Graphes de Cayley

1 Quelques rappels sur les graphes

Définitions

— Un *graphe* Γ est un couple (V, E) où V est appelé l'ensemble des *sommets* et $E \subset V \times V$ l'ensemble des *arêtes*[1].

— Une *coloration* c d'un graphe $\Gamma = (V, E)$ par un ensemble I est une application $c : E \longrightarrow I$.

— Un *automorphisme* ϕ de Γ est une bijection de V dans lui-même telle que pour tout $x, y \in V$: $(x, y) \in E \Longleftrightarrow (\phi(x), \phi(y)) \in E$. Si Γ est de plus muni d'une coloration c, on dit que ϕ *préserve les couleurs* si pour tout $(x, y) \in E$: $c(x, y) = c(\phi(x), \phi(y))$.

L'ensemble des automorphismes d'un graphe Γ, noté $\mathrm{Aut}(\Gamma)$, muni de la composition, a naturellement une structure de groupe. L'ensemble des automorphismes de Γ préservant les couleurs, noté $\mathrm{Aut}_{\mathrm{coul}}(\Gamma)$, en est un sous-groupe.

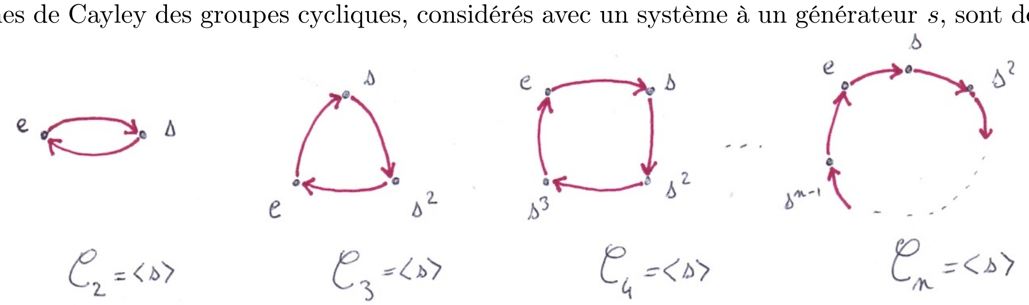
La question naturelle qui se pose est la suivante : comment caractériser les groupes d'automorphisme d'un graphe ? On va ici y répondre partiellement en montrant qu'à tout groupe G muni d'une certaine partie génératrice S, on peut associer un graphe, appelé graphe de Cayley et noté $\mathrm{Cay}(G, S)$, tel que G est isomorphe à $\mathrm{Aut}_{\mathrm{coul}}(\mathrm{Cay}(G, S))$.

2 Graphes de Cayley

On considère G un groupe et S une partie génératrice de G. On construit le graphe $\mathrm{Cay}(G, S) = (V, E)$ en prenant $V := G$ et $E := \{(x, xs), s \in S\}$. Si $(x, y) \in E$, alors il existe un unique $s \in S$ tel que $y = xs$. On définit la coloration $c : E \to S$ en posant $c(x, y) := s$.

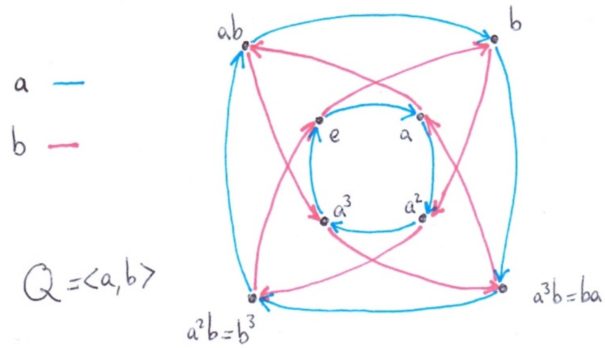
Exemples

— Les graphes de Cayley des groupes cycliques, considérés avec un système à un générateur s, sont des cycles :

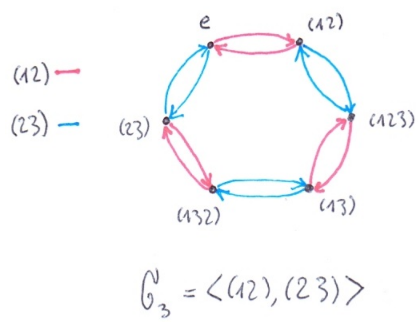


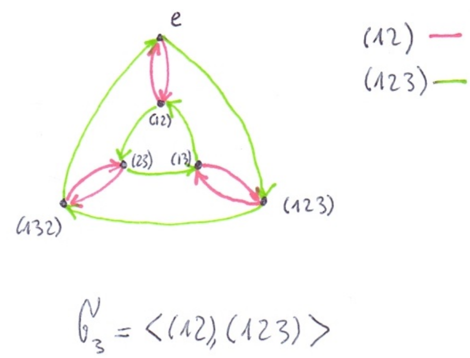
— Le groupe des quaternions, muni des générateurs $a = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$:

1. Ici, les graphes sont a priori orientés : $(x, y) \in E$ n'implique pas nécessairement $(y, x) \in E$.

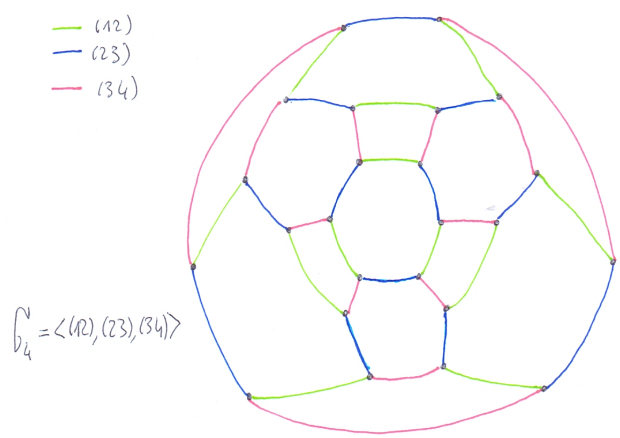


— Deux graphes de Cayley possibles pour le groupe de permutations $\mathfrak{S}_3$, avec des systèmes de générateurs différents :





— Les générateurs choisis pour engendrer $\mathfrak{S}_4$ dans la figure suivante étant d'ordre 2, les arêtes correspondent en réalité à des double flèches :



Fait Les éléments de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{coul}}(\mathrm{Cay}(G, S))$ sont exactement les $\phi : G \longrightarrow G$ bijectives telles que pour tout $(x, s) \in G \times S$, on ait : $\phi(xs) = \phi(x)s$.

Théorème Si G est un groupe et S une partie génératrice de G, alors $G = \mathrm{Aut}_{\mathrm{coul}}(\mathrm{Cay}(G, S))$.

Démonstration On considère le morphisme injectif classique de G dans $\mathfrak{S}_G$:

$$\delta : g \in G \mapsto (\delta_g : x \in G \mapsto gx \in G) \in \mathfrak{S}_G$$

On montre alors que $\mathrm{Aut}_{\mathrm{coul}}(\mathrm{Cay}(G, S)) = \mathrm{Im}\,\delta$ à l'aide du fait précédent. □

Ce résultat permet notamment de montrer le théorème de Frucht (1938) :

Théorème Si G est un groupe au plus dénombrable, alors il existe un graphe non orienté Γ tel que $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$.