Introduction aux vecteurs de Witt

Dans le cadre du séminaire :
Complexe de de Rham-Witt d'une $\mathbb{F}_p$-algèbre, comparaison avec le complexe de de Rham d'après Bhatt-Lurie-Mathew

Introduction aux vecteurs de Witt

Fadhel et Léo

Banyuls, novembre 2019

Plan

1. Motivation

2. Construction des vecteurs de Witt

3. Les applications de Frobenius et Verschiebung, Teichmüller et le cas des $\mathbb{F}_p$-algèbres

4. Propriété universelle des vecteurs de Witt, cas sans p-torsion

1. Motivation

p un nombre premier fixé

Anneau des vecteurs de Witt $W(A) = A^{\mathbb{N}}$ en tant qu'ensemble
Mais pas les lois "composantes par composantes"

exemple : $(X_n) + (Y_n) = (S_n)$

$$S_1 = X_1 + Y_1 - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{p} \binom{p}{k} X_0^k Y_0^{p-k}$$

1. Motivation

$$\mathbb{Z}_p = W(\mathbb{F}_p)$$

Lemme

Tout élément de $x \in \mathbb{Z}_p$ s'écrit de façon unique :

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n p^n$$

avec $(x_n) \subset \{0, \ldots, p-1\}$

1. Motivation

$$\sum x_n p^n + \sum y_n p^n = \sum s_n p^n$$

$$s_1 \equiv \epsilon + x_1 + y_1 \mod p\mathbb{Z}_p$$

Question :

-Obtenir des formules polynmoniales pour s_n ?

1. Motivation

Définition

$\tau : \mathbb{F}_p \to \mathbb{Z}_p$ *l'application de Teichmüller*

$$\tau(\alpha) = (\alpha, \alpha^p, \alpha^{p^2} \ldots) = (\alpha^{p^n} | n \in \mathbb{N})$$

On appelle $\tau(\alpha)$ le *représentant de Teichmüller de* α.

Remarque

1. τ section de la projection modulo p
2. $\tau(\alpha)^p = \tau(\alpha)$
3. Tout élément de $x \in \mathbb{Z}_p$ s'écrit de manière unique :

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \tau(x_n) p^n$$

avec $(x_n) \in \mathbb{F}_p^{\mathbb{N}}$

1. Motivation

$$\sum \tau(x_n)p^n + \sum \tau(y_n)p^n = \sum \tau(s_n)p^n$$

$$\sum_{i=0}^{n} \tau(s_i)^{p^{n-i}} p^i \equiv \sum_{i=0}^{n} \tau(x_i)^{p^{n-i}} p^i + \sum_{i=0}^{n} \tau(y_i)^{p^{n-i}} p^i \mod p^{n+1}\mathbb{Z}_p$$

$(X_n), (Y_n)$ des variables

Si $\omega_n(X_0, \ldots, X_n) = \sum_{i=0}^{n} X_i^{p^{n-i}} p^i$

On cherche (S_n) :

$$\omega_n(S_0, \ldots, S_n) = \omega_n(X_0, \ldots, X_n) + \omega_n(Y_0, \ldots, Y_n)$$

2.Construction de $W(A)$

Définition

Le n-ième polynôme de Witt noté ω_n est donné par

$$\omega_n(X_0, \ldots, X_n) = \sum_{i=0}^{n} p^i {X_i}^{p^{n-i}} \in \mathbb{Z}[X_0, \ldots X_n]$$

2.Construction de $W(A)$

Soit A un anneau

Définition

La n-ième *composante fantôme* de $\underline{a} := (a_n \mid n \in \mathbb{N}) \in A^{\mathbb{N}}$

$$\omega_n(\underline{a}) := \omega_n(a_0, \ldots, a_n)$$

l'application fantôme $\omega_A : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}$

$$\omega_A(\underline{a}) := (\omega_n(\underline{a}) \mid n \in \mathbb{N}) \in A^{\mathbb{N}}$$

