Homologie

Arnaud, Robin, Dmitry, Antoine

27 novembre 2016

1 Définition

Définition 1 (Complexe de Chaîne)**.** Une suite :

$$\ldots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} C_n \xrightarrow{\varphi_n} C_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow 0$$

est un complexe de chaîne si $\forall i\ C_i$ est un groupe abélien, φ_i est un morphisme et $\varphi_i \circ \varphi_{i+1} = 0$ soit $\operatorname{Im} \varphi_{i+1} \subset \ker \varphi_i$

Définition 2 (Homologie)**.** Soit C un complexe de chaîne, pour tout i on pose $B_i = \operatorname{Im} \varphi_{i+1}$ et $Z_i = \ker \varphi_i$ dont les éléments sont respectivement appelés les bords et les cycles.

Comme pour tout i, C_i est commutatif $B_i \triangleleft Z_i$, on pose $H_i = Z_i / B_i$, c'est le i-ieme groupe d'homologie.

Remarque 1. De la même manière étant donnée une cochaîne :

$$0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow C_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} C_n \xrightarrow{\varphi_n} C_{n+1} \longrightarrow \ldots$$

On définit une cohomologie par $H^i = Z^i / B^i$ où $Z^i = \ker \varphi_i$ et $B^i = \operatorname{Im} \varphi_{i-1}$.

Remarque 2. L'homologie associée à la chaîne quantifie son défaut d'exactitude.

2 Algèbre d'un groupe

Définition 3. Soient G un groupe et A un anneau. L'algèbre du groupe G sur R, noté $R[G]$ ou simplement RG est l'ensemble des sommes à support fini d'éléments de G à coefficients dans R.

$$R[G] = \{\sum_{g \in G} a_g g | a_g \in R, \text{pour tous } g \text{ sauf un nombre fini } a_g = 0_R\} \tag{1}$$

L'addition étant celle définie comme l'addition entre les coefficients et la multiplication étant induite par la loi de groupe sur G et la distributivité de R.

Ainsi

$$\sum_{g \in G} a_g g + \sum_{g \in G} b_g g = \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g \tag{2}$$

et

$$(\sum_{g \in G} a_g g)(\sum_{g \in G} b_g g) = \sum_{k \in G} (\sum_{g \in G} a_k b_{k^{-1}g} g) \tag{3}$$

Remarque 3. Pour travailler sur les homologies, on utilisera uniquement $R = \mathbb{Z}$.

Remarque 4. $R[G]$ est un G-module, en effet on peut faire "commuter" les éléments de R et G dans la somme, et multiplier entre eux les éléments de G, ce qui donne une loi de multiplication par un scalaire de G

$$g_0 * (\sum_{k \in G} a_k k) = \sum_{k \in G} a_k g_0 k \tag{4}$$

Exemple 1. Si l'on prend $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{a^0, a^1, a^2\}$ (en notation multiplicative) alors

$$\mathbb{Z}[G] = \{n_0 a^0 + n_1 a^1 + n_2 a^2\} \tag{5}$$

Et on définit les opérations d'anneau :
Si $A = n_0 a^0 + n_1 a^1 + n_2 a^2$ et $B = m_0 a^0 + m_1 a^1 + m_2 a^2$

$$A + B = (n_0 + m_0) a^0 + (n_1 + m_1) a^1 + (n_2 + m_2) a^2 \tag{6}$$

$$AB = (n_0 m_0 + n_1 m_2 + n_2 m_1) a^0 + (n_0 m_1 + n_1 m_0 + n_2 m_2) a^1 + (n_0 m_2 + n_1 m_1 + n_2 m_0) a^2 \tag{7}$$

3 Homologie de groupe

On considère la chaîne suivante de $\mathbb{Z}[G]$-modules :

$$\ldots \longrightarrow \mathbb{Z}[G^{i+1}] \xrightarrow{\varphi_{i+1}} \mathbb{Z}[G^i] \xrightarrow{\varphi_i} \mathbb{Z}[G^{i-1}] \longrightarrow \ldots \longrightarrow 0$$

Où $\varphi_i : \mathbb{Z}[G^i] \to \mathbb{Z}[G^{i-1}]$ est défini par :

$$\varphi_i(g_1, \ldots, g_i) = \sum_{j=1}^{i} (-1)^i (g_1, \ldots, \hat{g}_j, \ldots, g_i)$$

où $(g_1, \ldots, \hat{g}_j, \ldots, g_i)$ est le i-uplet $(g_1, \ldots, g_i)$ auquel on a retiré g_j.

