Partiel du 22 novembre 2017 (2h) (Corrigé)

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées. Cet examen comporte 4 exercices et est noté sur 25.

Exercice 1 (Questions de cours). (environ 4,5 pts)

1. Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$. Dans quels cas existe-t-il une injection de $[1, n]$ dans $[1, m]$? Et une surjection ? Et une bijection ?

   Il existe une injection si $n \leq m$, une surjection si $n \geq m$ et une bijection si $n = m$.

2. Définition d'ensemble infini dénombrable.

   Un ensemble E est infini dénombrable s'il est équipotent à $\mathbb{N}$. C'est-à-dire, s'il existe une bijection entre E et $\mathbb{N}$.

3. Énoncez le théorème du binôme pour les exposants négatifs.

   Si $m \in \mathbb{N}^*$, alors

$$(1+X)^{-m} = \frac{1}{(1+X)^m} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{-m}{n} X^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \binom{m+n-1}{n} X^n.$$

Exercice 2. (environ 12 pts)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{M}_n$ l'ensemble de mots de longueur n sur l'alphabet $\{a, b, c\}$.

1. Quel est le cardinal de $\mathcal{M}_n$?

   $\mathcal{M}_n$ est en bijection avec $\{a, b, c\}^n$ et a donc cardinal 3^n.

2. Quel est le nombre de mots de $\mathcal{M}_n$ qui ne contiennent pas de c ?

   Ces mots sont en bijection avec $\{a, b\}^n$ et ont donc cardinal 2^n.

3. Quel est le nombre de mots de $\mathcal{M}_n$ qui utilisent chaque lettre au moins une fois ?

   Soient $A = \{m \in \mathcal{M}_n : m \text{ ne contient pas } a\}$, $B = \{m \in \mathcal{M}_n : m \text{ ne contient pas } b\}$ et $C = \{m \in \mathcal{M}_n : m \text{ ne contient pas } c\}$. Nous cherchons le cardinal de l'ensemble $\mathcal{M}_n \setminus (A \cup B \cup C)$.
   Pour calculer $|A \cup B \cup C|$, nous utilisons la formule du crible,

$$|A \cup B \cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C| = 3\cdot 2^n - 3\cdot 1 + 0 = 3\cdot(2^n - 1),$$

   où nous avons utilisé que $|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 2^n$ et $|A \cap B \cap C| = 0$.
   Le nombre cherché est donc

$$|\mathcal{M}_n \setminus (A \cup B \cup C)| = |\mathcal{M}_n| - |A \cup B \cup C| = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3.$$

4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Quel est le nombre de mots de $\mathcal{M}_n$ où la lettre c apparaît exactement k fois ?

   Il y a $\binom{n}{k} 2^{n-k}$ tels mots.
   En effet, soit $\mathcal{K}$ l'ensemble de mots avec k fois la lettre c, et considérons l'application $\phi : \mathcal{K} \to \{a, b\}^{n-k}$ qui supprime les c du mot mais garde l'ordre des lettres. Notons que chaque mot de $\{a, b\}^{n-k}$ est l'image de $\binom{n}{k}$ mots de $\mathcal{K}$, qui sont les $\binom{n}{k}$ possibles positions des c. Du principe des bergers on a

$$|\mathcal{K}| = \binom{n}{k} |\{a, b\}^{n-k}| = \binom{n}{k} 2^{n-k}.$$

5. Soient x, y, z des entiers naturels qui vérifient $x + y + z = n$. Quel est le nombre de mots $m \in \mathcal{M}_n$ où a apparaît x fois, b apparaît y fois et c apparaît z fois ?

   $\binom{n}{x,y,z} = \binom{n}{x}\binom{n-x}{y}\binom{n-x-y}{z} = \frac{n!}{x!y!z!}$. *(Fait en cours.)*

Soit G le graphe dont l'ensemble de sommets est $\mathcal{M}_n$ et où deux mots m et m' forment une arête si et seulement s'ils diffèrent en une seule position (par exemple, les mots '$a\ a\ b\ a\ c\ a$' et '$a\ b\ b\ a\ c\ a$' forment une arête car ils diffèrent seulement en la 2ème lettre).

6. Quel est le degré des sommets de G ?

   $2n$, car pour chaque lettre du mot on a deux voisins, qu'on obtient en remplaçant cette lettre par chacune des autres deux.