2.Construction de $W(A)$

Pour un anneau A trouver $(A^{\mathbb{N}}, \hat{+}, \hat{\cdot})$:

$$\omega_A(\underline{a}\hat{+}\underline{b}) = \omega_A(\underline{a}) + \omega_A(\underline{b})$$
$$\omega_A(\underline{a}\hat{\cdot}\underline{b}) = \omega_A(\underline{a})\omega_A(\underline{b})$$

Si ω_A injective d'image un sous-anneau :

Transport de structure

2.Construction de $W(A)$

Lemme de Dwork :

Lemme

1. *si p n'est pas un diviseur de zéro alors ω_A est injective.*
2. *s'il existe ϕ tel que : $\phi(x) \equiv x^p \mod pA$ alors :*

$$\operatorname{Im} \omega_A = \{\underline{b} \in A^{\mathbb{N}} \mid b_{n+1} \equiv \phi(b_n) \mod p^{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$$

Donc $\operatorname{Im} \omega_A$ est un sous-anneau.

2.Construction de $W(A)$

$\mathbb{Z}[X_n, Y_n \mid n \in \mathbb{N}]$ satisfait les hypothèses de Dwork !
Dans $\mathbb{Z}[X_n, Y_n \mid n \in \mathbb{N}]$ il existe :

$$S_n, P_n \in \mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_n, Y_0, \ldots, Y_n], I_n \in \mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_n]$$

tels que

$$\omega_n(S_0, \ldots, S_n) = \omega_n(X_0, \ldots, X_n) + \omega_n(Y_0, \ldots, Y_n)$$
$$\omega_n(P_0, \ldots, P_n) = \omega_n(X_0, \ldots, X_n)\omega_n(Y_0, \ldots, Y_n)$$
$$\omega_n(I_0, \ldots, I_n) = -\omega_n(X_0, \ldots, X_n)$$

2.Construction de $W(A)$

A anneau commutatif quelconque

$$\hat{+} : A^{\mathbb{N}} \times A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}$$
$$S_A(\underline{a}, \underline{b}) = \underline{a}\hat{+}\underline{b} = (S_n(a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n) \mid n \in \mathbb{N})$$

$$\hat{\cdot} : A^{\mathbb{N}} \times A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}$$
$$P_A(\underline{a}, \underline{b}) = \underline{a}\hat{\cdot}\underline{b} = (P_n(a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n) \mid n \in \mathbb{N})$$

$$I_A : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}$$
$$I_A(\underline{a}) = (I_n(a_0, \ldots, a_n) \mid n \in \mathbb{N})$$

2.Construction de $W(A)$

Théorème

Les applications $\hat{+}$ et $\hat{\cdot}$ définissent une structure d'anneau sur $A^{\mathbb{N}}$. L'élément neutre additif est $\hat{0} = (0, 0, \ldots)$, l'opposé de $\underline{a}$ est $I_A(\underline{a})$ et l'élément neutre multiplicatif est $\hat{1} = (1, 0, 0, \ldots)$.

2.Construction de $W(A)$

$A = \mathbb{Z}[X_i, Y_i, Z_i]$

$\underline{X} := (X_0, X_1, \ldots)$, $\underline{Y} := (Y_0, Y_1, \ldots)$ $\underline{Z} := (Z_0, Z_1, \ldots)$
On veut montrer que :

$$S_A(P_A(\underline{Z}, \underline{X}), P_A(\underline{Z}, \underline{Y})) = P_A(\underline{Z}, S_A(\underline{X}, \underline{Y}))$$

