Examen du 4 novembre 2019
2 heures

Le polycopié du cours est le seul document autorisé. Les appareils électroniques ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Dans ce texte, $\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes.

Exercice 1.
Nous notons $A = \mathbb{C}[X, Y]/(X^2 - Y^3)$.
1. Montrer que A est intègre et noetherien.
2. Montrer que A est isomorphe à $\mathbb{C}[T^2, T^3]$ et que le corps des fractions de A est isomorphe à $\mathbb{C}(T)$.
3. Montrer que l'élément Y est irréductible dans A. En déduire que l'anneau A n'est pas factoriel.
4. Montrer que tout idéal premier non nul de A est maximal.

Exercice 2. Soit A un anneau inclus dans $\mathbb{C}$. Un élément $\alpha \in \mathbb{C}$ est dit *entier* sur A s'il est racine d'un polynôme unitaire à coefficients dans A.
1. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les racines d'un polynôme unitaire de $A[X]$. Montrer que tout polynôme $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ en les α_i à coefficients dans A est racine d'un polynôme unitaire de $A[X]$.
2. En déduire que l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}$ entiers sur A est un anneau.
3. Montrer qu'un élément $\alpha \in \mathbb{C}$ est entier sur A si et seulement si il existe un sous-A-module M de $\mathbb{C}$ type fini de non nul tel que $\alpha M \subset M$.
4. Soit $b \in \mathbb{C}$ un élément non nul. Montrer que tout $\alpha \in A[b] \cap A[b^{-1}]$ est entier dans A.

Exercice 3.
Nous munissons l'anneau $A = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ d'un ordre admissible $>$. Nous fixons I idéal non nul de A. Une base de Gröbner $G = \{g_1, \ldots, g_r\}$ (pour $>$ de I) est dite *minimale* si pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, le coefficient dominant de g_i est égal à 1 et pour tout $j \neq i$ le terme dominant g_i ne divise pas le terme dominant de g_j. Si G est minimale et si, de plus, pour tout $i \neq j$ aucun terme non nul de g_i n'est divisible par le terme dominant de g_j, alors G est dite *réduite*.
1. Expliquer comment obtenir une base de Gröbner minimale à partir d'une base de Gröbner.
2. Si $G = \{g_1, \ldots, g_r\}$ et $F = \{f_1, \ldots, f_s\}$ sont deux bases de Gröbner minimales, montrer que $r = s$ et que, quitte à renuméroter, les termes dominants de f_i et g_i sont égaux pour $1 \leq i \leq r$.
3. Expliquer comment obtenir une base de Gröbner réduite à partir d'une base de Gröbner minimale.
4. Montrer que l'idéal I admet une unique base de Gröbner réduite.

Exercice 4.
Soit A un anneau intègre et $S \subset A$ un sous-ensemble multiplicatif. L'ensemble S est dit *saturé* si $ab \in S \Longrightarrow a$ et $b \in S$.
1. Si $A - S$ est union d'idéaux premiers, montrer que S est saturé.
2. Réciproquement, si S est saturé, montrer que $A - S$ est union d'idéaux premiers. (On pourra utiliser le lemme de Zorn).
3. Montrer qu'il existe un unique ensemble multiplicatif S' saturé minimal pour l'inclusion contenant S tel que $S' = A - \cup \mathfrak{p}$, où $\mathfrak{p}$ parcourt l'ensemble des idéaux premiers disjoints de S.
4. Montrer que $S'^{-1}A = S^{-1}A$.

Exercice 5.
1. Soient X_0, X_1, X_2 trois ensembles et $f \in \mathrm{Hom}(X_1, X_0)$ et $g \in \mathrm{Hom}(X_2, X_0)$ des applications. Nous notons $X_1 \times_{X_0} X_2 = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 | f(x_1) = g(x_2)\}$.
Si X_1, X_2 sont des parties de X_0 et f, g sont les inclusions naturelles, décrire l'ensemble $X_1 \times_{X_0} X_2$.

2. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, soient X_0, X_1, X_2, Y des objets de $\mathcal{C}$, $\pi_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, X_0)$ et $\pi_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_2, X_0)$. La composition par π_1 (respectivement par π_2) induit des morphimes $f : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_0)$, $g : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_0)$. Nous supposons que le foncteur contravariant

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ens}, \quad Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_1) \times_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X_0)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_2)$$

est représentable et nous notons $(X_1 \times_{X_0} X_2, (p_1, p_2))$ son représentant où $X_1 \times_{X_0} X_2$ est un objet de $\mathcal{C}$ dit produit fibré et $p_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1 \times_{X_0} X_2, X_1)$ et $p_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1 \times_{X_0} X_2, X_2.)$
2.a Si $\mathcal{C}$ est la catégorie des espaces topologiques, déterminer $X_1 \times_{X_0} X_2$.
2.b Si X_0 est l'objet final de $\mathcal{C}$, déterminer $X_1 \times_{X_0} X_2$.
3. Considérons des morphismes de $\mathcal{C}$, $f : X_1 \longrightarrow X_0$, $g : X_2 \longrightarrow X_0$ et $h : X_3 \longrightarrow X_2$. Montrer qu'il existe un isomorphisme naturel

$$(X_1 \times_{X_0} X_2) \times_{X_2} X_3 \simeq X_1 \times_{X_0} X_3.$$

4. Soit k un corps et $\mathcal{C}$ la catégorie dont les objets sont les anneaux locaux A d'idéal maximal $\mathfrak{m}_A$ tel que $k = A/\mathfrak{m}_A$ et les morphismes sont les morphismes d'anneaux $\varphi : A \longrightarrow A'$ tels que $\varphi(\mathfrak{m}_A) \subset \mathfrak{m}_{A'}$. Montrer que les produits fibrés existent dans $\mathcal{C}$ (i.e que le foncteur F de la question 2. est représentable).

Exercice 6.
Soit $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ deux polynômes non constants sans facteur irréductible commun de degrés totaux respectifs $p, q > 0$. Nous notons C et C' les courbes de $\mathbb{C}^2$ définies par f et g :

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 | f(x, y) = 0\} \text{ et } C' = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 | g(x, y) = 0\}.$$

1.a Montrer qu'il existe $u, v \in \mathbb{C}[x, y]$ non nuls et $r \in \mathbb{C}[x]$ non nul tels que $fu + gv = r$.
1.b En déduire que $A = \mathbb{C}[x, y]/(f, g)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.
1.c Montrer que les idéaux maximaux de $\mathbb{C}[x, y]$ sont de la forme $(x - a, y - b)$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.
2. Dans cette question, $\mathfrak{m} = (x - a, y - b)$ un idéal maximal de $\mathbb{C}[x, y]$. Par abus, nous notons également $\mathfrak{m}$ l'image de $\mathfrak{m}$ comme idéal de A.
2.a Montrer que le localisé $A_{\mathfrak{m}}$ (de A en $S = A - \mathfrak{m}$) est non nul si et seulement si $(a, b) \in C \cap C'$.
2.b Notons $\xi = (a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $\mathcal{O}_\xi$ l'anneau des germes de fonctions rationnelles au point ξ, i.e :

$$\mathcal{O}_\xi = \left\{ \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \text{ avec } P, Q \in \mathbb{C}[x, y], Q(a, b) \neq 0 \right\}.$$

Montrer que $A_{\mathfrak{m}} = 0$ ou $A_{\mathfrak{m}} \simeq \mathcal{O}_\xi$.
2.c En déduire que $\dim_{\mathbb{C}} A = \sum_{\xi \in C \cap C'} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_\xi/(f, g)$.
3. Un polynôme $F \in \mathbb{C}[X, Y, T]$ est dit homogène si tous ses monômes sont de même degré total.
3.a Soit $F(X, Y, T) = T^p f(X/T, Y/T)$ et $G(X, Y, T) = T^q g(X/T, Y/T)$. Montrer que F (resp. G) est un polynôme homogène de degré p (resp. q).
3.b Pour tout entier $n \geq 0$, nous notons $\mathbb{C}[X, Y, T]_n$ l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré n et $(F, G)_n$ le sous-espace de ceux de la forme $AF + BG$ pour $A, B \in \mathbb{C}[X, Y, T]$. Pour $n \geq p + q$, montrer que $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[X, Y, T]_n/(F, G)_n = pq$.
4. Nous supposons que $F(X, Y, 0)$ et $G(X, Y, 0)$ n'ont pas de facteur commun (i.e les courbes C et C' n'ont pas de point commun à l'infini).
4.a Montrer que l'application

