Le théorème d'Havel-Hakimi

Soit $G = (S, A)$ un graphe simple où $S = \{v_1, \dots, v_n\}$. On rappelle que $(d(v_1), \dots, d(v_n))$ est appelée *suite des degrés* de G. En général, on ne tient pas compte de l'ordre des termes dans cette suite, et par convention, on écrira ses termes dans l'ordre décroissant.

a) Suites graphiques

Dans les lignes qui suivent, nous étudions le problème suivant. Etant donnée une suite d'entiers naturels $d = (d_1, \dots, d_n)$ telle que $d_1 \geq \dots \geq d_n$, existe-t-il un graphe simple dont la suite des degrés vaut d ? Lorsque c'est le cas, on dira que la suite d est *graphique*.

Nous connaissons déjà un certain nombre de conditions que la suite d doit nécessairement vérifier pour être graphique. On sait par exemple que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on doit avoir $d_i \leq n - 1$. On sait aussi que d doit contenir au moins deux termes égaux, et qu'elle doit avoir un nombre pair de termes impairs. Or, ces trois conditions nécessaires ne suffisent pas en général à démontrer qu'une suite donnée est bien la suite des degrés d'un certain graphe simple (voir exemples ci-dessous). Le théorème suivant permet de caractériser les suites graphiques.

Théorème 1 (Havel-Hakimi) *Soient $n > 1$ et $d_1 \geq \dots \geq d_n$ des entiers naturels. Alors, on a l'équivalence suivante.*

$$(d_1, \dots, d_n) \text{ est graphique } \iff (d_2 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n) \text{ est graphique.}$$

Preuve : Nous démontrons ce résultat par double implication.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $d' = (d'_2, \dots, d'_n) = (d_2 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$ soit graphique. Alors, il existe un graphe simple $G = (S, A)$ et une numérotation des sommets $S = \{v_2, \dots, v_n\}$ telle que $d(v_i) = d'_i$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$. En ajoutant un nouveau sommet v_1 à S, et en ajoutant à A les d_1 arêtes de la forme $\{v_1, v_i\}$ pour $i \in [\![2, d_1 + 1]\!]$, on obtient bien un graphe simple H dont la suite des degrés vaut $d = (d_1, \dots, d_n)$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $d = (d_1, \dots, d_n)$, où $d_1 \geq \dots \geq d_n$, soit graphique. Il suffit de montrer qu'il existe un graphe simple $G = (S, A)$, où $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ tel que $d(v_i) = d_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, et tel que v_1 soit adjacent à <u>tous</u> les sommets dans $\{v_2, \dots, v_{d_1+1}\}$.

Supposons par l'absurde qu'un tel graphe n'existe pas. Considérons alors un graphe simple $G = (S, A)$, et une numérotation des sommets $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ telle que $d(v_i) = d_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, et telle que v_1 soit adjacent à un <u>maximum</u> de sommets dans $\{v_2, \dots, v_{d_1+1}\}$.

Par hypothèse, il existe $k \in [\![2, d_1 + 1]\!]$ tel que $\{v_1, v_k\} \notin A$. De plus, comme $d(v_1) = d_1$, il existe $\ell \in [\![d_1 + 2, n]\!]$ tel que $\{v_1, v_\ell\} \in A$.

Comme $k < \ell$, on a $d(v_k) \geq d(v_\ell)$. Deux cas sont alors possibles.

Cas 1. $d(v_k) = d(v_\ell)$. Dans ce cas, une simple renumérotation des sommets de G donne la réponse. En effet, en écrivant S sous la forme $\{u_1, \ldots, u_n\}$ avec

$$u_i = \begin{cases} v_k \text{ si } i = \ell \\ v_\ell \text{ si } i = k \\ v_i \text{ si } i \notin \{k, \ell\}, \end{cases}$$

on obtient alors une numérotation des sommets de G telle que $d(u_i) = d_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, et telle que u_1 soit adjacent à strictement plus de sommets dans $\{u_2, \ldots, u_{d_1+1}\}$ que pour la précédente numérotation $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$, ce qui est une contradiction.