Propriété 1. *La suite ci-dessus est un complexe de chaîne.*

Démonstration. La suite considérée est un complexe de chaîne ssi $\varphi_i \circ \varphi_{i+1} = 0$

Soit $(g_1, \ldots, g_{i+1}) \in G^{i+1}$,

$$\varphi_i \circ \varphi_{i+1}(g_1, \ldots, g_{i+1}) =$$
$$\sum_{j=0}^{i+1} (-1)^j (\sum_{k=1}^{j-1} (-1)^k (g_1, \ldots, \hat{g}_k, \ldots, \hat{g}_j, \ldots g_{i+1}) + \sum_{k=j}^{i} (-1)^k (g_1, \ldots, \hat{g}_j, \ldots, \hat{g_{k+1}}, \ldots, g_{i+1}))$$

Dans cette somme le terme $(g_1, \ldots, \hat{g}_k, \ldots, \hat{g}_j, \ldots g_{i+1})$ apparait deux fois : si c'est j qui est éliminé par φ_{i+1} puis k par φ_i le coefficient qu'il porte est $(-1)^j(-1)^k$, si c'est k qui est éliminé par φ_{i+1} puis j par φ_i alors le coefficient qu'il porte est $(-1)^k(-1)^{j-1}$ donc la somme est nulle et la suite est bien un complexe de chaîne. □

Lemme 1. *Étant donnée $\mathcal{C}$ la suite*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow 0$$

une suite exacte avec i et π des morphismes de $\mathbb{Z}[G]$-modules et A, B, C des groupes abéliens , la suite

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[G^j] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A \longrightarrow \mathbb{Z}[G^j] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} B \longrightarrow \mathbb{Z}[G^j] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} C \longrightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration. Par définition du produit tensoriel, on trouve une injection $\tilde{i}$ de $\mathbb{Z}[G^j] \otimes A$ dans $\mathbb{Z}[G^j] \otimes B$ telle que $\tilde{i}(g \otimes a) = g \otimes i(a)$ et une surjection $\tilde{\pi}$ de $\mathbb{Z}[G^j] \otimes B$ dans $\mathbb{Z}[G^j] \otimes C$ telle que $\tilde{\pi}(g \otimes b) = g \otimes \pi(b)$.

Montrons alors $\ker \tilde{\pi} = \operatorname{Im} \tilde{\pi}$

Comme $\mathcal{C}$ est exacte, $\ker \pi = \operatorname{Im} i$.

Si $g \otimes b \in \ker \tilde{\pi}$

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(g \otimes b) = 0 &\Rightarrow g \otimes \pi(b) = 0, g \neq 0 \\ &\Rightarrow \pi(b) = 0 \end{aligned}$$

Donc $b \in \operatorname{Im} i$ donc $g \otimes b \in \operatorname{Im} \tilde{i}$.

Si maintenant $g \otimes b \in \operatorname{Im} \tilde{i}$

$$\begin{aligned} g \otimes b \in \operatorname{Im} \tilde{i} &\Rightarrow b \in \operatorname{Im} i \\ &\Rightarrow \pi(b) = 0 \\ &\Rightarrow \tilde{\pi}(g \otimes b) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi on a bien $\ker \tilde{\pi} = \operatorname{Im} \tilde{i}$, et la suite est exacte.