Pour cela :

$$\begin{aligned}\omega_A P_A(\underline{Z}, S_A(\underline{X}, \underline{Y})) &= \omega_A(\underline{Z})(\omega_A(\underline{X}) + \omega_A(\underline{Y})) \\ &= \omega_A(\underline{Z})\omega_A(\underline{X}) + \omega_A(\underline{Z})\omega_A(\underline{Y})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_A S_A(P_A(\underline{Z}, \underline{X}), P_A(\underline{Z}, \underline{Y})) &= \omega_A(P_A(\underline{Z}, \underline{X})) + \omega_A(P_A(\underline{Z}, \underline{Y})) \\ &= \omega_A(\underline{Z})\omega_A(\underline{X}) + \omega_A(\underline{Z})\omega_A(\underline{Y})\end{aligned}$$

2.Construction de $W(A)$

Définition

Soit A un anneau commutatif, on munit $A^{\mathbb{N}}$ d'une structure d'anneau $(W(A), \hat{+}, \hat{\cdot})$ appelé **Anneau des vecteurs de Witt de** A

$$\underline{a}\hat{+}\underline{b} = (S_n(\underline{a}, \underline{b}) \mid n \in \mathbb{N})$$
$$\underline{a}\hat{\cdot}\underline{b} = (P_n(\underline{a}, \underline{b}) \mid n \in \mathbb{N})$$

$(0, 0 \ldots)$ et $(1, 0, \ldots)$ sont neutres pour l'addition et la multiplication respectivement et l'opposé additif de $\underline{a}$ est $I(\underline{a})$

2.Construction de $W(A)$

Remarques :

$\omega_A : W(A) \to A^{\mathbb{N}}$ est un morphisme d'anneau

W est un foncteur **Ring** $\to$ **Ring**

3.Frobenius, Verschiebung, $\mathbb{F}_p$-algèbres, Teichmüller

Frobenius, Verschiebung

Dans $A = \mathbb{Z}[X_n, n \in \mathbb{N}]$

$$\left(\operatorname{Im} \omega_A = \{\underline{b} \in A^{\mathbb{N}} \mid b_{n+1} \equiv \phi(b_n) \mod p^{n+1}, n \in \mathbb{N}\}\right)$$

$$(\omega_{n+1}(X_0, \ldots, X_{n+1}) \mid n \in \mathbb{N}) \in \operatorname{Im} \omega_A$$

Il existe $F_n \in \mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_{n+1}]$ tel que :

$$\omega_n(F_0, \ldots, F_n) = \omega_{n+1}(X_0, \ldots, X_{n+1})$$

3.Frobenius, Verschiebung, $\mathbb{F}_p$-algèbres, Teichmüller

Frobenius, Verschiebung

Définition

$F_A : W(A) \to W(A)$

$$F_A(\underline{a}) = (F_n(a_0, \ldots, a_{n+1}) \mid n \in \mathbb{N})$$

l'application de Frobenius sur $W(A)$

Définition

$V_A : W(A) \to W(A)$

$$V_A(\underline{a}) = (0, a_0, a_1, a_2, \ldots)$$

l'application Verschiebung ou de décalage

3.Frobenius, Verschiebung, $\mathbb{F}_p$-algèbres, Teichmüller

Frobenius, Verschiebung

Analogues fantômes des applications F et V

Définition

$f_A : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}$ le morphisme d'anneau :

$$f_A(\underline{a}) = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

L'analogue fantôme de F_A. On a : $\omega_A F_A = f_A \omega_A$

Définition

Le morphisme de *groupe additif* $v_A : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}$:

$$v_A(\underline{a}) = (0, pa_0, pa_1, pa_2, \ldots)$$

L'analogue fantôme de V_A. On a : $\omega_A V_A = v_A \omega_A$

Lemme

1. *F_A est un morphisme d'anneau et l'application V_A est un morphisme de groupe additif.*
2. *On a :*

$$F_A V_A = p\hat{\cdot}\,\mathrm{Id}_{W(A)}$$
$$V_A(\underline{a}\hat{\cdot}F_A(\underline{b})) = V_A(\underline{a})\hat{\cdot}\underline{b}$$

Remarque : $V_n(A) = \mathrm{Im}\ V_A^n$ est un idéal.