$$\beta_n : \mathbb{C}[X, Y, T]_n/(F, G)_n \to \mathbb{C}[X, Y, T]_{n+1}/(F, G)_{n+1}, \quad H \mapsto TH$$

est injective. Montrer que β_n est bijective si $n \geq p + q$.
4.b Montrer que pour tout $n \geq p + q$, l'application

$$\mathbb{C}[X, Y, T]_n \to \mathbb{C}[x, y], \quad H(X, Y, T) \mapsto H(x, y, 1)$$

induit une application linéaire bijective

$$\alpha_n : \mathbb{C}[X, Y, T]_n/(F, G)_n \to \mathbb{C}[x, y]/(f, g).$$

4.c En déduire que $\sum_{\xi \in C \cap C'} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_\xi/(f, g) = pq$ si C et C' n'ont pas de point commun à l'infini.

Eléments de correction

Exercice 1.
1. L'anneau A est le quotient de $\mathbb{C}[X,Y]$ par un idéal premier ($\mathbb{C}[X,Y]$ est un anneau factoriel. L'élément X^2-Y^3 est irréductible car sans racine dans $\mathbb{C}(X)[Y]$, donc (X^2-Y^3) est premier). Donc A est intègre et noethérien.
2. Le morphisme d'anneau $\varphi : \mathbb{C}[X,Y] \longrightarrow \mathbb{C}[T^2,T^3]$ défini par $\varphi(P(X,Y)) = P(T^3,T^2)$ est surjectif de noyau (X^2-Y^3) donc induit une bijection de A sur $\mathbb{C}[T^2,T^3]$. Le corps des fractions de $\mathbb{C}[T^2,T^3]$ contient le corps $\mathbb{C}(T)$ et $\mathbb{C}[T^2,T^3] \subset \mathbb{C}(T)$. Donc $\mathbb{C}(T)$ est le corps des fractions de $\mathbb{C}[T^2,T^3]$ et le corps des fractions A est isomorphe à $\mathbb{C}(T)$.
3. Nous avons $A/(Y) = \mathbb{C}[X,Y]/(X^2-Y^3,Y) \simeq \mathbb{C}[X,Y]/(X^2,Y) \simeq \mathbb{C}[X]/(X^2)$ non intègre donc (Y) n'est pas premier. Or Y est irréductible (non inversible car $A/(Y) \neq 0$) donc A n'est pas factoriel.
4. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathbb{C}[T^2,T^3]$. L'inclusion $\mathbb{C}[T^2] \longrightarrow \mathbb{C}[T^2,T^3]$ induit un morphisme injectif $\mathbb{C}[T^2]/(\mathfrak{p}\cap\mathbb{C}[T^2]) \longrightarrow \mathbb{C}[T^2,T^3]/\mathfrak{p}$. Or $\mathbb{C}[T^2]\cap\mathfrak{p}$ est premier (car le quotient est intègre) non nul donc $\mathbb{C}[T^2]\cap\mathfrak{p}$ est un idéal maximal (car $\mathbb{C}[T^2]$ est principal donc ses idéaux premiers sont maximaux) de $\mathbb{C}[T^2]$ et $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal de $\mathbb{C}[T^2,T^3]$. Comme A est isomorphe à $\mathbb{C}[T^2,T^3]$, les idéaux premiers de A sont maximaux.

