Partiel du 22 novembre 2017 (2h)

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées. Cet examen comporte 4 exercices et est noté sur 25.

Exercice 1 (Questions de cours)**.** (environ 4,5 pts)

1. Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$. Dans quels cas existe-t-il une injection de $[1, n]$ dans $[1, m]$? Et une surjection ? Et une bijection ?
2. Définition d'ensemble infini dénombrable.
3. Énoncez le théorème du binôme pour les exposants négatifs.

Exercice 2. (environ 12 pts)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{M}_n$ l'ensemble de mots de longueur n sur l'alphabet $\{a, b, c\}$.

1. Quel est le cardinal de $\mathcal{M}_n$?
2. Quel est le nombre de mots de $\mathcal{M}_n$ qui ne contiennent pas de c ?
3. Quel est le nombre de mots de $\mathcal{M}_n$ qui utilisent chaque lettre au moins une fois ?
4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Quel est le nombre de mots de $\mathcal{M}_n$ où la lettre c apparaît exactement k fois ?
5. Soient x, y, z des entiers naturels qui vérifient $x + y + z = n$. Quel est le nombre de mots $m \in \mathcal{M}_n$ où a apparaît x fois, b apparaît y fois et c apparaît z fois ?

Soit G le graphe dont l'ensemble de sommets est $\mathcal{M}_n$ et où deux mots m et m' forment une arête si et seulement s'ils diffèrent en une seule position (par exemple, les mots '$a \; \underbrace{a} \; b \; a \; c \; a$' et '$a \; \underbrace{b} \; b \; a \; c \; a$' forment une arête car ils diffèrent seulement en la 2ème lettre).

6. Quel est le degré des sommets de G ?
7. Quel est le nombre d'arêtes de G ?
8. Quel est le nombre de triangles de G ? (Un triangle est un sous-graphe isomorphe à K_3.)

Exercice 3. (environ 6 pts)

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et considérons une suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifie la relation de récurrence

$$a_{n+1} = \alpha a_n + \beta, \qquad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_{n+2} = (\alpha + 1)a_{n+1} - \alpha a_n$.
2. Calculez la série génératrice $F(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n$. (Exprimez-la comme un quotient de deux polynômes qui dépend de α, β et a_0.)
3. En déduire une expression de a_n en fonction de n si $\alpha = 2$, $\beta = 3$ et $a_0 = 0$?
4. En déduire une expression de a_n en fonction de n si $\alpha = 1$, $\beta = 1$ et $a_0 = 0$?

Exercice 4. (environ 2,5 pts)

Donnez une preuve combinatoire de l'identité suivante pour tout entier $n \geq 3$:

$$\binom{n}{3} = \sum_{i=2}^{n-1} (i-1)(n-i).$$