; puis on écrit $z = kt'$ avec $k \in K$ et $t' \in T \cup \{e\}$, et l'on procède comme suit :
  - ◇ si $k = e$ et $t' = e$ on supprime la séquence ty ;
  - ◇ si $k = e$ et $t' \neq e$ on remplace la séquence ty par la lettre t' ;
  - ◇ si $k \neq e$ et $t' = e$ on remplace la séquence ty par la lettre k ;
  - ◇ si $k \neq e$ et $t' \neq e$ on remplace la séquence ty par la séquence kt'.
- On recommence jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de séquence de l'une des trois formes évoquées ; le mot est alors sous la forme requise.

L'élément neutre de $G *_K H$ est le mot vide.

(1.7.4.4) Dans la catégorie des anneaux commutatifs unitaires, la somme amalgamée de deux anneaux B et C le long d'un troisième anneau A existe, c'est le produit tensoriel $B \otimes_A C$, que nous verrons un peu plus loin.

J'invite le lecteur à écrire lui-même à propos des sommes disjointes et amalgamées, les «quelques tautologies» duales de celles vues plus haut sur les produits cartésiens et produits fibrés.

1.8 Adjonction

(1.8.1) Définition. Soient C et D deux catégories, et soient $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ et $G : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ deux foncteurs covariants. On dit que F est un *adjoint à gauche de* G, ou que G est un *adjoint à droite de* F, ou que (F, G) est un *couple de foncteurs adjoints*, s'il existe une collection d'isomorphismes

$$\iota_{(A,B)} : \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(F(A), B) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, G(B)),$$

paramétrée par $(A, B) \in \mathrm{Ob}\,\mathsf{C} \times \mathrm{Ob}\,\mathsf{D}$ et fonctorielle en (A, B).

(1.8.1.1) Commentaires. La fonctorialité en (A, B) signifie que pour toute flèche $u : A \to A'$ de C et toute flèche $v : B \to B'$ de D, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(F(A'), B) \arrow[r, "\simeq", "\iota_{(A',B)}"'] \arrow[d, "\circ F(u)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A', G(B)) \arrow[d, "\circ u"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(F(A), B) \arrow[r, "\simeq", "\iota_{(A,B)}"'] \arrow[d, "v\circ"'] & \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, G(B)) \arrow[d, "G(v)\circ"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(F(A), B') \arrow[r, "\simeq", "\iota_{(A,B')}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, G(B'))
\end{tikzcd}$$

commute.

(1.8.1.2) Exercice. Décrire la donnée des $\iota_{(A,B)}$ comme un morphisme de foncteurs.

(1.8.2) Soient C et D deux catégories, et soit $G : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ un foncteur covariant.

(1.8.2.1) Supposons que G admet un adjoint à gauche F, et fixons un objet A de C. Le foncteur covariant

$$B \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, G(B))$$

de D dans Ens est alors isomorphe à

$$B \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(F(A), B).$$

Il est donc représentable, et $F(A)$ est son représentant.

(1.8.2.2) Supposons réciproquement que pour tout objet A de C, le foncteur $B \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, G(B))$ soit représentable, et notons $F(A)$ son représentant.

Soit maintenant $u : A \to A'$ une flèche de C. Elle induit un morphisme de foncteurs

$$[B \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A', G(B))] \longrightarrow [B \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, G(B))],$$

d'où par le lemme de Yoneda un morphisme $F(u) : F(A) \to F(A')$. Ainsi, $A \mapsto F(A)$ apparaît comme un foncteur covariant de C vers D, qui est par construction un adjoint à gauche de G.

(1.8.3) Commentaires.

(1.8.3.1) Le lecteur attentif aura peut-être remarqué que nous sommes allés un peu vite : par construction, on dispose pour tout objet A d'un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(F(A), B) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, G(B))$$

qui est fonctoriel en B, mais nous n'avons pas vérifié explicitement la fonctorialité en A. Celle-ci peut se justifier *grosso modo* ainsi – nous vous invitons à écrire vous-mêmes les détails.

Lorsque nous disons que $F(A)$ est le représentant de $B \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, G(B))$, nous commettons un abus. En effet, le représentant consiste en réalité en la donnée de $F(A)$ *et d'un objet universel*, à savoir ici un morphisme de A vers $G(F(A))$; et le lemme de Yoneda que nous avons appliqué ci-dessus fournit un morphisme $F(u) : F(A) \to F(A')$ *compatible aux objets universels livrés avec A et A'*. C'est cette compatibilité qui garantit la fonctorialité attendue.

(1.8.3.2) Supposons que G admette deux adjoints à gauche F_1 et F_2 ; donnons-nous deux systèmes d'isomorphismes $(\iota^1_{(A,B)})$ et $(\iota^2_{(A,B)})$ décrivant l'adjonction respective des couples (F_1, G) et (F_2, G). On déduit alors du lemme de Yoneda (appliqué, comme au 1.8.3.1 ci-dessus, pour chaque $A \in \mathrm{Ob}\ \mathsf{C}$, avec prise en compte des objets universels) qu'il existe un unique isomorphisme $F_1 \simeq F_2$ compatible aux systèmes $(\iota^1_{(A,B)})$ et $(\iota^2_{(A,B)})$, dans un sens que nous laissons au lecteur le soin de préciser. Nous nous permettrons pour cette raison de parler de *l'* adjoint à gauche de G.

(1.8.3.3) Nous venons d'évoquer diverses questions liées à l'existence éventuelle d'un adjoint *à gauche* d'un foncteur. Nous vous invitons à énoncer les résultats analogues concernant l'adjonction *à droite*.

(1.8.4) Exemples de foncteurs adjoints.

(1.8.4.1) Soit A un anneau commutatif unitaire et soit $O_1 : A\text{-}\mathsf{Mod} \to \mathsf{Ens}$ le foncteur d'oubli. Pour tout ensemble X, notons $L_1(X)$ le A-module libre engendré par X, c'est-à-dire le A-module $\bigoplus_{x \in X} A \cdot e_x$.

Pour tout A-module M et tout ensemble X on a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ens}}(X, O_1(M)) \simeq \mathrm{Hom}_{A\text{-}\mathsf{Mod}}(L_1(X), M),$$

qui associe à une application $\varphi : X \to M$ son «prolongement par linéarité», *i.e.* l'unique application A-linéaire de $L_1(X)$ dans M envoyant e_x sur $\varphi(x)$ pour tout x. Il est visiblement fonctoriel en X et M ; en conséquence, L_1 est l'adjoint à gauche de O_1.

(1.8.4.2) Soit $O_2 : \mathsf{Gp} \to \mathsf{Ens}$ le foncteur d'oubli. Pour tout ensemble X, on note $L_2(X)$ le *groupe libre* engendré par X, défini comme suit. On introduit pour chaque élément x de X un symbole x^{-1}, et l'on note X^{-1} l'ensemble des x^{-1} pour x parcourant X. Un élément de $L_2(X)$ est alors un ≪mot *réduit* sur l'alphabet $X \cup X^{-1}$≫, c'est-à-dire une suite finie d'éléments de $X \cup X^{-1}$ ne comprenant aucune séquence de deux termes consécutifs de la forme xx^{-1} ou $x^{-1}x$ pour $x \in X$. On multiplie deux mots en les concaténant puis en réduisant le mot obtenu, c'est-à-dire en éliminant les séquences xx^{-1} ou $x^{-1}x$ tant qu'on en rencontre ; l'élément neutre est le mot vide.

Pour tout groupe G et tout ensemble X on a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ens}}(X, O_2(G)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{Gp}}(L_2(X), G),$$

qui associe à une application $\varphi : X \to G$ son ≪prolongement homomorphique≫, *i.e.* l'unique morphisme de groupes de $L_2(X)$ dans G envoyant x sur $\varphi(x)$ pour tout $x \in X$ (défini par ma formule que le lecteur imagine). Il est visiblement fonctoriel en X et G ; en conséquence, L_2 est l'adjoint à gauche de O_2.

(1.8.4.3) Soit A un anneau commutatif unitaire, et soit O_3 le foncteur d'oubli $B \mapsto (B, \times)$ de la catégorie des A-algèbres vers celle des monoïdes commutatifs avec unité. Soit L_3 le foncteur qui associe à un tel monoïde Γ l'algèbre $\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_{e_\gamma}$ où $e_\gamma \cdot e_{\gamma'} = e_{\gamma\gamma'}$ pour tout (γ, γ').

Pour toute A-algèbre B et tout monoïde commutatif avec unité Γ, on a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{mon}}(\Gamma, O_3(B)) \simeq \mathrm{Hom}_{A-\mathsf{Alg}}(L_3(\Gamma), B),$$

qui associe à un morphisme $\varphi : \Gamma \to (B, \times)$ l'unique morphisme de A-algèbres de $L_3(\Gamma)$ dans B envoyant e_γ sur $\varphi(\gamma)$ pour tout γ. Il est visiblement fonctoriel en Γ et B ; en conséquence, L_3 est l'adjoint à gauche de O_3.

(1.8.4.4) Soit I le foncteur d'inclusion de Ab dans Gp, et soit A le foncteur de Gp dans Ab qui envoie un groupe G sur son abélianisé $G/ < ghg^{-1}h^{-1} >_{(g,h) \in G^2}$. Soit H un groupe abélien et soit G un groupe. On a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Gp}}(G, I(H)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ab}}(A(G), H),$$

qui envoie un morphisme $\varphi : G \to H$ vers l'unique morphisme $A(G) \to H$ par lequel il se factorise (son existence est assurée par la propriété universelle du quotient). Il est visiblement fonctoriel en G et H ; en conséquence, A est l'adjoint à gauche de I.

(1.8.4.5) Soit O_4 le foncteur d'oubli de Top dans Ens, et soit Dis (resp. Gro) le foncteur de Ens vers Top consistant à munir un ensemble de la topologie discrète (resp. grossière).

Toute application ensembliste entre espaces topologiques est automatiquement continue dès lors que la topologie de sa source (resp. son but) est discrète (resp. grossière).

On dispose donc pour toute ensemble X et tout espace topologique T de deux bijections naturelles

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ens}}(X, O_4(T)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(\mathrm{Dis}(X), T)$$

$$\text{et } \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ens}}(O_4(T), X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(T, \mathrm{Gro}(X)).$$

Elles sont visiblement fonctorielles en X et T ; en conséquence, Dis est l'adjoint à gauche de O_4, et Gro est son adjoint à droite.

(1.8.4.6) Soient X, Y et Z trois ensembles. On dispose d'une bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ens}}(X \times Y, Z) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ens}}(X, \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ens}}(Y, Z)) :$$

elle envoie f sur $x \mapsto [y \mapsto f(x, y)]$, et sa réciproque envoie g sur $(x, y) \mapsto g(x)(y)$. Elle est visiblement fonctorielle en X, Y, Z. En conséquence, Y étant fixé, le foncteur $X \mapsto X \times Y$ est l'adjoint à gauche de $Z \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ens}}(Y, Z)$.

(1.8.4.7) Exercice. Montrez que si un foncteur covariant F admet un quasi-inverse G alors G est à la fois adjoint à F à gauche et à droite.

Chapitre 2

Algèbre commutative

Dans tout ce qui suit, et sauf mention expresse du contraire, ≪anneau≫ signifiera ≪anneau commutatif unitaire≫, ≪algèbre≫ signifiera ≪algèbre commutative unitaire≫, et un morphisme d'anneaux ou d'algèbres sera toujours supposé envoyer l'unité de la source sur celle du but.

2.1 Prérequis et rappels

(2.1.1) Le lecteur sera supposé familier avec les définitions d'anneau, d'idéal et d'anneau quotient.... ainsi qu'avec les propriétés élémentaires de ces objets, que nous ne rappellerons pas ici pour la plupart. Nous allons toutefois insister sur quelques points sans doute connus, mais qui sont importants et au sujet desquels on peut commettre facilement quelques erreurs.

(2.1.1.1) Dans la définition d'un anneau A, on n'impose pas à 1 d'être différent de 0. En fait, l'égalité $1 = 0$ se produit dans un et seul cas, celui où A est *l'anneau nul* $\{0\}$.

(2.1.1.2) Si A est un anneau, on notera $A^\times$ l'ensemble des éléments inversibles de A ; il est stable par multiplication et $(A^\times, \times)$ est un groupe

(2.1.2) Un anneau A est dit *intègre* s'il est non nul et si l'on a pour tout couple (a, b) d'éléments de A l'implication

$$(ab = 0) \Rightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0).$$

(2.1.2.1) On prendra garde de ne jamais oublier de vérifier la première de ces deux conditions : *un anneau intègre est par définition non nul* (l'expérience a montré qu'on avait tout intérêt à imposer cette restriction pour éviter une profusion de cas particuliers à distinguer dans les définitions, énoncés et démonstrations ultérieurs).

(2.1.2.2) Le lecteur amateur de facéties bourbakistes appréciera certainement la définition alternative suivante : un anneau A est intègre si et seulement si *tout produit fini d'éléments non nuls de A est non nul.* Elle contient en effet la non-nullité de A, puisqu'elle implique que l'unité 1, qui n'est autre que le produit *vide* d'éléments de A, est non nulle.

(2.1.3) On dit qu'un anneau A est un corps s'il est non nul et si tout élément non nul de A est inversible ; il revient au même de demander que A ait exactement deux idéaux, à savoir $\{0\}$ et A. Si A est un corps, il est intègre et $A^{\times} = A \setminus \{0\}$.

(2.1.4) Soit f un morphisme d'un corps K vers un anneau *non nul* A. Comme A est non nul, $1 \notin \operatorname{Ker} f$; puisque les seuls idéaux de K sont $\{0\}$ et K, il vient $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ et f est injectif.

En particulier, tout morphisme de corps est injectif.

(2.1.5) Soit A un anneau. Une A-*algèbre* est un anneau B muni d'un morphisme $f : A \to B$. Bien que f fasse partie des données, il sera très souvent omis (on dira simplement ≪soit B une A-algèbre≫). Il arrivera même que l'on écrive abusivement a au lieu de $f(a)$ pour $a \in A$; mais cette entorse à la rigueur peut être dangereuse, surtout lorsque f n'est pas injective : si on la commet, il faut en avoir conscience et y mettre fin lorsque la situation l'exige.

(2.1.6) Soir A un anneau. Un élément a de A est dit *nilpotent* s'il existe $n \geqslant 0$ tel que $a^n = 0$. L'ensemble des éléments nilpotents de A est un idéal de A (nous vous laissons la preuve en exercice, appelé le *nilradical* de A. On dit que A est *réduit* si son nilradical est nul, c'est-à-dire encore si A n'a pas d'élément idempotent non trivial.

(2.1.7) **Exercice.** Soit A un anneau et soit N son nilradical ; soit C la sous-catégorie pleine de Ann constituée des anneaux réduits, et soit F le foncteur covariant de C dans Ens qui envoie B sur $\operatorname{Hom}_{\mathsf{Ann}}(A, B)$. Montrez que A/N est réduit et que F est représentable par $(A/N, A \to A/N)$.

2.2 Localisation

(2.2.1) Soit A un anneau. Lorsqu'on se donne un sous-ensemble P de A, on sait construire un anneau ≪défini à partir de A, en *décrétant* que les éléments de P sont nuls, et en n'imposant aucune autre contrainte que celle-ci, et ses conséquences découlant de la théorie générale des anneaux≫ : c'est le quotient $A/(P)$. Celui-ci est caractérisé par sa propriété universelle, c'est-à-dire encore par le foncteur (ici, covariant) qu'il représente.

C'est en fait une illustration d'un phénomène assez général : à chaque fois lorsqu'on veut intuitivement *imposer* une contrainte, et *seulement* cette contrainte, la construction rigoureuse qui répond à ce caprice s'exprime en termes de propriété universelle, ou encore de foncteur à représenter.

(2.2.2) Nous allons en voir un nouvel exemple avec ce qu'on appelle la *localisation*. Soit A un anneau, et soit S un sous-ensemble de A. Le but intuitif est de construire un objet à partir de A en imposant aux éléments de S d'être inversibles – et rien d'autre. Techniquement, on s'intéresse au foncteur covariant

$$F : B \mapsto \{f \in \operatorname{Hom}(A, B), f(s) \in B^{\times} \ \ \forall\, s \in S\},$$

et nous allons montrer de deux façons différentes qu'il est représentable, c'est-à-dire qu'il existe un anneau C et un morphisme $g : A \to C$ tels que :

• $g(S) \subset C^{\times}$;
• pour tout $f : A \to B$ tel que $f(S) \subset B^{\times}$, il existe un unique $h : C \to B$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \\ C \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd} .$$

(2.2.3) *Première preuve.* Posons

$$C = A[T_s]_{s \in S}/(sT_s - 1)_{s \in S}$$

et $g = a \mapsto \overline{a}$.

(2.2.3.1) Soit $f : A \to B$ un morphisme tel que $f(S) \subset B^{\times}$; nous allons montrer l'existence d'un unique $h : C \to B$ tel que $f = h \circ g$. Voyant B et C comme des A-algèbres via f et g respectivement, cela revient à montrer l'existence d'un unique morphisme h de A-algèbres de C vers B.

Unicité. Soit h un tel morphisme. On a alors pour tout $s \in S$ les égalités

$$1 = h(\overline{T_s s}) = h(\overline{T_s})h(\overline{s}) = h(\overline{T_s})h(g(s)) = h(\overline{T_s})f(s),$$

et donc $h(\overline{T_s}) = f(s)^{-1}$. Comme les $\overline{T_s}$ engendrent la A-algèbre C, il y a au plus un tel morphisme h.

Existence. Soit φ l'unique morphisme de A-algèbres de $A[T_s]_{s \in S}$ vers B qui envoie T_s sur $f(s)^{-1}$ pour tout $s \in S$. On a $\varphi(T_s s - 1) = 0$ pour tout $s \in S$ et φ induit donc par passage au quotient un morphisme d'algèbres $h : C \to B$.

(2.2.3.2) Cette preuve est la plus économique, et en un sens la plus naturelle : on a *forcé* les éléments de S à être inversibles, en adjoignant formellement à A un symboles T_s pour chaque élément s de S, et en imposant par décret l'égalité $sT_s = 1$.

Mais elle présente un défaut : il est *en pratique* extrêmement difficile d'arriver à dire quoi que ce soit sur la A-algèbre $A[T_s]_{s \in S}/(sT_s - 1)_{s \in S}$; c'est un cas où la connaissance du foncteur représenté par un objet qui, *en théorie*, caractérise l'objet en question à isomorphisme près, n'est pas suffisante.

Par exemple, il semble *a priori* impossible de donner un critère simple permettant de savoir si $A[T_s]_{s \in S}/(sT_s - 1)_{s \in S}$ est nul ou non. Nous allons donc donner une autre construction du représentant de F.

(2.2.3.3) *Réduction au cas d'une partie multiplicative.* Convenons de dire qu'une partie T de A est *multiplicative* si elle contient 1 et si $ab \in T$ dès que $a \in T$ et $b \in T$ (on peut une fois encore condenser la définition en style bourbakiste, en demandant simplement que T soit stable par produit fini, ce qui la force à contenir 1 puisque ce dernier est le produit vide). L'ensemble $\widehat{S}$ des produits finis d'éléments de S (en incluant 1 qui est le produit vide) est visiblement la plus petite partie multiplicative de A contenant S ; nous dirons que c'est la partie multiplicative *engendrée par S*. Si B est un anneau et si $f : A \to B$ est un morphisme, il est immédiat que $f(s)$ est inversible pour tout $s \in S$ si et seulement si $f(s)$ est inversible pour tout $s \in \widehat{S}$. On peut donc, pour étudier le foncteur F, remplacer S par $\widehat{S}$; autrement dit, on s'est ramené au cas où S est multiplicative.

(2.2.3.4) On définit alors sur $A \times S$ la relation $\mathscr{R}$ suivante : $(a,s)\mathscr{R}(b,t)$ si et seulement si il existe $r \in S$ tel que $r(at - bs) = 0$. On vérifie que c'est une relation d'équivalence, et l'on note $S^{-1}A$ le quotient correspondant.

Les formules

$$((a,s);(b,t)) \mapsto (at+bs, st) \text{ et } ((a,s);(b,t)) \mapsto (ab, st)$$

passent au quotient, et définissent deux lois $+$ et $\times$ sur $S^{-1}A$ qui en font un anneau commutatif.

Si $(a,s) \in A \times S$, on écrira $\frac{a}{s}$ au lieu de $\overline{(a,s)}$. Cette notation permet de disposer des formules naturelles

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at+bs}{st} \text{ et } \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{as}{bt},$$

et l'on a

$$\frac{a}{s} = \frac{b}{t} \iff \exists r \in S, r(at - bs) = 0.$$

L'application $a \mapsto \frac{a}{1}$ est un morphisme d'anneaux de A dans $S^{-1}A$, et si $s \in S$ alors $\frac{s}{1}$ est inversible, d'inverse $\frac{1}{s}$.

Le couple $(S^{-1}A, a \mapsto \frac{a}{1})$ *représente le foncteur* F. En effet, soit $f : A \to B$ un morphisme tel que $f(S) \subset B^\times$; nous allons montrer qu'il existe un unique morphisme h de $S^{-1}A$ dans B tel que $h(\frac{a}{1}) = f(a)$ pour tout $a \in A$.

Unicité. Soit h un tel morphisme. On a alors pour tout $(a,s) \in A \times S$ les égalités

$$h\left(\frac{a}{s}\right) = h\left(\frac{a}{1} \cdot \frac{1}{s}\right) = h\left(\frac{a}{1}\right) h\left(\left(\frac{s}{1}\right)^{-1}\right) = f(a)f(s)^{-1},$$

d'où l'unicité.

Existence. On vérifie immédiatement que l'application

$$A \times S \to B, (a,s) \mapsto f(a)f(s)^{-1}$$

passe au quotient par $\mathscr{R}$. Elle induit donc une application $h : S^{-1}A \to B$, qui envoie toute fraction $\frac{a}{s}$ sur $f(a)f(s)^{-1}$. Par un calcul explicite, on s'assure que h est un morphisme d'anneaux, et l'on a bien $h(\frac{a}{1}) = f(a)$ pour tout $a \in A$.

On dit que $S^{-1}A$ est le *localisé* de A par rapport à la partie multiplicative S.

(2.2.4) Commentaires.

(2.2.4.1) La condition d'égalité entre fractions de $S^{-1}A$ est plus compliquée que le bon vieux produit en croix traditionnel ; c'est le prix à payer pour travailler avec des anneaux quelconques, *i.e.* non nécessairement intègres ni réduits. Notons toutefois que si S ne contient pas de diviseurs de zéro – c'est par exemple le cas si A est intègre et si $0 \notin S$ – la condition «il existe $r \in S$ tel que $r(at - bs) = 0$» équivaut à la relation usuelle «$at - bs = 0$».

(2.2.4.2) La flèche $A \to S^{-1}A$ n'est pas injective en général, c'est la raison pour laquelle on préfère souvent écrire $\frac{a}{1}$ et non a. Son noyau est facile à décrire : c'est l'ensemble des éléments a de A tels qu'il existe $r \in S$ vérifiant l'égalité $ra = 0$. Une fois encore, les choses se simplifient si S ne contient pas de diviseurs de zéros (et donc en particulier si A est intègre et si $0 \notin S$) : on voit immédiatement que sous ces hypothèses, $a \mapsto \frac{a}{1}$ est injective.

(2.2.4.3) L'anneau $S^{-1}A$ est nul si et seulement si $1 = 0$ dans $S^{-1}A$, c'est-à-dire encore si et seulement si $\frac{1}{1} = 0$, donc si et seulement si il existe $r \in S$ tel que $r \cdot 1 = 0$. *Autrement dit,* $S^{-1}A$ *est nul si et seulement si* $0 \in S$.

(2.2.5) Exemples.

(2.2.5.1) Soit A un anneau intègre. Le sous-ensemble $S := A \setminus \{0\}$ en est une partie multiplicative. Le localisé $S^{-1}A$ est non nul puisque $0 \notin S$, et si $\frac{a}{s}$ est un élément non nul de $S^{-1}A$ alors $a \neq 0$; en conséquence, $a \in S$ et $\frac{a}{s}$ est inversible d'inverse $\frac{s}{a}$. Il s'ensuit que $S^{-1}A$ est un corps, appelé *corps des fractions de* A et souvent noté Frac A.

Puisque $0 \notin S$, l'anneau intègre A s'injecte dans Frac A. Ce dernier est précisément le plus petit corps contenant A, dans le sens suivant : pour tout corps K et tout morphisme *injectif* $A \hookrightarrow K$, il existe un unique plongement Frac $A \hookrightarrow K$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & K \\ \mathrm{Frac}\, A \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

commute. En effet, la flèche injective $A \to K$ envoie tout élément de $S = A \setminus \{0\}$ sur un élément non nul, et partant inversible, de K ; l'assertion requise est alors un cas particulier de la propriété universelle de $S^{-1}A$.

(2.2.5.2) Soit A un anneau et soit $f \in A$. La partie multiplicative S engendrée par f est $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, et le localisé correspondant est le plus souvent noté A_f. On déduit de la construction par quotient décrite en 2.2.3 que $A_f \simeq A[T]/(fT - 1)$.

En vertu de 2.2.4.3, l'anneau $A_f = 0$ est nul si et seulement si S contient 0, c'est-à-dire si et seulement si f est nilpotent.

Donnons une preuve alternative de ce fait. L'anneau A_f est nul si et seulement si $A[T]/(Tf - 1) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $1 - Tf$ est inversible dans $A[T]$. Or $1 - Tf$ est inversible dans $A[[T]]$, d'inverse $g = \sum f^i T^i$. Par unicité de l'inverse (lorsqu'il existe), on voit que $1 - Tf$ est inversible dans $A[T]$ si et seulement si $g \in A[T]$, c'est-à-dire si et seulement si f est nilpotent.

(2.2.6) Fonctorialité. Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux. Soit S une partie multiplicative de A, et soit T une partie multiplicative de B telle que $f(S) \subset T$ (par exemple, $T = f(S)$). La flèche composée $A \to B \to T^{-1}B$ envoyant chaque élément de S sur un inversible, elle induit une flèche de $S^{-1}A$ vers $T^{-1}B$, donnée par les formules

$$\frac{a}{s} \mapsto \frac{f(a)}{f(s)}.$$

2.3 Idéaux premiers et maximaux

Cette section ne contient à proprement parler aucun résultat nouveau. Elle vise simplement à présenter une approche des idéaux premiers et maximaux qui est sans doute un peu différente de celle dont vous avez l'habitude, et imprègne (le plus souvent implicitement) la géométrie algébrique à la Grothendieck.

(2.3.1) Rappels des définitions. Soit A un anneau. Un idéal $\mathfrak{p}$ de A est dit *premier* s'il est strict et si $ab \in \mathfrak{p} \Rightarrow a \in \mathfrak{p}$ ou $b \in \mathfrak{p}$. Il revient au même de demander que $A/\mathfrak{p}$ soit un anneau intègre.

Un idéal $\mathfrak{m}$ de A est dit *maximal* s'il est strict et s'il est maximal *en tant qu'idéal strict*. Cela revient à demander que $A/\mathfrak{m}$ ait exactement deux idéaux, à savoir $\{0\}$ et $A/\mathfrak{m}$; autrement dit, $\mathfrak{m}$ est maximal si et seulement si $A/\mathfrak{m}$ est un corps. On déduit de cette dernière caractérisation que tout idéal maximal est premier.

(2.3.2) Soit A un anneau et soit I un idéal strict de A. On déduit immédiatement du lemme de Zorn que I est contenu dans un idéal maximal. Si A est non nul il possède donc un idéal maximal : appliquer ce qui précède avec $I = \{0\}$, qui est alors strict.

On voit en particulier que tout anneau non nul possède un idéal *premier*. Notons que cette propriété est *a priori* plus faible que l'existence d'un idéal maximal, mais elle ne peut pas à ma connaissance être établie directement.

(2.3.3) Idéaux premiers et morphismes vers les corps. Soit A un anneau et soit f un morphisme de A vers un corps K. Le noyau de f est visiblement un idéal premier. Réciproquement, soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A ; la flèche composée $A \to A/\mathfrak{p} \hookrightarrow \mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})$ a pour noyau $\mathfrak{p}$. Ainsi, les idéaux premiers sont exactement *les noyaux de morphismes dont le but est un corps.*

(2.3.3.1) On peut donc décrire un idéal premier de A comme une classe d'équivalence de morphismes $(A \to K)$ où K est un corps, pour la relation d'équivalence ≪avoir même noyau≫.

(2.3.3.2) Cette relation admet une description alternative : si K et L sont deux corps, deux morphismes $A \to K$ et $A \to L$ ont même noyau si et seulement si il existe un corps F et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & & K . \\ A \arrow[r] \arrow[urr] \arrow[drr] & F \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & L \end{tikzcd}$$

En effet, si un tel diagramme existe alors

$$\mathrm{Ker}(A \to K) = \mathrm{Ker}(A \to L) = \mathrm{Ker}(A \to F)$$

puisque $F \to K$ et $F \to L$ sont injectifs en tant que morphismes de corps.

Réciproquement, supposons que $A \to K$ et $A \to L$ aient même noyau $\mathfrak{p}$. En vertu des propriétés universelles du quotient et du corps des fractions, la flèche $A \to K$ admet une unique factorisation sous la forme

$$A \to \mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p}) \hookrightarrow K,$$

et il en va de même de $A \to L$. Il existe donc un diagramme comme ci-dessus avec $F = \mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})$.

(2.3.3.3) On a en fait montré au 2.3.3.2 ci-dessus qu'un morphisme $A \to K$ appartient à la classe qui correspond à $\mathfrak{p}$ si et seulement si il se factorise par la flèche $A \to \mathrm{Frac}\ (A/\mathfrak{p})$, et que si c'est le cas cette factorisation est unique. En d'autres termes, le morphisme canonique $A \to \mathrm{Frac}\ (A/\mathfrak{p})$ est le *plus petit* élément de la classe de morphismes $A \to K$ associée à $\mathfrak{p}$.

(2.3.4) Idéaux maximaux et surjection vers un corps. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A. Le quotient $A/\mathfrak{m}$ est un corps, et la flèche $A \to A/\mathfrak{m}$ est surjective.

Réciproquement, si K est un corps et si $f : A \to K$ est surjective, alors comme K s'identifie à $A/\mathrm{Ker} f$, le noyau de f est un idéal maximal de A.

(2.3.4.1) Ainsi, un idéal maximal de A peut être vu comme une classe d'équivalence de *surjections* $A \to K$, où K est un corps, pour la relation d'équivalence «avoir même noyau». Et si $A \to K$ et $A \to L$ sont deux surjections ayant même noyau $\mathfrak{m}$, les corps K et L s'identifient tous deux à $A/\mathfrak{m}$ comme A-algèbres. Il y a donc en fait à isomorphisme canonique près *une seule* surjection dans la classe d'équivalence qui correspond à un idéal maximal donné $\mathfrak{m}$: c'est la surjection quotient de A vers $A/\mathfrak{m}$.

(2.3.4.2) Idéaux maximaux au sein des idéaux premiers. Donnons-nous un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A. Il correspond à une classe d'équivalence de morphismes $A \to K$, où K est un corps, classe dont $A \to \mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})$ est le plus petit élément. Par ce qui précède, l'idéal $\mathfrak{p}$ est maximal si et seulement si il existe, dans la classe d'équivalence qui lui correspond, un morphisme surjectif. Mais cela revient à demander que le plus petit morphisme de la classe, à savoir $A \to \mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})$, soit surjectif, c'est-à-dire encore que $\mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p}) = A/\mathfrak{p}$, et donc que $A/\mathfrak{p}$ soit un corps ; on retrouve bien (heureusement !) la définition usuelle.

(2.3.5) Exemple : le cas de $\mathbb{Z}$. Nous donnons ci-dessous la liste des idéaux premiers et maximaux de $\mathbb{Z}$, en donnant leur description du point de vue des morphismes vers les corps.

• L'idéal (0) ; il correspond à la classe des morphismes injectifs $\mathbb{Z} \to K$, c'est-à-dire des morphismes $\mathbb{Z} \to K$ où K est un corps de caractéristique nulle. Le plus petit morphisme de cette classe est l'inclusion $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$, laquelle n'est pas surjective : (0) n'est pas maximal.