Exercice 2.
1. Le polynôme

$$h(X) = \Pi_{\sigma\in S_n}(X - g(\alpha_{\sigma(1)},\dots,\alpha_{\sigma(n)}))$$

est un polynôme unitaire dont les coefficients sont les polynômes symétriques en les α_i. Donc le polynôme unitaire $h(X) \in A[X]$ admet $g(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ comme racine.
2. Soient $\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{C}$ entiers sur A. Alors $\alpha_1 \pm \alpha_2$, $\alpha_1\alpha_2$ sont entiers sur A d'après 1.
3. Si α est entier sur A, le A-module non nul $M = A[\alpha] \subset \mathbb{C}$ vérifie $\alpha M \subset M$.
Réciproquement soit M un A-module de type fini non nul, $M \subset \mathbb{C}$ tel que $\alpha M \subset M$ et soit $v_1,\dots,v_n$ un ensemble fini générateur de M. Alors il existe $B = (b_{ij}) \in M_n(A)$ avec

$$\alpha v_i - \sum_{i,j} b_{ij}v_j = 0$$

Alors $\det(\alpha\mathrm{Id} - B) = 0$ et α est entier sur A.
4. Par hypothèse, $\alpha = a_0 + a_1b + \cdots + a_mb^m$ et $\alpha = b_0 + b_1b^{-1} + \cdots + b_nb^{-n}$. Soit $M = A[b^{-n},\dots,b^m]$. Alors $\alpha b^i \in M$ pour $-n \leq i \leq m$. D'après 3., nous obtenons que α est entier sur A.

Exercice 3.
1. Une famille $\{g_1,\dots,g_t\}$ d'él'ements de I est une base de Gröbner si $< LT(I) >=< LT(G) >$. Donc si G est une base de Gröbner et si le terme dominant de g_2 divise le terme dominant de g_1, alors $\{g_2,\dots,g_t\}$ est aussi une base de Gröbner. Ainsi pour obtenir une base de Gröbner minimal à partir d'une base de Gröbner il suffit d'éliminer tous les g_i pour lesquels il existe $j \neq i$ tel que le terme dominant de g_j divise le terme dominant de g_i puis de diviser chaque g_i restant par son coefficient dominant.
2. Comme $f_1 \in I$ et G est une base de Gröbner de I, il existe i tel que le terme dominant de g_i divise le terme dominant de f_1. Quitte à renuméroter, nous pouvons supposer que $i = 1$. Comme $g_1 \in I$ et F est une base de Gröbner, il existe j tel que le terme dominant de f_j divise le terme dominant de g_1. Donc le terme dominant de f_j divise le terme dominant de f_1 et par minimalit de F, $j = 1$ et f_1, g_1 ont mme terme dominant. De même avec $f_2,\dots f_s$. Ainsi $s = t$ et les termes dominants de f_i et g_i coincident $1 \leq i \leq s$.
3. Nous effectuons la suite de réduction suivante :
Notons h_1 le reste de la division de g_1 par $H_1 = \{g_2,\dots,g_t\}$ (aucun terme non nul de h_1 n'est divise par un des termes dominants de g_i).

Puis h_2 le reste de la division de g_2 par $H_2 = \{h_1, g_3, \dots, g_t\}$.
... Enfin h_t le reste de la division de g_t par $H_1 = \{h_1, h_2, \dots, h_{t-1}\}$.
Alors à chaque étape H_i est une base de Gröbner minimal. Donc les termes dominants de h_i et g_i coincident (question 2.) et par construction $\{h_1, \dots, h_t\}$ est une base de Gröbner réduite.
4. Il suffit de prouver l'unicité. Si $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ et $H = \{h_1, \dots, h_t\}$ sont deux bases de Gröbner réduites. D'après 2. les termes dominants de g_i et h_i coïncident. Si $g_i \neq h_i$, comme $g_i - h_i \in I$, il existe $j \neq i$ tel que le terme dominant de h_j divise le terme dominant de $g_i - h_i$. Mais alors le terme dominant de h_j et g_j divise un terme de g_i ou h_i. Ceci contredit le fait que F et G soient des base de Gröbner réduite.

Exercice 4.
1. Supposons que la partie multiplicative S s'écrit $S = A - \cup_i \mathfrak{p}_i$ avec $\mathfrak{p}_i$ des idéaux premiers. Alors

$$x, y \in S \Longleftrightarrow \forall i, x, y \notin \mathfrak{p}_i \Longleftrightarrow \forall i, xy \notin \mathfrak{p}_i \Longleftrightarrow xy \in S.$$