Cas 2. $d(v_k) > d(v_\ell)$. Dans ce cas, il existe $m \notin \{k, \ell\}$ tel que v_m soit adjacent à v_k mais pas à v_ℓ, c'est-à-dire $\{v_k, v_m\} \in A$ et $\{v_\ell, v_m\} \notin A$. En particulier, $v_m \neq v_1$. Maintenant, si on retire $\{v_1, v_\ell\}$ et $\{v_k, v_m\}$ de A, et qu'on les remplace par $\{v_1, v_k\}$ et $\{v_\ell, v_m\}$, on obtient un graphe simple G' ayant d pour suite des degrés, et tel que v_1 soit adjacent à strictement plus de sommets dans $\{v_2, \ldots, v_{d_1+1}\}$ que pour G, ce qui est une contradiction.

b) Exemples d'application

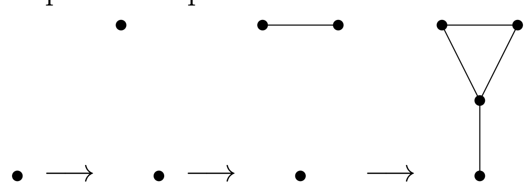
Le théorème d'Havel et Hakimi nous donne donc un algorithme simple, permettant de savoir si, oui ou non, une suite donnée est réalisable comme la suite des degrés d'un graphe simple. Et dans le cas où cette réponse est oui, l'algorithme nous permet même de construire un tel graphe. Voici quelques exemples d'application de cette méthode, sous la forme d'exercices corrigés.

Exercice 1. Existe-t-il un graphe simple dont la suite des degrés soit $(3, 2, 2, 1)$? Si oui, en donner un exemple.

Solution 1. D'après le théorème d'Havel et Hakimi, on a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} (3,2,2,1) \text{ graphique} \quad &\Longleftrightarrow \quad (1,1,0) \text{ graphique} \\ &\Longleftrightarrow \quad (0,0) \text{ graphique} \\ &\Longleftrightarrow \quad (0) \text{ graphique.} \end{aligned}$$

On en déduit donc qu'il existe un graphe simple dont la suite des degrés est $(3, 2, 2, 1)$. En utilisant l'idée de $\boxed{\Leftarrow}$ dans la preuve du théorème d'Havel et Hakimi, il est facile de construire un tel graphe de proche en proche.

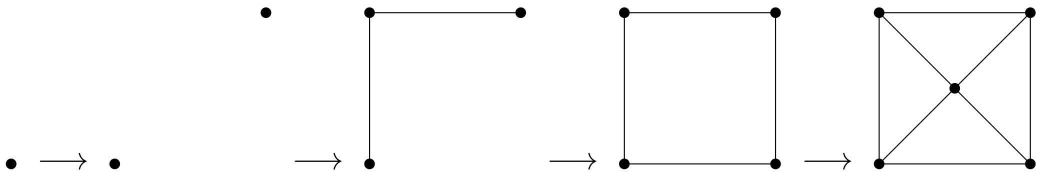


Exercice 2. Existe-t-il un graphe simple dont la suite des degrés soit $(4, 3, 3, 3, 3)$? Si oui, en donner un exemple.

Solution 2. D'après le théorème d'Havel et Hakimi, on a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} (4,3,3,3,3) \text{ graphique} \quad &\Longleftrightarrow \quad (2,2,2,2) \text{ graphique} \\ &\Longleftrightarrow \quad (1,1,2) \text{ graphique} \\ &\Longleftrightarrow \quad (2,1,1) \text{ graphique} \\ &\Longleftrightarrow \quad (0,0) \text{ graphique} \\ &\Longleftrightarrow \quad (0) \text{ graphique.} \end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe bien un graphe simple dont la suite des degrés est $(4, 3, 3, 3, 3)$. Voici une construction d'un tel graphe.



Exercice 3. Existe-t-il un graphe simple dont la suite des degrés soit $(3, 3, 3, 1)$? Si oui, en donner un exemple.

Solution 3. D'après le théorème d'Havel et Hakimi, on a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} (3,3,3,1) \text{ graphique} \quad &\Longleftrightarrow \quad (2,2,0) \text{ graphique} \\ &\Longleftrightarrow \quad (1,-1) \text{ graphique,} \end{aligned}$$

mais $(1, -1)$ n'est clairement pas une suite graphique. On en déduit donc qu'il n'existe pas de graphe simple dont la suite des degrés soit $(3, 3, 3, 1)$.

Exercice 4. Existe-t-il un graphe simple dont la suite des degrés soit $(6, 4, 4, 2, 2, 1, 1)$? Si oui, en donner un exemple.

Solution 4. D'après le théorème d'Havel et Hakimi, on a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} (6,4,4,2,2,1,1) \text{ graphique} \quad &\Longleftrightarrow \quad (3,3,1,1,0,0) \text{ graphique} \\ &\Longleftrightarrow \quad (2,0,0,0,0) \text{ graphique,} \end{aligned}$$

mais $(2, 0, 0, 0, 0)$ ne peut pas être une suite graphique. On en déduit donc qu'il n'existe pas de graphe simple dont la suite des degrés soit $(6, 4, 4, 2, 2, 1, 1)$.