□

Notation. On note $C_i = \mathbb{Z}[G^i]$ Et

$$\ldots \longrightarrow C_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} C_i \xrightarrow{\varphi_i} C_{i-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow 0$$

est une suite exacte. On note $B_i = \operatorname{Im} \varphi_{i+1}$ $Z_i = \ker \varphi_i$ $H_i = Z_i / B_i$

Alors on note par analogie

$C_i(G, A) = \mathbb{Z}[G^i] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A$

$\tilde{\varphi} = \varphi \otimes \mathrm{id}$

$B_i(G, A) = \operatorname{Im} \widetilde{\varphi_{i+1}}$

$Z_i(G, A) = \ker \tilde{\varphi}_i$

$H_i(G, A) = Z_i(G, A) / B_i(G, A)$

Théorème 1. *Si la suite $\mathcal{C}$ est exacte alors*

$$\cdots \to H_{j+1}(G, C) \to H_j(G, A) \to H_j(G, B) \to H_j(G, C) \to \cdots \to H_0(G, C) \to 0$$

est exacte.

Démonstration. Soit le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C_{j+1}(G,A) & \xrightarrow{\tilde{i}} & C_{j+1}(G,B) & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & C_{j+1}(G,C) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \tilde{\varphi_{j+1}} & & \downarrow \tilde{\varphi_{j+1}} & & \downarrow \tilde{\varphi_{j+1}} & & \\
0 & \longrightarrow & C_j(G,A) & \xrightarrow{\tilde{i}} & C_j(G,B) & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & C_j(G,C) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Ce diagramme est commutatif car

$$\begin{aligned}
\tilde{i} \circ \tilde{\varphi_{j+1}} &= \varphi_{j+1} \otimes i \\
&= \tilde{i} \circ \tilde{\varphi_{j+1}}
\end{aligned}$$

Et de même pour π.

D'après le lemme, il est exact sur les lignes et en passant au quotient,

$$\begin{array}{ccccccc}
 & C_{j+1}(G,A)/B_{j+1}(G,A) & \longrightarrow & C_{j+1}(G,B)/B_{j+1}(G,B) & \longrightarrow & C_{j+1}(G,C)/B_{j+1}(G,C) \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \longrightarrow & Z_j(G,A) & \longrightarrow & Z_j(G,B) & \longrightarrow & Z_j(G,C)
\end{array}$$

est exact et commutatif.

Finalement, le lemme du serpent donne

$$H_{j+1}(G,A) \to H_{j+1}(G,B) \to H_{j+1}(G,C) \to H_j(G,A) \to H_j(G,B) \to H_j(G,C)$$

Et il suffit de recoller les suites pour obtenir la chaine du théorème.

□

4 Cohomologie de groupe

On rappelle ici la définition d'une cohomologie :

Définition 4. Étant donnée une cochaîne :

$$0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow C_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} C_n \xrightarrow{\varphi_n} C_{n+1} \longrightarrow \ldots$$

On définit une cohomologie par $H^i = Z^i/B^i$ où $Z^i = \ker \varphi_i$ et $B^i = \operatorname{Im} \varphi_{i-1}$.

La cohomologie d'un groupe G est alors définie de manière analogue à l'homologie de groupe :

Définition 5. On considère la cochaîne suivante de G-modules :

$$0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathbb{Z}[G^{i-1}] \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \mathbb{Z}[G^i] \xrightarrow{\varphi_i} \mathbb{Z}[G^{i+1}] \longrightarrow \ldots$$

Pour définir φ_i on interprète $\mathbb{Z}[G^i]$ comme l'ensemble des fonctions f de G^i dans $\mathbb{Z}$. On pose alors :

$$\varphi_i f(g_1,\ldots,g_i) = g_1 * f(g_2,\ldots,g_{i+1}) + \sum_{j=1}^{i}(-1)^i f(g_1,\ldots,g_j g_{j+1},\ldots,g_{i+1}) + (-1)^{i+1} f(g_1,\ldots,g_i)$$

On vérifie alors que $\varphi_i \circ \varphi_{i+1} = 0$ ce qui fait de cette suite un complexe de cochaîne. On définit alors le i-ème groupe de cohomologie comme $H^i = Z^i/B^i$ où $Z^i = \ker \varphi_i$ et $B^i = \operatorname{Im} \varphi_{i-1}$.