• Pour tout nombre premier p, l'idéal (p) ; il correspond à la classe des morphismes $\mathbb{Z} \to K$ de noyau $p\mathbb{Z}$, c'est-à-dire des morphismes $\mathbb{Z} \to K$ où K est un corps de caractéristique p. Le plus petit morphisme de cette classe est la flèche naturelle $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p$, qui est surjective : (p) est maximal.

(2.3.6) Fonctorialité contravariante du spectre. Si A est un anneau, on note $\mathrm{Spec}\ A$ le *spectre* de A, c'est-à-dire l'ensemble des idéaux premiers de A

(nous verrons plus tard, lors du cours sur les schémas, que Spec A peut être muni d'une topologie, et même d'une structure supplémentaire).

La flèche $A \mapsto \operatorname{Spec} A$ est de manière naturelle un foncteur *contravariant*; nous allons donner deux descriptions de la flèche de Spec B vers Spec A induite par un morphisme d'anneaux $f : A \to B$.

1) *Description dans le langage classique.* À un idéal premier $\mathfrak{q}$ de B, on associe l'idéal $f^{-1}(\mathfrak{q})$ de A, dont on vérifie qu'il est premier.

2) *Description du point de vue des morphismes vers les corps.* Si K est un corps et $B \to K$ un morphisme, le noyau de la flèche composée $A \to B \to K$ ne dépend que de celui de $B \to K$ (c'est son image réciproque dans A). On peut ainsi sans ambiguïté associer à la classe d'équivalence de $B \to K$ la classe d'équivalence de la composée $A \to B \to K$.

2.4 Anneaux locaux

(2.4.1) Proposition-définition. *Soit A un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i) A possède un et un seul idéal maximal.

ii) L'ensemble des éléments non inversibles de A est un idéal de A.

Si elles sont satisfaites on dit que A est un anneau local. *Son unique idéal maximal est alors précisément l'ensemble de ses éléments non inversibles.*

Démonstration. Supposons que i) est vraie, et soit $\mathfrak{m}$ l'unique idéal maximal de A. Si un élément de a appartient à $\mathfrak{m}$, il n'est pas inversible puisque $\mathfrak{m}$ est strict par définition. Réciproquement, si a n'est pas inversible, l'idéal (a) est strict, et est donc contenu dans un idéal maximal qui ne peut être que $\mathfrak{m}$; ainsi $a \in \mathfrak{m}$, et l'ensemble des éléments non inversibles de A est exactement $\mathfrak{m}$.

Supposons maintenant que ii) est vraie, et soit $\mathfrak{m}$ l'ensemble des éléments non inversibles de A. Comme 1 est inversible, il n'appartient pas à $\mathfrak{m}$, qui est donc un idéal strict. Par ailleurs, si I est un idéal strict de A, il ne contient aucun élément inversible et est donc contenu dans $\mathfrak{m}$. Il s'ensuit aussitôt que ce dernier est l'unique idéal maximal de A. □

(2.4.2) Exemple trivial. Tout corps est un anneau local, dont (0) est l'unique idéal maximal.

(2.4.3) Exemple géométrique. Nous donner un exemple qui illustre la pertinence de l'épithète ≪local≫. Soit X un espace topologique et soit $x \in X$. On considère l'ensemble des couples (U, f) où U est un voisinage ouvert de x et $f \in \mathscr{C}^0(U, \mathbb{R})$, sur lequel on met la relation d'équivalence suivante : $(U, f) \sim (V, g)$ si et seulement si il existe un voisinage ouvert W de x dans $U \cap V$ tel que $f_{|W} = g_{|W}$. L'ensemble quotient A hérite alors d'une structure d'anneau naturelle. En bref, A est l'ensemble des fonctions continues (à valeurs réelles) définies au voisinage de x, deux fonctions appartenant à A étant considérées comme égales si elles coïncident au voisinage de x ; on dit aussi que A est l'anneau des *germes de fonctions continues en x*. L'évaluation en x induit un morphisme $f \mapsto f(x)$ de A dans $\mathbb{R}$.

Ce morphisme est surjectif, grâce aux fonctions constantes. Son noyau $\mathfrak{m}$ est donc un idéal maximal de A. Nous allons montrer que c'est le seul ; il suffit, par le critère donné ci-dessus, de vérifier que $\mathfrak{m}$ est exactement l'ensemble des éléments non inversibles de A. Soit $f \in A \setminus \mathfrak{m}$. Choisissons un voisinage ouvert U de x sur lequel f est définie. Comme $f \notin \mathfrak{m}$, on a $f(x) \neq 0$. Comme f est continue, il existe un voisinage ouvert V de x dans U sur lequel f ne s'annule pas. L'inverse g de f est alors une fonction continue sur V, et l'on a $fg = 1$ dans l'anneau A. Ainsi f est inversible, ce qui achève la preuve.

(2.4.4) Remarque. On aurait pu tout aussi bien remplacer X par une variété différentiable (resp. analytique complexe) et A par l'anneau des germes de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ (resp. holomorphe).

(2.4.5) Si A est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, le corps $A/\mathfrak{m}$ sera appelé le *corps résiduel* de A.

2.5 Localisation et idéaux premiers

(2.5.1) Soit A un anneau et soit S une partie multiplicative de A. Soit $f : A \to B$ un morphisme tel que $f(S) \subset B^\times$; il induit un morphisme $g : S^{-1}A \to B$, donné par la formule $\frac{a}{s} \mapsto f(a)f(s)^{-1}$.

Un calcul explicite montre que le noyau de g ne dépend que de celui de f, et réciproquement. Plus précisément :

- Ker $g = \{\frac{a}{s}\}_{a \in \mathrm{Ker}\, f}$;
- Ker $f = \{a \text{ t.q. } \frac{a}{1} \in \mathrm{Ker}\, g\}$.

(2.5.2) Idéaux premiers de $S^{-1}A$. Se donner un morphisme de $S^{-1}A$ vers un corps K revient à se donner un morphisme de A vers K qui envoie chaque élément de S sur un élément inversible de K, c'est-à-dire sur un élément non nul de K ; cela revient donc à se donner un morphisme de A vers K dont le noyau ne rencontre pas S.

Compte-tenu de la description des idéaux premiers en termes de morphismes vers un corps, et de la description explicite des noyaux donnée au 2.5.1 ci-dessus, on en déduit que

$$\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}S^{-1}A = \left\{\frac{a}{s}, a \in \mathfrak{p}, s \in S\right\} \text{ et } \mathfrak{q} \mapsto \left\{a \text{ t.q. } \frac{a}{1} \in \mathfrak{q}\right\}$$

établissent une bijection (visiblement croissante) entre l'ensemble des idéaux premiers de A ne rencontrant pas S et l'ensemble des idéaux premiers de $S^{-1}A$.

On peut également formuler cette dernière assertion comme suit : l'application Spec $S^{-1}A \to$ Spec A induite par $A \to S^{-1}A$ (*cf.* 2.3.6) est injective, et a pour image l'ensemble des idéaux premiers de A qui ne rencontrent pas S.

(2.5.3) Lemme. *Soit A un anneau et soit $f \in A$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) f est nilpotent ;
ii) pour tout corps K et tout morphisme $\varphi : A \to K$ on a $\varphi(f) = 0$;
iii) f appartient à tous les idéaux premiers de A.

En d'autres termes, le nilradical de A est l'intersection de tous les idéaux premiers de A.

Démonstration. L'équivalence de ii) et iii) résulte de la caractérisation des idéaux premiers comme noyaux de morphismes vers un corps. L'implication i)⇒ii) est évidente. Supposons maintenant que iii) est vraie, et montrons i).

L'ensemble des idéaux premiers de A_f est d'après 2.5.2 en bijection avec l'ensemble des idéaux premiers de A qui ne rencontrent pas $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire avec l'ensemble des idéaux premiers de A qui ne contiennent pas f. Puisqu'on est sous l'hypothèse iii), cet ensemble est vide.

En conséquence, A_f n'a aucun idéal premier, ce qui signifie qu'il est nul. Il s'ensuit en vertu 2.2.5.2 que f est nilpotent. □

(2.5.4) Localisé d'un anneau en un idéal premier. Soit A un anneau, et soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Le sous-ensemble $S = A \setminus \mathfrak{p}$ de A en est une partie multiplicative, et le localisé $S^{-1}A$ est le plus souvent noté $A_\mathfrak{p}$. On l'appelle le *localisé de A en l'idéal $\mathfrak{p}$*.

(2.5.4.1) En vertu de 2.5.2, l'ensemble des idéaux premiers de $A_\mathfrak{p}$ est en bijection croissante avec l'ensemble des idéaux premiers de A ne rencontrant pas S, c'est-à-dire contenus dans $\mathfrak{p}$. Or cet ensemble admet un plus grand élément, à savoir $\mathfrak{p}$. On en déduit que $A_\mathfrak{p}$ possède un et un seul idéal maximal : celui qui correspond à $\mathfrak{p}$. D'après la description explicite de la bijection évoquée (voir *loc. cit.*), cet idéal est $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} = \{\frac{a}{s}, a \in \mathfrak{p}, s \notin \mathfrak{p}\} \subset A_\mathfrak{p}$.

(2.5.4.2) Le morphisme composé $A \to A/\mathfrak{p} \hookrightarrow \mathrm{Frac}\,(A/\mathfrak{p})$ envoie tout élément de S sur un élément non nul, et partant inversible, de Frac $(A/\mathfrak{p})$. Il se factorise donc de manière unique par $A_\mathfrak{p}$. Le morphisme correspondant de $A_\mathfrak{p}$ vers Frac $(A/\mathfrak{p})$ est par construction donné par la formule $\frac{a}{s} \mapsto \frac{\bar{a}}{\bar{s}}$; on voit immédiatement que son noyau est $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. Il est par ailleurs surjectif, puisque tout élément de Frac $(A/\mathfrak{p})$ est de la forme $\frac{\bar{a}}{\bar{s}}$ avec $a \in A$ et $s \notin \mathfrak{p}$.

En conséquence, le corps résiduel $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ s'identifie naturellement à Frac $(A/\mathfrak{p})$.

(2.5.5) Exemples.

(2.5.5.1) Supposons A intègre.

Si $\mathfrak{p} = \{0\}$, l'anneau $A_\mathfrak{p}$ n'est autre par définition que le corps des fractions de A.

En général, comme $0 \notin S$, la relation des produits en croix qui définit l'égalité dans $A_\mathfrak{p}$ est la même que celle qui définit l'égalité dans Frac A ; ainsi, $A_\mathfrak{p}$ apparaît comme le *sous-anneau* de Frac A constitué des fractions qui admettent une écriture avec un dénominateur n'appartenant pas à $\mathfrak{p}$.

(2.5.5.2) Soit p un nombre premier. Le localisé $\mathbb{Z}_{(p)}$ est d'après ce qui précède le sous-anneau de $\mathbb{Q}$ égal à

$$\left\{\frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}\right\}.$$

(2.5.6) Remarque. Le langage des schémas permet, pour tout anneau A et tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, d'interpréter $A_\mathfrak{p}$ comme un anneau de germes de fonctions, analogue à ceux vus plus haut (exemple 2.4.3 et remarque 2.4.4), et donc d'y penser en termes géométriques.

2.6 Modules sur un anneau : généralités

(2.6.1) Soit A un anneau. Nous ne rappellerons pas ici les définitions des objets de base de la théorie des A-modules, à savoir les A-modules eux-mêmes, les sous-modules, les applications A-linéaires, les familles libres et génératrices, les bases, les supplémentaires.... Ce sont *mutatis mutandis* les mêmes qu'en algèbre linéaire.

(2.6.2) Il arrivera souvent dans la suite qu'on manipule des expressions de la forme $\sum_{i \in I} m_i$, où les m_i sont des éléments d'un A-module M fixé. Il sera toujours implicitement supposé, dans une telle écriture, que *presque tous les m_i sont nuls.* Elle n'aurait sinon aucun sens : *en algèbre, on ne sait faire que des sommes finies*; pour donner un sens à des sommes infinies, il est nécessaire d'introduire des structures de nature topologique.

(2.6.3) Attention ! On prendra garde que certains énoncés usuels portant sur les espaces vectoriels deviennent faux en général pour les modules sur un anneau quelconque (ce qui empêche leurs preuves de s'étendre à ce nouveau contexte est le plus souvent qu'elles font appel à un moment ou un autre à l'inversion d'un scalaire non nul). Donnons quelques exemples.

(2.6.3.1) Il est faux en général qu'un module possède une base. Par exemple, le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ n'en possède pas. En effet, s'il en admettait une elle serait non vide (puisqu'il est non nul), et comprendrait donc au moins un élément qui serait annulé par 2, contredisant ainsi sa liberté.

(2.6.3.2) Soit A un anneau. On dit qu'un A-module M est *libre* s'il possède une base. On vient de voir que ce n'est pas automatique; mais lorsque c'est le cas *et lorsque A est non nul* on démontre que, comme en algèbre linéaire, toutes les bases de M ont même cardinal, appelé *rang* de M.

Il faut faire attention au cas de l'anneau nul $\{0\}$. Le seul module sur celui-ci est le module trivial $\{0\}$, et *toute* famille $(e_i)_{i \in I}$ d'éléments de ce module (qui vérifie nécessairement $e_i = 0$ pour tout i) en est une base, indépendamment du cardinal de I (il peut être vide, fini, infini dénombrable ou non, etc.). Nous laissons au lecteur qu'amusent les manipulations logiques dans les cas un peu extrêmes le soin de prouver cette assertion.

(2.6.3.3) Soit A un anneau et soit M un A-module libre de rang fini. Il est faux en général qu'un endomorphisme injectif de M lui-même soit bijectif[1]. Par exemple, $\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang 1 sur lui-même, et la multiplication par 2 en est un endomorphisme injectif non surjectif.

(2.6.3.4) Soit A un anneau. Il est faux en général que tout sous-module d'un A-module M admette un supplémentaire dans M, même si M est libre. Par exemple, le lecteur pourra démontrer à titre d'exercice que le sous-module $2\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ n'a pas de supplémentaire dans $\mathbb{Z}$.

(2.6.4) À propos des sommes directes externes et internes.

(2.6.4.1) La somme directe interne. Soit A un anneau et soit M un A-module; soit (M_i) une famille de sous-modules de M. La *somme des M_i* est le

1. Nous verrons par contre un peu plus loin qu'un endomorphisme *surjectif* d'un tel M est toujours bijectif.

sous-module de M constitué des éléments de la forme $\sum m_i$ où $m_i \in M_i$ pour tout i ; on le note $\sum M_i$.

On dit que la somme des M_i est *directe*, et l'on écrit $\sum M_i = \bigoplus M_i$, si pour tout élément m de $\sum M_i$ l'écriture $m = \sum m_i$ est unique. Il suffit de le vérifier pour $m = 0$, c'est-à-dire de s'assurer que $(\sum m_i = 0) \Rightarrow (\forall i\ m_i = 0)$.

(2.6.4.2) La somme directe externe. Soit $(M_i)_{i \in I}$ une famille de A-modules, qui ne sont pas *a priori* plongés dans un même A-module. Soit N le sous-module de $\prod M_i$ formé des familles (m_i) telles que $m_i = 0$ pour presque tout i. Pour tout $i \in I$, on dispose d'une injection naturelle $h_i : M_i \hookrightarrow N$ qui envoie un élément m sur la famille (m_j) avec $m_j = 0$ si $j \neq i$ et $m_i = m$. Il est immédiat que $N = \bigoplus h_i(M_i)$. On a ainsi construit un module qui contient une copie de chacun des M_i, et est égal à la somme directe desdites copies. On dit que N est la somme directe *externe* des M_i, et on le note encore $\bigoplus M_i$.

(2.6.4.3) Caractérisation de la somme directe externe par le foncteur qu'elle représente. On vérifie immédiatement que la famille $(\bigoplus M_i, (h_i)_{i \in I})$ définie ci-dessus représente le foncteur covariant de A-Mod dans Ens qui envoie un A-module L sur $\prod \operatorname{Hom}(M_i, L)$. En d'autres termes : *se donner une application linéaire $\bigoplus M_i$ vers un A-module L, c'est se donner une application linéaire de chacun des M_i vers L.*

(2.6.4.4) Liens entre les sommes directes interne et externe. Soit M un A-module et soit (M_i) une famille de sous-modules de M. On dispose pour tout i de l'inclusion $u_i : M_i \hookrightarrow M$. D'après le 2.6.4.3 ci-dessus, la famille des u_i définit une application linéaire u de la somme directe *externe* $\bigoplus M_i$ vers M. On vérifie aussitôt que les M_i sont en somme directe dans M au sens de 2.6.4.1 si et seulement si u est injective, et que $M = \bigoplus M_i$ au sens de 2.6.4.1 si et seulement si u est bijectif.

2.7 Endomorphismes d'un module et lemme de Nakayama

(2.7.1) Proposition. *Soit A un anneau, soit $n \in \mathbb{N}$ et soit M un A-module possédant une famille génératrice de cardinal n. Soit I un idéal de A, et soit u un endomorphisme de M tel que $u(M) \subset IM := \{\sum a_i m_i, a_i \in I, m_i \in M\}$. Il existe alors une famille $(a_1, \ldots, a_n)$ telle que a_j appartienne à I^j pour tout j, et telle que*

$$u^n + a_1 u^{n-1} + \ldots + a_1 u + a_n \mathrm{Id} = 0.$$

(2.7.1.1) Remarque. Lorsque $I = A$, la condition $u(M) \subset IM$ est automatiquement satisfaite. La proposition assure donc entre autres que tout endomorphisme de M annule un polynôme unitaire de degré n à coefficients dans A.

(2.7.1.2) *Démonstration de la proposition 2.7.1.* Choisissons une famille génératrice $(e_1, \ldots, e_n)$ de M. Comme $u(M) = IM$, on a pour tout $m \in M$ une égalité de la forme $u(m) = \sum a_\ell m_\ell$ avec $a_\ell \in I$ pour tout ℓ. En écrivant chacun des m_ℓ comme combinaison linéaire des e_i, on voit qu'on peut écrire $u(m)$ comme combinaison linéaire des e_i *à coefficients dans* I.

En particulier, il existe une famille (a_{ij}) d'éléments de I tels que l'on ait $u(e_i) = \sum_i a_{ij}e_i$ pour tout j. Soit X la matrice $(a_{ij}) \in M_n(A)$; c'est en quelque sorte *une* matrice de u dans la *famille génératrice* $(e_1, \ldots, e_n)$.

Un calcul immédiat (le même que celui effectué en algèbre linéaire) montre qu'on a pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in A^n$ l'égalité $u(\sum \lambda_i e_i) = \sum \mu_i e_i$ avec

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ . \\ . \\ . \\ \mu_n \end{pmatrix} = X \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ . \\ . \\ . \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Par récurrence, on en déduit que l'on a pour tout entier r et pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in A^n$ l'égalité $u^r(\sum \lambda_i e_i) = \sum \nu_i e_i$ avec

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ . \\ . \\ . \\ \nu_n \end{pmatrix} = X^r \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ . \\ . \\ . \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

En vertu du théorème de Cayley-Hamilton [2], on a $\chi_X(X) = 0$ et donc par ce qui précède $\chi_X(u) = 0$. Mais comme les a_{ij} appartiennent à I, le polynôme χ_X est de la forme $T^n + a_1T^{n-1} + \ldots + a_n$ avec $a_j \in I^j$ pour tout j, ce qui achève la démonstration. □

(2.7.2) Lemme de Nakayama. *Soit A un anneau, soit I un idéal de A et soit M un A-module de type fini. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) il existe un élément a de A congru à 1 modulo I et tel que $aM = \{0\}$;

ii) $M = IM$.

Démonstration. Supposons que i) soit vraie, écrivons $a = 1+b$ avec $b \in I$. On a pour tout $m \in M$ l'égalité $(1 + b)m = 0$, et donc $m = -bm$. Ainsi, $M = IM$.

Supposons que ii) soit vraie, et appliquons la proposition 2.7.1 avec $u = \mathrm{Id}_M$ (c'est possible puisque M est de type fini). Elle assure l'existence d'une famille (a_j) avec $a_j \in I^j$ pour tout j telle que

$$\mathrm{Id}_M^n + a_1\mathrm{Id}_M^{n-1} + \ldots + a_0\mathrm{Id}_M = 0.$$

En l'appliquant à un élément m de M, on obtient $(1 + a_1 + \ldots + a_n)m = 0$; ainsi, i) est vraie avec $a = a_1 + \ldots + a_n$. □

Ce lemme est surtout utile en pratique *via* son corollaire suivant – qui n'est autre que la version originelle du lemme de Nakayama.

2. Vous ne l'avez peut-être rencontré que sur un corps, mais sa validité dans ce cadre entraîne sa validité pour tout anneau. En effet, s'il est vrai sur tout corps, il est vrai en particulier pour la matrice $(X_{ij}) \in M_n(\mathbb{Q}(X_{ij}))$; il s'énonce dans ce cas précis comme une identité polynomiale à coefficients dans $\mathbb{Z}$ en les (X_{ij}). Cette identité débouche par spécialisation pour toute matrice (α_{ij}) à coefficients dans un anneau quelconque sur la ≪même≫ identité pour les α_{ij}... laquelle est précisément le théorème de Cayley-Hamilton pour (α_{ij}).

(2.7.3) Corollaire. *Soit A un anneau local d'unique idéal maximal $\mathfrak{m}$, et soit M un A-module de type fini tel que $M = \mathfrak{m}M$. On a alors $M = \{0\}$.*

Démonstration. Le lemme de Nakayama assure qu'il existe un élément a congru à 1 modulo $\mathfrak{m}$ tel que $aM = \{0\}$. Étant non nul modulo $\mathfrak{m}$, l'élément a appartient à $A^\times$; il s'ensuit que M est trivial. □

(2.7.4) Donnons une conséquence très utile de ce corollaire ; on désigne toujours par A un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$.

(2.7.4.1) Soit M un A-module de type fini, soit N un A-module et soit $f : N \to M$ une application A-linéaire. Pour que f soit surjective, il faut et il suffit que l'application induite $N/\mathfrak{m}N \to M/\mathfrak{m}N$ le soit.

C'est en effet clairement nécessaire. Supposons maintenant que la flèche $N/\mathfrak{m}N \to M/\mathfrak{m}N$ est surjective, et soit $m \in M$. Par hypothèse, on peut écrire

$$m = f(n) + \sum a_i m_i$$

où $n \in N$, où les m_i appartiennent à M et où les a_i appartiennent à $\mathfrak{m}$. Il s'ensuit que m est égal à $\sum a_i m_i$ modulo $f(N)$. En conséquence, le module quotient $M/f(N)$ vérifie l'égalité

$$M/f(N) = \mathfrak{m}M/f(N).$$

Comme il est de type fini puisque c'est déjà le cas de M, il est nul d'après le corollaire 2.7.3 ci-dessus. Ainsi, $f(N) = M$ et f est surjective.

(2.7.4.2) Soit $(e_i)_{i\in i}$ une famille d'éléments de M. Elle engendre le module M si et seulement si les $\overline{e_i}$ engendrent le $A/\mathfrak{m}$-espace vectoriel $M/\mathfrak{m}M$.

C'est en effet une simple application du 2.7.4.1 ci-dessus, au cas où N est le module $A^{(I)}$ formé des familles $(a_i)_{i\in I}$ de A^I dont presque tous les éléments sont nuls, et où f est l'application $(a_i) \mapsto \sum a_i e_i$.

Nous allons maintenant donner une application astucieuse et très frappante du lemme de Nakayama.

(2.7.5) Corollaire. *Soit A un anneau, soit M un A-module de type fini et soit u un endomorphisme surjectif de M. L'endomorphisme u est alors bijectif et u^{-1} est un polynôme en u.*

Démonstration. La loi externe

$$(P, m) \mapsto P(u)(m)$$

définit sur le groupe abélien $(M, +)$ une structure de $A[X]$-module qui prolonge celle de A-module, et la multiplication par X est égale à l'endomorphisme u. Par hypothèse, M est de type fini comme A-module ; il l'est *a fortiori* comme $A[X]$-module.

La surjectivité de u signifie que pour tout $m \in M$, il existe $n \in M$ tel que $Xn = m$. En conséquence, $M = (X)M$.

Le lemme de Nakayama assure alors qu'il existe un polynôme P congru à 1 modulo X tel que $PM = 0$. Écrivons $P = 1 + XQ$, avec $Q \in A[X]$. Soit $m \in M$. On a $Pm = 0$, soit $P(u)(m) = 0$, soit encore $(\mathrm{Id} + uQ(u))(m) = 0$. Ceci valant pour tout m, il vient $\mathrm{Id} = u(-Q(u))$. Comme deux polynômes en u commutent, on aussi $\mathrm{Id} = (-Q(u))u$. Ainsi, u est bijectif et $u^{-1} = -Q(u)$. □

2.8 Le produit tensoriel : cas de deux modules

On fixe pour toute cette section un anneau A.

(2.8.1) Soient M et N deux A-modules. Avant de définir rigoureusement le produit tensoriel de M et N, expliquons intuitivement le but de sa construction. On cherche à fabriquer la loi bilinéaire *la plus générale possible* de source $M\times N$, c'est-à-dire à donner un sens au produit d'un élément de M par un élément de N, en ne lui imposant rien d'autre que la bilinéarité.

Comme à chaque fois que l'on cherche à construire un objet obéissant à une liste limitative de contraintes, la définition rigoureuse de l'objet en question s'exprime au moyen d'une propriété universelle ou, si l'on préfère, du foncteur qu'il représente.

Pour tout A-module P, on note $\mathrm{Bil}_A(M\times N,P)$ l'ensemble des applications bilinéaires de $M\times N$ vers P.

(2.8.2) Définition – proposition. *Le foncteur covariant $P\mapsto \mathrm{Bil}_A(M\times N,P)$ de A-Mod dans Ens est représentable, et son représentant est noté*

$$(M\otimes_A N,(m,n)\mapsto m\otimes n).$$

On dit que $M\otimes_A N$ est le produit tensoriel *de M et N au-dessus de A.*

Démonstration. On part d'un A-module libre L ayant une base $(e_{m,n})$ indexée par les éléments de $M\times N$, et l'on note L_0 le sous-module de L engendré par les

$$e_{m,n+\lambda n'}-e_{m,n}-\lambda e_{m,n'} \text{ et } e_{m+\lambda m',n}-e_{m,n}-\lambda e_{m',n}$$

pour (m,m',n,n',λ) parcourant $M^2\times N^2\times A$. On pose alors

$$M\otimes_A N=L/L_0, \text{ et } m\otimes n=\overline{e_{m,n}} \text{ pour tout } (m,n)\in M\times N.$$

Notons que par construction, les $m\otimes n$ engendrent le A-module $M\otimes_A N$.

Montrons que $(M\otimes_A N,(m,n)\mapsto m\otimes n)$ représente F. Soit P un A-module et soit $b\in \mathrm{Bil}_A(M\times N,P)$. une application bilinéaire. Il s'agit de prouver qu'il existe une et une seule application linéaire $\lambda : M\otimes_A N\to P$ telle que $\lambda(m\otimes n)=b(m,n)$ pour tout (m,n).

Unicité. Elle provient simplement du fait que la famille $(m\otimes n)$ est génératrice.

Existence. Soit φ l'unique application A-linéaire de L dans P envoyant $e_{m,n}$ sur $b(m,n)$ pour tout (m,n). Comme b est bilinéaire, l'application φ s'annule sur les éléments de L_0 ; elle induit donc par passage au quotient une application linéaire $\lambda : M\otimes_A N\to P$, et l'on a pour tout $(m,n)\in M\times N$ les égalités

$$\lambda(m\otimes n)=\lambda(\overline{e_{m,n}})=\varphi(e_{m,n})=b(m,n),$$

ce qui achève la démonstration. □

(2.8.3) Commentaires et premières propriétés.

(2.8.3.1) La construction du produit tensoriel n'est guère subtile ; elle consiste à imposer par décret les propriétés requises. Elle n'est en pratique *jamais* utilisée, et il faut à tout prix éviter de penser au produit tensoriel comme au quotient d'un module libre monstrueux.

Il y a toutefois une chose à en retenir : le fait que $M \otimes_A N$ est engendré (comme A-module, ou même comme groupe abélien puisque l'on a pour tout (a, m, n) les égalités $a(m \otimes n) = (am) \otimes n$) par les éléments de la forme $m \otimes n$, qu'on appelle les *tenseurs purs*.

(2.8.3.2) L'application bilinéaire universelle $(m, n) \mapsto m \otimes n$ a tendance à coder les propriétés (de nature linéaire) vérifiées par *toutes* les applications bilinéaires de source $M \times N$. Illustrons cette pétition de principe par un exemple : nous allons montrer que $\sum m_i \otimes n_i = 0$ si et seulement si pour *tout* A-module P et *toute* application bilinéaire $b : M \times N \to P$, on a $\sum b(m_i, n_i) = 0$.

Supposons que pour tout A-module P et toute application bilinéaire $b : M \times N \to P$, on ait $\sum b(m_i, n_i) = 0$. C'est en particulier le cas pour l'application $\otimes$, et il vient $\sum m_i \otimes n_i = 0$.

Supposons que $\sum m_i \otimes n_i = 0$. Soit P un A-module et soit $b \in \mathrm{Bil}_A(M \times N, P)$. L'application b induit une application A-linéaire $\lambda : M \otimes_A N \to P$ telle que $\lambda(m \otimes n) = b(m, n)$ pour tout n. On a donc

$$\sum b(m_i, n_i) = \sum \lambda(m_i \otimes n_i) = \lambda(\sum m_i \otimes n_i) = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

(2.8.3.3) Exercice. Dans le même esprit, montrez que $M \otimes_A N$ est nul si et seulement si toute application bilinéaire de source $M \times N$ est nulle.

(2.8.4) Premiers exemples.

(2.8.4.1) Exemple trivial. Si M est un A-module quelconque alors

$$\{0\} \otimes M = M \otimes \{0\} = \{0\} \ :$$

cela vient du fait que le produit tensoriel est engendré par un tenseur pur, et qu'un tenseur pur dont l'un des deux facteurs est nul est lui-même nul.

(2.8.4.2) Symétrie du produit tensoriel. Soient M et N deux A-modules. L'application de $M \times N$ dans $N \otimes_A M$ qui envoie (m, n) sur $n \otimes m$ est bilinéaire, et induit donc une application A-linéaire $M \otimes_A N \to N \otimes_A M$ qui envoie $m \otimes n$ sur $n \otimes m$ pour tout (n, m).

On a de même une application A-linéaire $v : N \otimes_A M \to M \otimes_A N$ qui envoie $n \otimes m$ sur $m \otimes n$. Il est immédiat que $u \circ v = \mathrm{Id}_{N \otimes_A M}$ et $v \circ u = \mathrm{Id}_{M \otimes_A N}$ (le vérifier sur les tenseurs purs). Ainsi, u et v sont deux isomorphismes réciproques l'un de l'autre.

(2.8.4.3) Construction fonctorielle de u. Soit P un A-module. L'application

$$b \mapsto [(n, m) \mapsto b(m, n)]$$

induit un isomorphisme fonctoriel en P entre l'ensemble des applications bilinéaires de $M \times N$ vers P et celui des applications bilinéaires de $N \times M$ vers P. Par le lemme de Yoneda, cet isomorphisme est induit par une bijection A-linéaire de $M \otimes_A N$ vers $N \otimes_A M$; on vérifie immédiatement que cette bijection n'est autre que u.

(2.8.4.4) On prendra garde qu'en général, le produit tensoriel de deux modules non nuls peut très bien être nul. Nous allons montrer par exemple que

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = 0.$$

Pour cela, il suffit de montrer que $a \otimes b = 0$ pour tout $a \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et tout $b \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Donnons-nous donc un tel couple (a, b). On a

$$a \otimes b = (3-2)a \otimes b = 3a \otimes b - 2a \otimes b = a \otimes 3b - 2a \otimes b = 0,$$

puisque $2a = 0$ et $3b = 0$.

Plus généralement,$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} = 0$ dès que p et q sont premiers entre eux : on raisonne comme ci-dessus, en remplaçant l'égalité $3 - 2 = 1$ par une relation de Bezout entre p et q.

