Université Pierre-et-Marie Curie
Master de mathématiques fondamentales, cours *Les outils de la géométrie algébrique*, examen terminal du 24 octobre 2014
Enseignant : Antoine Ducros
Durée : 3 heures. *Seuls les documents issus du cours (notes personnelles prises en cours, documents disponibles en ligne sur la page d'A. Ducros) sont autorisés. Les calculatrices sont interdites.*

Exercice 1. Faisceaux.

a) Soit X un espace topologique et soit

$$0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H} \to 0$$

une suite exacte de faisceaux en groupes abéliens sur X.

Soit U un ouvert de X et soit s une section de $\mathscr{H}$ sur U. Montrez qu'il existe un ouvert V contenu dans U et une section t de $\mathscr{G}$ sur V tels que les deux propriétés suivantes soient satisfaites.

i) La section t est un antécédent de $s|_V$.

ii) Le couple (V, t) est maximal pour cette propriété au sens suivant : si V' est un ouvert de U contenant strictement V, il n'existe pas d'antécédent t' de $s|_{V'}$ dans $\mathscr{G}(V')$ tel que $t'|_V = t$.

b) On suppose que $\mathscr{F}$ est *flasque*, c'est-à-dire que pour tout couple (U, V) d'ouverts de X avec $V \subset U$, la flèche de restriction $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ est surjective. Montrez que pour tout ouvert U de X la suite

$$0 \to \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U) \to \mathscr{H}(U) \to 0$$

est exacte.

c) Montrez que pour tout faisceau en groupes abéliens $\mathscr{E}$ sur X il existe un faisceau en groupe abéliens $\mathscr{E}'$ sur X qui est flasque et un morphisme injectif $\mathscr{E} \hookrightarrow \mathscr{E}'$.

Exercice 2. Catégories.

a) Soit k un corps, soit V la catégorie des k-espaces vectoriels et soit $\mathsf{V_f}$ la sous-catégorie pleine de V dont les objets sont les espaces vectoriels de dimension finie. Montrez qu'il existe une équivalence de catégories $\mathsf{V_f} \simeq \mathsf{V_f}^{\mathrm{op}}$.

b) On se propose de montrer qu'il n'existe pas d'équivalence de catégories $\mathsf{V} \simeq \mathsf{V}^{\mathrm{op}}$. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe une telle équivalence F ; dans ce qui suit, pour éviter toute confusion, on ne travaille que dans la catégorie V (et pas dans V^{op}) et l'on voit F comme un foncteur contravariant de V dans elle-même admettant un quasi-inverse contravariant G. Montrez que $F(\{0\}) = \{0\}$ et que pour toute application linéaire $f \colon V \to V'$ la flèche $F(f) \colon F(V') \to F(V)$ est nulle si et seulement f est nulle.

c) Soit $(V_i)_{i \in I}$ une famille de k-espaces vectoriels. Pour tout indice j, on note $h_j \colon V_j \to \bigoplus_i V_i$ l'injection canonique, et $p_j \colon \prod_i V_i \to V_j$ la projection canonique. Décrivez brièvement (sans justification) les foncteurs covariant et contravariant respectivement représentés par $(\bigoplus_i V_i, (h_j)_{j \in I})$ et $(\prod_i V_i, (p_j)_{j \in I})$. En déduire qu'il existe une identification naturelle entre $F(\bigoplus V_i)$ et $\prod_i F(V_i)$ modulo laquelle $F(h_j)\colon \prod_i F(V_i) \to F(V_j)$ est pour tout j la projection canonique ; et une une identification naturelle entre $F(\prod_i V_i)$ et $\bigoplus_i F(V_i)$ modulo laquelle $F(p_j)\colon F(V_j) \to \bigoplus_i F(V_i)$ est pour tout j l'injection canonique.

d) Pour tout j, on note $\lambda_j\colon V_j \to \prod_i V_i$ l'injection canonique. Montrez que $F(\lambda_j)\colon \bigoplus F(V_i) \to F(V_j)$ est la projection canonique.

e) Montrez que F transforme surjections en injections, et vice-versa.

f) Utilisez tout ce qui précède pour aboutir à une contradiction.

g) *Cette question est complètement indépendante des précédentes.* Supposons qu'il existe une équivalence de catégories $F\colon \mathsf{Ens} \simeq \mathsf{Ens}^{\mathrm{op}}$, qu'on voit comme un foncteur contravariant de Ens dans elle-même admettant un quasi-inverse contravariant G. Montrez que $F(\{*\}) = \varnothing$ et $F(\varnothing) = \{*\}$, et aboutir à une contradiction.

Exercice 3. Algèbre commutative. Soit k un corps algébriquement clos.

a) Soit A une k-algèbre de type fini et soit $a \in A$. Montrez que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) a est nilpotent.
ii) pour tout morphisme de k-algèbres $\varphi\colon A \to k$ on a $\varphi(a) = 0$.

b) On se donne deux k-algèbres A et B. Le but de ce qui suit est de démontrer que si elles sont toutes deux réduites (resp. intègres) alors $A \otimes_k B$ est réduite (resp. intègre). Rappelez pourquoi ces deux assertions sont fausses si k n'est pas supposé algébriquement clos.

On fixe pour toute la suite une base (e_i) de B comme k-espace vectoriel.

c) On suppose que A et B sont réduites. Soit A' une sous-algèbre de type fini de A. Soit λ un élément nilpotent de $A' \otimes_k B$; on écrit $\lambda = \sum a_i \otimes e_i$ avec $a_i \in A'$ pour tout i. Montrez que pour tout morphisme de k-algèbres $\varphi\colon A' \to k$ et tout i on a $\varphi(a_i) = 0$; en déduire que $\lambda = 0$, puis démontrez que $A \otimes_k B$ est réduite.

d) On suppose A et B intègres. Soit A' une sous-algèbre de type fini de A. Soient λ et μ deux éléments de $A' \otimes_k B$ tels que $\lambda\mu = 0$. On écrit $\lambda = \sum a_i \otimes e_i$ et $\mu = \sum \alpha_i \otimes e_i$ avec les a_i et les α_i dans A'. On suppose que $\lambda \neq 0$. Montrez qu'il existe un indice i et un morphisme de k-algèbres $\varphi\colon A' \to k$ tel que $\varphi(a_i) \neq 0$. Montrez que pour tout morphisme φ de k-algèbres de A' dans k tel que $\varphi(a_i) \neq 0$ on a $\varphi(\alpha_j) = 0$ pour tout j. En déduire que $\mu = 0$, puis démontrez que $A \otimes_k B$ est intègre.