Exemple 2. $H^0(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^G = \{m \in \mathbb{Z}, \forall g \in G, g\cdot m - m = 0\}$

$$H^1(G,\mathbb{Z}) = \frac{\{f : G \longrightarrow \mathbb{Z}, f(gg') = gf(g') - f(g)\}}{\{f : G \longrightarrow \mathbb{Z} g \longmapsto g\cdot m - m, m \in \mathbb{Z}\}}$$

$$H^2(G,\mathbb{Z}) = \frac{\{f : G^2 \longrightarrow \mathbb{Z}, gf(g',g'') - f(gg',g'') + f(g,g'g'') - f(g,g') = 0\}}{\{f : G^2 \longrightarrow \mathbb{Z}(g,g') \longmapsto g\epsilon(g') - \epsilon(gg') + \epsilon(g), \epsilon : G \longrightarrow \mathbb{Z}\}}$$

Remarque 5. La définition précédente reste valide si on remplace $\mathbb{Z}$ par n'importe quel anneau A. Plus généralement on peut considérer un groupe abélien M et une action $*$ de G sur M qui préserve la structure de groupe abélien de M i.e. : $\forall a,b \in M \ \ \forall g \in G \ \ g*(a+b) = g*a + g*b$. En particulier si M est un groupe fini de cardinal n, on a pour tout i $nH^i(G,M) = 1$.

5 Extensions de groupes

Définition 6. Soient N et Q deux groupes. On dit qu'un groupe G est une extension de N par Q si la suite :

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 1$$

est exacte.

Définition 7. On dit que deux extensions G et G' sont équivalentes si il existe un isomorphisme φ de G dans G' tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{\pi} & Q & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow id_N & & \downarrow \varphi & & \downarrow id_Q & & \\ 1 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\tilde{i}} & G' & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & Q & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

commute.

Il est évident qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur les extensions de N par Q. On cherche donc à classifier les classes d'équivalence des extensions de N par Q.

On suppose maintenant N abélien.

Soit G une extension de N par Q. G agit par conjugaison sur N (on confond ici N et $i(N)$). Notons ρ cette action. N étant abélien, son action sur lui même est triviale. Ainsi $N \subset Ker\rho$. Donc ρ est constante sur les classes de $G/i(N) = Q$ et ρ se factorise donc en une action de Q sur N.

Soit ρ une action de Q sur N. Supposons que cette action preserve la structure de N. ρ est alors à valeurs dans Aut(N). En considérant alors le produit direct $G = N \rtimes Q$ on obtient une extension de N par Q et de plus l'action par conjugaison de Q sur N est égale à ρ.

Il ne s'agit cependant pas des seules extensions de N par Q respectant une action $\rho : Q \longrightarrow Aut(N)$ donnée. Notons S_ρ l'ensemble des classes d'équivalence de ces extensions.

Théorème 2. *S_ρ est en bijection avec $H^2(Q,N)$*

Démonstration. On donne ici les points essentiels de la preuve. Soit

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 1$$

une suite exacte respectant ρ. G ne s'écrit pas nécessairement comme produit semi-direct de N et de Q. Cela vient du fait qu'il n'existe pas nécessairement une manière naturelle de relever Q dans G i.e. une section s de π n'est pas toujours un morphisme. Les classes d'équivalence des extensions de N par Q proviennent de la diversité des choix de s. Soit donc s une section de π.

$$\forall a, b \in Q \;\; ab = \pi(s(ab)) = \pi(s(a))\pi(s(b)) = ab$$

Soit s(a) et s(b) appartiennent à la même classe modulo $Ker(\pi) = i(N)$ ou encore $s(ab) = f(a,b)s(a)s(b), f(a,b) \in N$.

On vérifie alors que $f \in Z^2(Q,N)$.

Si on considère une autre section $\tilde{s}$ et $\tilde{f}$ la fonction associée on a :

$$\forall a \in Q \;\; \tilde{s}(a) = g(a)s(a) \quad g(a) \in N$$

et de plus $\tilde{f} = f\varphi_1(g)$. Ainsi f et $\tilde{f}$ appartiennent à la même classe d'équivalence modulo $C^2(Q,N)$. On montre alors que l'application ainsi définie, qui associe à une extension de N par Q un élément de $H^2(Q,N)$, est surjective en considérant pour tout f dans $H^2(Q,N)$ l'extension $G = N \times Q$ muni de la loi $(a,b)(a',b') = (a + ba' + f(b,b'), bb')$.