Définition

Les n-vecteurs de Witt tronqués $W_n(A)$ sont définis par :

$$W_n(A) = W(A)/V_n(A)$$

Remarques :

$$W_1(A) = W(A)/V_1(A) = A$$
$$W(A) = \varprojlim W_n(A)$$

3.Frobenius, Verschiebung, $\mathbb{F}_p$-algèbres, Teichmüller

Frobenius, Verschiebung

Théorème

F_A est un relèvement du Frobenius sur $W(A)/pW(A)$:

$$F_A(\underline{a}) \equiv \underline{a}^p \mod pW(A)$$

pour tout $\underline{a} \in W(A)$

3.Frobenius, Verschiebung, $\mathbb{F}_p$-algèbres, Teichmüller

$\mathbb{F}_p$-algèbres

De manière générale :

$$F_n(X_0, \ldots, X_{n+1}) \equiv X_n^p \mod p\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_{n+1}]$$

Maintenant car$A = p$ ($\mathbb{F}_p$-algèbre)

D'où $F_A(\underline{a}) = (a_n^p \mid n \in \mathbb{N})$

Lemme

Pour tout $\underline{a} \in W(A)$ on a :

1. $p\hat{\cdot}\underline{a} = V_A F_A(\underline{a}) = F_A V_A(\underline{a}) = (0, a_0^p, a_1^p, a_2^p, \ldots)$
2. $p^n W(A) \subset V_n(A)$

Lemme

Si A est une $\mathbb{F}_p$-algèbre réduite alors $W(A)$ est sans p-torsion.

Démonstration.

Si $p\hat{\cdot}\underline{a} = 0$, c'est que $a_n^p = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par le lemme précédent ; comme A est réduit on a forcément $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\square$

3.Frobenius, Verschiebung, $\mathbb{F}_p$-algèbres, Teichmüller

$\mathbb{F}_p$-algèbres

A parfait : $x \mapsto x^p$ est un automorphisme

Lemme

1. *F_A est un automorphisme de $W(A)$*
2. $p^n W(A) = V_n(A)$
3. $W(A)/pW(A) = A$

3.Frobenius, Verschiebung, $\mathbb{F}_p$-algèbres, Teichmüller

Teichmüller

Définition

$\tau_A : A \to W(A)$:

$$\tau_A(a) = (a, 0, 0, 0, \ldots)$$

l'application de Teichmüller

3.Frobenius, Verschiebung, $\mathbb{F}_p$-algèbres, Teichmüller

Teichmüller

Lemme

1. *τ_A est multiplicative :* $\tau_A(ab) = \tau_A(a)\tau_A(b)$
2. *τ est une section de* $W(A)/V_1(A) \to A$
3. *Pour tout* $\underline{b} \in W(A)$ *et* $a \in A$ *on a :* $\tau_A(a)\underline{b} = (a^{p^n} b_n \mid n \in \mathbb{N})$

4.Propriété universelle des vecteurs de Witt

Objectif de cette section :

"Le foncteur de Witt est adjoint à droite au foncteur d'oubli de la catégorie des *Anneaux sans p-torsion muni d'un relèvement du Frobenius* vers les anneaux sans p-torsion."

4.Propriété universelle des vecteurs de Witt

Ce que ça veut dire :

$$\begin{tikzcd}
(B,\phi) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "\bar{f}=W(f)\Delta_B"'] & A \\
& (W(A),F_A) \arrow[u, "\alpha_{\mathbf{1}_A}"']
\end{tikzcd}$$

4.Propriété universelle des vecteurs de Witt

Quelques notations :
p**Ring** la catégorie des anneaux sans p-torsion.
Pour A un anneau on notera par la lettre ϕ une application qui est un relèvement du Frobenius sur A/pA :

$$\phi(x) \equiv x^p \mod pA$$

4.Propriété universelle des vecteurs de Witt

Définition

$p\mathbf{Ring}\Phi$ la catégorie des anneaux sans p-torsion munis d'un relèvement du Frobenius.