Donc S est saturé.
2. Réciproquement supposons S saturé. Soit $a \notin S$. Comme S est saturé, $(a) \cap S = \emptyset$. En appliquant le lemme de Zorn, nous montrons l'existence d'un idéal I de A contenant a, disjoint de S, maximal pour l'inclusion. Montrons que I est premier, pour cela, supposons $xy \in I$.
Si $x \notin I$, alors $I \subsetneq (I + (x)) \cap S \neq \emptyset$. Soit $c + bx \in S$ avec $c \in I$ et $b \in A$. De même si $y \notin I$, il existe $c' + b'y \in S$. Mais alors $(c + bx)(c' + b'y) \in I$ ce qui est exclu car S est multiplicative. Donc x ou $y \in I$. Donc I est premier et $A - S$ est une réunion d'idéaux premiers.
3. Posons $S' = \{x \in A | \exists y \in A \text{ tel que } xy \in S\}$. Alors S' est le plus petit ensemble multiplicatif saturé contenant S.
4. Pour tout A-module M, $S^{-1}M = S'^{-1}M$ donc $S'^{-1}A = S^{-1}A$. L'idéal $\mathfrak{p}$ reste premier dans $S^{-1}A$ si et seulement si $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$.

Exercice 5.
1. Nous avons $X_1 \times_{X_0} X_2 = X_1 \cap X_2$.
2.a Il suffit de munir le sous-ensemble $X_1 \times_{X_0} X_2 \subset X_1 \times X_2$ de la topologie induite par la topologie produit sur $X_1 \times X_2$.
2.b Si X_0 est l'objet final, $X_1 \times_{X_0} X_2 = X_1 \times X_2$.
3.b D'après le lemme de Yoneda, pour exhiber un isomorphisme entre deux objets, il suffit d'en exhiber un entre les foncteurs qu'ils représentent. Il s'agit de montrer que pour tout objet Y de $\mathcal{C}$ il existe une bijection fonctorielle en Y :

$$(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_1) \times_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X_0)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_2)) \times_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X_2)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_3) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_1) \times_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X_0)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_3).$$

Il suffit donc de montrer l'existence dun isomorphisme fonctoriel en les données pour $\mathcal{C}$ catégorie des ensembles. Dans la catégorie des ensembles, nous avons

$$(X_1 \times_{X_0} X_2) \times_{X_2} X_3 = \{((x, y), t), f(x) = g(y) \text{ et } h(t) = y\}$$

et

$$X_1 \times_{X_0} X_3 = \{(x, t), f(x) = g(h(t))\}.$$

La bijection cherchée est alors $((x, y), t) \mapsto (x, t)$ et sa réciproque à $(x, t) \mapsto ((x, h(t)), t)$. La fonctorialité en les données est alors claire.

4. L'anneau $B \times_A C$ est local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ l'image réciproque de $\mathfrak{m}_B$ par $B \times_A C \longrightarrow B$. De plus $B \times_A C/\mathfrak{m} = k$.

Exercice 6. Le théorème de Bézout
1.a L'anneau $\mathbb{C}(x)[y]$ est principal, donc de Bézout. Comme f, g sont premiers entre eux, il existe $u_1, v_1 \in \mathbb{C}(x)[y]$ tels que

$$fu_1 + gv_1 = 1$$

En réduisant au même dénominateur, nous obtenons le résultat.

1.b D'après la question 1.a, il existe $u, v, \tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbb{C}[x, y]$, $r \in \mathbb{C}[x]$ et $s \in \mathbb{C}[y]$ avec

$$fu + gv = r, \quad f\tilde{u} + g\tilde{v} = s.$$

Notons $\ell = \deg r$ et $\tilde{\ell} = \deg s$. Les images des monômes $x^i y^j$, $0 \leq i \leq \ell$ et $0 \leq j \leq \tilde{\ell}$ dans $\mathbb{C}[x, y]/(f, g)$ forment une famille génératrice finie du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[x, y]/(f, g)$.