(2.8.5) Produit tensoriel par un module libre de rang 1**.** Soit N un A-module, et soit M un A-module libre de rang 1. Soit e une base de M.

(2.8.5.1) Soit φ l'application linéaire de N vers $M \otimes_A N$ donnée par la formule $n \mapsto e \otimes n$. Nous allons montrer que c'est un isomorphisme en exhibant réciproque.

Soit b l'application de $M \times N$ dans M qui envoie un couple (ae, n) sur an (elle est bien définie car e est une base de M) ; elle est bilinéaire, donc induit une application A-linéaire ψ de $M \otimes_A N$ vers N qui envoie $ae \otimes n$ sur an pour tout (a, n).

On vérifie immédiatement par leur effet sur les tenseurs purs que φ et ψ sont réciproques l'une de l'autre.

(2.8.5.2) Un cas particulier important. On déduit de ce qui précède que pour tout A-module N, l'application linéaire $n \mapsto 1 \otimes n$ induit un isomorphisme $N \simeq A \otimes_A N$.

(2.8.5.3) Construction fonctorielle de φ. Soit P un A-module. L'application

$$b \mapsto [n \mapsto b(e, n)]$$

définit une bijection fonctorielle en P entre $\mathrm{Bil}_A(M \times N, P)$ et $\mathrm{Hom}_A(N, P)$, de réciproque

$$\lambda \mapsto [(ae, n) \mapsto a\lambda(n)].$$

Par le lemme de Yoneda, cette collection de bijections est induite par une application A-linéaire de N vers $N \otimes_A M$, dont on vérifie qu'elle n'est autre que φ.

(2.8.6) Produit tensoriel de deux modules libres de rang 1. Soient maintenant M et N deux A-modules libres de rang 1. Donnons-nous une base e de M et une base f de N.

(2.8.6.1) Il résulte de 2.8.5.1 que la formule $n \mapsto n \otimes e$ définit un isomorphisme $N \simeq M \otimes_A N$. Comme $a \mapsto af$ définit un isomorphisme $A \simeq M$, on voit que $a \mapsto ae \otimes f$ définit un isomorphisme $\iota : A \simeq M \otimes_A N$. En d'autres termes $M \otimes_A N$ est libre de rang 1 de base $e \otimes f$.

(2.8.6.2) Construction fonctorielle de ι. Soit P un A-module. L'application

$$b \mapsto b(e, f)$$

définit une bijection fonctorielle en P entre $\mathrm{Bil}_A(M \times N, P)$ et P, de réciproque

$$p \mapsto [(ae, bf) \mapsto abp].$$

Comme par ailleurs $p \mapsto [a \mapsto ap]$ définit une bijection fonctorielle en P entre P et $\mathrm{Hom}_A(A, P)$ (de réciproque $\lambda \mapsto \lambda(1)$), on obtient par composition une bijection fonctorielle en P entre $\mathrm{Bil}_A(M \times N, P)$ et $\mathrm{Hom}_A(A, P)$.

Par le lemme de Yoneda, cette collection de bijections est induite par une bijection A-linéaire de A vers $M \otimes_A N$, dont on vérifie qu'elle n'est autre que ι.

(2.8.7) Fonctorialité du produit tensoriel en ses deux arguments. Soient M, M', N et N' quatre A-modules, et soient $f : M \to M'$ et $g : N \to N'$ deux applications A-linéaires.

(2.8.7.1) L'application de $M \times N$ vers $M' \otimes_A N'$ donnée par la formule $(m, n) \mapsto (f(m) \otimes g(n))$ est bilinéaire. Elle induit donc une application A-linéaire $f \otimes g : M \otimes_A N \to M' \otimes_A N'$, telle que $(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$ pour tout (m, n). On vérifie que $(f, g) \mapsto f \otimes g$ est elle-même une application bilinéaire de $\mathrm{Hom}_A(M, M') \times \mathrm{Hom}_A(N, N')$ vers $\mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, M' \otimes_A N')$.

(2.8.7.2) Description fonctorielle de $f \otimes g$. Soit P un A-module. La formule

$$b \mapsto [(m, n) \mapsto b(f(m), g(n))]$$

définit une application de $\mathrm{Bil}_A(M' \times N', P)$ vers $\mathrm{Bil}_A(M \times N, P)$ qui est fonctorielle en P.

Par le lemme de Yoneda, cette collection d'applications est induite par une application A-linéaire de $M \otimes_A N$ vers $M' \otimes_A N'$, dont on vérifie qu'elle n'est autre que $f \otimes g$.

(2.8.8) Produit tensoriel et somme directe. Soit M un A-module et soit (N_i) une famille de A-modules. Pour tout i, on note u_i l'injection naturelle de N_i dans $\bigoplus N_i$.

(2.8.8.1) La famille des $\mathrm{Id}_M \otimes u_i : M \otimes_A N_i \to M \otimes_A (\bigoplus N_i)$ induit un morphisme $\chi : (\bigoplus M \otimes_A N_i) \to M \otimes_A (\bigoplus N_i)$. Nous allons montrer que c'est un isomorphisme, en construisant sa réciproque.

L'application de $M \times (\bigoplus N_i)$ dans $\bigoplus M \otimes_A N_i$ donnée par la formule $(m, (n_i))_i \mapsto (m \otimes n_i)_i$ est bilinéaire. Elle induit dès lors une application linéaire ρ de $M \otimes_A (\bigoplus N_i)$ vers $\bigoplus M \otimes_A N_i$. On vérifie immédiatement que χ et ρ sont inverses l'une de l'autre.

(2.8.8.2) Construction fonctorielle de χ. La somme directe $\bigoplus M \otimes_A N_i$ représente le foncteur $\prod_i h_{M \otimes_A N_i}$, c'est-à-dire encore le foncteur qui envoie un A-module P sur $\prod \mathrm{Bil}_A(M \times N_i, P)$.

Soit P un A-module. La formule

$$b \mapsto (b_{|M \times N_i})_i$$

définit une bijection fonctorielle en P de $\mathrm{Bil}_A(M \times (\bigoplus N_i), P)$ vers le produit $\prod \mathrm{Bil}_A(M \times N_i, P)$, de réciproque

$$(b_i) \mapsto [(m, (n_i)_i) \mapsto \sum b_i(m, n_i)].$$

Par le lemme de Yoneda, cette collection de bijections est induite par une bijection A-linéaire de $\bigoplus(M \otimes_A N_i)$ vers $M \otimes_A (\bigoplus N_i)$, dont on vérifie qu'elle n'est autre que χ.

(2.8.9) Produit tensoriel de modules libres. Soient M et N deux A-modules libres, de bases respectives (e_i) et (f_j) ; on a les égalités $M = \bigoplus A \cdot e_i$ et $N = \bigoplus A \cdot f_j$.

On déduit alors de 2.8.8.1 que $M \otimes_A N \simeq \bigoplus_j M \otimes_A (A \cdot f_j)$. En réappliquant 2.8.8.1 à chacun des sommandes (et en utilisant la symétrie du produit tensoriel, *cf.* 2.8.4.2), il vient $M \otimes_A N \simeq \bigoplus_{i,j} (A \cdot e_i) \otimes_A (A \cdot f_j)$.

Mais en vertu de 2.8.6.1, le module $(A \cdot e_i) \otimes_A (A \cdot f_j)$ est pour tout (i, j) libre de base $e_i \otimes f_j$. Il s'ensuit que $M \otimes_A N$ est libre de base $(e_i \otimes f_j)_{i,j}$.

(2.8.10) Ainsi, le produit tensoriel de deux A-modules libres M et N est libre, et si A est non nul le rang de $M \otimes_A N$ est égal au produit du rang de M et du rang de N.

Il s'ensuit que *si A est non nul, le produit tensoriel de deux A-modules libres non nuls est toujours non nul.* Notez un cas particulier important : le produit tensoriel de deux espaces vectoriels non nuls sur un corps k est non nul. Nous aurons plusieurs fois l'occasion de l'utiliser.

(2.8.11) Brefs rappels sur les suites exactes de A-modules. Soient n^- et n^+ deux éléments de $\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et soit

$$S = \ldots \to M_i \to M_{i+1} \to M_{i+2} \to \ldots$$

une suite de morphismes de A-modules, où i parcourt l'ensemble I des entiers relatifs compris entre n^- et n^+.

Soit i un élément de I tel que $i-1$ et $i+1$ appartiennent à I. On dit que la suite S est *exacte en M_i* si le noyau de $M_i \to M_{i+1}$ est égal à l'image de $M_{i-1} \to M_i$. On dit que S est *exacte* si elle est exacte en M_i pour tout i tel que $i-1$ et $i+1$ appartiennent à I (les indices extrêmes, s'ils existent, ne comptent donc pas).

Il résulte de la définition que dans une suite exacte, la composée de deux flèches successives est toujours nulle.

Donnons quelques exemples.

(2.8.11.1) La suite

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

est exacte si et seulement si g est surjective et $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$.

(2.8.11.2) La suite

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

est exacte si et seulement si f est injective et $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$.

(2.8.11.3) La suite

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

est exacte si et seulement si f est injective, g est surjective et $\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}\, f$.

(2.8.12) Soit B un anneau, et soit F un foncteur covariant de A-Mod vers B-Mod.

(2.8.12.1) On dit que F est *exact à gauche* (resp. *exact à droite*, resp. *exact*) si et seulement si il satisfait les conditions suivantes :

- F est *additif*, c'est-à-dire que pour tout couple (M, N) de A-modules l'application naturelle $\mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_B(F(M), F(N))$ est un morphisme de groupes (à titre d'exercice, vous pouvez vérifier que cela entraîne la commutation de F aux sommes directes finies) ;
- pour toute suite exacte S de la forme

$$0 \to M' \to M \to M'' \text{ (resp. } M' \to M \to M'' \to 0, \text{ resp. } 0 \to M' \to M \to M'' \to 0),$$

la suite $F(S)$ est exacte.

(2.8.12.2) Il est immédiat que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) F est exact ;
ii) F est exact à gauche et transforme les surjections en surjections ;
iii) F est exact à droite et transforme les injections en injections.

(2.8.13) Proposition. *Soit M un A-module. Le foncteur $N \mapsto M \otimes_A N$ est exact à droite.*

Démonstration. Que $N \mapsto M \otimes_A N$ soit un foncteur additif résulte de 2.8.7.1. Soit maintenant

$$N \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

une suite exacte. Nous allons montrer que

$$M \otimes_A N \xrightarrow{\mathrm{Id}_M \otimes f} M \otimes_A L \xrightarrow{\mathrm{Id}_M \otimes g} M \otimes_A P \longrightarrow 0$$

est exacte.

(2.8.13.1) *Surjectivité de* $\mathrm{Id}_M \otimes g$. Soit $(m, p) \in M \times P$. Comme g est surjective, l'élément p de P a un antécédent ℓ dans L par g.

On a alors $(\mathrm{Id}_M \otimes g)(m \otimes \ell) = m \otimes g(\ell) = m \otimes p$. Ainsi, l'image de $\mathrm{Id}_M \otimes g$ contient tous les tenseurs purs ; en conséquence, elle est égale à $M \otimes_A P$ tout entier.

(2.8.13.2) *Montrons que* $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_M \otimes g) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_M \otimes f)$. On a $g \circ f = 0$; il s'ensuit que $(\mathrm{Id}_{\mathrm{M}} \otimes g) \circ (\mathrm{Id}_M \otimes f) = 0$; autrement dit, $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_M \otimes f) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_M \otimes g)$. L'application $\mathrm{Id}_M \otimes g$ induit donc une surjection

$$M \otimes_A L/(\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_M \otimes f)) \to M \otimes_A P.$$

Pour montrer que $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_M \otimes f)$ est égale à $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_M \otimes g)$, il suffit de montrer que cette surjection est un isomorphisme ; nous allons pour ce faire exhiber sa réciproque.

Soit $m \in M$, soit $p \in P$ et soit ℓ un antécédent de p par g. La classe de $m \otimes \ell$ modulo $\mathrm{Im}_M(\mathrm{Id}_M \otimes f)$ ne dépend alors pas du choix de ℓ. En effet, si ℓ' est un (autre) antécédent de p alors $\ell - \ell' \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$. En conséquence, il existe $n \in N$ tel que $\ell - \ell' = f(n)$, et l'on a donc

$$m \otimes \ell - m \otimes \ell' = m \otimes (\ell - \ell') = m \otimes f(n) = (\mathrm{Id}_M \otimes f)(m \otimes n),$$

d'où l'assertion.

L'application de $M \times P$ vers $M \otimes_A L/(\operatorname{Im}(\mathrm{Id}_M \otimes f))$ qui envoie (m, p) sur la classe de $m \otimes \ell$ pour n'importe quel antécédent ℓ de p est donc bien définie. On voit immédiatement qu'elle est bilinéaire ; elle induit donc une application A-linéaire $\sigma : M \otimes_A P \to M \otimes_A L/(\operatorname{Im}(\mathrm{Id}_M \otimes f))$. On vérifie sur les tenseurs purs que σ est bien un inverse à gauche et à droite de la surjection

$$M \otimes_A L/(\operatorname{Im}(\mathrm{Id}_M \otimes f)) \to M \otimes_A P$$

induite par $\mathrm{Id}_M \otimes g$, ce qui achève la démonstration. □

(2.8.14) Remarque. Le foncteur $N \mapsto M \otimes_A N$ n'est pas exact à gauche en général (c'est-à-dire qu'en général, il ne préserve pas l'injectivité des flèches), comme le montre le contre-exemple suivant.

On se place dans le cas où $A = \mathbb{Z}$. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la multiplication par 2 ; c'est une application $\mathbb{Z}$-linéaire injective. Pour tout $\mathbb{Z}$-module M, l'endomorphisme $\mathrm{Id}_M \otimes f$ de $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \simeq M$ est la multiplication par 2.

Lorsque $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, celle-ci coïncide avec l'application nulle, et n'est en particulier pas injective.

(2.8.15) On dit qu'un A-module M est *plat* si le foncteur $N \mapsto M \otimes_A N$ est exact, c'est-à-dire s'il transforme les injections en injections.

(2.8.15.1) La platitude n'apparaîtra guère *dans ce cours*, et c'est essentiellement à titre culturel que nous la mentionnons. Mais il s'agit d'une notion absolument cruciale en théorie des schémas, qui en dépit de sa définition purement algébrique un peu sèche a un sens géométrique profond, et joue de surcroît un rôle technique majeur.

(2.8.15.2) Soit M un A-module libre ; il est alors plat. En effet, choisissons une base (e_i) de M, et donnons-nous une injection A-linéaire $N \hookrightarrow N'$.

On a $M = \bigoplus A \cdot e_i$. On a En conséquence, on dispose d'après 2.8.8 d'isomorphismes canoniques $M \otimes_A N \simeq \bigoplus (A \cdot e_i \otimes_A N)$, et $M \otimes_A N' \simeq \bigoplus (A \cdot e_i \otimes_A N')$. Il résulte par ailleurs de 2.8.5 que l'on a pour tout indice i des isomorphismes naturels $A \cdot e_i \otimes_A N \simeq N$, et $A \cdot e_i \otimes_A N' \simeq N'$. Il s'ensuit que $A \cdot e_i \otimes_A N \hookrightarrow A \cdot e_i \otimes_A N'$ pour tout i, puis que $M \otimes_A N \hookrightarrow M \otimes_A N'$.

(2.8.15.3) Notons un cas particulier important de ce qui précède : *tout espace vectoriel sur un corps est plat.*

(2.8.16) Quelques objets classiques revisités. Soient M et N deux A-modules. L'application de $M^\vee \times N$ dans $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ définie par la formule

$$(\varphi, n) \mapsto [m \mapsto \varphi(m)n]$$

est bilinéaire, elle induit donc une application A-linéaire φ de $M^\vee \otimes_A N$ vers $\operatorname{Hom}_A(M, N)$.

(2.8.16.1) Supposons que M et N soient tous deux *libres de rang fini.* On choisit une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ de M, et une base $(f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ de N. On déduit de la description matricielle des applications entre modules libres que $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ est libre de rang nm, une base étant donnée par la famille (u_{ij}) où u_{ij} est caractérisé par les égalités $u_{ij}(e_\ell)=\delta_{\ell i}f_j$ pour tout ℓ.

En appliquant cette remarque lorsque $N=A$, on voit que $M^\vee$ est libre de base (e_i^*), où e_i^* désigne pour tout i la i-ème forme coordonnée dans la base $(e_1,\ldots,e_m)$.

On en déduit grâce à 2.8.9 que le module $M^\vee\otimes_A N$ est libre de base $(e_i^*\otimes f_j)_{ij}$. Fixons i et j et soit $\ell\in\{1,\ldots,m\}$. On a par définition de φ l'égalité

$$\varphi(e_i^*\otimes f_j)(e_\ell)=e_i^*(e_\ell)f_j=\delta_{\ell i}f_j.$$

Autrement dit, $\varphi(e_i^*\otimes f_j)=u_{ij}$. Ainsi, φ transforme une base de $M^\vee\otimes_A N$ en une base de $\mathrm{Hom}_A(M,N)$. Par conséquent, φ est bijective.

(2.8.16.2) Commentaires. Ce qui précède est une illustration d'une démarche très fréquente en algèbre commutative, (on l'a d'ailleurs déjà implicitement rencontrée à propos de la bidualité, *cf.* l'exemple 1.3.4) :

- on commence par construire une application linéaire de manière complètement naturelle (sans aucun choix à effectuer) ;
- on montre ensuite, sous l'hypothèse qu'un ou plusieurs des modules en jeu sont libres de rang fini, que cette application est bijective ; et pour ce faire, on *choisit* une base dans laquelle on effectue les calculs.

Signalons par ailleurs que la bijection réciproque de φ (lorsque M et N sont libres de rang fini) n'admet pas de description naturelle au moyen d'une formule explicite.

(2.8.16.3) On se place maintenant dans le cas où $N=M$, et on suppose toujours que M est libre de rang fini, de base $(e_i)_{i=1,\ldots,m}$.

L'application de $M^\vee\times M$ vers A qui envoie (φ,m) sur $\varphi(m)$ étant bilinéaire, elle induit une application linéaire λ de $M^\vee\otimes_A M$ vers A, et il existe une unique application linéaire τ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} M^\vee\otimes_A M \arrow[r, "\varphi", "\simeq"'] \arrow[d, "\lambda"'] & \mathrm{End}_A(M) \arrow[dl, "\tau"] \\ A & \end{tikzcd}$$

commute. Soient i et j deux entiers compris entre 1 et m. On a

$$\tau(u_{ij})=\tau(\varphi(e_i^*\otimes e_j))=\lambda(e_i^*\otimes e_j)=e_i^*(e_j)=\delta_{ij}=\mathrm{Tr}\,(u_{ij}).$$

Ceci valant pour tout (i,j), la forme linéaire τ coïncide avec la trace, dont on a ainsi donné une définition intrinsèque (ne faisant pas intervenir un choix de base).

2.9 Produit tensoriel d'un module et d'une algèbre

(2.9.1) On désigne toujours par A un anneau, et l'on se donne une A-algèbre B. Si M est un B-module, il possède une structure naturelle (*i.e.*, fonctorielle en M) de A-module, obtenue par «restriction des scalaires» à A. S'il n'y a pas de risque de confusion, on notera encore M ce A-module ; dans le cas contraire, on écrira ${}_AM$.

(2.9.2) Soit M un A-module. Nous allons montrer que le A-module $B \otimes_A M$ possède une unique structure de B-module, étendant sa structure de A-module et telle que $\beta \cdot (b \otimes m) = (\beta b) \otimes m$ pour tout $(\beta, b, m) \in B^2 \times M$.

(2.9.2.1) L'unicité est claire : elle provient du fait que les tenseurs purs engendrent $B \otimes_A M$ comme groupe abélien.

(2.9.2.2) Montrons maintenant l'existence. Soit $\beta \in B$. L'application de $B \times M$ dans $B \otimes_A M$ qui envoie (b, m) sur $\beta b \otimes m$ est bi-A-linéaire. Elle induit donc une application A-linéaire μ_β de $B \otimes_A M$ dans lui-même. On vérifie aussitôt (en testant comme d'habitude les propriétés requise sur les tenseurs purs) que l'application $(\beta, v) \mapsto \mu_\beta(v)$ de $B \times_A (B \otimes_A M)$ vers $B \otimes_A M$ définit une structure de B-module sur $B \otimes_A M$ répondant à nos exigences.

(2.9.2.3) Si $f : M \to N$ est une application A-linéaire, il est immédiat que $\mathrm{Id}_B \otimes f : B \otimes_A M \to B \otimes_A N$ est B-linéaire. On peut donc voir $M \mapsto B \otimes_A M$ comme un foncteur de A-Mod vers B-Mod.

(2.9.2.4) On dit que le B-module $B \otimes_A M$ est déduit de M par *extension des scalaires de A à B*. Intuitivement, $B \otimes_A M$ est le B-module le plus général fabriqué à partir de M, en autorisant la multiplication externe par les éléments de B, et non plus simplement de A.

Comme toujours, ce type de description informelle se traduit rigoureusement en terme de propriété universelle, ou encore de représentation d'un foncteur ; c'est l'objet du lemme ci-dessous.

(2.9.3) Lemme. *Soit M un A-module. Le couple*

$$(B \otimes_A M, m \mapsto 1 \otimes m)$$

représente le foncteur covariant de B-Mod vers Ens qui envoie P sur $\mathrm{Hom}_A(M, P)$.

Démonstration. Notons pour commencer que $m \mapsto 1 \otimes m$ est bien A-linéaire, et donc que l'énoncé a un sens.

Soit P un B-module et soit f une application A-linéaire de M dans P. Il s'agit de montrer qu'il existe une unique application B-linéaire $g : B \otimes_A M \to P$ telle que $g(1 \otimes m) = f(m)$ pour tout $m \in M$.

(2.9.3.1) *Unicité.* Supposons qu'une telle g existe. On a alors pour tout $(b, m) \in B \times N$ les égalités

$$g(b \otimes m) = g(b \cdot (1 \otimes m)) = bg(1 \otimes m) = bf(m),$$

et comme les tenseurs purs engendrent $B \otimes_A M$ l'application g est bien uniquement déterminée.

(2.9.3.2) *Existence.* On s'inspire de la formule exhibée dans la preuve de l'unicité. L'application de $B \times M$ vers M qui envoie $b \otimes m$ sur $bf(m)$ est bi-A-linéaire, et induit donc une application A-linéaire $g : B \otimes_A M \to P$, qui envoie $b \otimes m$ sur $bf(m)$ pour tout (b, m). On vérifie immédiatement que g est B-linéaire, et l'on a bien par construction $g(1 \otimes m) = f(m)$ pour tout m. $\square$

(2.9.4) On peut reformuler le lemme ci-dessus de différentes façons.

(2.9.4.1) **Reformulation catégorique.** Le foncteur $M \mapsto B \otimes_A M$ de A-Mod vers B-Mod est adjoint à gauche au foncteur $N \mapsto_A N$ de B-Mod vers A-Mod.

(2.9.4.2) **Reformulation informelle.** Si M est un A-module, se donner une application B-linéaire de $B \otimes_A M$ dans un B-module P revient à se donner une application A-linéaire de M dans P.

(2.9.5) Nous allons maintenant décrire explicitement $B \otimes_A M$ dans un certain nombre de cas particuliers.

(2.9.5.1) Soit M un A-module libre, et soit (e_i) une base de M. On a la décomposition $M = \bigoplus A \cdot e_i$. Par commutation du produit tensoriel aux sommes directes, il vient $B \otimes_A M \simeq \bigoplus B \otimes_A A \cdot e_i$.

Par ailleurs, le A-module $A \cdot e_i$ est pour tout i libre de base e_i ; on en déduit grâce à 2.8.5 que $b \mapsto b \otimes e_i$ établit une bijection A-linéaire entre B et $B \otimes_A A \cdot e_i$. Comme $b \otimes e_i = b \cdot (1 \otimes e_i)$ pour tout (b, i), on voit finalement que $B \otimes_A M$ est libre de base $(1 \otimes e_i)$.

(2.9.5.2) Soit I un ensemble. Le A-module $A^{(I)}$ est libre ; soit (θ_i) sa base canonique (θ_i est pour tout i la famille $(\delta_{ij})_j$ de $A^{(I)}$).

Par ce qui précède, $B \otimes_A A^{(I)}$ est libre de base $1 \otimes \theta_i$. Cela signifie que

$$(b_i) \mapsto \sum b_i \cdot (1 \otimes \theta_i) = \sum b_i \otimes \theta_i$$

établit un isomorphisme entre $B^{(I)}$ et $B \otimes_A A^{(I)}$.

Modulo cet isomorphisme, l'application naturelle

$$(a_i) \mapsto 1 \otimes (a_i) = 1 \otimes \sum a_i \theta_i = \sum a_i \otimes \theta_i$$

s'identifie à la flèche $A^{(I)} \to B^{(I)}$ déduite du morphisme structural de A vers B.

(2.9.5.3) Soit maintenant M un A-module quelconque et soit (e_i) une famille génératrice de M. L'unique application linéaire de $A^{(I)}$ dans M qui envoie θ_i sur e_i pour tout i (c'est celle qui envoie toute famille (a_i) sur $\sum a_i e_i$) est alors surjective ; soit $(f_\ell)_{\ell \in \Lambda}$ une famille génératrice de son noyau. On dispose d'une suite exacte

$$A^{(\Lambda)} \xrightarrow{(a_\ell) \mapsto \sum a_\ell f_\ell} A^{(I)} \xrightarrow{(a_i) \mapsto \sum a_i e_i} M \longrightarrow 0 ,$$

c'est-à-dire encore d'un isomorphisme $[A^{(I)}/(f_\ell)_\ell] \simeq M$ envoyant $\overline{\theta_i}$ sur e_i pour tout i.

Par exactitude à droite du produit tensoriel et en vertu du 2.9.5.2 ci-dessus, cette suite induit *via* la tensorisation avec B une suite exacte

$$B^{(\Lambda)} \xrightarrow{(b_\ell)\mapsto\sum b_\ell f_\ell} B^{(I)} \xrightarrow{(b_i)\mapsto\sum b_i(1\otimes e_i)} B\otimes_A M \longrightarrow 0\ ,$$

c'est-à-dire un isomorphisme $[B^{(I)}/(f_\ell)_\ell] \simeq B\otimes_A M$ envoyant $\overline{\theta_i}$ sur $1\otimes e_i$ pour tout i (par abus, on désigne encore par f_ℓ et θ_i les images respectives de f_ℓ et θ_i dans $B^{(I)}$ par la flèche $A^{(I)} \to B^{(I)}$) ; notons en particulier que $1\otimes e_i$ est une famille génératrice de $B\otimes_A M$.

De manière un peu informelle, on voit que le A-module M et le B-module $B\otimes_A M$ admettent la «même» description par générateurs (les θ_i) et relations (les f_ℓ).

On peut résumer cela par le slogan suivant, vague mais assez intuitif : $B\otimes_A M$ *est à* B *ce que* M *est à* A.

(2.9.5.4) Ce principe s'applique aussi aux applications linéaires. Plus précisément, donnons-nous deux A-modules M et N, et choisissons une famille génératrice (e_i) de M et une famille génératrice (f_j) de N. Soit u une application A-linéaire de M vers N. Pour tout i, il existe une famille (a_{ij}) d'éléments de A telle que $u(e_i) = \sum a_{ij}f_j$, et elle détermine entièrement u : on a $u(\sum \lambda_i e_i) = \sum_j(\sum_i \lambda_i a_{ij})f_j$ pour toute famille (λ_i) de scalaires.

Il résulte de 2.9.5.3 que $(1\otimes e_i)$ est une famille génératrice de $B\otimes_A M$, et que $(1\otimes f_j)$ est une famille génératrice de $B\otimes_A N$. On a de plus pour tout i les égalités

$$(\mathrm{Id}_B\otimes u)(1\otimes e_i) = 1\otimes u(e_i) = 1\otimes(\sum a_{ij}f_j) = \sum a_{ij}(1\otimes f_j).$$

On voit ainsi que $\mathrm{Id}_B\otimes u : B\otimes_A M \to B\otimes_A N$ est décrite, dans les familles génératrices $(1\otimes e_i)$ et $(1\otimes f_j)$, par les «mêmes» formules que u dans les familles génératrices (e_i) et (f_j).

(2.9.6) Localisation et quotient. Soit M un A-module. Nous allons décrire l'extension des scalaires de M à deux types de A-algèbres particulières, à savoir les quotients et les localisations.

(2.9.6.1) Le cas des quotients. Soit I un idéal de A. La structure de A-module du quotient M/IM est induite par une structure de A/I-module sur ce dernier (la multiplication externe par un scalaire a ne dépend dans ce module que de la classe de a modulo I).

La surjection $M \to M/IM$ étant A-linéaire, elle induit un morphisme de A/I-modules $p : (A/I)\otimes_A M \to M/IM$.

Par ailleurs, l'application A-linéaire $m \mapsto 1\otimes m$ de M dans $(A/I)\otimes_A M$ s'annule sur IM : en effet, si les a_i sont des éléments de I et les m_i des éléments de M, on a

$$1\otimes \sum a_i m_i = \sum a_i \otimes m_i = 0,$$

puisque les facteurs de gauche vivent dans A/I.

Elle induit donc une application A-linéaire $s : M/IM \to (A/I)\otimes_A M$, qui comme toute application A-linéaire entre A/I-modules est automatiquement A/I-linéaire (par surjectivité de A vers A/I). On vérifie immédiatement que p et s sont inverses l'une de l'autre.

On a ainsi construit un isomorphisme canonique de A/I-modules

$$(A/I) \otimes_A M \simeq M/IM.$$

(2.9.6.2) Le cas des localisations. Soit S une partie multiplicative de A. On définit sur $M \times S$ la relation $\mathscr{R}$ suivante : $(m,s)\mathscr{R}(n,t)$ si et seulement si il existe $r \in S$ tel que $r(tm - sb) = 0$. On vérifie que c'est une relation d'équivalence, et l'on note $S^{-1}M$ le quotient correspondant. Les formules

$$((m,s),(n,t)) \mapsto (tm + sn, st) \text{ et } ((a,s),(m,t)) \mapsto (am, st)$$

passent au quotient, et définissent une loi interne $+$ sur $S^{-1}M$ et une loi externe $\times$: $S^{-1}A \times S^{-1}M \to S^{-1}M$ qui font de $S^{-1}M$ un $S^{-1}A$-module (la preuve de ce fait, aussi triviale que fastidieuse, est laissée au lecteur).

Si $(m,s) \in M \times S$, on écrira $\frac{m}{s}$ au lieu de $\overline{(m,s)}$. Cette notation permet de disposer des formules naturelles

$$\frac{m}{s} + \frac{n}{t} = \frac{sn + tm}{st} \text{ et } \frac{a}{s} \cdot \frac{m}{t} = \frac{am}{bt},$$

et l'on a

$$\frac{m}{s} = \frac{n}{t} \iff \exists r \in S, r(tm - sn) = 0.$$

Si f est une application A-linaire de M vers un A-module N, on vérifie que la formule $(m,s) \mapsto \frac{f(m)}{s}$ passe au quotient par $\mathscr{R}$ et induit une application $S^{-1}A$-linéaire de $S^{-}M$ vers $S^{-1}N$, qui envoie par construction une fraction $\frac{m}{s}$ sur la fraction $\frac{f(m)}{s}$. Ainsi, $M \mapsto S^{-1}M$ apparaît comme un foncteur de A-Mod vers $S^{-1}A$-Mod.

L'application $m \mapsto \frac{m}{1}$ de M dans $S^{-1}M$ est A-linéaire ; elle induit donc une application $S^{-1}A$-linéaire φ de $S^{-1}A \otimes_A M$ dans $S^{-1}M$.

Par ailleurs, si $m \in M$ et $s \in S$, on vérifie immédiatement que l'élément $\frac{1}{s} \otimes m$ de $S^{-1}A \otimes_A M$ ne dépend que de la classe de (m,s) modulo $\mathscr{R}$, que l'application $\psi : S^{-1}M \to S^{-1}A \otimes_A M$ construite par ce biais est $S^{-1}A$-linéaire, et que φ et ψ sont inverses l'une de l'autre.