Enfin on montre que les classes de $H^2(Q,N)$ de deux extensions G et G' sont identiques ssi celles-ci sont équivalentes. Par factorisation, on construit donc une bijection de S_ρ dans $H^2(Q,N)$. □

Remarque 6. L'application ainsi construite envoie le produit semi-direct de N par Q associé à ρ sur l'élément neutre de $H^2(Q,N)$ et permet de munir S_ρ d'une structure de groupe.

6 Le théorème de Schur-Zassenhaus

Théorème 3. *Si N et Q sont deux groupes finis d'ordres premiers entre eux et N est abélien, alors toute extension de N par Q peut s'écrire comme un produit semi-direct de N par Q i.e. si G est un groupe, N un sous groupe distingué de G et $(card(N), card(G/N)) = 1$, alors G s'écrit comme produit semi-direct de N par G/N.*

Démonstration. On note n (resp. q) le cardinal de N (resp. Q) Montrons que $qH^2(Q,N) = 1$. Soit $f \in Z^2(Q,N)$ et montrons que $qf \in B^2(Q,N)$. On a pour tout a, b, c dans Q :

$$af(b,c) - f(ab,c) + f(a,bc) - f(a,b) = 0$$

En sommant sur c et en posant $F(a) = \sum_{c \in Q} f(a,c)$ on a

$$aF(b) - F(ab) + F(a) - qf(a,b)$$

D'où $qf \in B^2(Q,N)$

Ainsi on a $qH^2(Q,N) = nH^2(Q,N) = 1$. Comme n et q sont premiers entre eux on a par Bézout $H^2(Q,N) = 1$. D'après le théorème précédent l'ensemble des extensions de N par Q est donné par les produits semi-directs de N par Q. □

7 Homologie singulière

Définition 8 (Simplexe)**.** Dans $\mathbb{R}^n$, si $(v_1, \ldots, v_n)$ est la base canonique, on note Δ_n le convexe engendré par $(0, v_1, \ldots, V_n)$ et on note $v_0 = 0$.

On oriente Δ_n de v_0 à v_n, ce que l'on note $[v_0, \dots, v_n]$. Sa bordure est une union de faces $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ que l'on oriente comme $(-1)^n[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$. Deux orientations sont de même parité si elles diffèrent d'une permutation paire.

Ainsi $\partial\Delta_n = \bigcup_{i=0}^{n}(-1)^n[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$.

Δ_n est le simplexe dans $\mathbb{R}^n$ de sommets sont $v_0, \dots, v_n$, de faces $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ et de bordure $\partial\Delta_n$.

Définition 9. Soit X un espace topologique. Un n-simplexe sur X est une application continue de Δ_n dans X.

On note $S_n(X)$ le groupe abélien libre engendré par les n-simplexes de X.

Définition 10. On définit alors l'opérateur de bord
$\partial_n : S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X), \partial_n\sigma = \sum(-1)^i\sigma \circ e_i$
où $e_i : \Delta_{n-1} \longrightarrow \Delta_n, (t_1, \dots, t_{n-1}) \longmapsto ((t_1, \dots, t_i, 0, t_{i+1}, \dots, t_{n-1})$.
On vérifie que $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, et on note $H_n(X)$ l'homologie associée, on l'appelle homologie singulière.

Propriété 2. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Alors f induit un morphisme $S_n(X) \longrightarrow S_n(Y), \sigma \longmapsto f \circ \sigma$ et fait commuter le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} S_n(X) & \xrightarrow{\sigma} & S_{n-1}(X) \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ S_n(Y) & \xrightarrow{\sigma} & S_{n-1}(Y) \end{array}$$

On a de plus $f(B_n(X)) \subset f(B_n(Y))$ et $f(Z_n(X)) \subset f(Z_n(Y))$. Donc f passe au quotient et induit donc un morphisme de $H_n(X)$ vers $H_n(Y)$.

Si f est un homéomorphisme, alors f induit un isomorphisme sur S_n donc sur les H_n, si bien que la suite $(H_n(X))$ est invariante par homéomorphisme.