Examen du 19 janvier 2018 (2h) (Corrigé)

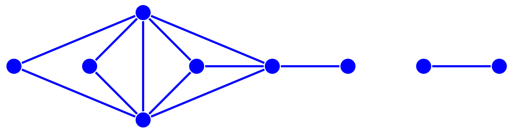
Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées. Cet examen comporte 5 exercices et est noté sur 20.

Exercice 1. (environ 3 pts)

1. Existe-t-il un graphe dont la suite des degrés est $(1, 1, 1, 2, 2, 2, 4, 5, 5)$? Si oui, en donner un exemple.

   Non, car tout graphe a un nombre pair de sommets de degré impair.

2. Existe-t-il un graphe dont la suite des degrés est $(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5)$? Si oui, en donner un exemple.

   Oui, par exemple : 

3. Donner deux graphes non isomorphes avec la même suite de degrés.

   Le 6-cycle et la réunion disjointe de deux 3-cycles sont deux graphes d'ordre 6 avec suite de degrés $(2, 2, 2, 2, 2, 2)$. Ils ne sont pas isomorphes car l'un est connexe et l'autre non.

Exercice 2. (environ 5 pts)

1. Donner la définition de graphe connexe.

   Un graphe est connexe si pour tout couple de sommets il existe un parcours qui les relie.

2. Soit $G = (S, A)$ un graphe d'ordre n avec un sommet de degré $n - 1$. Montrer que G est connexe.

   Soit u le sommet de degré $n-1$. Il est voisin de tout autre sommet de G, et donc relié à tout autre sommet par un parcours de longueur 1. Soient $x, y \in S \setminus \{u\}$. Alors (x, u, y) est un parcours qui les relie.

3. Soit $G = (S, A)$ un graphe d'ordre $2n+1$ de degré minimum n. Montrer que G est connexe.

   Soient x, y deux sommets de G. Si x et y sont voisins, alors ils sont relies par un parcours de longueur 1. Si x et y ne sont pas voisins, alors les voisinages de x et y doivent avoir un élément en commun car il y a $2n - 1$ sommets dans $S \setminus \{x, y\}$, et x et y ont chacun au moins n voisins dans $S \setminus \{x, y\}$. Soit donc z un voisin en commun. Alors (x, z, y) est un parcours reliant x et y.

4. Montrer l'existence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'un graphe G d'ordre $2n + 2$ et degré minimum n qui n'est pas connexe.

   Le graphe qui contient deux composantes connexes isomorphes à K_{n+1} n'est pas connexe et tous les sommets ont degré n.

Exercice 3. (environ 3,5 pts)

1. Donner la définition d'arbre.

   Un arbre est un graphe acyclique connexe.

2. Donner la définition de graphe biparti.

Un graphe est biparti s'il est 2-coloriable. Équivalemment, si on peut partitionner l'ensemble de sommets en deux parties X et Y telles que toute arête a une extrémité dans X et l'autre dans Y.

3. Montrer que tout arbre est biparti.

Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient pas de cycle de longueur impaire (résultat du cours). Un arbre est acyclique et ne contient aucun cycle. En particulier, il ne contient pas de cycle de longueur impaire, et est donc biparti.

Preuve alternative : *Par récurrence sur l'ordre n de l'arbre. Si $n = 1$, alors l'arbre est un sommet isolé et il peut être colorié avec une couleur.*
Soit G un arbre d'ordre $n \geq 2$. Alors G contient un sommet pendant u (résultat du cours). Soit v le seul voisin de u. Alors, $G \setminus u$ est aussi un arbre. Par hypothèse de récurrence, $G \setminus u$ est biparti et il existe une 2-coloration $f : S \setminus u \to \{1, 2\}$ de $G \setminus u$. On peut étendre cette 2-coloration à une 2-coloration de G en coloriant u avec la couleur qui n'appartient pas à son voisin v. G est donc aussi 2-coloriable.

Exercice 4. (environ 7 pts) On rappelle qu'un couplage parfait d'un graphe $G = (S, A)$ est un sous-ensemble $M \subseteq A$ d'arêtes tel que tout sommet de G est l'extrémité d'exactement une arête de M. On dénote par $\mathrm{cp}(G)$ le nombre de couplages parfaits du graphe G.