On a ainsi construit un isomorphisme de $S^{-1}A$-modules

$$S^{-1}A \otimes_A M \simeq S^{-1}M$$

qui est visiblement fonctoriel en M.

(2.9.6.3) Une application importante. Soit f une injection A-linéaire de M dans un A-module N, soit $m \in M$ et soit $s \in S$. Supposons que $\frac{f(m)}{s} = 0$; cela signifie qu'il existe $r \in S$ tel que $rf(m) = 0$, ou encore tel que $f(rm) = 0$. Mais comme f est injective, il vient $rm = 0$ puis $\frac{m}{s} = 0$. Ainsi, l'application linéaire $S^{-1}M \to S^{-1}N$ induite par f est injective.

En conséquence, la A-module $S^{-1}A$ est plat.

(2.9.7) Terminons cette section par une dernière remarque. Soit M un A-module, soit B une A-algèbre, et soit C une B-algèbre. On dispose alors d'un isomorphisme naturel de C-modules

$$C \otimes_B (B \otimes_A M) \simeq C \otimes_A M.$$

On peut le voir de deux façons différentes.

(2.9.7.1) *Première méthode.* Soit $c \in C$. L'application de $B \times M$ dans $C \otimes_A M$ qui envoie (b, m) sur $cb \otimes m$ est bilinéaire, et induit donc une application A-linéaire m_c de $B \otimes_A M$ vers $C \otimes_A M$.

L'application de $C \times (B \otimes_A M)$ vers $(C \otimes_A M)$ qui envoie (c, v) sur $m_c(v)$ est B-bilinéaire, donc induit une application B-linéaire

$$\varphi : C \otimes_B (B \otimes_A M) \to C \otimes_A M.$$

L'application de $C \times M$ vers $C \otimes_B (B \otimes_A M)$ qui envoie (c, m) sur $c \otimes (1 \otimes m)$ est bilinéaire, et induit donc une application A-linéaire

$$\psi : C \otimes_A M \to C \otimes_B (B \otimes_A M).$$

On vérifie aisément que φ et ψ sont C-linéaires et réciproques l'une de l'autre.

(2.9.7.2) *Preuve fonctorielle.* Soit P un C-module. On dispose d'isomorphismes naturels

$$\mathrm{Hom}_C(C \otimes_B (B \otimes_A M), P) \simeq \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, P) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, P)$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_C(C \otimes_A M, P)$$

qui sont fonctoriels en P et M. Par composition on obtient un isomorphisme naturel $\mathrm{Hom}_C(C \otimes_B (B \otimes_A M), P) \simeq \mathrm{Hom}_C(C \otimes_A M, P)$ fonctoriel en P et M. Le lemme de Yoneda assure qu'il provient d'une bijection C-linéaire de $C \otimes_A M$ vers $C \otimes_B (B \otimes_A M)$, dont on vérifie qu'elle coïncide avec ψ.

2.10 Produit tensoriel de deux algèbres

(2.10.1) On désigne toujours par A un anneau. Soient B et C deux A-algèbres. Nous allons démontrer qu'il existe une unique loi interne $\cdot$ sur $B \otimes_A C$ telle que $(B \otimes_A C, +, \cdot)$ soit un anneau et telle que

$$(b \otimes c) \cdot (\beta \otimes \gamma) = (b\beta) \otimes (c\gamma)$$

pour tout $(b, \beta, c, \gamma) \in B^2 \times C^2$.

(2.10.1.1) *Unicité.* Elle résulte du fait que les tenseurs purs engendrent $B \otimes_A C$ comme groupe abélien.

(2.10.1.2) *Existence.* Soit $(b, c) \in B \times C$. L'application de $B \times C$ vers $B \otimes_A C$ qui envoie (β, γ) sur $b\beta \otimes c\gamma$ est bilinéaire. Elle induit donc une application A-linéaire $m_{b,c}$ de $B \otimes_A C$ dans lui-même. On vérifie aussitôt que $(b, c) \mapsto m_{b,c}$ est elle-même A-bilinéaire. Elle induit donc une application A-linéaire χ de $B \otimes_A C$ dans $\mathrm{End}_A(B \otimes_A C)$.

On définit une loi interne sur $B\otimes_A C$ par la formule $(v,w)\mapsto v\cdot w := \chi(v)(w)$. Il découle de sa construction qu'elle est bi-A-linéaire et satisfait les égalités

$$(b\otimes c)\cdot(\beta\otimes\gamma) = b\beta\otimes c\gamma$$

pour tout $(b,\beta,c,\gamma)\in B^2\times C^2$. On déduit sans difficulté de ces formules que $(B\otimes_A C, +, \cdot)$ est un anneau.

(2.10.2) Par définition de la loi $\cdot$ sur $B\otimes_A C$, les applications $b\mapsto b\otimes 1$ et $c\mapsto 1\otimes c$ sont des morphismes d'anneaux, et les composées $A\to B\to B\otimes_A C$ et $A\to C\to B\otimes_A C$ coïncident : par A-bilinéarité de $\otimes$, on a en effet $a\otimes 1 = 1\otimes a$ pour tout $a\in A$ (comme d'habitude, on note encore a les images de a dans B et C).

L'anneau $B\otimes_A C$ hérite ainsi d'une structure de B-algèbre et d'une structure de C-algèbre, qui induisent la même structure de A-algèbre. On vérifie que ses structures de A-module, B-module et C-module sont précisément les structures sous-jacentes à ces structures d'algèbre.

(2.10.3) Intuitivement, $B\otimes_A C$ est la A-algèbre la plus générale fabriquée à partir de B et C, en définissant «artificiellement» la multiplication d'un élément b de B par un élément c de C (c'est $b\otimes c$). Comme toujours, ce type de description se traduit rigoureusement en termes de propriété universelle, ou de foncteur représenté.

(2.10.4) Proposition. *Le couple $(B\otimes_A C, (b\mapsto b\otimes 1, c\mapsto 1\otimes c))$ fait de $B\otimes_A C$ la somme disjointe de B et C dans la catégorie des A-algèbres.*

(2.10.4.1) Remarque. Il revient *tautologiquement* au même d'affirmer que $(B\otimes_A C, (b\mapsto b\otimes 1, c\mapsto 1\otimes c))$ fait de $B\otimes_A C$ la somme amalgamée de B et C le long de A dans la catégorie des anneaux : c'est la version duale de 1.6.3.1.

(2.10.4.2) *Démonstration de la proposition 2.10.4.* Soit D une A-algèbre et soient $f : B\to D$ et $g : C\to D$ deux morphismes de A-algèbres. Il s'agit de montrer qu'il existe un unique morphisme de A-algèbres h de $B\otimes_A C$ vers D tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr] \arrow[drr, "f"] & & \\
& B\otimes_A C \arrow[r, "h"] & D \\
C \arrow[ur] \arrow[urr, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

commute (ou encore un unique morphisme d'anneaux de $B\otimes_A C$ dans D qui soit à la fois un morphisme de B-algèbres et de C-algèbres).

Unicité. Si h existe, on a nécessairement pour tout $(b,c)\in B\times C$ les égalités

$$h(b\otimes c) = h((b\otimes 1)\cdot(1\otimes c)) = h(b\otimes 1)h(1\otimes c) = f(b)g(c),$$

et l'unicité de h découle du fait que les tenseurs purs engendrent le groupe abélien $B\otimes_A C$.

Existence. On s'inspire de la seule formule possible obtenue en démontrant l'unicité. L'application de $B \times C$ dans D qui envoie (b, c) sur $f(b)g(c)$ est bi-A-linéaire, et elle induit donc une application A-linéaire $h : B \otimes_A C \to D$, qui satisfait par construction les égalités $h(b \otimes c) = f(b)g(c)$ pour tout $(b, c) \in B \times C$. On déduit de celles-ci que h est un morphisme de A-algèbres répondant aux conditions posées. $\square$

(2.10.5) Selon le contexte, il y a plusieurs façons d'envisager $B \otimes_A C$. On peut y penser comme à un objet *symétrique en B et C* : c'est par exemple le cas lorsqu'on le décrit informellement comme en 2.10.3 ou, plus rigoureusement, lorsqu'on le caractèrise par le foncteur qu'il représente (prop. 2.10.4).

Mais on peut faire psychologiquement jouer un rôle différent à B et C, en considérant qu'on part d'une A-algèbre C et qu'on la transforme en une B-algèbre $B \otimes_A C$ (ou l'inverse, évidemment). Le slogan à retenir lorsqu'on aborde les choses de ce point de vue est, à analogue à celui vu plus haut pour les modules : *la B-algèbre $B \otimes_A C$ est à B ce que C est à A.* Nous allons l'illustrer par différents exemples.

(2.10.6) On désigne toujours par B une A-algèbre ; soit I un ensemble d'indices.

(2.10.6.1) La donnée des deux morphismes naturels de A-algèbres

$$B \to B[T_i]_{i \in I} \text{ et } A[T_i]_{i \in I} \to B[T_i]_{i \in I}$$

induit un morphisme φ de $B \otimes_A A[T_i]_{i \in I}$ vers $B[T_i]_{i \in I}$, qui est à la fois un morphisme de B-algèbres et un morphisme de $A[T_i]_{i \in I}$-algèbres.

La propriété universelle de la B-algèbre $B[T_i]_{i \in I}$ assure par ailleurs l'existence d'un unique morphisme ψ de B-algèbres de $B[T_i]_{i \in I}$ vers $B \otimes_A A[T_i]_{i \in I}$ qui envoie T_i sur $1 \otimes T_i$ pour tout i. On vérifie aussitôt que φ et ψ sont inverses l'un de l'autre.

On a donc construit un isomorphisme

$$B \otimes_A A[T_i]_{i \in I} \simeq B[T_i]_{i \in I},$$

compatible aux structures de B-algèbres et de $A[T_i]_{i \in I}$-algèbres sur ses source et but.

(2.10.6.2) Donnons une autre construction de ces isomorphismes. Le A-module $A[T_i]_{i \in I}$ est libre de base $(\prod_{i \in I} T_i^{e(i)})_e$, où e parcourt l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{N}$ s'annulant presque partout.

Le B-module $B \otimes_A A[T_i]_{i \in I}$ est donc libre de base $(1 \otimes \prod_{i \in I} T_i^{e(i)})_e$. Compte-tenu de la définition de la loi d'anneau sur $B \otimes_A A[T_i]_{i \in I}$, on a par ailleurs $1 \otimes \prod_{i \in I} T_i^{e(i)} = \prod_{i \in I} (1 \otimes T_i)^{e(i)}$ pour tout e. Ainsi, $B \otimes_A A[T_i]_{i \in I}$ est une algèbre de polynômes en les $1 \otimes T_i$: on retrouve donc l'isomorphisme du 2.10.6.1.

(2.10.6.3) En particulier $A[S] \otimes_A A[T] \simeq (A[S])[T] = A[S, T] = (A[T])[S]$. On voit bien sur cet exemple les différentes façons dont on peut penser au produit tensoriel : la première écriture est à $A[S]$ ce que $A[T]$ est à A, la seconde est symétrique en les facteurs, la troisième est à $A[T]$ ce que $A[S]$ est à A.

(2.10.7) Certains isomorphismes de modules exhibés lors de l'étude du produit tensoriel d'un module par une algèbre se trouvent en fait, lorsque le module en jeu est lui-même une algèbre, être des isomorphismes d'algèbres – on le vérifie immédiatement à l'aide des formules explicites qui les décrivent. Donnons deux exemples.

(2.10.7.1) Soit I un idéal de A et soit B une A-algèbre. L'isomorphisme

$$A/I \otimes_A B \simeq B/IB$$

(*cf.* 2.9.6.1) est alors un isomorphisme de B-algèbres et de A/I-algèbres.

(2.10.7.2) Soient B et C deux A-algèbres, et soit D une B-algèbre. L'isomorphisme

$$D \otimes_B (B \otimes_A C) \simeq D \otimes_A C$$

(*cf.* 2.9.7) est alors un isomorphisme de D-algèbres et de C-algèbres.

(2.10.7.3) En vertu de 2.10.7.1 et 2.10.7.2, il existe pour toute A-algèbre B, toute A-algèbre C, et tout idéal I de C des isomorphismes naturels

$$B \otimes_A C/I \simeq (B \otimes_A C) \otimes_C (C/I) \simeq (B \otimes_A C)/I(B \otimes_A C).$$

(2.10.7.4) En vertu de 2.10.7.3 et 2.10.6.1, il existe pour toute A-algèbre B, tout ensemble d'indices I et toute famille (P_j) de polynômes appartenant à $A[T_i]_{i\in I}$ un isomorphisme naturel (de B-algèbres aussi bien que de $A[T_i]_{i\in I}$-algèbres)

$$B \otimes_A (A[T_i]_{i\in I}/(P_j)) \simeq B[T_i]_{i\in I}/(P_j),$$

(où l'on note encore P_j l'image de P_j dans $B[T_i]_{i\in I}$).

De manière un peu informelle, on voit que la A-algèbre $A[T_i]_{i\in I}/(P_j)$ et la B-algèbre $B \otimes_A (A[T_i]_{i\in I}/(P_j))$ admettent la «même» description par générateurs (les T_i) et relations (les P_j).

(2.10.7.5) Exercice. Construire directement l'isomorphisme ci-dessus par une méthode analogue à celle suivie au 2.10.6.1.

(2.10.8) Exemples.

(2.10.8.1) Soit A la $\mathbb{Z}$-algèbre $\mathbb{Z}[X]/(6X^2+18X-3)$. Pour toute $\mathbb{Z}$-algèbre B, on a $B \otimes_{\mathbb{Z}} A \simeq B[X]/(6X^2+18X-3)$. L'allure de cette dernière B-algèbre dépend beaucoup de B. Ainsi :

- si $B = \mathbb{Q}$, elle est égale à $\mathbb{Q}[X]/(6X^2+18X-3)$ qui est un corps de degré 2 sur Q, car $6X^2+18X-3$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$ (son discriminant est $324+72 = 396 = 4 \times 9 \times 11$ qui n'est pas un carré dans $\mathbb{Q}$) ;
- si $B = \mathbb{F}_2$ elle est égale à $\mathbb{F}_2[X]/(3) = \{0\}$ car 3 est inversible modulo 2 ;
- si $B = \mathbb{F}_3$ elle est égale à $\mathbb{F}_3[X]/(0) = \mathbb{F}_3[X]$;
- si $B = \mathbb{F}_5$ elle est égale à

$$\mathbb{F}_5[X]/(X^2-2X+2) = \mathbb{F}_5[X]/(X+1)(X+2)$$

$$\simeq \mathbb{F}_5[X]/(X+1) \times \mathbb{F}_5[X]/(X+2) \simeq \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5;$$

• si $B = \mathbb{F}_{11}$, elle est égale à

$$\mathbb{F}_{11}[X]/(6X^2 - 4X - 3) = \mathbb{F}_{11}[X]/(2(6X^2 - 4X - 3)) = \mathbb{F}_{11}[X]/(X^2 + 3X - 6)$$
$$= \mathbb{F}_{11}[X](X - 4)^2 \simeq \mathbb{F}_{11}[Y]/Y^2.$$

On voit qu'en tensorisant la même $\mathbb{Z}$-algèbre par différents corps on a obtenu un corps, l'anneau nul, un anneau de polynômes, un produit de deux corps, et un anneau non réduit.

(2.10.8.2) Nous allons maintenant décrire l'anneau $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Comme $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$, cet anneau s'identifie à

$$\mathbb{C}[X]/(X^2+1) \simeq \mathbb{C}[X]/(X-i)(X+i) \simeq \mathbb{C}[X]/(X-i) \times \mathbb{C}[X]/(X+i) \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}.$$

À titre d'exercice, vérifiez que l'isomorphisme $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ ainsi construit envoie $b \otimes \beta$ sur $(b\beta, b\overline{\beta})$.

On voit à travers cet exemple qu'un produit tensoriel de deux corps au-dessus d'un troisième n'est pas nécessairement un corps, ni même un anneau intègre. Nous allons voir qu'il peut même arriver qu'un tel produit tensoriel ne soit pas réduit.

(2.10.8.3) Soit k un corps de caractéristique $p > 0$ non parfait, et soit a un élément de k qui n'est pas une puissance p-ième. On démontre (nous laissons la vérification au lecteur à titre d'exercice) que $X^p - a$ est alors un polynôme irréductible. Soit L le corps $k[X]/(X^p - a)$ et soit α la classe de X dans L.

On a

$$L \otimes_k L = L \otimes_k k[X]/(X^p - a) \simeq L[X]/(X^p - a) = L[X]/(X^p - \alpha^p) = L[X]/(X - \alpha)^p$$

car l'élévation à la puissance p est un morphisme d'anneaux en caractéristique p. La classe de $X - \alpha$ modulo $(X - \alpha)^p$ fournit alors un élément nilpotent non nul de $L \otimes_k L$.

2.11 Applications du produit tensoriel à la théorie des corps

(2.11.1) Proposition. *Soient $k \hookrightarrow F$ et $k \hookrightarrow L$ deux extensions de corps. Il existe alors un corps K et deux plongements $F \hookrightarrow K$ et $L \hookrightarrow K$ tels que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dr] & \\ k \arrow[ur] \arrow[dr] & & K \\ & L \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

commute.

Démonstration. Les k-espaces vectoriels F et L sont non nuls, puisque ce sont des corps. Comme ils sont libres sur k (c'est le cas de tout espace vectoriel), leur produit tensoriel est *non nul.* La k-algèbre $F \otimes_k L$ étant non nulle, elle possède un idéal maximal. Si l'on note K le corps quotient correspondant, les flèches composées $F \to F \otimes_k L \to K$ et $L \to F \otimes_k L \to K$ satisfont les conditions requises. $\square$

(2.11.2) Indiquons maintenant deux applications de ce fait à la théorie des extensions de corps.

(2.11.2.1) Unicité du corps de décomposition. Soit P un polynôme non nul à coefficients dans k, et soient F et L deux corps de décompositions de P sur k (un corps de décomposition de P sur k est une extension de k dans laquelle P est scindé, et qui est engendrée par les racines de P).

Les corps F et L sont alors k-isomorphes. En effet, par ce qui précède, il existe une extension K de k et deux k-plongements $i : F \hookrightarrow K$ et $j : L \hookrightarrow K$. L'image $i(F)$ est isomorphe à F, et est donc un corps de décomposition de P sur k. Il s'ensuit que P est scindé dans K et que $i(F)$ est le sous-corps de K engendré par k et les racines de P.

De même, $j(L)$ est le sous-corps de K engendré par k et les racines de P. Par conséquent, $j(L) = i(K)$. On a donc deux k-isomorphismes $F \simeq i(F)$ et $i(F) = j(L) \simeq L$, d'où un k-isomorphisme $F \simeq L$.

(2.11.2.2) Unicité de la clôture algébrique. Soient F et L deux clôtures algébriques de k (une clôture algébrique de k est une extension algébrique de k qui est algébriquement close).

Les corps F et L sont alors k-isomorphes. En effet, par ce qui précède, il existe une extension K de k et deux k-plongements $i : F \hookrightarrow K$ et $j : L \hookrightarrow K$. L'image $i(F)$ est isomorphe à F, et est donc une clôture algébrique de k. Il s'ensuit que $i(F)$ est nécessairement le sous-corps de K formé des éléments algébriques sur k.

De même, $j(L)$ est le sous-corps de K formé des éléments algébriques sur k. Par conséquent, $j(L) = i(K)$. On a donc deux k-isomorphismes $F \simeq i(F)$ et $i(F) = j(L) \simeq L$, d'où un k-isomorphisme $F \simeq L$.

(2.11.3) Remarque. Vous connaissez peut-être des preuves de l'unicité du corps de décomposition d'un polynôme P consistant à construire l'isomorphisme entre deux tels corps F et L en choisissant successivement des racines de diviseurs convenables de P dans F et L. On peut se demander où est passé ce choix de racines dans la preuve proposée ci-dessus, qui peut donner l'impression que ≪rien ne se passe≫. En fait, tout est caché dans le choix de l'idéal maximal de $F \otimes_k L$, effectué lorsqu'on veut exhiber un corps K.

La même chose se produit pour les clôtures algébriques : se donner un isomorphisme entre deux clôtures algébriques F et L de k revient peu ou prou à faire des choix compatibles de racines, dans F et L, de *tous* les polynômes irréductibles de $k[X]$. Là encore, ce choix est pudiquement dissimulé derrière celui de l'idéal maximal de $F \otimes_k L$.

2.12 Algèbres finies et algèbres entières

On fixe un anneau A.

(2.12.1) Définition. Soit B une A-algèbre. On dit que B est *finie* si B est de type fini *comme A-module.*

(2.12.2) Exemples et premières propriétés.

(2.12.2.1) Si I est un idéal de A alors A/I est engendré par $\bar{1}$ comme A-module. C'est donc une A-algèbre finie.

(2.12.2.2) Une A-algèbre finie est de type fini comme A-module ; elle l'est *a fortiori* comme A-algèbre.

(2.12.2.3) Soit B une A-algèbre finie et soit C une B-algèbre finie. La A-algèbre C est alors finie ; nous laissons au lecteur le soin de rédiger la preuve, qui repose essentiellement sur un «principe de la *famille génératrice* télescopique».

(2.12.3) Proposition-définition. *Soit B une A-algèbre et soit $x \in B$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i) L'élément x annule un polynôme unitaire *appartenant à $A[X]$.*
ii) La A-algèbre $A[x]$ est finie.
iii) Il existe une sous-A-algèbre finie C de B contenant x.

Lorsqu'elles sont satisfaites, on dit que x est entier *sur A. Si tout élément de B est entier sur A, on dit que B est* entière *sur A.*

Démonstration. Supposons que i) soit vraie ; il existe alors $n \geqslant 0$ et $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ tels que

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0.$$

Si M désigne le sous-A-module de B engendré par les x^i pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$, on en déduit que $x^n \in M$ puis, par récurrence, que $x^m \in M$ pour tout $m \geqslant n$. Ainsi, l'algèbre $A[x]$ coïncide avec le A-module de type fini M, et elle est en conséquence finie, ce qui prouve ii).

Si ii) est vraie, il est clair que iii) est vraie (prendre $C = A[x]$).

Supposons que iii) soit vraie, et soit $u : C \to C$ la multiplication par x. Comme C est un A-module de type fini, le théorème 2.7.1 – appliqué ici avec $I = A$– assure l'existence d'un polynôme unitaire P à coefficients dans A (dont le degré peut être choisi égal au cardinal d'une famille génératrice finie fixée du A-module C) tel que $P(u) = 0$. On a en particulier $P(x) = P(u)(1) = 0$, et i) est vraie. □

(2.12.4) Quelques remarques.

(2.12.4.1) On déduit de la caractérisation des éléments entiers par la propriété iii) ci-dessus que toute algèbre finie est entière. Nous allons voir ci-dessous que la réciproque est vraie pour les algèbres de type fini, mais fausse en général.

(2.12.4.2) Au cours de la preuve de iii)⇒i), on a vu que si C est engendré comme A-module par n éléments, alors on peut trouver un polynôme unitaire de $A[X]$ annulant x *et de degré n.*

(2.12.4.3) Soit $f : B \to C$ un morphisme de A-algèbres, et soit x un élément de B entier sur A. Il est immédiat que $f(x)$ est entier sur A aussi (tout polynôme de $A[X]$ annulant x annule $f(x)$).

(2.12.4.4) Soit I un idéal de A et soit B une A/I-algèbre ; on peut aussi voir B comme une A-algèbre. Un élément de B est entier sur A si et seulement si il est entier sur A/I, et B est finie sur A si et seulement si elle est finie sur A/I (cela provient du fait que si $\overline{a}$ est la classe modulo I d'un élément a de A alors $\overline{a}b = ab$ pour tout $b \in B$).

(2.12.4.5) Soit B une A-algèbre, soit J un idéal de B et soit I un idéal de A dont l'image dans B est contenue dans J. Si x est un élément de B entier sur A, alors son image $\overline{x}$ dans B/J est entière sur A/I : on peut ou bien le voir directement (si P annule x alors la réduction de P modulo I annule $\overline{x}$) ou bien utiliser 2.12.4.3 pour conclure que $\bar{x}$ est entier sur A, puis 2.12.4.4 pour en déduire qu'il est entier sur A/I.

(2.12.5) Proposition. *Soit B une A-algèbre. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) B est finie.
2) B est entière et de type fini.
3) B est engendrée comme A-algèbre par un nombre fini d'éléments entiers sur A.

Démonstration. On a déjà vu qu'une A-algèbre finie est de type fini, et entière (2.12.4.1). L'implication 2)⇒3) est évidente ; il reste à montrer que 3)⇒1).

Supposons que B soit engendrée par une famille finie $b_1, \ldots b_r$ d'éléments entiers sur A. Nous allons montrer par récurrence sur r que B est finie.

Si $r = 0$ alors la flèche structurale $A \to B$ est surjective, ce qui veut dire que B est de la forme A/I pour un certain idéal I ; elle est dès lors finie (2.12.2.1).

Supposons $r > 0$ et la propriété vraie au rang $r - 1$. Notons C la A-algèbre $A[b_1, \ldots, b_{r-1}]$. D'après l'hypothèse de récurrence, C est finie sur A. L'élément b_r de B est entier sur A par hypothèse ; il l'est *a fortiori* sur C. La C-algèbre $C[b_r] = B$ est donc finie en vertu de la proposition 2.12.3 ; par transitivité, B est finie sur A. □

(2.12.6) Corollaire-définition. *Soit B une A-algèbre. Le sous-ensemble C de B formé des éléments entiers sur A est une sous-A-algèbre de B, que l'on appelle* fermeture intégrale *de A dans B. En particulier, si B est engendrée par des éléments entiers sur A, elle est entière sur A.*

Démonstration. Soient x et y appartenant à C. Il résulte de la proposition 2.12.5 ci-dessus, et plus précisément de l'implication 3)⇒2) de son énoncé, que $A[x, y]$ est entière sur A, ce qui achève la démonstration. □

(2.12.7) Corollaire. *Soit B une A-algèbre entière, soit C une B-algèbre et soit x un élément de C. Si x est entier sur B il est entier sur A ; en particulier si C est entière sur B elle est entière sur A.*

Démonstration. Comme x est entier sur B, il existe $n \geqslant 0$ et $b_0, \ldots, b_{n-1} \in B$ tels que $x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0 = 0$. Soit B' la sous-A-algèbre de B engendrée par les b_i. Comme ceux-ci sont entiers sur A (car B est entière sur A), la A-algèbre B' est finie d'après la proposition 2.12.5.

Par construction, x est entier sur B', et $B'[x]$ est donc finie sur B'. Par transitivité, $B'[x]$ est finie sur A, et x est en conséquence entier sur A. □

(2.12.8) Exemple d'algèbre entière non finie. Notons $\overline{\mathbb{Z}}$ la fermeture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$. C'est par définition une $\mathbb{Z}$-algèbre entière. Nous allons montrer par l'absurde qu'elle n'est pas finie.

Si elle l'était, il résulterait de 2.12.4.2 qu'il existe un entier N tel que tout élément de $\overline{\mathbb{Z}}$ soit annulé par un polynôme unitaire de degré N à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Soit maintenant $n \geqslant 1$. L'élément $\sqrt[n]{2}$ de $\mathbb{C}$ appartient à $\overline{\mathbb{Z}}$ car il est annulé par $X^n - 2$. Ce dernier est irréductible sur $\mathbb{Q}$ en vertu du critère d'Eisenstein, et est donc le polynôme minimal de $\sqrt[n]{2}$ sur $\mathbb{Q}$. En conséquence, $\sqrt[n]{2}$ n'est racine d'aucun polynôme non nul à coefficients rationnels de degré $< n$, et on aboutit ainsi à une contradiction en prenant $n > N$.

(2.12.9) Lemme. *Soit C une A-algèbre et soit B une A-algèbre. Si la A-algèbre C est finie (resp. entière) alors la B-algèbre $B \otimes_A C$ est finie (resp. entière).*

Démonstration. Supposons C finie sur A, et soit (e_i) une famille génératrice finie de C comme A-module. Comme $(1 \otimes e_i)$ engendre $B \otimes_A C$ comme B-module, la B-algèbre $B \otimes_A C$ est finie.

Supposons C entière sur A. La B-algèbre $B \otimes_A C$ est engendrée comme B-algèbre (et même comme B-module) par les $1 \otimes c$ pour c parcourant C. Or si $c \in C$, l'élément $1 \otimes c$ de C est entier sur A (2.12.4.3), et *a fortiori* sur B. Il s'ensuit, en vertu du corollaire 2.12.6, que $B \otimes_A C$ est entière sur B. □

(2.12.10) Soit A un anneau intègre. On appelle *clôture intégrale de A* la fermeture intégrale de A dans son corps des fractions. On dit que A est *intégralement clos*, ou *normal*, s'il est égal à sa clôture intégrale.

(2.12.10.1) Exercice. Démontrez qu'un anneau factoriel est intégralement clos. Démontrez que l'anneau des fonctions holomorphes de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est intègre, et intégralement clos.

(2.12.10.2) L'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ n'est pas intégralement clos. Son corps des fractions est en effet $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, lequel contient le nombre d'or

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

qui n'appartient pas à $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ mais est entier sur celui-ci, puisqu'il est racine de $X^2 - X - 1$.

L'anneau $\mathbb{C}[T^2, T^3] \subset \mathbb{C}[T]$ n'est pas intégralement clos. Son corps des fractions est en effet $\mathbb{C}(T)$ (car $T = T^3/T^2$). Il contient T qui n'appartient pas à $\mathbb{C}[T^2, T^3]$ mais est entier sur celui-ci, puisqu'il est racine de $X^2 - T^2$.

(2.12.11) Nous allons maintenant énoncer un lemme très simple dont la preuve est élémentaire, et sur lequel repose *in fine* le lemme crucial dit de ≪going-up≫ que nous verrons un peu plus loin.

(2.12.12) Lemme. *Soit B un anneau intègre et soit A un sous-anneau de B. On suppose que B est entier sur A. Les assertions suivantes sont alors équivalentes.*

i) A est un corps.

ii) B est un corps.

Démonstration. Supposons que A est un corps, et soit x un élément non nul de B. Comme x est entier sur A, la A-algèbre $A[x]$ est un A-espace vectoriel de dimension finie. Comme B est intègre et x non nul, l'endomorphisme $y \mapsto xy$ de $A[x]$ est injectif, et partant surjectif. Il existe en particulier $y \in A[x] \subset B$ tel que $xy = 1$, et x est inversible dans B. Ainsi, B est un corps.

Supposons maintenant que B est un corps, et soit x un élément non nul de A. Comme B est un corps, x possède un inverse $1/x$ dans B. Comme B est entière sur A, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_{n-1}$ dans A tels que

$$\frac{1}{x^n} + a_{n-1}\frac{1}{x^{n-1}} + \ldots + a_0 = 0.$$

En multipliant par x^n, il vient

$$1 = x(-a_{n-1} - a_{n-2}x - \ldots - a_0 x^{n-1}),$$

et donc

$$\frac{1}{x} = -a_{n-1} - a_{n-2}x - \ldots - a_0 x^{n-1},$$

qui appartient à A. Ainsi, x est inversible dans A et A est un corps. □

2.13 Degré de transcendance

(2.13.1) Soit $k \hookrightarrow L$ une extension de corps.

(2.13.1.1) Au lieu de dire qu'un élément donné de L est entier sur k, on dit plutôt qu'il est *algébrique* sur k. Si tout élément de L est algébrique sur k, on dit que L elle-même est algébrique sur k.

(2.13.1.2) L'ensemble des éléments de L algébriques sur K est une k-algèbre d'après le corollaire 2.12.6, qui est intègre et entière sur k ; c'est donc un corps en vertu du lemme 2.12.12 (vous connaissiez certainement ces faits ; le but de ces remarques est simplement de montrer qu'on peut les retrouver comme des cas particuliers de ce qu'on a établi plus haut au sujet des algèbres entières).

