Examen du 19 janvier 2018 (2h)

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées. Cet examen comporte 5 exercices et est noté sur 20.

Exercice 1. (environ 3 pts)

1. Existe-t-il un graphe dont la suite des degrés est $(1,1,1,2,2,2,4,5,5)$? Si oui, en donner un exemple.
2. Existe-t-il un graphe dont la suite des degrés est $(1,1,1,2,2,3,4,5,5)$? Si oui, en donner un exemple.
3. Donner deux graphes non isomorphes avec la même suite de degrés.

Exercice 2. (environ 5 pts)

1. Donner la définition de graphe connexe.
2. Soit $G = (S, A)$ un graphe d'ordre n avec un sommet de degré $n - 1$. Montrer que G est connexe.
3. Soit $G = (S, A)$ un graphe d'ordre $2n+1$ de degré minimum n. Montrer que G est connexe.
4. Montrer l'existence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'un graphe G d'ordre $2n + 2$ et degré minimum n qui n'est pas connexe.

Exercice 3. (environ 3,5 pts)

1. Donner la définition d'arbre.
2. Donner la définition de graphe biparti.
3. Montrer que tout arbre est biparti.

Exercice 4. (environ 7 pts) On rappelle qu'un couplage parfait d'un graphe $G = (S, A)$ est un sous-ensemble $M \subseteq A$ d'arêtes tel que tout sommet de G est l'extrémité d'exactement une arête de M. On dénote par $\mathrm{cp}(G)$ le nombre de couplages parfaits du graphe G.

1. Pour tous sommets distincts x et y de G, $G \setminus \{x, y\}$ désigne le graphe obtenu en supprimant x et y (et les arêtes qui leur sont adjacentes) de G. Montrer que, pour tout sommet s de G fixé :
$$\mathrm{cp}(G) = \sum_{t \text{ voisin de } s} \mathrm{cp}(G \setminus \{s, t\}).$$
2. Pour $n \geq 1$, calculer $\mathrm{cp}(P_{2n-1})$, où P_{2n-1} est la chaîne de longueur $2n - 1$ (et donc d'ordre $2n$).
3. Pour $n \geq 2$, calculer $\mathrm{cp}(C_{2n})$, où C_{2n} est le cycle d'ordre $2n$.
4. Pour $n \geq 1$, calculer $\mathrm{cp}(K_{2n})$, où K_{2n} est le graphe complet d'ordre $2n$.
5. Pour $d \geq 2$ montrer que le d-cube Q_d admet au moins $2^{2^{d-2}}$ couplages parfaits distincts.
6. Calculer $\mathrm{cp}(Q_3)$.

Exercice 5. (environ 1,5 pts) Pour $n \geq 1$, considérez le graphe biparti complet $K_{2,n}$, dont les classes de bipartition sont X et Y, avec $|X| = 2$ et $|Y| = n$. Quel est le nombre d'arbres couvrants de $K_{2,n}$? (Un arbre couvrant est un sous-graphe couvrant qui est isomorphe à un arbre.)

Indication : Établir une bijection entre l'ensemble des arbres couvrants de $K_{2,n}$ et l'ensemble des parties non-vides de Y dont un élément est distingué (l'ensemble $\{(e, E) \in Y \times \mathcal{P}(Y) : e \in E\}$).