Un morphisme de $p\mathbf{Ring}\Phi$ est un morphisme d'anneau $f : A \to B$ tel que

$$f\phi_A = \phi_B f$$

4.Propriété universelle des vecteurs de Witt

Les vecteurs de Witt $W(A)$ sont munis de leur application F_A comme relèvement du Frobenius

On a donc un foncteur : $W : p\mathbf{Ring} \to p\mathbf{Ring}\Phi$.

4.Propriété universelle des vecteurs de Witt

Pour construire l'adjonction a besoin de remarquer que (par Dwork) :

$$\left(\operatorname{Im}\omega_B = \{\underline{b} \in B^{\mathbb{N}} \mid b_{n+1} \equiv \phi(b_n) \mod p^{n+1}, n \in \mathbb{N}\}\right)$$

$$(\phi^n(b)) \in \operatorname{Im}\omega_B$$

On a alors l'existence d'un unique élément de $W(B)$ qu'on note $\Delta_B(b) \in W(B)$ tel que si on note $\Delta_B = (\delta_n)$, alors :

$$\omega_n(\delta_0(b), \ldots, \delta_n(b)) = \phi^n(b)$$

4.Propriété universelle des vecteurs de Witt

Soit B un anneau sans p-torsion muni d'un relèvement ϕ du Frobenius.

Définition

$\Delta_B : B \to W(B)$ comme ci-dessus est appelée *vecteurs des δ-opérations relativement à ϕ* et on note $\Delta_B = (\delta_n)$. La *n-ième δ-opération sur B relativement à ϕ* est $\delta_n : B \to B$

4.Propriété universelle des vecteurs de Witt

Par exemple on a $\delta_0(b) = b$. Donc $\delta_0 = \mathrm{Id}_B$

On a :

$$\delta_1(b) = \frac{\phi(b) - b^p}{p}$$

4.Propriété universelle des vecteurs de Witt

Propriété universelle des vecteurs de Witt ; cas sans p-torsion.

Théorème

Soit A un anneau sans p-torsion. Soit B un anneau sans p-torsion muni d'un relèvement ϕ_B du Frobenius. Alors pour tout morphisme d'anneau $f : B \to A$, il existe un unique morphisme $\bar{f} : B \to W(A)$ tel que $\bar{f}\phi_B = F_A\bar{f}$ et :

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "\bar{f}=W(f)\Delta_B"'] & A \\
& W(A) \arrow[u, "\alpha_{1_A}"']
\end{tikzcd}$$

4.Propriété universelle des vecteurs de Witt

Si $U : p\mathbf{Ring}\Phi \to p\mathbf{Ring}$ est le foncteur d'oubli, alors U est adjoint à gauche de W. Pour $A \in p\mathbf{Ring}$ et $B \in p\mathbf{Ring}\Phi$ l'adjonction est donnée par :

$$p\mathbf{Ring}(U(B), A) \xrightarrow{\sim} p\mathbf{Ring}\Phi(B, W(A))$$

$$f \to \bar{f} \overset{def.}{=} W(f)\Delta_B$$

$$\bar{g} \overset{def.}{=} \alpha_{1_A} U(g) = g_0 \leftarrow g = (g_n)$$

Pour tout $A \in p\mathbf{Ring}$ le foncteur contravariant $p\mathbf{Ring}(U(-), A) : p\mathbf{Ring}\Phi \to \mathbf{Set}$ est représenté par $W(A)$ avec l'adjonction comme choix d'isomorphisme naturel.

4.Propriété universelle des vecteurs de Witt

"Les vecteurs de Witt permettent de relever des applications vers un anneau qui possède un relèvement de Frobenius"

4.Propriété universelle des vecteurs de Witt

Pour généraliser : prendre au sérieux les δ-opérations rencontrées en chemin :

$$\delta_1(a) = \frac{\phi(a) - a^p}{p}$$