(2.13.2) Soit k un corps, soit A une k-algèbre, et soit (x_i) une famille d'éléments de A. On dit que les x_i sont *algébriquement indépendants* sur k si le morphisme $k[X_i]_i \to k[x_i]_i$ qui envoie X_i sur x_i pour tout i est bijectif. Il est toujours surjectif ; par conséquent, les x_i sont algébriquement indépendants si et seulement si il est injectif, c'est-à-dire si et seulement si les x_i n'annulent aucun polynôme non trivial à coefficients dans k.

Si A est non nulle il existe toujours au moins une famille d'éléments de A algébriquement indépendants sur k : la famille *vide*. Notons par contre que si $A = \{0\}$ elle ne possède aucune famille d'éléments algébriquement indépendants puisque k ne s'injecte pas dans $\{0\}$.

(2.13.3) Soit L une extension de k.

(2.13.3.1) Si $x \in L$, la famille singleton $\{x\}$ est algébriquement indépendante sur k si et seulement si x *n'est pas* algébrique sur k. On dit alors que x est *transcendant* sur k.

(2.13.3.2) Soit (x_i) une famille d'éléments de L algébriquement indépendants sur k. Le corps $k(x_i)_{i\in I}$ engendré par k et les x_i s'identifie au corps de fractions rationnelles $k(X_i)_{i\in I}$ en les indéterminées X_i.

Il résulte immédiatement des définitions que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est maximale, en tant que famille d'éléments de L algébriquement indépendants sur k, si et seulement si L est algébrique sur $k(x_i)_{i\in I}$.

(2.13.3.3) On appelle *base de transcendance* de L sur k une famille d'éléments de L algébriquement indépendants sur k et maximale pour cette propriété. La théorie de l'indépendance algébrique et des bases de transcendance est tout à fait analogue à celle de l'indépendance linéaire et des bases. Il existe en fait une théorie générale qui couvre les deux, à savoir celle des *relations de dépendance abstraites* (voir par exemple à ce sujet *Basic Algebra II*, de Jacobson). On démontre ainsi les faits suivants.

• Toute famille d'éléments de L algébriquement indépendants de k est contenue dans une base de transcendance de L sur k ; en particulier, il existe une base de transcendance de L sur k (appliquer ce qui précède à la famille vide).

• Si (x_i) est une famille d'éléments de L telle que L soit algébrique sur $k(x_i)_i$, elle contient une base de transcendance de L sur k.

• Toutes les bases de transcendance de L sur k ont même cardinal, appelé *degré de transcendance de L sur k* ;

• Si le degré de transcendance de L sur K est fini, toute famille d'éléments de L algébriquement indépendants sur K qui est de cardinal $\deg \mathrm{tr.}(L/K)$ est une base de transcendance de L sur k ; et toute famille $(x_i)_{i\in I}$ de cardinal $\deg \mathrm{tr.}(L/K)$ telle que L soit algébrique sur $k(x_i)_i$ est une base de transcendance de L sur k.

(2.13.3.4) Exemples. Le degré de transcendance de $k(X_1,\ldots,X_n)$ sur k est égal à n, et $(X_1,\ldots,X_n)$ en est une base de transcendance.

Soit f une fraction rationnelle non constante dans $k(X)$. L'élément X est alors algébrique sur $k(f)$ (exercice facile). En conséquence f est transcendant (sinon, X serait algébrique sur k), et $\{f\}$ est une base de transcendance de $k(X)$ sur k.

2.14 Lemme de *going-up* et dimension de Krull

Nous allons maintenant démontrer le lemme dit de *going-up.* Il est extrêmement utile en en algèbre commutative et géométrie algébrique (le langage des schémas permettra d'en donner une interprétation géométrique), mais est également intéressant pour sa preuve. Celle-ci consiste en effet essentiellement à se ramener au lemme 2.12.12 ci-dessus , lui-même élémentaire, par de judicieux passages au quotient et localisations ; elle peut donc aider à mieux comprendre comment utiliser en pratique ces opérations.

(2.14.1) Lemme de *going-up.* *Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux faisant de B une A-algèbre entière.*

1) Si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de B, l'idéal premier $f^{-1}(\mathfrak{q})$ de A est maximal si et seulement si $\mathfrak{q}$ est maximal.

2) Si $\mathfrak{q}$ *et* $\mathfrak{q}'$ *sont deux idéaux premiers* distincts *de* B *tels que l'on ait* $f^{-1}(\mathfrak{q}) = f^{-1}(\mathfrak{q}')$*, alors* $\mathfrak{q}$ *et* $\mathfrak{q}'$ *sont non comparables pour l'inclusion.*

3) Si J *est un idéal de* B *et si l'on pose* $I = f^{-1}(J)$*, il existe pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* A *contenant* I *un idéal premier* $\mathfrak{q}$ *de* B *contenant* J *tel que* $f^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$.

Remarque. Dans le cas où f est injectif, on a $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ et l'assertion 3) ci-dessus affirme alors que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, il existe un idéal premier $\mathfrak{q}$ de B tel que $f^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$ (en fait, comme on le verra ci-dessous, on *ramène* la preuve de 3) à celle de ce cas particulier). Autrement dit, si $f : A \to B$ est une injection entière alors Spec $B \to$ Spec A est surjective.

(2.14.2) *Démonstration du lemme de going-up.* On commence par établir l'assertion 1), qui sera elle-même utilisée dans la preuve de 2) et 3).

(2.14.2.1) *Preuve de 1).* Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier de B. Posons $\mathfrak{p} = f^{-1}(\mathfrak{q})$. La flèche $f : A \to B$ induit une injection $A/\mathfrak{p} \hookrightarrow B/\mathfrak{q}$, qui fait de $B/\mathfrak{q}$ une $A/\mathfrak{p}$-algèbre entière (2.12.4.5). Comme $\mathfrak{q}$ est premier, $B/\mathfrak{q}$ est intègre. Il résulte alors du lemme 2.12.12 que $B/\mathfrak{q}$ est un corps si et seulement si $A/\mathfrak{p}$ est un corps ; autrement dit, $\mathfrak{q}$ est maximal si et seulement si $\mathfrak{p}$ est maximal, ce qui achève de prouver 1).

(2.14.2.2) *Preuve de 2).* Soient $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Il s'agit de montrer que les éléments de $\{\mathfrak{q} \in \text{Spec } B, f^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}\}$ sont deux à deux non comparables pour l'inclusion, c'est-à-dire encore que les antécédents de $\mathfrak{p}$ pour l'application Spec $B \to$ Spec A induite par f sont deux à deux non comparables pour l'inclusion.

Posons $S = A \backslash \mathfrak{p}$. Le localisé $S^{-1}A$ est l'anneau local $A_\mathfrak{p}$ d'idéal maximal $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$, et l'on a par ailleurs
$$f(S)^{-1}B \simeq B \otimes_A A_\mathfrak{p};$$
en particulier, $f(S)^{-1}B$ est entier sur $A_\mathfrak{p}$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \text{Spec } B & \text{Spec } f(S)^{-1}B \arrow[l] \arrow[d] \\ \text{Spec } A \arrow[u, leftarrow] & \text{Spec } A_\mathfrak{p} \arrow[l] \end{tikzcd}.$$

La flèche Spec $A_\mathfrak{p} \to$ Spec A induit une bijection d'ensembles ordonnés entre Spec $A_\mathfrak{p}$ et l'ensemble des idéaux premiers de A contenus dans $\mathfrak{p}$ (elle fait correspondre $\mathfrak{p}$ à $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$) ; la flèche Spec $f(S)^{-1}B \to$ Spec B induit une bijection d'ensembles ordonnés entre Spec $f(S)^{-1}B$ et l'ensemble des idéaux premiers de B ne rencontrant pas $f(S)$.

Par ailleurs, soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier de B situé au-dessus de $\mathfrak{p}$, c'est-à-dire tel que $f^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$. Cette dernière égalité assure que $\mathfrak{q}$ ne rencontre pas $f(S)$, et donc que $\mathfrak{q}$ appartient à l'image de Spec $f(S)^{-1}B$. Il s'ensuit qu'il existe une bijection d'ensembles ordonnés entre l'ensemble des idéaux premiers de B situés au-dessus de $\mathfrak{p}$, et celui des idéaux premiers de $f(S)^{-1}B$ situés au-dessus de $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$.

Mais comme $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ est l'idéal maximal de $A_\mathfrak{p}$, il résulte de l'assertion 1), appliquée à la $A_\mathfrak{p}$-algèbre entière $f(S)^{-1}B$, que l'ensemble des idéaux premiers de $f(S)^{-1}B$ situés au-dessus de $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ est exactement l'ensemble des idéaux *maximaux* de $f(S)^{-1}B$; or ceux-ci sont deux à deux non comparables pour l'inclusion, et il en va donc de même des idéaux premiers de B situés au-dessus de $\mathfrak{p}$, d'où 2).

(2.14.2.3) *Preuve de 3).* La flèche $A \to B$ induit une injection $A/I \to B/J$. On a par ailleurs un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} B/J \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec} B \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} A/I \arrow[r] & \operatorname{Spec} A \end{tikzcd} .$$

La flèche $\operatorname{Spec} A/I \to \operatorname{Spec} A$ induit une bijection entre $\operatorname{Spec} A/I$ et l'ensemble des idéaux premiers de A contenant I, et la flèche $\operatorname{Spec} B/J \to \operatorname{Spec} B$ induit une bijection entre $\operatorname{Spec} B/J$ et l'ensemble des idéaux premiers de A contenant J ; on peut donc, quitte à remplacer A par A/I et B par B/J, se ramener au cas où I et J sont nuls et où f est injective

Il s'agit maintenant, un idéal premier $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ étant donné, de montrer l'existence d'un idéal premier $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ au-dessus de $\mathfrak{p}$.

Posons $S = A \setminus \mathfrak{p}$. En se fondant sur le diagramme commutatif considéré au 2.14.2.2 ci-dessus lors de la preuve de 2), on voit qu'il suffit de montrer l'existence d'un idéal premier de $f(S)^{-1}B$ situé au-dessus de $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$.

Par définition de S, cette partie ne contient pas 0. Comme f est injective, $f(S)$ ne contient pas non plus 0 ; par conséquent, $f(S)^{-1}B$ est non nul. Il possède dès lors un idéal maximal $\mathfrak{m}$. En vertu de l'assertion 1), appliquée à la $A_{\mathfrak{p}}$-algèbre entière $f(S)^{-1}B$, l'idéal $\mathfrak{m}$ est situé au-dessus d'un idéal maximal de $A_{\mathfrak{p}}$, et donc de $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Ceci achève la démonstration. □

(2.14.3) Définition. Soit A un anneau. On appelle *dimension de Krull* de A la borne supérieure de l'ensemble $\mathscr{E}$ des entiers n tels qu'il existe une chaîne

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_n$$

où les $\mathfrak{p}_i$ sont des idéaux premiers de A (attention : notez bien que la numérotation commence à 0).

(2.14.3.1) Remarque. L'ensemble $\mathscr{E}$ peut être vide. C'est le cas si et seulement si A n'a pas d'idéaux premiers, c'est-à-dire si et seulement si $A = \{0\}$; il y a alors une ambiguïté dans la définition de la dimension de Krull [3], qu'on lève en posant par convention $\dim_{\text{Krull}}\{0\} = -\infty$.

Lorsque A est non nul, l'ensemble non vide $\mathscr{E}$ peut être fini, auquel cas la dimension de Krull appartient à $\mathbb{N}$, ou infini – cela signifie qu'il existe des chaînes strictement croissantes arbitrairement longues d'idéaux premiers de A, et l'on a alors $\dim_{\text{Krull}} A = +\infty$.

3. En effet, nous invitons le lecteur à vérifier que la borne supérieure de la partie vide est par définition *le plus petit élément de l'ensemble ordonné dans lequel on travaille* (s'il existe). Il faut donc préciser ici quel est l'ensemble en question ; les conventions adoptées reviennent à décider qu'on travaille dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

(2.14.3.2) Commentaire sur la terminologie. Nous verrons lors du cours sur les schémas que le terme *dimension* est bien choisi : la dimension de Krull d'un anneau peut en effet s'interpréter comme la dimension du schéma qui lui est associé.

(2.14.3.3) Anneaux de dimension nulle. Un anneau A est de dimension de Krull nulle si et seulement si il possède un et un seul idéal premier. C'est notamment le cas lorsque A est un corps.

(2.14.3.4) Anneaux intègres de dimension 1. Un anneau intègre A est de dimension 1 si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :
- A possède un idéal premier non nul ;
- tout idéal premier non nul de A est maximal.

C'est notamment le cas lorsque A est un anneau de Dedekind qui n'est pas un corps. En particulier, tout anneau principal qui n'est pas un corps est de dimension de Krull égale à 1.

(2.14.3.5) Un anneau de dimension de Krull infinie. Soit A l'anneau $k[X_i]_{1\leqslant i}$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, l'idéal $\mathfrak{p}_j := (X_i)_{1\leqslant i\leqslant j}$ de A est premier : en effet, le quotient $A/\mathfrak{p}_j$ s'identifie naturellement à l'anneau intègre $k[X_i]_{i>j}$. Pour tout entier n, on dispose d'une chaîne strictement croissante de $n+1$ idéaux premiers de A, à savoir

$$(0) \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_n.$$

En conséquence, $\dim_{\text{Krull}} A = +\infty$.

(2.14.4) On démontre que si A est un anneau *local noethérien* dont l'idéal maximal possède un système de générateurs de cardinal n, alors $\dim_{\text{Krull}} A \leqslant n$ (en particulier, $\dim_{\text{Krull}} A$ est finie).

(2.14.4.1) Un anneau local A est dit *régulier* s'il est noethérien et si son idéal maximal possède un système de générateurs de cardinal exactement égal à $\dim_{\text{Krull}} A$. Les anneaux locaux réguliers jouent un rôle majeur en géométrie algébrique.

(2.14.4.2) Nagata a construit un exemple d'anneau noethérien (non local) dont la dimension de Krull est infinie.

(2.14.5) Proposition. *Soit A un anneau et soit B une A-algèbre. On suppose que la flèche $f : A \to B$ est injective et que B est entière sur A. On a alors* $\dim_{\text{Krull}} B = \dim_{\text{Krull}} A$.

Démonstration. On va montrer l'égalité des dimensions par double majoration.

(2.14.5.1) *Prouvons que* $\dim_{\text{Krull}} B \geqslant \dim_{\text{Krull}} A$. Soit $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ une chaîne strictement croissante d'idéaux premiers de A. Il existe alors une chaîne $\mathfrak{q}_0 \subset \mathfrak{q}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{q}_n$ d'idéaux premiers de B tels que $f^{-1}(\mathfrak{q}_i) = \mathfrak{p}_i$ pour tout i. Pour le voir, on raisonne par récurrence sur n.

Si $n = 0$, c'est vrai par la remarque suivant l'énoncé du lemme de going-up (c'est ici qu'intervient l'injectivité de f).

Supposons maintenant $n > 0$ et les $\mathfrak{q}_i$ construits pour $i \leqslant n-1$. On applique alors l'assertion 3) du lemme de going-up avec $J = \mathfrak{q}_{n-1}, I = f^{-1}(\mathfrak{q}_{n-1}) = \mathfrak{p}_{n-1}$, et $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_n$. Elle assure l'existence d'un idéal premier $\mathfrak{q}_n$ de B contenant $\mathfrak{q}_{n-1}$ et tel que $f^{-1}(\mathfrak{q}_n) = \mathfrak{p}_n$, qui est ce qu'on souhaitait.

Comme $f^{-1}(\mathfrak{q}_i) = \mathfrak{p}_i$ pour tout i, et comme les $\mathfrak{p}_i$ sont deux à deux distincts, les $\mathfrak{q}_i$ sont deux à deux distincts. La chaîne des $\mathfrak{q}_i$ est ainsi *strictement* croissante, et a même longueur que celle des $\mathfrak{p}_i$. On en déduit l'inégalité requise

$$\dim_{\mathrm{Krull}} B \geqslant \dim_{\mathrm{Krull}} A.$$

(2.14.5.2) *Prouvons que* $\dim_{\mathrm{Krull}} A \geqslant \dim_{\mathrm{Krull}} B$. Soit $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{q}_n$ une chaîne strictement croissante d'idéaux premiers de B. Pour tout indice i, posons $\mathfrak{p}_i = f^{-1}(\mathfrak{q}_i)$. Les $\mathfrak{p}_i$ sont des idéaux premiers de A.

Soit $i \leqslant n-1$; nous allons montrer que $\mathfrak{p}_i \subsetneq \mathfrak{p}_{i+1}$. L'inclusion large $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}_{i+1}$ provient immédiatement des définitions (et de l'inclusion large de $\mathfrak{q}_i$ dans $\mathfrak{q}_{i+1}$). Il reste à s'assurer que $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_{i+1}$; mais s'ils étaient égaux, on aurait alors $f^{-1}(\mathfrak{q}_i) = f^{-1}(\mathfrak{q}_{i+1})$ avec $\mathfrak{q}_i \subsetneq \mathfrak{q}_{i+1}$, contredisant l'assertion 2) du lemme de going-up.

La chaîne des $\mathfrak{p}_i$ est ainsi *strictement* croissante, et a même longueur que celle des $\mathfrak{q}_i$. On en déduit l'inégalité requise

$$\dim_{\mathrm{Krull}} A \geqslant \dim_{\mathrm{Krull}} B,$$

ce qui achève la démonstration. □

2.15 Algèbres de type fini sur un corps : normalisation de Noether, *Nullstellensatz*

On fixe pour toute cette section un corps k.

(2.15.1) Notre premier objectif est de démontrer le «lemme de normalisation de Noether», qui permet dans certaines situations de ramener l'étude d'une k-algèbre de type fini A à celle d'une algèbre de polynômes (le fait de savoir écrire A comme un *quotient* d'une telle algèbre est le plus souvent insuffisant, tant la théorie des idéaux de $k[X_1, \ldots, X_n]$ est complexe dès que $n > 1$).

Pour ce faire, nous avons choisi d'isoler le cœur technique de la démonstration en lui donnant un statut de proposition indépendante, par laquelle nous allons commencer.

(2.15.2) Proposition. *Soit $n \geqslant 0$ et soit I un idéal* strict *de $k[X_1, \ldots, X_n]$. Il existe n éléments $Y_1, \ldots, Y_n$ de $k[X_1, \ldots, X_n]$ tels que les propriétés suivantes soient satisfaites :*

1) les Y_i sont algébriquement indépendants sur k ;
2) $k[X_1, \ldots, X_n]$ est entière sur $k[Y_1, \ldots, Y_n]$;
3) l'idéal $I \cap k[Y_1, \ldots, Y_n]$ de $k[Y_1, \ldots, Y_n]$ est engendré par $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ pour un certain entier m compris entre 0 et n.

Démonstration. On procède en plusieurs étapes.

(2.15.2.1) Remarque préalable. Supposons avoir construit une famille $(Y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ d'éléments de $k[X_1, \ldots, X_n]$ telle que $k[X_1, \ldots, X_n]$ soit entière sur $k[Y_1, \dots, Y_n]$. Le corps $k(X_1, \dots, X_n)$ est alors engendré par des éléments algébriques sur $k(Y_1, \dots, Y_n)$, et est donc lui-même algébrique sur $k(Y_1, \dots, Y_n)$. En conséquence, $(Y_1, \dots, Y_n)$ contient une base de transcendance de $k(X_1, \dots, X_n)$ sur k ; mais comme le degré de transcendance de $k(X_1, \dots, X_n)$ sur k vaut n, cela signifie que $(Y_1, \dots, Y_n)$ est une base de transcendance de $k(X_1, \dots, X_n)$ sur k. En particulier, les Y_i sont algébriquement indépendants. Ainsi, si l'on prouve 2), l'assertion 1) sera *automatiquement* vérifiée.

(2.15.2.2) Pour démontrer la proposition, on procède par récurrence sur n. Si $n = 0$ alors $k[X_1, \dots, X_n] = k$. Comme I est strict, il est nécessairement nul. On vérifie alors aussitôt qu'on peut prendre pour (Y_i) la *famille vide*.

Supposons maintenant $n > 0$, et la proposition vraie au rang $n-1$. Si $I = \{0\}$ on peut prendre $Y_i = X_i$ pour tout i. On se place désormais dans le cas où $I \neq 0$. On choisit alors un élément $P \neq 0$ dans I ; comme I est strict, P est non constant.

(2.15.2.3) On pose $Z_1 = P$. La prochaine étape de la preuve consiste à construire $Z_2, \dots, Z_n$ de sorte que $k[X_1, \dots, X_n]$ soit entier sur $k[Z_1, \dots, Z_n]$.

Nous allons en fait chercher les Z_i sous une forme très particulière. Plus précisément, donnons-nous une famille $r_2, \dots, r_n$ d'entiers > 0. Nous allons chercher des conditions suffisantes sur les r_i pour que $k[X_1, \dots, X_n]$ soit entier sur $k[Z_1, \dots, Z_n]$ avec $Z_i = X_i + X_1^{r_i}$ pour $i \geqslant 2$.

Notons déjà que comme $X_i = Z_i - X_1^{r_i}$ pour tout $i \geqslant 2$, et comme Z_i est évidemment entier sur $k[Z_1, \dots, Z_n]$ pour tout i il suffit, pour obtenir ce qu'on souhaite, de faire en sorte que X_1 soit entier sur $k[Z_1, \dots, Z_n]$.

Lorsqu'on remplace dans l'écriture de P chacun des X_i pour $i \geqslant 2$ par $Z_i - X_1^{r_i}$, un monôme donné de P de multi-degré $(i_1, \dots, i_n)$ donne lieu à un polynôme en X_1 à coefficients dans $k[Z_1, \dots, Z_n]$ dont le terme dominant est de la forme $\alpha X_1^{i_1 + r_2 i_2 + \dots + r_n i_n}$, avec $\alpha \in k^\times$.

(2.15.2.4) Supposons que lorsque $(i_1, \dots, i_n)$ parcourt l'ensemble des multi-degrés des monômes de P, les entiers $i_1 + r_2 i_2 + \dots + r_n i_n$ soient deux à deux distincts. Dans ce cas, le maximum N de ces entiers est atteint pour un et un seul multi-degré $(i_1, \dots, i_n)$, et N est nécessairement non nul puisque P n'est pas constant. Il résulte alors de ce qui précède que l'égalité $P - Z_1 = 0$ peut se récrire

$$\alpha X_1^N + Q(X_1) - Z_1 = 0,$$

où $\alpha \in k^\times$ et où Q est un polynôme de degré $< N$ en X_1, à coefficients dans $k[Z_1, \dots, Z_n]$. Comme $N > 0$, le polynôme $Q(X_1) - Z_1$ est encore un polynôme de degré $< N$ en X_1, à coefficients dans $k[Z_1, \dots, Z_n]$. En multipliant l'égalité ci-dessus par α^{-1}, on obtient

$$X_1^N + \alpha^{-1}(Q(X_1) - Z_1) = 0,$$

et X_1 est entier sur $k[Z_1, \dots, Z_n]$.

(2.15.2.5) Il suffit donc, pour construire des polynômes $Z_2, \dots, Z_n$ satisfaisant la propriété souhaitée, d'exhiber une famille $(r_2, \dots, r_n)$ d'entiers strictement positifs telle que les entiers $i_1 + r_2 i_2 + \ldots + r_n i_n$ soient deux à deux distincts lorsque $(i_1, \ldots, i_n)$ parcourt l'ensemble des multi-degrés des monômes de P.

Soit p un entier strictement supérieur au maximum des degrés intervenant dans les monômes de P. On peut alors prendre $r_2 = p, r_3 = p^2, \ldots, r_n = p^{n-1}$: en effet, ils satisfont la condition exigée en vertu de l'unicité du développement d'un entier en base p.

(2.15.2.6) *Construction des Y_i et conclusion.* On déduit de 2.15.2.1 que les Z_i sont algébriquement indépendants sur k. En particulier, $k[Z_2, \ldots, Z_n]$ est une algèbre de polynômes en $n-1$ variables. Comme I est strict, $1 \notin I \cap k[Z_2, \ldots, Z_n]$ et ce dernier est donc un idéal strict de $k[Z_2, \ldots, Z_n]$. Il s'ensuit, par l'hypothèse de récurrence, qu'il existe une famille $(Y_2, \ldots, Y_n)$ d'éléments de $k[Z_2, \ldots, Z_n]$, algébriquement indépendants sur k et tels que :

- $k[Z_2, \ldots, Z_n]$ est entier sur $k[Y_2, \ldots, Y_n]$;
- l'idéal $I \cap k[Y_2, \ldots, Y_n]$ de $k[Y_2, \ldots, Y_n]$ est engendré par $(Y_2, \ldots, Y_m)$ pour un certain m.

Posons $Y_1 = Z_1$. L'anneau $k[Z_1, \ldots, Z_n]$ est alors engendré par des éléments entiers sur $k[Y_1, \ldots, Y_n]$. Il est donc entier sur $k[Y_1, \ldots, Y_n]$; par transitivité, $k[X_1, \ldots, X_n]$ est entier sur $k[Y_1, \ldots, Y_n]$. Cela force les Y_i à être algébriquement indépendants sur k (2.15.2.1).

Pour conclure, il suffit de montrer que l'idéal $I \cap k[Y_1, \ldots, Y_n]$ de $k[Y_1, \ldots, Y_n]$ est engendré par $(Y_1, \ldots, Y_m)$. On a $Y_1 = Z_1 = P \in I$, et $Y_j \in I$ pour $2 \leqslant j \leqslant m$ par choix des Y_j. Par conséquent, l'idéal de $k[Y_1, \ldots, Y_n]$ engendré par les Y_j pour $1 \leqslant j \leqslant m$ est contenu $I \cap k[Y_1, \ldots, Y_n]$.

Il reste à vérifier l'inclusion réciproque. Soit $R \in I \cap k[Y_1, \ldots, Y_n]$. On peut écrire $R = Y_1 S + T$, où $T \in k[Y_2, \ldots, Y_n]$ (on met à part les monômes contenant Y_1). Comme $R \in I$ et $Y_1 \in I$, on a $T \in I \cap k[Y_2, \ldots, Y_n]$. Par conséquent, T s'écrit $\sum_{2 \leqslant i \leqslant m} A_i Y_i$ avec $A_i \in k[Y_2, \ldots, Y_m]$ pour tout i, et on a alors $R = SY_1 + \sum_{2 \leqslant i \leqslant m} A_i Y_i$. Ainsi, R appartient à l'idéal de $k[Y_1, \ldots, Y_n]$ engendré par $(Y_1, \ldots, Y_m)$, ce qui achève la démonstration. □

(2.15.3) Lemme de normalisation de Noether. *Soit A une k-algèbre de type fini non nulle. Il existe une famille $(y_1, \ldots, y_d)$ d'éléments de A algébriquement indépendants sur k et tels que A soit entière sur $k[y_1, \ldots, y_d]$.*

Démonstration. Comme A est de type fini, elle s'identifie à $k[X_1, \ldots, X_n]/I$ pour un certain n et un certain idéal I de $k[X_1, \ldots, X_n]$, qui est strict puisque A est non nulle.

On peut donc appliquer la proposition 2.15.2 ci-dessus. Elle assure l'existence d'une famille $(Y_1, \ldots, Y_n)$ d'éléments de $k[X_1, \ldots, X_n]$ algébriquement indépendants sur k et d'un entier $m \leqslant n$ tels que $k[X_1, \ldots, X_n]$ soit entière sur $k[Y_1, \ldots, Y_n]$, et tels que l'idéal $I \cap k[Y_1, \ldots, Y_n]$ de $k[Y_1, \ldots, Y_n]$ soit engendré par $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$. Notons $y_1, \ldots, y_d$ les classes respectives de $Y_{m+1}, \ldots, Y_n$ modulo I (on a donc $d = n - m$). Comme $k[X_1, \ldots, X_n]$ est entière sur $k[Y_1, \ldots, Y_n]$, l'anneau quotient $A = k[X_1, \ldots, X_n]/I$ est entier sur sa sous-algèbre $k[Y_1, \ldots, Y_n]/(I \cap k[Y_1, \ldots, Y_n])$, qui est engendrée par les y_i car chacun des Y_j pour $j \leqslant m$ appartient à I ; par conséquent, A est entière sur $k[y_1, \ldots, y_d]$.

Il reste à s'assurer que les y_i sont algébriquement indépendants sur k. Soit donc $Q \in k[T_1, \ldots, T_d]$ un polynôme s'annulant en les y_i. Cela signifie que $Q(Y_{m+1} \dots, Y_n) \in I \cap k[Y_1, \dots, Y_n]$. Cet idéal de $k[Y_1, \dots, Y_n]$ étant engendré par les Y_j pour $j \leqslant m$, le polynôme $Q(Y_{m+1}, \dots, Y_n)$ peut s'écrire $\sum_{1 \leqslant j \leqslant m} A_j Y_j$ où les A_j appartiennent à $k[Y_1, \dots, Y_n]$. Mais comme $Q(Y_{m+1}, \dots, Y_n)$ ne fait intervenir que les variables Y_j pour $j > m$, il ne peut admettre une telle écriture que s'il est nul. Il en résulte que $Q = 0$, ce qu'il fallait démontrer. □

(2.15.4) Commentaires.

(2.15.4.1) Comme A est de type fini comme k-algèbre, elle est de type fini comme B-algèbre pour toute sous-algèbre B de A. Il résulte alors de la proposition 2.12.5 que l'on obtiendrait un énoncé équivalent à celui du lemme de normalisation de Noether en remplaçant «entière sur $k[y_1, \dots, y_d]$» par «finie sur $k[y_1, \dots, y_d]$». Nous avons opté pour l'épithète «entière» car ce que notre preuve du lemme de normalisation de Noether montre *effectivement*, c'est bien le caractère entier de A sur $k[y_1, \dots, y_d]$.

(2.15.4.2) Supposons A intègre. Dans ce cas, son corps des fractions est engendré par des éléments algébriques sur $k(y_1, \dots, y_d)$ et est donc lui-même algébrique sur $k(y_1, \dots, y_d)$. En conséquence, $(y_1, \dots, y_d)$ est une base de transcendance de Frac A sur k, et l'entier d est dès lors nécessairement égal au degré de transcendance de Frac A sur k.

(2.15.5) Nous allons maintenant donner deux variantes du *Nullstellensatz*[4], également appelé «théorème des zéros de Hilbert». Les deux premières s'énoncent dans un langage purement algébrique, la troisième évoque la géométrie algébrique et justifiera l'appellation du théorème.

(2.15.6) Première variante du *Nullstellensatz*. *Soit A une k-algèbre de type fini. Si A est un corps, c'est une extension finie de k.*

Démonstration. Le lemme de normalisation de Noether assure qu'il existe des éléments $y_1, \dots, y_d$ de A, algébriquement indépendants sur k et tels que A soit entière (ou finie, *cf.* 2.15.4.1) sur $k[y_1, \dots, y_d]$.

Si A est un corps, l'anneau de polynômes $k[y_1, \dots, y_d]$ est lui aussi un corps d'après le lemme 2.12.12, ce qui force d à être nul, et $k[y_1, \dots, y_d]$ à être égale à k ; le corps A est alors une k-algèbre finie, ce qu'il fallait démontrer. □

(2.15.7) Deuxième variante du *Nullstellensatz*. *Soit A un k-algèbre de type fini et soit $\mathfrak{p}$ un idéal de A. les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $A/\mathfrak{p}$ *est une extension finie de k ;*
ii) $\mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})$ *est une extension finie de k ;*
iii) $\mathfrak{p}$ *est maximal.*

Démonstration. Il est clair que i)⇒ii). Supposons que ii) soit vraie. L'algèbre $A/\mathfrak{p}$ est alors, en tant que sous-algèbre de $\mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})$, une algèbre intègre et entière sur k. D'après le lemme 2.12.12, c'est un corps et $\mathfrak{p}$ est maximal.

Enfin, si $\mathfrak{p}$ est maximal alors $A/\mathfrak{p}$ est une k-algèbre de type fini qui est un corps, et c'est donc une extension finie de k en vertu de la variante précédente du *Nullstellensatz* (2.15.6). □

4. En allemand : théorème du lieu des zéros.

(2.15.8) Troisième variante du *Nullstellensatz*. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $(P_i)_{i \in I}$ une famille de polynômes appartenant à $k[T_1, \ldots, T_n]$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) Il existe une extension finie *L de k et un n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in L^n$ tel que $P_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$ pour tout i.*

2) Il existe une extension L de k et un n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in L^n$ tel que $P_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$ pour tout i.

