Feuille de TD n°3 : Applications multilinéaires, groupe symétrique, déterminants

Exercice 1. Pour chacune des permutations suivantes, déterminer l'écriture comme produit de cycles de supports disjoints, puis la signature :

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \tau_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\tau_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 8 & 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad \tau_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Se convaincre que la formule suivante (qui fut énoncée rapidement en cours) est correcte :

$$(i_1, i_2, \dots, i_r) = (i_1, i_2) \circ (i_2, i_3) \circ \dots, \circ (i_{r-1}, i_r).$$

Exercice 3. Nous avons vu en cours que la signature est une application $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \to \{-1, +1\}$ telle que

$$\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_n, \varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2).$$

Existe-t-il une application vérifiant la même propriété mais prenant ses valeurs dans $\{1, j, j^2\}$, où j est un nombre complexe vérifiant $j^3 = 1$? (*indication* : utiliser le fait que pour toute transposition τ, on a $\tau^2 = 1$.)

Exercice 4. Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le 8} \in M_8(\mathbb{R})$. Dans la formule explicite donnant $\det(A)$, dîtes quel est le signe correspondant au terme $a_{1,8}\, a_{2,7}\, a_{3,1}\, a_{4,6}\, a_{5,3}\, a_{6,4}\, a_{7,2}\, a_{8,5}$.

Exercice 5. Soit $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 2 & 1 & 3 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix} \in S_8$ et soit $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le 8} \in M_8(\mathbb{R})$ la matrice telle que $a_{ij} = 5$ si $j \neq \tau(i)$ et $a_{i\tau(i)} = 1$ pour tout i. En utilisant la formule explicite donnant $\det(A)$, montrer que $\det(A) - \varepsilon(\tau)$ est un multiple de 25 ([1]). (*indication* : remarquer que si $\sigma \in \mathfrak{S}_8$ et $\sigma \neq \tau$, il existe au moins deux indices $i \neq j$ tels que $\sigma(i) \neq \tau(i)$ et $\sigma(j) \neq \tau(j)$.)

Exercice 6 (Matrices de permutation)**.** On appelle *matrice de permutation* une matrice dont chaque ligne et chaque colonne admet exactement un coefficient non nul, ce coefficient étant égal à 1. Expliquer comment calculer le déterminant d'une matrice de permutation. On pourra commencer par réfléchir sur des exemples de taille 3x3.

Exercice 7. On considère l'application $\Omega : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Omega((x, y, z, t), (x', y', z', t')) = xy' - yx' + zt' - tz'$$

1. Montrer que Ω est une application bilinéaire antisymétrique.
2. En déduire que si deux vecteurs $u, u' \in \mathbb{R}^4$ sont liés alors $\Omega(u, u') = 0$.
3. La réciproque est-elle vraie ? Comparer avec ce qui se passe pour le déterminant $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dans une base donnée.

Exercice 8. Soit $(f_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ une famille d'applications continues $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$ soit $A(t)$ la matrice dont les coefficients sont les $f_{ij}(t)$. Justifier que l'application $t \mapsto \det(A(t))$ est continue sur $\mathbb{R}$.

1. On dit alors que $\det(A)$ et $\varepsilon(\tau)$ sont égaux modulo 25

Exercice 9. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que la matrice A_x ci-dessous soit inversible :

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Exercice 10. Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, on considère le polyèdre convexe dont les sommets sont A=(1,1,1), $B = (1,2,2)$; $C = (4,0,0)$, $D = (4,1,1)$, $E = (-1,-1,0)$, $F = (-1,0,1)$, $G = (2,-2,-1)$ et $H = (2,-1,0)$. Justifier qu'il s'agit d'un parallélépipède, puis calculer son volume.

Exercice 11. Trouver l'équation du plan affine passant par les trois points $A = (4,2,3)$, $B = (-3,1,1)$ et $C = (0,0,1)$. Pour cela, on pourra exprimer le fait qu'un point $M = (x,y,z)$ appartient à ce plan si et seulement si $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ forme une famille liée, et utiliser un déterminant.

Exercice 12 (Déterminant de Vandermonde)**.** Soient k un corps et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $a_1, \dots, a_n \in k$, on considère le déterminant :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Le but de l'exercice est de démontrer la formule :

$$(\star) \qquad V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i).$$

1. Expliquer pourquoi la formule est vraie si deux des a_i sont égaux. Dans la suite, on les supposera donc distincts.
2. Vérifier le résultat pour $n = 2$ et $n = 3$.
3. En faisant des opérations bien choisies sur les lignes, puis en développant par rapport à la première colonne, montrer que
$$(\dagger) \qquad V(a_1, \dots, a_n) = V(a_2, \dots, a_n) \prod_{i=2}^{n} (a_i - a_1).$$
4. Conclure alors par récurrence.
5. Autre méthode pour $(\dagger)$. Soit X une indéterminée, vérifier que $V(X, a_2, \dots, a_n)$ est un polynôme en X de degré $n-1$. Calculer son coefficient dominant et remarquer ses racines évidentes, retrouver ainsi la formule $(\dagger)$.
6. Soit $k_n[X]$ l'espace des polynômes à coefficients dans k et de degré au plus n. Etant donnés des scalaires 2 à 2 distincts $a_0, \dots, a_n \in k$, on considère les formes linéaires $P \mapsto P(a_0)$, ..., $P \mapsto P(a_n)$. Montrer qu'elles forment une base $k_n[X]$.

Exercice 13. Soient $a \in \mathbb{C} - \{0\}$, $M_a \in M_n(\mathbb{C})$ la matrice dont tous les coefficients sont a, sauf les coefficients diagonaux qui sont nuls. Calculer son polynôme caractéristique de $P_a(X)$:

$$P_a(X) = \det \begin{pmatrix} -X & a & a & \cdots & a \\ a & -X & a & \ddots & a \\ a & a & -X & a & \vdots \\ \vdots & \ddots & a & -X & a \\ a & \cdots & a & a & -X \end{pmatrix},$$

puis son déterminant $\det(A) = P_A(0)$.