1. Pour tous sommets distincts x et y de G, $G \setminus \{x, y\}$ désigne le graphe obtenu en supprimant x et y (et les arêtes qui leur sont adjacentes) de G. Montrer que, pour tout sommet s de G fixé :
$$\mathrm{cp}(G) = \sum_{t \text{ voisin de } s} \mathrm{cp}(G \setminus \{s, t\}).$$

On observe d'abord que, pour toute arête $a = \{x, y\}$ de G, le nombre de couplages parfaits de G qui contiennent a est égal à $\mathrm{cp}(G \setminus \{x, y\})$, car tout couplage parfait qui utilise l'arête a se complète avec un couplage parfait de $G \setminus \{x, y\}$, et à tout couplage parfait de $G \setminus \{x, y\}$ on peut ajouter l'arête a pour obtenir un couplage parfait de G.
En suite, on observe que tout couplage parfait doit utiliser une et une seule des arêtes $\{s, t\}$ avec t adjacent à s, et on conclut par le principe d'addition.

2. Pour $n \geq 1$, calculer $\mathrm{cp}(P_{2n-1})$, où P_{2n-1} est la chaîne de longueur $2n - 1$ (et donc d'ordre $2n$).

$\mathrm{cp}(P_{2n-1}) = 1$.
On peut le montrer par récurrence sur n. Le résultat est évident quand $n = 1$, car P_1 contient une seule arête qui forme un couplage parfait. Pour $n > 1$, soit s une des extrémités de P_{2n-1}, et soit u son seul voisin. Alors $P_{2n-1} \setminus \{s, u\}$ est isomorphe à $P_{2(n-1)-1}$. Donc, par hypothèse de récurrence, $\mathrm{cp}(P_{2n-1} \setminus \{s, u\}) = \mathrm{cp}(P_{2(n-1)-1}) = 1$. Finalement, d'après la formule de la première question :
$$\mathrm{cp}(P_{2n-1}) = \sum_{t \text{ voisin de } s} \mathrm{cp}(P_{2n-1} \setminus \{s, t\}) = \mathrm{cp}(P_{2n-1} \setminus \{s, u\}) = 1.$$

3. Pour $n \geq 2$, calculer $\mathrm{cp}(C_{2n})$, où C_{2n} est le cycle d'ordre $2n$.

$\mathrm{cp}(C_{2n}) = 2.$

En effet, soit s un sommet de C_{2n}. Alors s a deux voisins u_1 et u_2. Pour $i = 1, 2$, on a que $C_{2n} \setminus \{s, u_i\}$ est isomorphe à la chaîne P_{2n-3} d'ordre $2n-2$. D'après les résultats des deux questions précédentes,

$$\mathrm{cp}(C_{2n}) = \sum_{t \text{ voisin de } s} \mathrm{cp}(C_{2n} \setminus \{s, t\}) = \mathrm{cp}(C_{2n} \setminus \{s, u_1\}) + \mathrm{cp}(C_{2n} \setminus \{s, u_2\}) = 2\,\mathrm{cp}(P_{2n-3}) = 2.$$

4. Pour $n \geq 1$, calculer $\mathrm{cp}(K_{2n})$, où K_{2n} est le graphe complet d'ordre $2n$.

   $\mathrm{cp}(K_{2n}) = (2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1.$

   On le montre par récurrence sur n. Pour $n = 1$, K_2 est une arête et donc il contient un seul couplage parfait. Pour $n > 1$, soit s un sommet de K_{2n}. Il est relié aux autres $2n-1$ sommets. De plus, pour tout couple de sommets s, t, on observe que $K_{2n} \setminus \{s, t\}$ est isomorphe à K_{2n-2}. Donc, $\mathrm{cp}(K_{2n} \setminus \{s, t\}) = \mathrm{cp}(K_{2n-2}) = (2n-3)\cdots 3 \cdot 1$ d'après l'hypothèse de récurrence.

$$\begin{aligned}\mathrm{cp}(K_{2n}) &= \sum_{t \text{ voisin de } s} \mathrm{cp}(K_{2n} \setminus \{s, t\}) = \sum_{t \text{ voisin de } s} \mathrm{cp}(K_{2n-2}) \\ &= \sum_{t \text{ voisin de } s} ((2n-3)\cdots 3 \cdot 1) = (2n-1)\,((2n-3)\cdots 3 \cdot 1)\,.\end{aligned}$$

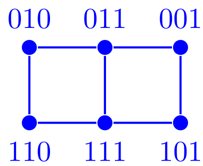
5. Pour $d \geq 2$ montrer que le d-cube Q_d admet au moins $2^{2^{d-2}}$ couplages parfaits distincts.

