La suite de Fibonacci

Considérons la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par l'équation de récurrence suivante

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{pour } n \geq 2 \end{cases}$$

et la série génératrice associée :

$$F(X) = f_0 + f_1 X + f_2 X^2 + \cdots = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n X^n.$$

On a

$$\begin{aligned}
f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} && \forall n \geq 2, \\
f_n X^n &= f_{n-1} X^n + f_{n-2} X^n && \forall n \geq 2, \\
\sum_{n\geq 2} f_n X^n &= \sum_{n\geq 2} f_{n-1} X^n + \sum_{n\geq 2} f_{n-2} X^n, \\
\sum_{n\geq 2} f_n X^n &= X \sum_{n\geq 2} f_{n-1} X^{n-1} + X^2 \sum_{n\geq 2} f_{n-2} X^{n-2}, \\
\sum_{n\geq 2} f_n X^n &= X \sum_{n\geq 1} f_n X^n + X^2 \sum_{n\geq 0} f_n X^n, \\
F(X) - X = F(X) - f_0 - f_1 X &= X(F(X) - f_0) + X^2 F(X) = XF(X) + X^2 F(X), \\
(1 - X - X^2) F(X) &= X, \\
F(X) &= \frac{X}{1 - X - X^2}.
\end{aligned}$$

Les racines de $1 - X - X^2$ sont $\lambda = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\mu = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. (On remarque que $\lambda = -\varphi = \frac{1}{1-\varphi}$ et $\mu = \varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$, où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le *nombre d'or*.) Du *Théorème de décomposition en éléments simples*, on sait qu'il existent $a, b \in \mathbb{C}$ tels que

$$\frac{X}{1 - X - X^2} = \frac{a}{X - \lambda} + \frac{b}{X - \mu}.$$

C'est plus convenable de diviser les dénominateurs par λ et μ, respectivement, et travailler avec les constantes $A = \frac{-a}{\lambda}$ et $B = \frac{-b}{\mu}$ et avec les coefficients $\varphi' = 1 - \varphi = \frac{1}{\lambda}$ et $\varphi = \frac{1}{\mu}$:

$$\frac{X}{1 - X - X^2} = \frac{\frac{-a}{\lambda}}{1 - \frac{X}{\lambda}} + \frac{\frac{-b}{\mu}}{1 - \frac{X}{\mu}} = \frac{A}{1 - \frac{X}{\lambda}} + \frac{B}{1 - \frac{X}{\mu}} = \frac{A}{1 - \varphi' X} + \frac{B}{1 - \varphi X}.$$

Pour trouver les valeurs de A et B, on multiplie

$$\frac{X}{1 - X - X^2} = \frac{A}{1 - \varphi' X} + \frac{B}{1 - \varphi X} = \frac{A(1 - \varphi X) + B(1 - \varphi' X)}{(1 - \varphi' X)(1 - \varphi X)} = \frac{(A + B) + (-A\varphi - B\varphi')X}{1 - X - X^2}$$

et on obtient le système suivant

$$\begin{cases} A + B &= 0 \\ -A\varphi - B\varphi' &= 1 \end{cases}$$

dont la solution est $A = \frac{-1}{\sqrt{5}}$ et $B = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

D'où

$$F(X) = \frac{X}{1 - X - X^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1 - \varphi X} - \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1 - \varphi' X} = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi^n X^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi'^n X^n$$

et donc

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - \varphi'^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$