1.c Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de $\mathbb{C}[x, y]$ et $h \in \mathfrak{m} - 0$ (h n'est pas inversible car $\mathfrak{m} \neq \mathbb{C}[x, y]$). Comme $\mathfrak{m}$ est premier, h contient un facteur irréductible. Nous pouvons donc supposer $h \in \mathfrak{m}$ irréductible. L'idéal (h) n'est pas maximal donc il existe $\tilde{h} \in \mathfrak{m} - (h)$. D'après la question 1.a, il existe $r \in \mathbb{C}[x] - \{0\}$ avec $hu + \tilde{h}v = r$ et r n'est pas constant car $\mathfrak{m} \neq \mathbb{C}[x, y]$. Alors $r(x) = \Pi(X - x_i)$. Donc l'un des facteurs $(X - x_i) \in \mathfrak{m}$. De même, il existe $y_j \in \mathbb{C}$ tel que $Y - y_j \in \mathfrak{m}$. Ainsi $(X - x_i, Y - y_j) \subset \mathfrak{m}$ et $(X - x_i, Y - y_j)$ est un idéal maximal. Donc $\mathfrak{m} = (X - x_i, Y - y_j)$.

2.a L'anneau $A_\mathfrak{m}$ est non nul si et seulement si il existe $s \in \mathbb{C}[x, y]_\mathfrak{m}$ avec $s \in (f, g)$. C'est équivalent à $(f, g) \not\subset \mathfrak{m}$, i.e ($f \notin \mathfrak{m}$ ou $g \notin \mathfrak{m}$) ou encore à ($f(a, b) \neq 0$ ou $g(a, b) \neq 0$).

2.b Comme $A = \mathbb{C}[x, y]/(f, g)$, l'anneau $A_\mathfrak{m} = \mathbb{C}[x, y]_\mathfrak{m}/(f, g)_\mathfrak{m}$ où $\mathbb{C}[x, y]_\mathfrak{m} = \mathcal{O}_\xi$ et où $(f, g)_\mathfrak{m}$ est l'idéal de $\mathbb{C}[x, y]_\mathfrak{m}$ engendré par (f, g).

2.c L'ensemble des idéaux maximaux $\mathfrak{m}$ tels que $A_\mathfrak{m} \neq 0$ est fini. L'application canonique $A \to \oplus A_\mathfrak{m}$ est un isomorphisme. Les questions 2.a et 2.b concluent.

3.b Posons $S_n = \mathbb{C}[X, Y, T]_n$. Nous avons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow S_{n-p-q} \xrightarrow{u} S_{n-p} \oplus S_{n-q} \xrightarrow{v} S_n \longrightarrow S_n/(F, G)_n \longrightarrow 0$$

avec $u(H) = (HG, HF)$ et $v(A, B) = AF + BG$ (pour l'exactitude, utiliser que F et G sont premiers entre eux). Or $\dim_\mathbb{C} S_n = \binom{n+2}{n}$. Nous en déduisons que $\dim_\mathbb{C} \mathbb{C}[X, Y, T]_n/(F, G)_n = pq$ (petite formule combinatoire).

4.a L'application β_n est injective car $\beta_n(H) = TH = AF + BG = 0$ implique modulo T, $\bar{A}\bar{F} + \bar{B}\bar{G} = 0$ Or $\bar{F} = F(X, Y, 0)$ et $\bar{G} = G(X, Y, 0)$ sont sans facteur commun. Donc il existe $\bar{K}(X, Y)$ avec $\bar{A} = \overline{KG}$ et $\bar{B} = -\overline{KF}$. Donc $A = \overline{K}G + TA'$ et $B = -\bar{K}F + TB'$ et $TH = (A'F + B'G)T$ donc $H = 0$ dans $S_n/(F, G)_n$. Pour $n \geq p + q$, β_n est injective entre espaces de même dimension donc bijective.

4.b Montrons que α_n est injective pour $n \geq p + q$. Si $H(x, y, 1) = af + bg$ alors $T^k H(X, Y, T) = AF + BG$ et comme β_n est injective, α_n aussi. L'application α_n est surjective car si $u(x, y) = U(x, y, 1)$ avec U de degré $N \geq p + q$ alors $u = \alpha_N(U)$. Donc $u = \alpha_{p+q}(\tilde{U}) = \alpha_n(\tilde{U})$ avec $U = T^{N-p-q}\tilde{U}$ car β_n est surjective pour $n \geq p + q$.

4.c D'après les questions précédentes, $\dim_C \mathbb{C}[x, y]/(f, g) = \sum_{\xi \in C \cap C'} \dim \mathcal{O}_\xi/(f, g) = pq$.