3) Pour toute famille $(Q_i)_{i \in I}$ de polynômes presque tous nuls appartenant à $k[X_1, \ldots, X_n]$, on a $\sum Q_i P_i \neq 1$.

Démonstration. L'implication 1)$\Rightarrow$2) est évidente. Supposons que 2) soit vraie, et donnons-nous une famille (Q_i) de polynômes presque tous nuls appartenant à $k[X_1, \ldots, X_n]$. On a

$$(\sum Q_i P_i)(x_1, \ldots, x_n) = \sum Q_i(x_1, \ldots, x_n) P_i(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

ce qui entraîne que $\sum Q_i P_i \neq 1$.

Supposons enfin que 3) soit vraie. Cela signifie que l'idéal J de $k[X_1, \ldots, X_n]$ engendré par les P_i ne contient pas 1 ; autrement dit, il est strict. L'algèbre quotient $A := k[X_1, \ldots, X_n]/J$ est alors non nulle, et elle admet de ce fait un idéal maximal $\mathfrak{m}$. Comme A est de type fini sur k par construction, le corps quotient $L := A/\mathfrak{m}$ est une extension finie de k en vertu de la deuxième variante du *Nullstellensatz* (2.15.7). Si l'on note x_i l'image de $\overline{X_i}$ par la surjection canonique $A \to L$, le n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ annule par construction chacun des P_i, d'où 1). □

(2.15.9) Commentaires.

(2.15.9.1) Si le corps k est algébriquement clos, l'assertion 1) ci-dessus peut se reformuler en disant qu'il existe un n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments *du corps k lui-même* tels que $P_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$ pour tout i.

(2.15.9.2) Supposons que les trois conditions équivalentes 1), 2) et 3) ci-dessus soient satisfaites, et soit F une extension *algébriquement close* de k. Il existe alors un n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in F^n$ tel que $P_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$ pour tout i.

En effet, commençons par choisir L et $(x_1, \ldots, x_n)$ comme dans 1). Comme L est une extension finie de k, elle admet un k-plongement dans F (faites l'exercice si vous ne connaissez pas ce résultat ; on peut le démontrer «à la main» par récurrence sur $[L : k]$, ou par des méthodes analogues à celles décrites au 2.11.2). Ce plongement permet de voir L comme un sous-corps de F, et $(x_1, \ldots, x_n)$ comme un n-uplets d'éléments de F, d'où l'assertion.

2.16 Un calcul de dimension de Krull

(2.16.1) Le but de cette section est de calculer explicitement la dimension de Krull d'une k-algèbre intègre de type fini, en se fondant de manière cruciale sur le lemme de normalisation de Noether. On désigne toujours par k un corps.

(2.16.2) Théorème. *Soit A une k-algèbre intègre de type finie. La dimension de Krull de A est finie, et coïncide avec le degré de transcendance de* Frac A *sur k.*

Démonstration. Le lemme de normalisation de Noether assure l'existence d'éléments $y_1, \ldots, y_d$ de A, algébriquement indépendants sur k et tels que A soit entière sur $k[y_1, \ldots, y_d]$. De plus, l'entier d est nécessairement égal au degré de transcendance de Frac A sur k (2.15.4.2). On raisonne désormais par récurrence sur d.

(2.16.2.1) Si $d = 0$ alors $k[y_1, \ldots, y_d] = k$, et A est donc une algèbre intègre entière sur k. C'est dès lors un corps en vertu du lemme 2.12.12 ; par conséquent, sa dimension de Krull est nulle.

(2.16.2.2) Supposons $d > 0$ et la proposition vraie pour les entiers $< d$. Comme $k[y_1, \ldots, y_d]$ s'injecte dans A et comme A est entière sur $k[y_1, \ldots, y_d]$, il résulte de la proposition 2.14.5 que la dimension de Krull de A est égale à celle de l'algèbre de polynômes $k[y_1, \ldots, y_d]$. Il suffit donc de montrer que la dimension de Krull de $k[y_1, \ldots, y_d]$ est égale à d.

Pour tout $i \leqslant d$, notons $\mathfrak{p}_i$ l'idéal $(y_1, \ldots, y_i)$ de $k[y_1, \ldots, y_d]$. Il est premier (le quotient $k[y_1, \ldots, y_d]/\mathfrak{p}_i$ est l'anneau intègre $k[y_j]_{i<j\leqslant d}$), et l'on a ainsi construit une chaîne strictement croissante d'idéaux premiers

$$(0) = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_d$$

(que les inclusions soient strictes résulte du fait évident que $y_i \notin \mathfrak{p}_{i-1}$ pour tout $i \geqslant 1$). Par conséquent, la dimension de Krull de $k[y_1, \ldots, y_d]$ est au moins égale à d.

Nous allons montrer maintenant qu'elle vaut au plus d. Soit

$$\mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{q}_m$$

une chaîne strictement croissante d'idéaux premiers de A ; nous allons prouver que $m \leqslant d$, ce qui permettra de conclure.

Quitte à rajouter (0) en début de chaîne, on peut toujours supposer que l'on a $\mathfrak{q}_0 = (0)$. Si $m = 0$ alors $m \leqslant d$; on suppose maintenant que $m > 0$. L'idéal $\mathfrak{q}_1$ est alors non nul, il possède donc un élément $f \in k[y_1, \ldots, y_d]$ qui est non constant (puisque $\mathfrak{q}_1$ est strict). Comme $\mathfrak{q}_1$ est premier, il existe un diviseur irréductible g de f qui appartient à $\mathfrak{q}_1$. La chaîne

$$\mathfrak{q}_1/(g) \subsetneq \mathfrak{q}_2/(g) \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{q}_m/(g)$$

est une chaîne strictement croissantes d'idéaux premiers de $k[y_1, \ldots, y_d]/(g)$. Il suffit maintenant pour obtenir la majoration souhaitée de prouver que la dimension de Krull de $k[y_1, \ldots, y_d]/(g)$ est majorée par $d - 1$.

L'anneau $B := k[y_1, \ldots, y_d]/(g)$ est intègre (puisque g est irréductible, et puisque $k[y_1, \ldots, y_d]$ est factoriel). Il est engendré par les $\overline{y_i}$ comme k-algèbre. Le corps Frac B est donc engendré par les $\overline{y_i}$ comme extension de k ; en particulier, la famille $(\overline{y_i})$ contient une base de transcendance de Frac B sur k.

Par ailleurs, les $\overline{y_i}$ *ne sont pas* algébriquement indépendants sur k, puisque $g(\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_d}) = 0$ par construction. En conséquence, $(\overline{y_i})$ n'est pas elle-même une base de transcendance de Frac B sur k. Le degré de transcendance δ de Frac B sur k est donc strictement inférieur à d. En vertu de l'hypothèse de récurrence, la dimension de Krull de B est égale à $\delta \leqslant d - 1$, ce qui achève la démonstration. $\square$

(2.16.3) Commentaires.

(2.16.3.1) Le théorème ci-dessus assure en particulier que la dimension de Krull de la k-algèbre $k[X_1, \ldots, X_d]$ (qui n'est autre du point de vue de la géométrie algébrique que «l'anneau des fonctions sur l'espace affine de dimension d») est égale à d ; on a d'ailleurs démontré explicitement cette égalité au cours de la preuve.

(2.16.3.2) Exercice. En reprenant les notations du 2.16.2.2 ci-dessus, montrez que le degré de transcendance de Frac B est *exactement* égal à $d - 1$.

Chapitre 3

Théorie des faisceaux

3.1 Préfaisceaux

(3.1.1) Soit X un espace topologique. Nous insistons sur le fait qu'on ne fait *aucune* hypothèse sur X : on ne suppose pas qu'il est séparé, ni même que tous ses points sont fermés... Cette généralité ne complique ni les définitions, ni les preuves, et elle est indispensable en géométrie algébrique : en effet, le plus souvent, un schéma possède des points non fermés, et n'est *a fortiori* pas topologiquement séparé.

(3.1.2) Définition. Un *préfaisceau* $\mathscr{F}$ sur X consiste en les données suivantes.

• Pour tout ouvert U de X, un ensemble $\mathscr{F}(U)$ dont les éléments sont parfois appelés les *sections* de $\mathscr{F}$ sur U ;
• Pour tout couple (U, V) d'ouverts de X avec $V \subset U$, une application $r_{U \to V} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ dite de *restriction*, et parfois notée $s \mapsto s|_V$.

Ces données sont sujettes aux deux axiomes suivants :

◇ $r_{U \to U} = \mathrm{Id}_{\mathscr{F}(U)}$ pour tout ouvert U de X ;
◇ $r_{V \to W} \circ r_{U \to V} = r_{U \to W}$ pour tout triplet (U, V, W) d'ouverts de X avec $W \subset V \subset U$.

(3.1.2.1) On peut définir un préfaisceau de façon plus concise, qui vous paraîtra peut-être un peu pédante (mais a l'avantage de se généraliser à bien d'autres cadres que celui de la topologie). Soit Ouv_X la catégorie dont les objets sont les ouverts de X et les flèches les *inclusions* ; un préfaisceau sur X est alors simplement un foncteur contravariant de Ouv_X vers Ens.

(3.1.2.2) Ce que nous avons défini ci-dessus est en réalité la notion de préfaisceau *d'ensembles*. Nous aurons souvent à considérer des préfaisceau de groupes (resp. groupes abéliens, resp. anneaux, resp. espaces vectoriels, resp. algèbres...) : la définition est la même, à ceci près qu'on exige que $\mathscr{F}(U)$ soit pour tout U un groupe (resp. ...), et que les restrictions soient des morphismes de groupes (resp. ...).

En termes plus catégoriques, cela revient à considérer les foncteurs contrariants de Ouv_X vers Gp (resp. ...).

(3.1.3) Exemples. Nous allons donner quelques exemples de préfaisceaux, que nous allons décrire en nous contentant de donner leurs valeurs sur les ouverts : la définition des flèches de restriction est à chaque fois évidente.

(3.1.3.1) Si X est un espace topologique, $U \mapsto \mathscr{C}^0(U, \mathbb{R})$ est un préfaisceau de $\mathbb{R}$-algèbres sur X.

(3.1.3.2) Si X est une variété différentielle, $U \mapsto \mathscr{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ est un préfaisceau de $\mathbb{R}$-algèbres sur X.

(3.1.3.3) Si X est une variété analytique complexe, $U \mapsto \mathscr{H}(U, \mathbb{C})$ est un préfaisceau de $\mathbb{C}$-algèbres sur X, où $\mathscr{H}(U, \mathbb{C})$ désigne l'anneau des fonctions holomorphes sur U.

(3.1.3.4) Si X est un espace topologique et E un ensemble, $U \mapsto E$ est un préfaisceau d'ensembles sur X, appelé le *préfaisceau constant associé à E*. Si E est un groupe (resp. ...), le préfaisceau constant associé hérite d'une structure naturelle de préfaisceau de groupes (resp. ...).

(3.1.3.5) Terminons par un exemple un peu plus artificiel que les précédents : si X est un espace topologique, les formules

$$U \mapsto \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ si } U = X \\ \{0\} \text{ sinon} \end{cases}$$

définissent un préfaisceau de groupes abéliens sur X.

(3.1.4) Soit X un espace topologique, soit $\mathscr{F}$ un préfaisceau sur X et soit x un point de X. La *fibre* $\mathscr{F}_x$ de $\mathscr{F}$ en x est défini comme le quotient de l'ensemble des couples (U, s), où U est un voisinage ouvert de x et s une section de $\mathscr{F}$ sur U, par la relation d'équivalence suivante : $(U, s) \sim (V, t)$ *si et seulement si il existe un voisinage ouvert W de x dans $U \cap V$ tel que $s|_W = t|_W$.*

En bref, $\mathscr{F}_x$ est l'ensemble des sections de $\mathscr{F}$ définies au voisinage de x, deux sections appartenant à $\mathscr{F}_x$ étant considérées comme égales si elles coïncident au voisinage de x.

(3.1.4.1) Soit U un voisinage ouvert de x et soit $s \in \mathscr{F}(U)$. L'image de (U, s) dans $\mathscr{F}_x$ est appelée le *germe de s en x* et est notée s_x.

(3.1.4.2) Si $\mathscr{F}$ est un préfaisceaux de groupes (resp. ...), alors $\mathscr{F}_x$ est un groupe (resp. ...) pour tout x, et $s \mapsto s_x$ un morphisme de groupes (resp. ...).

(3.1.4.3) Exemples de fibres. Si $\mathscr{F}$ est le préfaisceau constant associé à un ensemble E alors $\mathscr{F}_x \simeq E$.

Supposons que $X = \mathbb{C}$, que x est l'origine et que $\mathscr{F}$ est le préfaisceau des fonctions holomorphes. La fibre $\mathscr{F}_x$ s'identifie alors à la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathbb{C}\{z\}$ des séries formelles en z de rayon > 0.

(3.1.5) Soit X un espace topologique. Les préfaisceaux sur X forment une catégorie, les flèches se décrivant comme suit. Si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont deux préfaisceaux sur X, un morphisme de $\mathscr{F}$ vers $\mathscr{G}$ consiste en la donnée, pour tout ouvert U de X, d'une application de $\mathscr{F}(U)$ vers $\mathscr{G}(U)$, de sorte que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[r] \arrow[d, "r_{U\to V}"'] & \mathscr{G}(U) \arrow[d, "r_{U\to V}"] \\ \mathscr{F}(V) \arrow[r] & \mathscr{G}(V) \end{tikzcd}$$

commute pour tout couple (U, V) d'ouverts de X tels que $V \subset U$.

On dit que φ est *injectif* (resp. *surjectif*) si $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ est surjectif pour tout U.

(3.1.5.1) De même, les préfaisceaux de groupes (resp. ...) sur X forment une catégorie, dont les morphismes sont définis comme ci-dessus, à ceci près qu'on demande à $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ d'être un morphisme de groupes (resp. ...) pour tout U.

(3.1.5.2) Si l'on considère les préfaisceaux $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ comme des foncteurs contravariants de Ouv_X vers Ens, un morphisme de $\mathscr{F}$ vers $\mathscr{G}$ n'est autre qu'un morphisme de foncteurs de $\mathscr{F}$ vers $\mathscr{G}$. En particulier, un morphisme $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est un isomorphisme si et seulement si $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ est bijectif pour tout U.

Les mêmes assertions valent *mutatis mutandis* pour les préfaisceaux de groupes (resp. ...).

(3.1.5.3) Si $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est un morphisme de préfaisceaux sur X, il induit pour tout x une application $\varphi_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$; s'il s'agit d'un morphisme de préfaisceaux de groupes (resp. ...) alors $\mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ est un morphisme de groupes (resp. ...).

(3.1.5.4) Soit $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme de préfaisceaux sur X. On définit le préfaisceau Im φ par la formule

$$\mathrm{Im}\ \varphi(U) = \{s \in \mathscr{G}(U), \exists t \in \mathscr{F}(U)\ , s = \varphi(t)\}$$

pour tout ouvert U de X. On dit que Im φ est l'*image* de φ ; c'est un sous-préfaisceau de $\mathscr{G}$, en un sens évident.

(3.1.5.5) Soit $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme de préfaisceaux de groupes sur X. On définit le préfaisceau Ker φ par la formule

$$\mathrm{Ker}\ \varphi(U) = \{s \in \mathscr{F}(U), \varphi(s) = e\}$$

pour tout ouvert U de X. On dit que Ker φ est le *noyau* de φ ; c'est un sous-préfaisceau de groupes de $\mathscr{F}$. Le morphisme φ est injectif si et seulement si son noyau est le préfaisceau constant $U \mapsto \{e\}$.

(3.1.6) Soit $f : Y \to X$ une application continue entre espaces topologiques.

(3.1.6.1) Soit $\mathscr{G}$ un préfaisceau sur Y. La formule $U \mapsto \mathscr{G}(f^{-1}(U))$ définit un préfaisceau sur X, que l'on note $f_*\mathscr{G}$.

(3.1.6.2) Soit $\mathscr{F}$ un préfaisceau sur X. Si V est un ouvert de Y, on note $\mathfrak{E}_V$ l'ensemble des couples (U, s) où U est un ouvert de X contenant $f(V)$ et où s est une section de $\mathscr{F}$ sur U ; et l'on désigne par $\mathscr{R}_V$ la relation d'équivalence sur $\mathfrak{E}_V$ définie comme suit : $(U, s)\mathscr{R}_V(U', s')$ s'il existe un voisinage ouvert W de $f(V)$ dans $U \cap U'$ tel que $s|_W = s'|_W$.

On note $f^{-1}\mathscr{F}$ le préfaisceau $V \mapsto \mathfrak{E}_V/\mathscr{R}_V$.

(3.1.6.3) On vérifie aussitôt que f_* est de façon naturelle un foncteur covariant de la catégorie des préfaisceaux sur Y vers celle des préfaisceaux sur X, et que f^{-1} est de façon naturelle un foncteur covariant de la catégorie des préfaisceaux sur X vers celle des préfaisceaux sur Y.

La définition de f^{-1} est sensiblement plus compliquée que celle de f_*. Néanmoins, f^{-1} se comporte plus simplement que f_* en ce qui concerne les fibres ; expliquons en quoi.

Si $y \in Y$ et si x désigne son image sur X alors pour tout préfaisceau $\mathscr{F}$ sur X, on dispose d'une bijection naturelle $f^{-1}\mathscr{F}_y \simeq \mathscr{F}_x$ (la démonstration de cette assertion est laissée au lecteur).

Par contre, si $\mathscr{G}$ est un préfaisceau sur Y, la fibre $f_*\mathscr{G}_x$ n'admet pas à notre connaissance de description maniable.

(3.1.7) Soit X un espace topologique, soit U un ouvert de X et soit j l'inclusion $U \hookrightarrow X$. Il résulte immédiatement de la définition que pour tout préfaisceau $\mathscr{F}$ sur X, le préfaisceau $j^{-1}\mathscr{F}$ n'est autre que la *restriction* $\mathscr{F}|_U$ de $\mathscr{F}$ à U, c'est-à-dire le préfaisceau $V \mapsto \mathscr{F}(V)$ où V se contente de parcourir l'ensemble des ouverts *de* U.

(3.1.8) Soit $f : Y \to X$ une application continue entre espaces topologiques. Le couple (f^{-1}, f_*) est alors un couple de foncteurs adjoints. La preuve détaillée de ce fait est laissée au lecteur ; nous allons nous contenter de décrire brièvement les isomorphismes d'adjonction. On se donne un préfaisceau $\mathscr{F}$ sur X et un préfaisceau $\mathscr{G}$ sur Y.

(3.1.8.1) *Description d'un isomorphisme* $\mathrm{Hom}(f^{-1}\mathscr{F}, \mathscr{G}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathscr{F}, f_*\mathscr{G})$. Soit φ un morphisme de $f^{-1}\mathscr{F}$ vers $\mathscr{G}$. On lui associe un morphisme ψ de $\mathscr{F}$ vers $f_*\mathscr{G}$ comme suit.

Soit U un ouvert de X, et soit $s \in \mathscr{F}(U)$. Par définition de $f^{-1}\mathscr{F}$, le couple (U, s) donne lieu à une section s' de $f^{-1}\mathscr{F}$ sur $f^{-1}(U)$. Son image $\varphi(s')$ est une section de $\mathscr{G}$ sur $f^{-1}(U)$, et donc par définition une section de $f_*\mathscr{G}$ sur U. On pose alors $\psi(s) = \varphi(s') \in f_*\mathscr{G}(U)$.

(3.1.8.2) *Description de l'isomorphisme* $\mathrm{Hom}(\mathscr{F}, f_*\mathscr{G}) \simeq \mathrm{Hom}(f^{-1}\mathscr{F}, \mathscr{G})$ *réciproque du précédent.* Soit ψ un morphisme de $\mathscr{F}$ vers $f_*\mathscr{G}$. On lui associe un morphisme φ de $f^{-1}\mathscr{F}$ vers $\mathscr{G}$ comme suit.

Soit V un ouvert de Y, et soit $\tau \in f^{-1}\mathscr{F}(V)$. La section τ est la classe d'un couple (U, t) où U est un ouvert de X contenant $f(V)$ et où $t \in \mathscr{F}(U)$. Son image $\psi(t)$ est une section de $f_*\mathscr{G}$ sur U, c'est-à-dire par définition une section de $\mathscr{G}$ sur $f^{-1}(U) \supset V$. On vérifie que l'élément $\psi(t)|_V$ de $\mathscr{G}(V)$ ne dépend que de τ et pas du choix de (U, t), et il est dès lors licite de poser $\varphi(\tau) = \psi(t)|_V$.

(3.1.8.3) Si $\mathscr{F}$ est un préfaisceau de groupes (resp. ...) sur X alors $f^{-1}\mathscr{F}$ hérite naturellement d'une structure de préfaisceau de groupes (resp. ....), et l'isomorphisme $f^{-1}\mathscr{F}_y \simeq \mathscr{F}_{f(y)}$ est pour tout $y \in Y$ un morphisme de groupes.

Si $\mathscr{G}$ est un préfaisceau de groupes (resp. ...) sur Y alors $f_*\mathscr{G}$ hérite naturellement d'une structure de préfaisceau de groupes (resp. ....).

Le foncteur f^{-1} transforme les morphismes de préfaisceaux de groupes (resp. ...) en morphismes de préfaisceaux de groupes (resp. ...), et peut ainsi comme être vu comme un foncteur de la catégorie des préfaisceaux de groupes (resp. ...) sur X vers celle des préfaisceaux de groupes (rep. ...) sur Y. La même assertion vaut *mutatis mutandis* pour f_*, et (f^{-1}, f_*) est encore un couple de foncteurs adjoints dans ce contexte.

3.2 Faisceaux

(3.2.1) Définition. Soit X un espace topologique. On dit qu'un préfaisceau $\mathscr{F}$ sur X est un *faisceau* s'il satisfait la condition suivante : *pour tout ouvert U de X, pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de U et toute famille $(s_i) \in \prod_{i\in I} \mathscr{F}(U_i)$ telle que $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$ pour tout (i,j), il existe une et une seule section s de $\mathscr{F}$ sur U telle que $s|_{U_i} = s_i$ pour tout i.*

(3.2.1.1) Si s et les s_i sont comme ci-dessus, on dit que s est obtenue *par recollement des s_i.*

(3.2.1.2) Soit $\mathscr{F}$ un faisceau sur X. L'ouvert vide de X est alors recouvert par la *famille vide* d'ouverts ; en appliquant à celle-ci et à la *famille vide* de sections la définition d'un faisceau, on voit qu'il existe une et une seule section de $\mathscr{F}$ sur $\varnothing$. Ainsi $\mathscr{F}(\varnothing)$ est un singleton.

Le lecteur que rebuterait (bien à tort) ce style de gymnastique mentale peut prendre l'égalité $\mathscr{F}(\varnothing) = \{*\}$ comme un axiome supplémentaire à rajouter à la définition d'un faisceau.

(3.2.1.3) Un faisceau de groupes (resp. ....) est simplement un préfaisceau de groupes (resp. ...) qui, en tant que préfaisceau d'ensembles, est un faisceau au sens ci-dessus.

(3.2.2) On voit les faisceaux sur X comme une sous-catégorie *pleine* de celle des préfaisceaux sur X : si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont deux faisceaux sur X, un morphisme de faisceaux de $\mathscr{F}$ vers $\mathscr{G}$ est simplement un morphisme de préfaisceaux de $\mathscr{F}$ vers $\mathscr{G}$.

De même, si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont des faisceaux de groupes (resp. ...), un morphisme de faisceaux de groupes (resp. ...) de $\mathscr{F}$ vers $\mathscr{G}$ est simplement un morphisme de préfaisceaux de groupes (resp. ...) de $\mathscr{F}$ vers $\mathscr{G}$.

(3.2.3) Soit X un espace topologique. Il résulte immédiatement de la définition qu'une section s d'un faisceau sur X est entièrement déterminée par la famille $(s_x)_{x\in X}$ de ses germes. On en déduit qu'un morphisme d'un préfaisceau $\mathscr{F}$ sur X vers un faisceau $\mathscr{G}$ sur X est entièrement déterminé par la famille $(\mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x)_{x\in X}$ d'applications induites au niveau des fibres.

(3.2.4) Exemples.

(3.2.4.1) Si X est un espace topologique, $U \mapsto \mathscr{C}^0(U,\mathbb{R})$ est un faisceau de $\mathbb{R}$-algèbres sur X.

(3.2.4.2) Si X est une variété différentielle, $U \mapsto \mathscr{C}^\infty(U,\mathbb{R})$ est un faisceau de $\mathbb{R}$-algèbres sur X.

(3.2.4.3) Si X est une variété analytique complexe, $U \mapsto \mathscr{H}(U,\mathbb{C})$ est un faisceau de $\mathbb{C}$-algèbres sur X, où $\mathscr{H}(U,\mathbb{C})$ désigne l'anneau des fonctions holomorphes sur U.

(3.2.4.4) Si X est un espace topologique et $\{*\}$ un singleton, le préfaisceau constant $U \mapsto \{*\}$ est un faisceau d'ensembles (et aussi d'ailleurs de groupes, resp. ... si l'on y tient).

(3.2.4.5) Si $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est un morphisme de faisceau de groupes sur un espace topologique X, le préfaisceau noyau Ker φ (défini au 3.1.5.5) est un faisceau.

(3.2.4.6) Soit X un espace topologique. Pour tout faisceau $\mathscr{F}$ sur X, et tout ouvert U de X, la restriction de $\mathscr{F}$ à U est un faisceau sur U.

(3.2.5) Contre-exemples.

(3.2.5.1) Soit X un espace topologique. Si X admet un recouvrement (U_i) par des ouverts *stricts*[1], le préfaisceau

$$U \mapsto \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ si } U = X \\ \{0\} \text{ sinon} \end{cases}$$

n'est pas un faisceau : les sections globales 1 et 0 sont distinctes, mais ont toutes deux mêmes restrictions à chacun des U_i.

(3.2.5.2) Soit X un espace topologique et soit E un ensemble *non singleton*. Le préfaisceau constant associé à E envoie en particulier $\varnothing$ sur E et n'est donc pas un faisceau en vertu de 3.2.1.2.

(3.2.6) Autour des images préfaisceautiques. Soit X un espace topologique et soit $\mathscr{F}$ un faisceau sur X. On vérifie immédiatement qu'un sous-préfaisceau $\mathscr{F}'$ de $\mathscr{F}$ est un faisceau si et seulement si «l'appartenance à $\mathscr{F}'$ est une propriété locale», *i.e.* si pour tout ouvert U de X et tout recouvrement ouvert (U_i) de U, une section s de $\mathscr{F}$ sur U appartient à $\mathscr{F}'(U)$ dès que $s|_{U_i}$ appartient à $\mathscr{F}'(U_i)$ pour tout i.

(3.2.6.1) Soit $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme de faisceaux, et soit s une section de $\mathscr{G}$ sur un ouvert U de X ; soit (U_i) un recouvrement ouvert de U tel que $s|_{U_i}$ appartiennent à Im φ pour tout i. Choisissons pour tout i un antécédent t_i de $s|_{U_i}$ dans $\mathscr{F}(U_i)$.

Supposons que φ est injective (il n'y a alors qu'un choix possible pour les t_i). Dans ce cas, $t_i|_{U_i \cap U_j}$ et $t_j|_{U_i \cap U_j}$ coïncident pour tout (i, j), puisque ce sont deux antécédents de $s|_{U_i \cap U_j}$ par une flèche injective. Il s'ensuit que les t_i se recollent en une section t de $\mathscr{F}$ sur U, qui satisfait par construction l'égalité $\varphi(t) = s$. Ainsi, Im φ est un sous-faisceau de $\mathscr{G}$.

On ne suppose plus φ injective. Dans ce cas, rien ne garantit *a priori* que le système (t_i) d'antécédents puisse être choisi de sorte que les t_i se recollent, et le contre-exemple ci-dessous montre que Im φ n'est pas un faisceau en général.

(3.2.6.2) Soit $\mathscr{H}$ le faisceau des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$, et soit d la dérivation $f \mapsto f'$, qui est un endomorphisme du faisceau de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\mathscr{H}$. La fonction $z \mapsto 1/z$ appartient à $\mathscr{H}(\mathbb{C}^\times)$. Comme n'importe quelle fonction holomorphe, elle admet localement des primitives et appartient donc localement à Im d. Par contre, elle n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C}^\times$ (il n'existe pas de logarithme complexe continu sur $\mathbb{C}^\times$) ; elle n'appartient donc pas à Im $d(\mathbb{C}^\times)$. En conséquence, Im d *n'est pas un faisceau.*

(3.2.7) On observe là un cas particulier d'un phénomène général : lorsqu'on applique aux faisceaux des constructions «naïves» (c'est-à-dire définies ouvert par ouvert), on obtient des préfaisceaux qui n'ont en général aucune raison

1. Il existe des espaces topologiques naturels du point de vue de la géométrie algébrique qui sont non vides et pour lesquels cette condition n'est pas vérifiée : par exemple l'espace $\{a, b\}$ dont les ouverts sont $\varnothing, \{a\}$ et $\{a, b\}$. Notons toutefois que si X est de cardinal au moins 2 et si tous ses points sont fermés, X est bien recouvert par des ouverts stricts.

d'être des faisceaux. Qu'à cela ne tienne : on y remédie grâce au procédé de *faisceautisation*, que nous allons maintenant décrire. Il consiste *grosso modo* à modifier un préfaisceau donné pour en faire un faisceau, sans l'altérer davantage que ne le requiert cet objectif ; cela va se traduire rigoureusement en terme de foncteur à représenter.

(3.2.8) Proposition-définition. *Soit X un espace topologique et soit $\mathscr{F}$ un préfaisceau sur X. Le foncteur covariant de la catégorie des faisceaux sur X vers celle des ensembles qui envoie un faisceau $\mathscr{G}$ sur* $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Pref}}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ *est représentable par un couple $(\widehat{\mathscr{F}}, \pi : \mathscr{F} \to \widehat{\mathscr{F}})$. Le faisceau $\widehat{\mathscr{F}}$ est appelé le* faisceautisé *de $\mathscr{F}$, ou encore le* faisceau associé *à $\mathscr{F}$.*

(3.2.9) Formulation équivalente. Il revient au même de dire qu'il existe un faisceau $\widehat{\mathscr{F}}$ sur X et un morphisme de préfaisceaux $\pi : \mathscr{F} \to \widehat{\mathscr{F}}$ tel que pour tout faisceau $\mathscr{G}$ sur X et tout morphisme de préfaisceaux $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$, il existe un unique morphisme $\psi : \widehat{\mathscr{F}} \to \mathscr{G}$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathscr{G} \\ \widehat{\mathscr{F}} \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd} .$$

(3.2.10) *Démonstration de la proposition 3.2.8.* L'idée qui préside à la construction de $\widehat{\mathscr{F}}$ est simple : puisqu'une section d'un faisceau est caractérisée par ses germes, on va *définir* une section de $\widehat{\mathscr{F}}$ comme une collection «raisonnable» de germes de sections de $\mathscr{F}$. Plus précisément, soit $\mathfrak{G}$ l'ensemble $\coprod_{x \in X} \mathscr{F}_x$. Pour tout ouvert U de X, on note $\widehat{\mathscr{F}}(U)$ l'ensemble des applications $f : U \to \mathfrak{G}$ satisfaisant les conditions suivantes :

a) $f(x) \in \mathscr{F}_x$ pour tout $x \in U$;

b) pour tout $x \in U$ il existe un voisinage ouvert V de x dans U et une section s de $\mathscr{F}$ sur V telle que $f(y) = s_y$ pour tout $y \in U$.

Il est immédiat que $\widehat{\mathscr{F}}$ est un faisceau (de fonctions à valeurs dans $\mathfrak{G}$). On note π le morphisme de préfaisceaux de $\mathscr{F}$ vers $\widehat{\mathscr{F}}$ qui pour tout ouvert U de X associe à un élément s de $\mathscr{F}(U)$ l'élément $(x \mapsto s_x)$ de $\widehat{\mathscr{F}}(U)$.