7. Quel est le nombre d'arêtes de G ?

   Du lemme des poignées de mains, le nombre d'arêtes $|A|$ vérifie $\sum_{S \in \mathcal{P}(E)} d(S) = 2|A|$. C'est-à-dire $|A| = \frac{2n \cdot 3^n}{2} = n3^n$.

8. Quel est le nombre de triangles de G ? (Un triangle est un sous-graphe isomorphe à K_3.)

   Il y a $n3^{n-1}$ triangles dans G.
   Soient $u, v, w \in \mathcal{M}_n$ trois sommets adjacents deux-à-deux. Les mots u et v diffèrent seulement en leur lettre en position i, et v et w diffèrent seulement en leur lettre en position j. Si i était différent de j, alors v et w différeraient en 2 positions, et ne seraient pas voisins. Le triplet $\{u, v, w\}$ est donc de la forme

   $$\{(x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n), (x_1, \ldots, x_{i-1}, b, x_{i+1}, \ldots, x_n), (x_1, \ldots, x_{i-1}, c, x_{i+1}, \ldots, x_n)\}.$$

   Le nombre de tels triplets est $n3^{n-1}$ car chaque triplet est déterminée par l'index i et le mot $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \mathcal{M}_{n-1}$.

Exercice 3. (environ 6 pts)

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et considérons une suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifie la relation de récurrence

$$a_{n+1} = \alpha a_n + \beta, \qquad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_{n+2} = (\alpha + 1)a_{n+1} - \alpha a_n$.

   De la différence des équations $a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta$ et $a_{n+1} = \alpha a_n + \beta$, on obtient l'équation $a_{n+2} - a_{n+1} = \alpha a_{n+1} - \alpha a_n$.

2. Calculez la série génératrice $F(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n$. (Exprimez-la comme un quotient de deux polynômes qui dépend de α, β et a_0.)

   De l'équation de récurrence

   $$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{n+2} X^{n+2} &= X(\alpha + 1) \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{n+1} X^{n+1} - X^2 \alpha \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n \\ F(X) - a_1 X - a_0 &= X(\alpha + 1)(F(X) - a_0) - X^2 \alpha F(X) \end{aligned}$$

   et donc

   $$F(X) = \frac{a_0 + (a_1 - (\alpha + 1)a_0)X}{1 - (\alpha + 1)X + \alpha X^2} = \frac{a_0 + (\beta - a_0)X}{(1 - X)(1 - \alpha X)}$$

3. En déduire une expression de a_n en fonction de n si $\alpha = 2$, $\beta = 3$ et $a_0 = 0$?

   Dans ce cas,
$$F(X) = \frac{3X}{(1-X)(1-2X)}.$$
   Après la décomposition en éléments simples :
$$F(X) = \frac{3}{1-2X} - \frac{3}{1-X} = 3\sum_{n\in\mathbb{N}}(2^n-1)X^n.$$
   Donc $a_n = 3(2^n - 1)$.

4. En déduire une expression de a_n en fonction de n si $\alpha = 1$, $\beta = 1$ et $a_0 = 0$?

   Dans ce cas,
$$F(X) = \frac{X}{(1-X)^2} = X\sum_{n\in\mathbb{N}}(n+1)X^n = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} nX^n$$
   et donc $a_n = n$.

Exercice 4. (environ 2,5 pts)

Donnez une preuve combinatoire de l'identité suivante pour tout entier $n \geq 3$:
$$\binom{n}{3} = \sum_{i=2}^{n-1}(i-1)(n-i).$$

Pour $2 \leq i \leq n-1$, *soit* $M_i = \{\{x,i,y\} \in \mathcal{P}_3([1,n]) : x < i < y\}$ *l'ensemble des 3-parties de* $[1,n]$ *dont l'élément au milieu est* i. *Le cardinal de* M_i *est* $(i-1)(n-i)$, *car l'application* $\phi_i : M_i \to [1,i-1]\times[i+1,n]$ *que à la* 3*-partie* $\{x,i,y\}$ *avec* $x < i < y$ *assigne le pair* (x,y) *est une bijection. Les ensembles* M_i *forment une partition de* $\mathcal{P}_3([1,n])$ *et donc, du principe d'addition, on a*
$$\binom{n}{3} = |\mathcal{P}_3([1,n])| = \sum_{i=2}^{n-1}|M_i| = \sum_{i=2}^{n-1}(i-1)(n-i).$$