   Par récurrence sur d. Pour $d = 2$, Q_2 est un carré qui a deux couplages parfaits. Sinon, on divise les sommets de Q_d en deux copies de Q_{d-1} selon la valeur de sa première coordonnée. Par hypothèse de récurrence, chacune de ces deux copies admet $2^{2^{d-3}}$ couplages parfaits. En les combinant, on obtient $2^{2^{d-3}} \cdot 2^{2^{d-3}} = 2^{2^{d-2}}$ couplages parfaits distincts de Q_d.

6. Calculer $\mathrm{cp}(Q_3)$.

   $\mathrm{cp}(Q_3) = 9.$

   Dans un couplage parfait, le sommet 000 *doit être relié à soit* 100*, soit* 010*, soit* 001*. On compte d'abord les couplages avec l'arête* $000 - 100$*. Q_d privé de* 000 *et* 100 *est le graphe G suivant*



   Il faut compter son nombre de couplages parfaits. Le sommet 010 *doit être incident soit à* 110 *soit à* 011*. Il y a deux couplages parfaits de G qui contiennent l'arête* 010-110*, car G privé de ces deux sommets est isomorphe au* 4*-cycle. Et il en y a un de seul qui contient l'arête* 010-011*, car G privé de ces deux sommets est une* 3*-chaîne. Donc G a un total de* 3 *couplages parfaits, ce qui implique que Q_d contient* 3 *couplages parfaits avec l'arête* $000 - 100$*. Par symétrie, il y a aussi* 3 *couplages parfaits avec les arêtes* $000 - 010$ *et* $000 - 001$*. D'où un total de* 9 *couplages parfaits de Q_d.*

Exercice 5. (environ 1,5 pts) Pour $n \geq 1$, considérez le graphe biparti complet $K_{2,n}$, dont les classes de bipartition sont X et Y, avec $|X| = 2$ et $|Y| = n$. Quel est le nombre d'arbres couvrants de $K_{2,n}$? (Un arbre couvrant est un sous-graphe couvrant qui est isomorphe à un arbre.)

Indication : Établir une bijection entre l'ensemble des arbres couvrants de $K_{2,n}$ et l'ensemble des parties non-vides de Y dont un élément est distingué (l'ensemble $\{(e, E) \in Y \times \mathcal{P}(Y) : e \in E\}$).

Soit $X = \{x_1, x_2\}$. On remarque d'abord que dans chaque arbre couvrant il y a exactement un élément de Y qui est relié aux deux sommets de X (si cet élément n'existait pas, le graphe ne serait pas connexe, et s'il en y avait plusieurs, alors ils formeraient un cycle avec x_1 et x_2), et les autres éléments sont reliés soit à x_1 soit à x_2. On considère l'application ψ qui à chaque arbre couvrant assigne le couple formé par le voisinage de x_1 (qui est une partie de Y) et l'élément de Y qui est voisin de x_1 et x_2 (qui joue le rôle d'élément distingué). Il s'agit clairement d'une bijection entre l'ensemble d'arbres couvrants et l'ensemble $\mathcal{S} = \{(e, E) \in Y \times \mathcal{P}(Y) : \ e \in E\}$.
On en déduit que le nombre d'arbres couvrants de $K_{2,n}$ est $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$. En effet, du principe de bijection, il faut trouver le cardinal de l'ensemble $\mathcal{S}$. L'application $\phi : \mathcal{S} \to Y$ définie par $\phi(e, E) = e$ vérifie que $\phi^{-1}(e)$ est l'ensemble de parties de Y qui contiennent e, qui est en bijection avec les parties de $Y \setminus \{e\}$, et donc qui a cardinal

$$|\phi^{-1}(e)| = |\mathcal{P}(Y \setminus \{e\})| = 2^{|Y \setminus \{e\}|} = 2^{n-1}.$$

Donc, du principe des bergers, on a $|\mathcal{S}| = n|\phi^{-1}(e)| = n2^{n-1}$.