Si U est un ouvert de X, si $x \in U$ et si $f \in \widehat{\mathscr{F}}(U)$, il existe un voisinage ouvert V de x dans U et une section $t \in \mathscr{F}(U)$ telle que $f|_V = \pi(t)$: c'est une reformulation de b).

(3.2.10.1) Nous allons maintentant établir un résultat qui nous sera utile pour établir la propriété universelle de $(\widehat{\mathscr{F}}, \pi)$ et qui présente par ailleurs un intérêt intrinsèque : *pour tout $x \in X$, la flèche $\pi_x : \mathscr{F}_x \to \widehat{\mathscr{F}}_x$ est* bijective. Soit donc $x \in X$.

Surjectivité de $\mathscr{F}_x \to \widehat{\mathscr{F}}_x$. Soit $\sigma \in \widehat{\mathscr{F}}_x$; par définition, σ est le germe en x d'une section τ de $\widehat{\mathscr{F}}$ définie sur un voisinage ouvert U de x, et l'on peut restreindre U de sorte qu'il existe $t \in \mathscr{F}(U)$ vérifiant l'égalité $\pi(t) = \tau$. On a alors $\pi_x(t_x) = \tau_x = \sigma$; ainsi, π_x est surjective.

Injectivité de π_x. Soient s et s' deux éléments de $\mathscr{F}_x$ dont les images dans $\widehat{\mathscr{F}_x}$ coïncident. Il existe un voisinage ouvert U de x et deux sections t et t' de $\mathscr{F}$ sur U telles que $t_x = s$ et $t'_x = s'$; comme $\pi(t)_x = \pi(t')_x$ par hypothèse, on peut restreindre U de sorte que $\pi(t) = \pi(t')$. Par définition de π, cela signifie que $t_y = t'_y$ pour tout $y \in U$. En appliquant ceci avec $y = x$, il vient $s = s'$, et la flèche $\mathscr{F}_x \to \widehat{\mathscr{F}_x}$ est injective.

Calcul des germes d'une section de $\widehat{\mathscr{F}}$. Soit U un ouvert de X, soit $f \in \widehat{\mathscr{F}}(U)$ et soit $x \in U$. Il existe un voisinage ouvert V de x dans U et une section t de $\mathscr{F}$ sur V telle que $f|_V = \pi(t)$. On a alors $f_x = \pi_x(t_x)$; et par ailleurs la définition même de π assure que $t_x = f(x)$.

En conséquence, $f_x = \pi_x(f(x))$; on peut reformuler cette égalité en disant que $f_x = f(x)$ *modulo la bijection naturelle* $\pi_x : \mathscr{F}_x \simeq \widehat{\mathscr{F}_x}$.

(3.2.10.2) Prouvons maintenant que $(\widehat{\mathscr{F}}, \pi)$ satisfait la propriété universelle requise. Soit $\mathscr{G}$ un faisceau sur X, et soit $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme de préfaisceaux. Il s'agit de montrer l'existence et l'unicité de $\psi : \widehat{\mathscr{F}} \to \mathscr{G}$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathscr{G} \\ \widehat{\mathscr{F}} \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

commute.

Unicité de ψ. Si ψ est un morphisme faisant commuter le diagramme, on a pour tout $x \in X$ l'égalité $\psi_x \circ \pi_x = \varphi_x$, et donc $\psi_x = \varphi_x \circ \pi_x^{-1}$ (rappelons que π_x est bijective, *cf.* 3.2.10.1 *supra*. L'unicité de ψ découle alors du fait qu'un morphisme d'un préfaisceau vers un faisceau est entièrement déterminé par son effet sur les fibres.

Existence de ψ. Soit U un ouvert de X et soit $f \in \widehat{\mathscr{F}}(U)$. Nous allons tout d'abord montrer qu'il existe une section t de $\mathscr{G}$ sur U, nécessairement unique, telle que $t_x = \varphi_x(f(x))$ pour tout $x \in U$.

Il existe un recouvrement ouvert (U_i) de U et pour tout i une section s_i de $\mathscr{F}$ sur U_i telle que $f(x) = s_{i,x}$ pour tout $x \in U_i$. Posons $t_i = \varphi(s_i)$. On a alors par construction pour tout $x \in U_i$ l'égalité $t_{i,x} = \varphi_x(s_{i,x}) = \varphi_x(f(x))$. Cette dernière écriture ne dépend plus de i. Il s'ensuit que si $x \in U_i \cap U_j$ alors $t_{i,x} = t_{j,x}$. Comme $\mathscr{G}$ est un faisceau, ceci entraîne que $t_i|_{U_i \cap U_j} = t_j|_{U_i \cap U_j}$ pour tout (i, j), puis que les t_i se recollent en une section t de $\mathscr{G}$; par ce qui précède, on a bien $t_x = \varphi_x(f(x))$ pour tout $x \in U$.

On pose alors $\psi(f) = t$. On vérifie immédiatement que ψ commute aux restrictions ; autrement dit, ψ est bien un morphisme de préfaisceaux. On a pour tout ouvert U de X, tout point x de U et toute section $f \in \mathscr{F}(U)$ les égalités

$$\underbrace{\psi_x(f_x) = \varphi_x(f(x))}_{\text{par construction de } \psi} = \varphi_x(\pi_x^{-1}(f_x)).$$

On a donc $\psi_x = \varphi_x \circ \pi_x^{-1}$ pour tout $x \in X$, soit encore $\psi_x \circ \pi_x = \varphi_x$. Comme un morphisme d'un préfaisceau vers un faisceau est entièrement déterminé par son effet sur les fibres, il vient $\psi \circ \pi = \varphi$, ce qui achève la démonstration. □

(3.2.11) Commentaires.

(3.2.11.1) Soit $\mathscr{F}$ un préfaisceau sur X, et soit $\mathscr{G}$ un faisceau sur X. On a une bijection naturelle

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Pref}}(\mathscr{F},\mathscr{G}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{Faisc}}(\widehat{\mathscr{F}},\mathscr{G}),$$

fonctorielle en $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$. En conséquence, $\mathscr{F} \mapsto \widehat{\mathscr{F}}$ est l'adjoint à gauche du foncteur d'inclusion de la catégorie des faisceaux sur X dans celle des préfaisceaux sur X.

(3.2.11.2) Si $\mathscr{F}$ est un préfaisceau de groupes (resp. ...) sur X alors $\widehat{\mathscr{F}}$ est de manière naturelle un faisceau de groupes (resp...) sur X, et $\pi : \mathscr{F} \to \widehat{\mathscr{F}}$ est un morphisme de préfaisceaux de groupes (resp. ...).

Pour tout morphisme φ de préfaisceau de groupes (resp. ...) de $\mathscr{F}$ vers un faisceau de groupes $\mathscr{G}$ sur X, il existe un unique morphisme ψ de faisceau de groupes (resp. ...) de $\widehat{\mathscr{F}}$ vers $\mathscr{G}$ tel que $\psi \circ \pi = \varphi$.

En d'autres termes, $\mathscr{F} \mapsto \widehat{\mathscr{F}}$ est l'adjoint à gauche du foncteur d'inclusion de la catégorie des faisceaux de groupes (resp. ...) sur X dans celle des préfaisceaux de groupes (resp. ...) sur X.

(3.2.12) Exemples.

(3.2.12.1) Si $\mathscr{F}$ est un faisceau sur un espace topologique X alors $\widehat{\mathscr{F}} = \mathscr{F}$; on le déduit ou bien de la construction de $\widehat{\mathscr{F}}$, ou bien du fait que $(\mathscr{F}, \mathrm{Id}_{\mathscr{F}})$ satisfait visiblement la propriété universelle requise.

(3.2.12.2) Soit E un ensemble et soit X un espace topologique. Pour tout $x \in X$, la fibre en x du préfaisceau constant $U \mapsto E$ est égale à E. Son faisceautisé s'identifie donc, d'après notre construction, au faisceau des applications localement constantes sur X à valeurs dans E. On l'appelle le *faisceau constant associé à* E, et on le note $\underline{E}$.

Notez que si X est localement connexe, le faisceau $\underline{E}$ envoie un ouvert U de X sur $E^{\pi_0(U)}$, où $\pi_0(U)$ est l'ensemble des composantes connexes de U. Mais en général la description de $\underline{E}$ est un peu plus compliquée : se donner une section de $\underline{E}$ sur un ouvert U revient à se donner une partition de U en ouverts fermés, et à assigner à chacun d'eux un élément de E.

(3.2.12.3) Soit $\mathscr{F}$ un faisceau, et soit $\mathscr{G}$ un sous-*préfaisceau* de $\mathscr{F}$. L'inclusion $\mathscr{G} \hookrightarrow \mathscr{F}$ induit un morphisme $\widehat{\mathscr{G}} \hookrightarrow \mathscr{F}$ dont on vérifie (l'exercice est laissé au lecteur) qu'il est injectif et identifie $\widehat{\mathscr{G}}$ au sous-faisceau de $\mathscr{F}$ formé des sections qui appartiennent localement à $\mathscr{G}$. En termes un peu plus précis, $\widehat{\mathscr{G}}(U)$ est pour tout ouvert U l'ensemble des sections $s \in \mathscr{F}(U)$ satisfaisant la condition suivante : pour tout $x \in U$, il existe un voisinage ouvert V de x dans U tel que $s_{|V} \in \mathscr{G}(V)$.

(3.2.13) Image faisceautique. Soit X un espace topologique. Soit $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme de faisceaux sur X. Ce qu'on notera désormais $\mathrm{Im}\ \varphi$, ce sera l'image *faisceautique* de φ, c'est-à-dire le *faisceau associé* à son image préfaisceautique $U \mapsto \{\varphi(s), s \in \mathscr{F}(U)\} \subset \mathscr{G}(U)$. D'après le 3.2.12.3 ci-dessus, une section de $\mathrm{Im}\ \varphi$ sur un ouvert U de X est une section de $\mathscr{G}$ sur U qui admet *localement* un antécédent par φ.

(3.2.14) Exemples.

(3.2.14.1) Si φ est un morphisme *injectif* entre deux faisceaux sur un espace topologique, Im φ coïncide avec l'image préfaisceautique de φ, puisque celle-ci est déjà un faisceau (3.2.6.1).

(3.2.14.2) Ce n'est pas le cas en général : on a vu au 3.2.6.2 que si $\mathscr{H}$ désigne le faisceau des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ et $d : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ la dérivation, l'image préfaisceautique de d n'est pas un faisceau.

Par ailleurs, comme toute fonction holomorphe admet *localement* une primitive, on a Im $d = \mathscr{H}$.

(3.2.15) Soit X un espace topologique et soit $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme de faisceaux sur X. De même qu'on a modifié la définition de l'image, on modifie celle de la surjectivité : on dira désormais que φ est surjectif si son image (faisceautique !) est égale à $\mathscr{G}$. Ainsi, *la dérivation est un endomorphisme surjectif du faisceau des fonctions holomorphes sur* $\mathbb{C}$.

(3.2.15.1) Insistons sur le fait qu'on n'a par contre pas modifié la définition de l'injectivité, ni celle du noyau pour un morphisme de faisceaux de groupes : elles restent définies ouvert par ouvert comme pour les morphismes de préfaisceaux.

(3.2.15.2) Rappelons que φ est un isomorphisme si et seulement si la flèche $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ est bijective pour tout ouvert U de X (3.1.5.2). Il s'ensuit, en vertu de 3.2.14.1, que φ est un isomorphisme si et seulement si il est à la fois injectif et surjectif.

(3.2.15.3) Nous laissons au lecteur le soin de démontrer l'assertion suivante : φ est injectif (resp. surjectif, resp. bijectif) si et seulement si $\varphi_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ est injectif (resp. surjectif, resp. bijectif) pour tout $x \in X$. Elle a l'avantage de remettre injectivité et surjectivité sur le même plan, alors qu'on pouvait avoir l'impression d'une certaine dissymétrie entre elles – l'injectivité étant définie de manière naïve quand la surjectivité ne se teste qu'après faisceautisation de l'image.

(3.2.16) Suites exactes de faisceaux de groupes. Soit X un espace topologique, soient A et B deux éléments de $\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et soit

$$S = \ldots \to \mathscr{F}_i \to \mathscr{F}_{i+1} \to \mathscr{F}_{i+2} \to \ldots$$

une suite de morphismes de faisceaux de groupes sur X, où i parcourt l'ensemble I des entiers relatifs compris entre A et B.

Soit i un élément de I tel que $i-1$ et $i+1$ appartiennent à I. On dit que la suite S est *exacte en* $\mathscr{F}_i$ si le noyau de $\mathscr{F}_i \to \mathscr{F}_{i+1}$ est égal à l'image de $\mathscr{F}_{i-1} \to \mathscr{F}_i$. On dit que S est *exacte* si elle est exacte en $\mathscr{F}_i$ pour tout i tel que $i-1$ et $i+1$ appartiennent à I (les indices extrêmes, s'ils existent, ne comptent donc pas).

Il résulte de la définition que dans une suite exacte, la composée de deux flèches successives est toujours nulle.

(3.2.16.1) Démontrez que l'exactitude d'une suite de faisceaux de groupes se teste sur les fibres.

(3.2.16.2) La suite

$$\mathscr{F}' \xrightarrow{f} \mathscr{F} \xrightarrow{g} \mathscr{F}'' \longrightarrow 0$$

est exacte si et seulement si g est surjective et $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$.

(3.2.16.3) La suite

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}' \xrightarrow{f} \mathscr{F} \xrightarrow{g} \mathscr{F}''$$

est exacte si et seulement si f est injective et $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$.

(3.2.16.4) La suite

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}' \xrightarrow{f} \mathscr{F} \xrightarrow{g} \mathscr{F}'' \longrightarrow 0$$

est exacte si et seulement si f est injective, g est surjective et $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$.

(3.2.17) Exemples. On note $\mathscr{H}$ le faisceau des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$, et $\mathscr{H}^\times$ celui des fonctions holomorphes inversibles.

(3.2.17.1) On a vu au 3.2.14.2 que la dérivation d est un endomorphisme surjectif de $\mathscr{H}$ (vu comme faisceau de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels). Par ailleurs, une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ a une dérivée nulle si et seulement si elle est constante *sur chaque composante connexe de U*. On a donc une suite exacte naturelle de faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur l'espace topologique $\mathbb{C}$:

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathscr{H} \xrightarrow{d} \mathscr{H} \longrightarrow 0 \cdot$$

Décrivons la suite exacte qui lui correspond au niveau des fibres. Soit x un point de $\mathbb{C}$. Le développement en série entière en la variable $u = z - x$ fournit un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres entre $\mathscr{H}_x$ et l'anneau $\mathbb{C}\{u\}$ des séries entières de rayon > 0. La fibre en x de la suite exacte précédente est la suite exacte de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\{u\} \xrightarrow{\partial/\partial u} \mathbb{C}\{u\} \longrightarrow 0 \cdot$$

(3.2.17.2) Toute fonction holomorphe inversible est localement le logarithme d'une fonction holomorphe. Par ailleurs, l'exponentielle d'une fonction holomorphe f sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ est égale à 1 si et seulement si f est constante de valeur appartenant à $2i\pi\mathbb{Z}$ sur chaque composante connexe de U. On a donc une suite exacte naturelle de faisceaux de groupes abéliens sur l'espace topologique $\mathbb{C}$, appelée *suite exponentielle* :

$$0 \longrightarrow \underline{2i\pi\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathscr{H} \xrightarrow{\exp} \mathscr{H}^\times \longrightarrow 1 \cdot$$

Décrivons la suite exacte qui lui correspond au niveau des fibres. Soit x un point de $\mathbb{C}$. Le développement en série entière en la variable $u = z - x$ fournit un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres entre $\mathscr{H}_x$ et l'anneau $\mathbb{C}\{u\}$ des séries entières de rayon > 0. La fibre en x de la suite exacte précédente est la suite exacte de groupes abéliens

$$0 \longrightarrow 2i\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}\{u\} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}\{u\}^\times \longrightarrow 1 \cdot$$

(3.2.18) Soit X un espace topologique et soit

$$1 \longrightarrow \mathscr{F}' \xrightarrow{u} \mathscr{F} \xrightarrow{v} \mathscr{F}''$$

une suite exacte de faisceaux de groupes sur X. Pour tout ouvert U de X, la suite

$$1 \to \mathscr{F}'(U) \to \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}''(U)$$

est exacte. En effet :

• $\mathscr{F}'(U) \to \mathscr{F}(U)$ est injective par définition de l'injectivité d'un morphisme de faisceaux ;

• l'exactitude en $\mathscr{F}$ signifie que Ker v = Im u. Mais comme u est injective, Im u coïncide avec l'image préfaisceautique de u, et l'exactitude en $\mathscr{F}(U)$ en découle aussitôt.

(3.2.18.1) Ainsi, le foncteur $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}(U)$ est exact à gauche. Il n'est pas exact en général, car il ne transforme pas nécessairement les surjections en surjections, comme en atteste notre sempiternel contre-exemple : si $\mathscr{H}$ désigne le faisceau des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ la dérivation $d : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ est surjective, mais l'application induite $\mathscr{H}(\mathbb{C}^\times) \to \mathscr{H}(\mathbb{C}^\times)$ ne l'est pas, puisque son image ne contient pas $z \mapsto 1/z$.

Donnons-en un autre, qui traduit le même phénomène (l'absence de logarithme continu sur $\mathbb{C}^\times$) : la flèche exp : $\mathscr{H} \to \mathscr{H}^\times$ est surjective, mais l'application induite $\mathscr{H}(\mathbb{C}^\times) \to \mathscr{H}^\times(\mathbb{C}^\times)$ ne l'est pas, car son image ne contient pas l'identité.

(3.2.18.2) Ce défaut d'exactitude – dont la mesure précise constitue l'objet de ce qu'on appelle la *cohomologie* – est, en un sens, le principal intérêt de la théorie des faisceaux : il traduit en effet les difficultés de recollement d'antécédents, elles-mêmes liées à la «forme» de l'espace topologique considéré (présence ou non de «trous», etc.) ; il permet donc d'une certaine manière de décrire cette forme algébriquement.

Ainsi, les deux contre-exemples du 3.2.18.1 ci-dessus sont intimement liés au fait que $\mathbb{C}^\times$ n'est pas simplement connexe.

(3.2.19) Quotients. Soit X un espace topologique, soit $\mathscr{G}$ un faisceau de groupes sur X, et soit $\mathscr{H}$ un sous-faisceau de groupes de $\mathscr{G}$. Le *faisceau quotient* $\mathscr{G}/\mathscr{H}$ est le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto \mathscr{G}(U)/\mathscr{H}(U)$, et l'on dispose d'une surjection naturelle $\mathscr{G} \to \mathscr{G}/\mathscr{H}$.

*Supposons que $\mathscr{H}$ est distingué dans $\mathscr{G}$ (*i.e.* $\mathscr{H}(U)$ est distingué dans $\mathscr{G}(U)$ pour tout ouvert U).* Le faisceau quotient $\mathscr{G}/\mathscr{H}$ hérite alors d'une structure naturelle de faisceau de groupes, et $\mathscr{G} \to \mathscr{G}/\mathscr{H}$ est un morphisme de faisceaux de groupes ; nous laissons au lecteur le soin d'énoncer et prouver la propriété universelle du couple $(\mathscr{G}/\mathscr{H}, \mathscr{G} \to \mathscr{G}/\mathscr{H})$ sous ces hypothèses. Indiquons simplement que la suite

$$1 \to \mathscr{H} \to \mathscr{G} \to \mathscr{G}/\mathscr{H} \to 1$$

est exacte ; et qu'inversement, si

$$1 \to \mathscr{H} \to \mathscr{G} \to \mathscr{G}' \to 1$$

est une suite exacte de faisceaux de groupes, le groupe $\mathscr{G}'$ s'identifie naturellement à $\mathscr{G}/\mathscr{H}$.

(3.2.20) Fonctorialité. Soit $f : Y \to X$ une application continue entre espaces topologiques.

(3.2.20.1) Si $\mathscr{G}$ est un faisceau sur Y, on vérifie immédiatement que le préfaisceau $f_*\mathscr{G}$ est un faisceau.

(3.2.20.2) Par contre, si $\mathscr{F}$ est un faisceau sur X, le préfaisceau $f^{-1}\mathscr{F}$ n'est pas un faisceau en général. *C'est désormais son faisceautisé que l'on désignera par* $f^{-1}\mathscr{F}$. Comme la faisceautisation ne modifie pas les fibres, on a encore pour tout $y \in Y$ d'image x sur X un isomorphisme $f^{-1}\mathscr{F}_y \simeq \mathscr{F}_x$.

(3.2.20.3) On a ainsi défini deux foncteurs : le foncteur f^{-1} qui va de la catégorie des faisceaux sur X vers celle des faisceaux sur Y, et le foncteur f_*, qui va de la catégorie des faisceaux sur Y vers celle des faisceaux sur X. On vérifie que f^{-1} est adjoint à gauche de f_* : c'est une conséquence formelle de l'assertion correspondante dans le contexte préfaisceautique et de la propriété universelle du faisceautisé.

(3.2.20.4) Si U est un ouvert de X et si $j : U \hookrightarrow X$ est la flèche d'inclusion, on vérifie aussitôt que pour tout faisceau $\mathscr{F}$ sur X, le faisceau $j^{-1}\mathscr{F}$ n'est autre que la restriction de $\mathscr{F}$ à U.

(3.2.20.5) Si $\mathscr{F}$ est un faisceau de groupes (resp. ...) sur X alors $f^{-1}\mathscr{F}$ hérite naturellement d'une structure de faisceau de groupes (resp. ....), et l'isomorphisme $f^{-1}\mathscr{F}_y \simeq \mathscr{F}_{f(y)}$ est pour tout $y \in Y$ un morphisme de groupes.

Si $\mathscr{G}$ est un faisceau de groupes (resp. ...) sur Y alors $f_*\mathscr{G}$ hérite naturellement d'une structure de faisceau de groupes (resp. ....).

Le foncteur f^{-1} transforme les morphismes de faisceaux de groupes (resp. ...) en morphismes de faisceaux de groupes (resp. ...), et peut ainsi comme être vu comme un foncteur de la catégorie des faisceaux de groupes (resp. ...) sur X vers celle des faisceaux de groupes (rep. ...) sur Y. La même assertion vaut *mutatis mutandis* pour f_*, et (f^{-1}, f_*) est encore un couple de foncteurs adjoints dans ce contexte.

3.3 Espaces annelés

(3.3.1) Définition. Un *espace annelé* est un couple $(X, \mathscr{O}_X)$ où X est un espace topologique et $\mathscr{O}_X$ un faisceau d'anneaux sur X, que l'on appelle parfois le faisceau *structural*.

(3.3.2) Exemples.

(3.3.2.1) Soit X un espace topologique, et soit $\mathscr{O}_X$ le faisceau des fonctions continues à valeurs réelles sur X. Le couple $(X, \mathscr{O}_X)$ est un espace annelé (en $\mathbb{R}$-algèbres).

(3.3.2.2) Soit X une variété différentielle, et soit $\mathscr{O}_X$ le faisceau des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur X. Le couple $(X, \mathscr{O}_X)$ est un espace annelé (en $\mathbb{R}$-algèbres).

(3.3.2.3) Soit X une variété analytique complexe, et soit $\mathscr{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X. Le couple $(X, \mathscr{O}_X)$ est un espace annelé (en $\mathbb{C}$-algèbres).

(3.3.2.4) Soit X un espace topologique et soit $\mathscr{O}_X$ le faisceau constant $\underline{\mathbb{Z}}$ sur X. Le couple $(X, \mathscr{O}_X)$ est un espace annelé.

(3.3.2.5) Soit $(X, \mathscr{O}_X)$ un espace annelé, et soit U un ouvert de X. Le couple $(U, \mathscr{O}_X|_U)$ est un espace annelé ; sauf mention expresse du contraire, on considèrera toujours U comme étant muni de cette structure d'espace annelé, et on écrira à l'occasion $\mathscr{O}_U$ au lieu de $\mathscr{O}_X|_U$.

(3.3.3) Définition. Soient $(Y, \mathscr{O}_Y)$ et $(X, \mathscr{O}_X)$ deux espaces annelés. Un *morphisme d'espaces annelés* de $(Y, \mathscr{O}_Y)$ vers $(X, \mathscr{O}_X)$ est constitué d'une application continue $\varphi : Y \to X$ et d'une donnée supplémentaire que l'on peut présenter de trois façons différentes, dont l'équivalence résulte des définitions et de l'adjonction entre φ^{-1} et φ_* :

a) un morphisme de faisceaux d'anneaux de $\mathscr{O}_X$ vers $\varphi_*\mathscr{O}_Y$;
b) un morphisme de faisceaux d'anneaux de $\varphi^{-1}\mathscr{O}_X$ vers $\mathscr{O}_Y$;
c) pour tout couple (U, V) formé d'un ouvert U de X et d'un ouvert V de Y tel que $\varphi(V) \subset U$, un morphisme d'anneaux $\varphi^* : \mathscr{O}_X(U) \to \mathscr{O}_Y(V)$, en exigeant que si U et U' sont deux ouverts de X avec $U' \subset U$, et V et V' deux ouverts de Y avec $V' \subset V$, $\varphi(V) \subset U$ et $\varphi(V') \subset U'$ alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}_X(U) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d] & \mathscr{O}_Y(V) \arrow[d] \\ \mathscr{O}_X(U') \arrow[r, "\varphi^*"] & \mathscr{O}_Y(V') \end{tikzcd}$$

commute.

(3.3.3.1) On prendra garde que si (U, V) est comme au c) l'application φ va de V vers U, mais l'application φ^* entre anneaux de sections va «dans l'autre sens», à savoir de $\mathscr{O}_X(U)$ vers $O_Y(V)$.

(3.3.3.2) En s'appuyant sur la définition 3.3.3, on fait des espaces annelés une catégorie – la définition des identités et de la composition des morphismes est laissée au lecteur.

(3.3.4) Exemples.

(3.3.4.1) Soient Y et X deux espaces topologique, respectivement munis de leurs faisceaux de fonctions continues à valeurs réelles, et soit φ une application continue de Y vers X. Elle induit naturellement un morphisme d'espaces annelés entre Y et X : pour tout ouvert U de X, tout ouvert V de Y tel que $\varphi(U) \subset V$ et toute fonction continue $f : U \to \mathbb{R}$, on pose $\varphi^* f = f \circ \varphi$.

(3.3.4.2) Soient Y et X deux variétés différentielles, respectivement munies de leurs faisceaux de fonctions continues à valeurs réelles, et soit φ une application $\mathscr{C}^\infty$ de Y vers X. Elle induit naturellement un morphisme d'espaces annelés entre Y et X : pour tout ouvert U de X, tout ouvert V de Y tel que $\varphi(U) \subset V$ et toute fonction $\mathscr{C}^\infty$ $f : U \to \mathbb{R}$, on pose $\varphi^* f = f \circ \varphi$.

(3.3.4.3) Soient Y et X deux variétés analytiques complexes, respectivement munies de leurs faisceaux de fonctions holmomorphes, et soit φ une application holomorphe de Y vers X. Elle induit naturellement un morphisme d'espaces annelés entre Y et X : pour tout ouvert U de X, tout ouvert V de Y tel que $\varphi(U) \subset V$ et toute fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$, on pose $\varphi^* f = f \circ \varphi$.

(3.3.4.4) Soit $(X, \mathscr{O}_X)$ un espace annelé, et soit U un ouvert de X. L'immersion $j : U \hookrightarrow X$ est sous-jacente à un morphisme naturel d'espace annelés : si U' est un ouvert de U et X' un ouvert de X contenant U', le morphisme $j^* : \mathscr{O}_X(X') \to \mathscr{O}_U(U') = \mathscr{O}_X(U')$ est simplement la restriction.

Soit $\varphi : (Y, \mathscr{O}_Y) \to (X, \mathscr{O}_X)$ un morphisme d'espaces annelés tel que $\varphi(Y)$ soit contenu dans U. L'application continue $Y \to U$ induite par φ est sous-jacente à un morphisme d'espaces annelés de $(Y, \mathscr{O}_Y)$ vers $(U, \mathscr{O}_U)$: si W est un ouvert de Y et si V est un ouvert de U contenant $\varphi(Y)$, le morphisme d'anneaux correspondant $\mathscr{O}_U(W) = \mathscr{O}_X(W) \to \mathscr{O}_Y(V)$ n'est autre que φ^*.

En d'autres termes, toute factorisation *ensembliste* par U est automatiquement *morphique*.

On vérifie aisément que ce morphisme d'espace annelés $(Y, \mathscr{O}_Y) \to (U, \mathscr{O}_U)$ est le seul dont la composée avec j soit égale à φ. Cela signifie que $((U, \mathscr{O}_U), j)$ représente le foncteur qui envoie un espace annelé $(Y, \mathscr{O}_Y)$ sur

$$\{\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{esp-ann}}((Y, \mathscr{O}_Y), (X, \mathscr{O}_X)), \quad \varphi(Y) \subset U\}.$$

(3.3.4.5) Soit $\varphi : (Y, \mathscr{O}_Y) \to (X, \mathscr{O}_X)$ un morphisme d'espaces annelés ; soit y un point de Y et soit x son image sur X. Le morphisme φ induit alors de manière naturelle un morphisme d'anneaux de $\mathscr{O}_{X,x}$ vers $\mathscr{O}_{Y,y}$, souvent encore noté φ^*.

(3.3.5) La notion de $\mathscr{O}_X$-module. Soit $(X, \mathscr{O}_X)$ un espace annelé. Un *$\mathscr{O}_X$-module* $\mathscr{M}$ est un faisceau en groupes abéliens $\mathscr{M}$ sur X muni, pour tout ouvert U de X, d'une loi externe $\mathscr{O}_X(U) \times \mathscr{M}(U) \to \mathscr{M}(U)$ qui fait du groupe abélien $\mathscr{M}(U)$ un $\mathscr{O}_X(U)$-module, ces données étant sujettes à la condition suivante : pour tout ouvert U de X, tout ouvert V de U, toute section $s \in \mathscr{M}(U)$ et toute $f \in \mathscr{O}_X(U)$, on a

$$(fs)|_V = (f|_V)(s|_V).$$

Un morphisme de $\mathscr{O}_X$-modules est un morphisme de faisceaux en groupes qui est $\mathscr{O}_X$-linéaire en un sens évident.

(3.3.6) Nous n'aurons guère l'occasion dans ce cours de rencontrer des $\mathscr{O}_X$-modules vraiment intéressants ; c'est en théorie des schémas que nous en croiserons à foison. Donnons simplement un exemple venu de la géométrie différentielle : si $(X, \mathscr{O}_X)$ est une variété différentielle munie de son faisceau des fonctions $\mathscr{C}^\infty$, alors le faisceau des champs de vecteurs, qui associe à un ouvert U de X les sections du fibré tangent de X au-dessus de U (ou, de façon équivalente, les dérivations de la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathscr{O}_X(U)$) est de manière naturelle un $\mathscr{O}_X$-module.

(3.3.7) Soit $(X, \mathscr{O}_X)$ un espace annelé et soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{O}_X$-module. Pour tout x appartenant à X, la fibre $\mathscr{M}_x$ hérite d'une structure naturelle de $\mathscr{O}_{X,x}$-module.

(3.3.8) Les notions usuelles en théorie des modules se faisceautisent souvent, donnant ainsi lieu à des notions analogues en théorie des $\mathscr{O}_X$-modules. Donnons quelques exemples ; on fixe un espace annelé $(X, \mathscr{O}_X)$.

(3.3.8.1) Soit $(\mathscr{M}_i)$ une famille de $\mathscr{O}_X$-modules. Le préfaisceau $U \mapsto \bigoplus \mathscr{M}_i(U)$ n'est pas un faisceau en général ; nous laissons au lecteur le soin de montrer que c'en est un si la famille des $\mathscr{M}_i$ est finie, et d'exhiber un contre-exemple mettant en jeu une famille infinie.

Le faisceautisé de $U \mapsto \bigoplus \mathscr{M}_i(U)$ hérite d'une structure naturelle de $\mathscr{O}_X$-module, et est noté $\bigoplus \mathscr{M}_i$. On vérifie aisément que $(\bigoplus \mathscr{M}_i)_x \simeq \bigoplus(\mathscr{M}_{i,x})$ pour tout $x \in X$.

Le $\mathscr{O}_X$-module $\bigoplus \mathscr{M}_i$ peut être caractérisé par une propriété universelle ; nous vous suggérons à titre d'exercice de l'énoncer et de la prouver.

(3.3.8.2) Soient $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ deux $\mathscr{O}_X$-modules. Le préfaisceau

$$U \mapsto \mathscr{M}(U) \otimes_{\mathscr{O}_X(U)} \mathscr{N}(U)$$

n'est pas un faisceau en général ; son faisceautisé est noté $\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{N}$, et hérite d'une structure naturelle de $\mathscr{O}_X$-module. On vérifie aisément que

$$(\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{N})_x \simeq \mathscr{M}_x \otimes_{\mathscr{O}_{X,x}} \mathscr{N}_x$$

pour tout $x \in X$.

Le $\mathscr{O}_X$-module $\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_{X,x}} \mathscr{N}$ peut être caractérisé par une propriété universelle ; nous vous suggérons à titre d'exercice de l'énoncer et de la prouver.

(3.3.8.3) Une *$\mathscr{O}_X$-algèbre* $\mathscr{A}$ est un faisceau d'anneaux sur X muni d'un morphisme de faisceaux d'anneaux $\mathscr{O}_X \to \mathscr{A}$. Une $\mathscr{O}_X$-algèbre hérite d'une structure naturelle de $\mathscr{O}_X$-module.

Si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont deux $\mathscr{O}_X$-algèbres, un morphisme de $\mathscr{O}_X$-algèbres de $\mathscr{A}$ vers $\mathscr{B}$ est un morphisme de faisceau d'anneaux de $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A} \arrow[r] & \mathscr{B} \\
\mathscr{O}_X \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}.$$

Si $\mathscr{A}$ est une $\mathscr{O}_X$-algèbre et si $\mathscr{N}$ est un $\mathscr{A}$-module, $\mathscr{N}$ hérite *via* la flèche $\mathscr{O}_X \to \mathscr{A}$ d'une structure naturelle de $\mathscr{O}_X$-module. On dit que cette structure est obtenue par *restriction des scalaires* à de $\mathscr{A}$ à $\mathscr{O}_X$.

Si $\mathscr{A}$ est une $\mathscr{O}_X$-algèbre et si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{O}_X$-module, le produit tensoriel $\mathscr{A} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}$ hérite d'une structure naturelle de $\mathscr{A}$-module ; on dit que le $\mathscr{A}$-module $\mathscr{A} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}$ est déduit de $\mathscr{M}$ par *extension des scalaires* de $\mathscr{A}$ à $\mathscr{O}_X$. Nous vous laissons en exercice la démonstration du fait suivant : l'extension des scalaires de $\mathscr{O}_X$ à $\mathscr{A}$ est l'adjoint à gauche de la restriction des scalaires de $\mathscr{A}$ à $\mathscr{O}_X$.

Si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont deux $\mathscr{O}_X$-algèbres, leur produit tensoriel $\mathscr{A} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{B}$ est de manière naturelle une $\mathscr{O}_X$-algèbre ; nous vous invitons à prouver que $\mathscr{A} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{B}$ est la somme disjointe de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ dans la catégorie des $\mathscr{O}_X$-algèbres.

(3.3.9) Fonctorialité. Soit $\varphi : (Y, \mathscr{O}_Y) \to (X, \mathscr{O}_X)$ un morphisme d'espaces annelés. Soit $\mathscr{N}$ un $\mathscr{O}_Y$-module et soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{O}_X$-module.

(3.3.9.1) La structure de $\mathscr{O}_Y$-module sur $\mathscr{N}$ induit de manière naturelle une structure de $\varphi_*\mathscr{O}_Y$-module sur $\varphi_*\mathscr{N}$. Le morphisme φ est par définition fourni avec un morphisme de faisceaux d'anneaux $\mathscr{O}_X \to \varphi_*\mathscr{O}_Y$, par le biais duquel le $\varphi_*\mathscr{O}_Y$-module $\varphi_*\mathscr{N}$ peut être vu comme un $\mathscr{O}_X$-module.

(3.3.9.2) Les choses se passent un peu mois bien concernant le foncteur φ^{-1} : le faisceau $\varphi^{-1}\mathscr{M}$ hérite d'une structure naturelle de $\varphi^{-1}(\mathscr{O}_X)$-module, mais la flèche $\varphi^{-1}(\mathscr{O}_X) \to \mathscr{O}_Y$ va dans le mauvais sens et ne permet pas de faire de $\varphi^{-1}\mathscr{M}$ un $\mathscr{O}_Y$-module. Elle permet par contre, en quelque sorte, de le *transformer* de manière universelle en un $\mathscr{O}_Y$-module, par tensorisation ; le $\mathscr{O}_Y$-module $\mathscr{O}_Y \otimes_{\varphi^{-1}\mathscr{O}_X} \mathscr{M}$ ainsi obtenu est noté $\varphi^*\mathscr{M}$.

Si $y \in Y$ et si x désigne son image sur X on vérifie qu'il existe un isomorphisme naturel $(\varphi^*\mathscr{M})_y \simeq \mathscr{O}_{Y,y} \otimes_{\mathscr{O}_{X,x}} \mathscr{M}_x$.

(3.3.9.3) On vérifie que φ_* est de façon naturelle un foncteur de la catégorie des $\mathscr{O}_Y$-modules vers celle des $\mathscr{O}_X$-modules, et que φ^* est de façon naturelle un foncteur de la catégorie des $\mathscr{O}_X$-modules vers celle des $\mathscr{O}_Y$-modules.

Le couple (φ^*, φ_*) est un couple de foncteurs adjoints : c'est une conséquence formelle des propriétés d'adjonction du couple $(\varphi^{-1}, \varphi_*)$, et du couple formé de l'extension des scalaires et de la restriction des scalaires (faisceautiques).

3.4 Espaces localement annelés

(3.4.1) Définition. On appelle *espace localement annelé* un espace annelé $(X, \mathscr{O}_X)$ tel que $\mathscr{O}_{X,x}$ soit pour tout $x \in X$ un anneau local.

(3.4.2) Exemples.

(3.4.2.1) Le cas des faisceaux de fonctions. Soit k un corps, soit X un espace topologique, et soit $\mathscr{O}_X$ un sous-faisceau de k-algèbres du faisceau de toutes les fonctions de X vers k (en particulier, $\mathscr{O}_X$ contient les fonctions constantes). Supposons que $\mathscr{O}_X$ possède la propriété suivante : *pour tout ouvert U de X et tout $x \in U$, une fonction $f \in \mathscr{O}_X(U)$ telle que $f(x) \neq 0$ admet un inverse dans $\mathscr{O}_X(V)$ pour un certain voisinage ouvert V de x dans U.*

Sous ces hypothèses, $(X, \mathscr{O}_X)$ est localement annelé ; pour tout $x \in X$, l'idéal maximal de $\mathscr{O}_{X,x}$ est le noyau de la surjection $x \mapsto f(x)$ de $\mathscr{O}_{X,x}$ sur k.

La preuve est *mutatis mutandis* celle donnée au 2.4.3 lorsque $k = \mathbb{R}$ et lorsque $\mathscr{O}_X$ est le faisceau des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$, mais l'assertion plus générale que nous présentons ici s'applique dans bien d'autres cas intéressants :

- le corps k est égal à $\mathbb{R}$, l'espace X est une variété différentielle et $\mathscr{O}_X$ est le faisceau des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur X ;
- le corps k est égal à $\mathbb{C}$, l'espace X est une variété analytique complexe et $\mathscr{O}_X$ est le faisceau des fonctions holomorphes sur X ;
- le corps k est algébriquement clos, X est une variété algébrique sur k au sens des articles FAC et GAGA de Serre (qui est aussi celui adopté par Perrin

dans son cours de géométrie algébrique), et $\mathscr{O}_X$ est le faisceau des fonctions régulières sur X.

(3.4.2.2) Stabilité par restriction à un ouvert. Soit $(X, \mathscr{O}_X)$ un espace localement annelé, et soit U un ouvert de X. L'espace annelé $(U, \mathscr{O}_U = \mathscr{O}_X|_U)$ est localement annelé : cela provient du fait que l'on a pour tout $x \in U$ l'égalité $\mathscr{O}_{U,x} = \mathscr{O}_{X,x}$.

(3.4.3) Soit $(X, \mathscr{O}_X)$ un espace localement annelé.

(3.4.3.1) Soit $x \in X$. Notons $\kappa(x)$ le corps résiduel de l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$. On dit aussi que c'est le corps résiduel *du point* x, et l'on dispose d'une surjection canonique $\mathscr{O}_{X,x} \to \kappa(x)$. *Pour des raisons psychologiques*, on choisit de noter cette surjection $f \mapsto f(x)$, et d'appeler ce morphisme «évaluation en x». On a ainsi l'équivalence

$$f(x) \neq 0 \iff f \text{ est inversible dans } \mathscr{O}_{X,x}.$$

(3.4.3.2) Soit U un ouvert de X et soit $x \in U$. La flèche composée

$$\mathscr{O}_X(U) \to \mathscr{O}_{X,x} \to \kappa(x)$$

sera encore notée $f \mapsto f(x)$. Remarquons que si f est un élément inversible de $\mathscr{O}_X(U)$, son image $f(x)$ par le morphisme d'évaluation est un élément inversible du corps $\kappa(x)$, et est en particulier non nulle.

(3.4.3.3) Lemme. *Soit U un ouvert de X et soit $f \in \mathscr{O}_X(U)$. L'ensemble $D(f)$ des points $x \in U$ en lesquels f ne s'annule pas est un ouvert de U, et f est inversible dans $\mathscr{O}_X(U)$ si et seulement si $D(f) = U$.*

Démonstration. Soit $x \in D(f)$. Comme $f(x) \neq 0$, on déduit de l'équivalence mentionnée en 3.4.3.1 que f est inversible dans $\mathscr{O}_{X,x}$, c'est-à-dire sur un voisinage ouvert Vde x. On a alors $f(y) \neq 0$ pour tout $y \in V$ d'après 3.4.3.2 ; en conséquence, $V \subset D(f)$ et $D(f)$ est ouvert.

Si f est inversible dans $\mathscr{O}_X(U)$ alors $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in U$ d'après 3.4.3.2, et $U = D(f)$.

Réciproquement, supposons que $U = D(f)$ et soit $x \in U$. Comme $f(x) \neq 0$, on déduit de l'équivalence mentionnée en 3.4.3.1 que f est inversible dans $\mathscr{O}_{X,x}$, c'est-à-dire au voisinage de x. Ceci valant pour tout $x \in U$, il existe un recouvrement ouvert (U_i) de U et pour tout i un inverse g_i de $f|_{U_i}$ dans $\mathscr{O}_X(U_i)$.

Pour tout couple (i, j), chacune des deux restrictions de g_i et g_j à $U_i \cap U_j$ est un inverse de $f|_{U_i \cap U_j}$; par unicité de l'inverse, elles coïncident. Les section g_i du faisceau $\mathscr{O}_X$ se recollent donc en une section g de $\mathscr{O}_X$ sur U, qui satisfait les égalités $gf|_{U_i} = 1$ pour tout i ; en conséquence, $gf = 1$ et f est inversible dans $\mathscr{O}_X(U)$.□

(3.4.4) Commentaires. On voit que le faisceau structural d'un espace localement annelé *quelconque* ressemble par certains aspects aux faisceaux de fonctions à valeurs dans un corps tels que décrits en 3.4.2.1 : ses sections peuvent être évaluées en tout point (le résultat vivant dans un corps), le lieu des points en lesquels une section ne s'annule pas est un ouvert, et une section est inversible si et seulement si elle ne s'annule pas.

Pour cette raison, on pense assez souvent aux sections du faisceau structural comme à des fonctions, et il arrive fréquemment d'ailleurs qu'on les qualifie (un peu abusivement) ainsi.

Nous attirons toute fois l'attention sur deux points importants qui montrent les limites de l'intuition «fonctionnelle» appliquée aux espaces localement annelés généraux.

(3.4.4.1) *Premier point.* Dans un espace localement annelé $(X, \mathscr{O}_X)$, le corps $\kappa(x)$ *dépend* a priori *de* x. Dans la situation considérée au 3.4.2.1 il était constant mais en général, il peut effectivement varier.

Nous n'avons pas pour le moment d'exemple naturel (c'est-à-dire non construit exprès) d'espace localement annelé sur lequel cela se produit. Indiquons simplement que cela arrive fréquemment sur un schéma, et donnons en attendant un exemple «artificiel» très simple : on prend pour X un ensemble à deux éléments x et y, muni de la topologie discrète et du faisceau

$$\varnothing \mapsto \{0\}, \quad \{x\} \mapsto \mathbb{C}, \quad \{y\} \mapsto \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \text{et } \{x, y\} \mapsto \mathbb{C} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

On vérifie immédiatement que X est un espace localement annelé, que $\kappa(x) = \mathbb{C}$ et que $\kappa(y) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(3.4.4.2) *Second point.* Si $(X, \mathscr{O}_X)$ est un espace localement annelé, si U est un ouvert de X et si $f \in \mathscr{O}_X(U)$, *il se peut que* $f(x) = 0$ *pour tout* $x \in U$ *sans que* f *soit nulle.*

Par exemple, supposons que f soit nilpotente et non nulle. Dans ce cas, $f(x)$ est pour tout $x \in X$ un élément nilpotent d'un corps, et est donc trivial.

Nous allons donner un exemple très simple où une telle f existe. Fixons un corps k, et considérons un espace topologique singleton $\{x\}$. Se donne une structure d'espace localement annelé sur $\{x\}$ revient à choisir un anneau local. Soit $\mathscr{O}$ le quotient $k[T]/(T^2)$ et soit f la classe de T ; elle est non nulle.

L'ensemble des idéaux premiers de $\mathscr{O}$ est en bijection avec l'ensemble des idéaux premiers de $k[T]$ contenant (T^2) ; il n'y en a qu'un, à savoir (T). L'anneau $\mathscr{O}$ est donc local, son unique idéal maximal est (f), et son corps résiduel est $k[T]/(T) = k$.

On a ainsi bien défini une structure d'espace localement annelé sur x. Comme f est nilpotente, on a $f(x) = 0$. On pouvait d'ailleurs le voir directement ici, puisque l'évaluation en x est la réduction modulo l'idéal maximal de $\mathscr{O}$, c'est-à-dire justement modulo (f). D'une manière générale, si g est un élément de $\mathscr{O}$, il s'écrit $a + bf$, où a et b sont deux éléments uniquement déterminés de k, et on a alors $g(x) = a$.

(3.4.4.3) Commentaires. On peut se demander pourquoi autoriser ce genre d'horreurs, alors qu'on a fait en sorte, pour ce qui concerne la non-annulation, que les propriétés usuelles soient satisfaites. La raison est que la présence de «fonctions» nilpotentes non nulles peut avoir un sens géométrique profond, et c'est notamment le cas dans l'exemple que l'on vient de traiter.

En effet, considérons, dans le plan affine sur k en coordonnées S et T, la parabole P d'équation $T^2 = S$ et la droite D d'équation $S = 0$. Leur intersection naïve est le point x de coordonnées $(0, 0)$. En théorie des schémas, cette intersection est un peu plus riche que $\{x\}$: on garde en mémoire le corps de base et les équations, et l'intersection sera donc l'espace topologique $\{x\}$ muni du faisceau (ou de l'anneau, si l'on préfère) $k[S,T]/(S,T^2-S) \simeq k[T]/T^2$: on retrouve l'espace localement annelé évoqué plus haut.

La présence de nilpotents non triviaux parmi les fonctions sur $P \cap D$ s'interprète intuitivement comme suit : l'intersection $P \cap D$ est égale au point x *infinitésimalement épaissi* parce que P et D sont tangentes en x ; le point d'intersection x est en quelque sorte double, et c'est cette multiplicité qui est codée algébriquement par l'existence de nilpotents non triviaux.

Cet exemple est significatif : c'est pour prendre en compte les multiplicités dans la théorie que Grothendieck a décidé d'admettre les «fonctions» nilpotentes non nulles . Cela se révèle un outil extraordinairement souple, mais il y a un prix à payer : il faut autoriser une «fonction» à s'annuler en tout point sans être globalement nulle. D'où le choix du formalisme abstrait des espaces localement annelés, qui mime en partie le point de vue fonctionnel classique, mais permet ce genre de fantaisies finalement très utiles.

(3.4.5) Digression algébrique. Soient A et B deux anneaux locaux d'idéaux maximaux respectifs $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$. Soit f un morphisme de A vers B. Si $a \in A$ et si $f(a) \in \mathfrak{n}$ alors $f(a)$ n'est pas inversible, et a n'est donc pas inversible non plus ; autrement dit, $a \in \mathfrak{m}$. On dit que f est *local* si la réciproque est vraie, c'est-à-dire si $f(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{n}$, ou encore si $f^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$.

(3.4.6) Définition. Soient $(Y, \mathscr{O}_Y)$ et $(X, \mathscr{O}_X)$ deux espaces localement annelés. Un *morphisme d'espaces localement annelés* de $(Y, \mathscr{O}_Y)$ vers $(X, \mathscr{O}_X)$ est un morphisme φ d'espaces annelés tel que $\mathscr{O}_{X,\varphi(y)} \to \mathscr{O}_{Y,y}$ soit pour tout $y \in Y$ un morphisme local.

(3.4.6.1) Nous allons récrire cette condition de façon plus suggestive. Soit y un point de Y. Dire que $\mathscr{O}_{X,\varphi(y)} \to \mathscr{O}_{Y,y}$ est local signifie que si f est un élément de $\mathscr{O}_{X,\varphi(y)}$, alors f appartient à l'idéal maximal de $\mathscr{O}_{X,\varphi(y)}$ si et seulement si $f^*\varphi$ appartient à l'idéal maximal de $\mathscr{O}_{Y,y}$. En termes plus imagés, cela se traduit par l'équivalence

$$f(\varphi(y)) = 0 \iff (\varphi^* f)(y) = 0.$$

(3.4.6.2) Exemples. Dans chacun des exemples classiques 3.3.4.1, 3.3.4.2 et 3.3.4.3, l'application φ^* est simplement $f \mapsto f \circ \varphi$: on a donc tautologiquement $(\varphi^* f)(y) = 0 \iff f(\varphi(y)) = 0$, et φ est dès lors à chaque fois un morphisme d'espaces localement annelés.

(3.4.6.3) Soit $\varphi : (Y, \mathscr{O}_Y) \to (X, \mathscr{O}_X)$ un morphisme d'espaces localement annelés. On ne peut pas espérer que la formule $\varphi^* f = f \circ \varphi$ soit valable sans hypothèse supplémentaire : celle-ci n'a en effet simplement *aucun sens* en général, puisque $\mathscr{O}_X$ n'est pas nécessairement un faisceau de fonctions à valeurs dans un corps fixé, pour les deux raisons évoquées ci-dessus (3.4.4.1 et 3.4.4.2). Mais on va voir qu'elle est tout de même, d'une certaine manière, aussi valable qu'il est possible.

Soit y un point de Y. Comme φ est un morphisme d'espaces localement annelés, on a $f(\varphi(y)) = 0 \iff (\varphi^* f)(y) = 0$ pour tout $f \in \mathscr{O}_{X,\varphi(y)}$. En conséquence, $\varphi^* : \mathscr{O}_{X,\varphi(y)} \to \mathscr{O}_{Y,y}$ induit par passage au quotient un plongement $\kappa(\varphi(y)) \hookrightarrow \kappa(y)$, de sorte que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}_{Y,y} \arrow[r] & \kappa(y) \\ \mathscr{O}_{X,\varphi(y)} \arrow[r] \arrow[u] & \kappa(\varphi(y)) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

commute. Autrement dit, modulo le plongement de $\kappa(\varphi(y))$ dans $\kappa(y)$, on a pour toute $f \in \mathscr{O}_{X,\varphi(y)}$ l'égalité

$$(\varphi^* f)(y) = f(\varphi(y)).$$

Elle évoque irrésistiblement, comme annoncé, l'égalité $f^*\varphi = f \circ \varphi$; mais répétons qu'il serait illicite de la traduire ainsi puisque f ne peut pas en général s'interpréter comme une vraie fonction naïvement composable avec φ.

(3.4.6.4) Par contre, si k est un corps et si $\mathscr{O}_Y$ et $\mathscr{O}_X$ sont des faisceaux de fonctions à valeurs dans k comme dans 3.4.2.1, alors l'égalité ci-dessus signifie précisément que $\varphi^* f = f \circ \varphi$. Dans ce contexte, un morphisme d'espaces localement annelés est donc simplement une application continue $\varphi : Y \to X$ telle que la fonction $f \circ \varphi$ appartienne à $\mathscr{O}_Y$ pour fonction f appartenant à $\mathscr{O}_X$, et φ^* est obligatoirement donné par la formule $\varphi^* f = f \circ \varphi$.

(3.4.7) Soit X un espace localement annelé et soit U un ouvert de X. L'immersion canonique d'espaces annelés $j : U \hookrightarrow X$ (*cf.* 3.3.4.4) est alors un morphisme d'espaces localement annelés (les morphismes induits au niveau des fibres sont des isomorphismes, car si $x \in U$ l'anneau local $\mathscr{O}_{U,x}$ s'identifie canoniquement à $\mathscr{O}_{X,x}$).

Si $\varphi : Y \to X$ est un morphisme d'espaces localement annelés tel que $\varphi(Y)$ soit contenu dans U, l'unique morphisme d'espaces annelés $\psi : Y \to U$ tel que $j \circ \psi = \varphi$ est en fait un morphisme d'espaces localement annelés (là encore parce que $\mathscr{O}_{U,x} = \mathscr{O}_{X,x}$ pour tout $x \in U$).

Autrement dit, dans la catégorie des espaces localement annelés, on observe le phénomène déjà constaté dans la catégorie des espaces annelés : toute factorisation *ensembliste* par un ouvert est automatiquement *morphique*.

3.5 Une conséquence géométrique du lemme de Nakayama

(3.5.1) Soit $(X, \mathscr{O}_X)$ un espace localement annelé. Si $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_X$-module, si $x \in X$ et si f est une section de $\mathscr{F}$ sur un voisinage ouvert U de x, on se permettra, lorsque le contexte est clair, de noter encore f l'image f_x de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{F}_x$.

(3.5.2) Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module, et soit $x \in X$. On désigne par $\mathfrak{m}_x$ l'idéal maximal de $\mathscr{O}_{X,x}$. Le $\kappa(x)$-espace vectoriel $\kappa(x) \otimes_{\mathscr{O}_{X,x}} \mathscr{F}_x = \mathscr{F}_x/\mathfrak{m}_x\mathscr{F}_x$ sera plus simplement noté $\kappa(x) \otimes_x \mathscr{F}$. Si f est une section de $\mathscr{F}$ définie au voisinage de x, son image dans $\kappa(x) \otimes_x \mathscr{F}$ sera notée $f(x)$ (cette notation est compatible avec celle déjà utilisée lorsque $\mathscr{F} = \mathscr{O}_X$). L'application $f \mapsto f(x)$ induit par sa définition même une surjection de $\mathscr{F}_x$ vers $\kappa(x) \otimes_x \mathscr{F}$.

(3.5.3) Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module, soit n un entier, et soient $e_1, \ldots, e_n$ des sections globales de $\mathscr{F}$ sur X. La formule

$$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto \sum a_i e_i$$

définit un morphisme de $\mathscr{O}_X$-modules de $\mathscr{O}_X^n$ vers $\mathscr{F}$, que l'on dira *induit par les* e_i. Réciproquement, tout morphisme φ de $\mathscr{O}_X$-modules de $\mathscr{O}_X^n$ vers $\mathscr{F}$ est de cette forme : prendre $e_i = \varphi(\underbrace{0, \ldots, 1, \ldots, 0}_{\text{le 1 est à la place } i})$.

(3.5.4) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de sections de $\mathscr{F}$ sur X, et soit $\varphi : \mathscr{O}_X^n \to \mathscr{F}$ le morphisme induit. On dit que $(e_1, \ldots, e_n)$ *engendre* $\mathscr{F}$ si φ est surjectif. Ce signifie que le morphisme induit $\mathscr{O}_{X,x}^n \to \mathscr{F}_x$ est surjectif pour tout x, c'est-à-dire encore que les e_i engendrent le $\mathscr{O}_{X,x}$-module $\mathscr{F}_x$ pour tout x. Si c'est le cas, les $e_i(x)$ engendrent pour tout x l'espace vectoriel $\kappa(x) \otimes_x \mathscr{F} = \mathscr{F}_x/\mathfrak{m}_x\mathscr{F}_x$, qui est donc de dimension au plus n.

(3.5.5) Définition. Un $\mathscr{O}_X$-module $\mathscr{F}$ est dit *localement de type fini* si pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert U de x et une famille finie de sections de $\mathscr{F}$ sur U qui engendrent $\mathscr{F}|_U$.

Si c'est le cas, il résulte de 3.5.4 que $\kappa(x) \otimes_x \mathscr{F}$ est de dimension finie pour tout x.

(3.5.6) Proposition. *Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module localement de type fini, et soit x un point de X. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de sections de $\mathscr{F}$ sur un voisinage ouvert U de x. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) les $e_i(x)$ engendrent le $\kappa(x)$-espace vectoriel $\kappa(x) \otimes \mathscr{F}_x$;

ii) il existe un voisinage ouvert V de x dans U tel que les e_i engendrent $\mathscr{F}|_V$.

Démonstration. L'implication ii)⇒i) a été vue au 3.5.4. Supposons maintenant que i) soit vraie. Les $e_i(x)$ engendrant $\kappa(x) \otimes_x \mathscr{F} = \mathscr{F}_x/\mathfrak{m}_x\mathscr{F}$, le lemme de Nakayama assure que les e_i engendrent le $\mathscr{O}_{X,x}$-module $\mathscr{F}_x$.

Par ailleurs, comme $\mathscr{F}$ est localement de type fini, il existe un voisinage ouvert V de x dans U, et une famille $(f_1, \ldots, f_m)$ de sections de $\mathscr{F}$ sur V qui engendrent $\mathscr{F}|_V$.

Comme les e_i engendrent $\mathscr{F}_x$, il existe une famille (a_{ij}) d'éléments de $\mathscr{O}_{X,x}$ tels que $f_j = \sum_i a_{ij} e_i$ pour tout j. Quitte à restreindre V, on peut supposer que les a_{ij} sont définies sur V, et que l'égalité $f_j = \sum a_{ij} e_i$ vaut dans $\mathscr{F}(V)$.

Soit $y \in V$. L'égalité $f_j = \sum a_{ij} e_i$ vaut dans $\mathscr{F}_y$; ce dernier étant engendré par les f_j (puisqu'elle engendrent $\mathscr{F}|_V$), il est dès lors également engendré par les e_i. Ceci étant vrai pour tout $y \in V$, les e_i engendrent $\mathscr{F}|_V$, ce qui achève la démonstration. □

(3.5.6.1) Commentaires. L'étape cruciale de la preuve ci-dessus, celle durant laquelle «il se passe vraiment quelque chose», est l'utilisation du lemme de Nakayama pour garantir que les e_i engendrent $\mathscr{F}_x$; le reste n'est qu'une application directe de la définition des germes en x, couplée à un tout petit peu d'algèbre linéaire.

On peut donc considérer la proposition 3.5.6 comme une traduction géométrique du lemme de Nakayama, traduction qui se présente essentiellement sous la forme d'un *passage du ponctuel au local* (pour le caractère générateur d'une famille finie de sections).

(3.5.6.2) Mentionnons un cas particulier important de la proposition 3.5.6, qui met particulièrement bien en lumière ce passage du ponctuel au local : l'espace vectoriel $\kappa(x) \otimes_x \mathscr{F}$ est nul si et seulement si il existe un voisinage ouvert V de x dans X tel que $\mathscr{F}|_V$ soit nul (appliquer la proposition à la *famille vide* de sections).

(3.5.7) Corollaire. *Soit* $(X, \mathscr{O}_X)$ *un espace localement annelé et soit* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_X$*-module localement de type fini. La fonction*

$$r : x \mapsto \dim_{\kappa(x)} \kappa(x) \otimes_x \mathscr{F}$$

est semi-continue supérieurement, c'est-à-dire que pour tout entier d*, l'ensemble des points* x *de* X *tels que* $r(x) \leqslant d$ *est ouvert.*

Démonstration. Soit x un point de X en lequel $r(x) \leqslant d$. Choisissons une famille $e_1, \ldots, e_n$ de sections de $\mathscr{F}$, définies sur un voisinage ouvert U de x, et telles que les $e_i(x)$ forment une base de $\kappa(x) \otimes_x \mathscr{F}$. Comme $r(x) \leqslant d$, on a $n \leqslant d$. En vert de la proposition 3.5.6, il existe un voisinage ouvert V de x dans U tel que les e_i engendrent $\mathscr{F}|_V$; en conséquence, on a $r(y) \leqslant n \leqslant d$ pour tout $y \in V$ (3.5.4). □

(3.5.7.1) Notons un cas particulier fondamental, dont l'énoncé peut apparaître contre-intuitif au premier abord : le sous-ensemble U de X formé des point x tels que $r(x) = 0$, c'est-à-dire encore tel que $\kappa(x) \otimes_x \mathscr{F} = \{0\}$, est un *ouvert*. Remarquons de surcroît que le faisceau $\mathscr{F}|_U$ a toutes ses fibres nulles d'après le cas particulier de la proposition 3.5.6 signalé au 3.5.6.2, et est donc lui-même nul.

(3.5.7.2) Un exemple. Soit X une variété différentielle munie du faisceau $\mathscr{O}_X$ des fonctions $\mathscr{C}^\infty$. Soit $x \in X$ et soit U un ouvert de X. On note $\mathscr{I}(U)$ l'idéal de $\mathscr{O}_X(U)$ défini comme suit :

- si $x \in U$ alors $\mathscr{I}(U)$ est l'ensemble des fonctions appartenant à $\mathscr{O}_X(U)$ et s'annulant en x ;
- si $x \notin U$ alors $\mathscr{I}(U) = \mathscr{O}_X(U)$.

Il est immédiat que $\mathscr{I}$ est un sous-faisceau de $\mathscr{O}_X$; soit $\mathscr{F}$ le quotient $\mathscr{O}_X/\mathscr{I}$. Il est (localement) de type fini par construction; nous allons déterminer la fonction $r : y \mapsto \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} \otimes_y \mathscr{F}$ (notez que $\kappa(y) = \mathbb{R}$ pour tout $y \in X$).

Soit i l'inclusion de $\{x\}$ dans X. Le faisceau $i_*\underline{\mathbb{R}}$ envoie un ouvert U de X sur $\mathbb{R}$ si U contient x, et sur $\{0\}$ sinon (c'est un «faisceau gratte-ciel supporté en x»). Il hérite d'une structure naturelle de $\mathscr{O}_X$-module, définie comme suit : sur un ouvert U ne contenant pas x, il n'y a rien à faire; sur un ouvert U contenant x, on fait agir $\mathscr{O}_X(U)$ sur $i_*\underline{\mathbb{R}}(U) = \mathbb{R}$ par la formule $(f, \lambda) \mapsto f(x)\lambda$.

On dispose d'une surjection $\mathscr{O}_X$-linéaire naturelle de $\mathscr{O}_X$ sur $i_*\underline{\mathbb{R}}$: là encore, sur un ouvert U ne contenant pas x, il n'y a rien à faire; et sur un ouvert U contenant x, on envoie une fonction $f \in \mathscr{O}_X(U)$ sur $f(x) \in \mathbb{R} = i_*\underline{\mathbb{R}}(U)$. Par construction, le noyau de cette surjection est $\mathscr{I}$. En conséquence, $\mathscr{F} \simeq i_*\underline{\mathbb{R}}$. Il s'ensuit que $\mathbb{R} \otimes_y \mathscr{F} = \{0\}$ si $y \neq x$, et que $\mathbb{R} \otimes_x \mathscr{F} = \mathbb{R}$; il vient

$$r(y) = 0 \text{ si } y \neq x \text{ et } r(x) = 1.$$