

## Feuille de TD n°4 : Réduction des endomorphismes I

---

**Exercice 1.** Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes d'un même espace vectoriel  $V$ . On suppose qu'ils commutent. Montrer que les espaces propres de  $u$  sont stables par  $v$ .

**Exercice 2.** Soient  $f$  une application affine d'un espace affine  $\mathcal{E}$  dans lui-même et  $\mathcal{F}$  un sous-espace affine tel que  $f(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$ . Montrer que la direction de  $\mathcal{F}$  est stable pour la partie linéaire de  $f$ . La réciproque est-elle vraie ?

**Exercice 3.** Soient  $A$  une matrice satisfaisant  ${}^tA = -A$  et  $P_A(X)$  son polynôme caractéristique. Comparer  $P_A(X)$  à  $P_A(-X)$ .

**Exercice 4.** Soit  $A$  une matrice réelle satisfaisant  ${}^tA = A$ . Montrer que toutes ses valeurs propres complexes sont en fait réelles.

**Exercice 5.** Soit  $E$  l'espace vectoriel engendré par les fonctions  $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{ks}$ , pour  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ . Déterminer toutes les valeurs propres et tous les vecteurs propres de l'endomorphisme  $D : E \rightarrow E, f \mapsto f'' - 3f' + 2f$ .

**Exercice 6.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -6 \\ 0 & 5 & 6 \\ -1 & -5 & -5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

1. Calculer le polynôme caractéristique de  $A$  et déterminer ses racines.
2. Peut-on dire si  $A$  est diagonalisable ? Justifier votre réponse.
3. Déterminer une base de chaque espace propre  $V_\lambda$ .

**Exercice 7.** On considère l'endomorphisme  $u$  de  $M_2(\mathbb{R})$  défini par  $u\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ . Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de  $u$ . L'endomorphisme  $u$  est-il diagonalisable ?

**Exercice 8.** Soit  $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 & -2 \\ 5 & 4 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ .

1. Calculer le polynôme caractéristique  $P_B(X)$  et déterminer ses racines et leur multiplicité.
2. Justifier que  $B$  est trigonalisable.
3. Compte tenu du résultat obtenu à la première question, quel calcul faut-il faire pour savoir si  $B$  est diagonalisable ? Effectuer ce calcul, et déterminer si  $B$  est diagonalisable ou non.
4. Selon ce qui est possible diagonaliser ou trigonaliser  $B$ .

**Exercice 9.** Lorsque c'est possible diagonaliser ou trigonaliser les matrices suivantes, à coefficients dans  $\mathbb{R}$  (pour  $B$ , on a  $t \in \mathbb{R}$ ) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} t+1 & -1 \\ 1 & t-1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 10.** Trigonaliser la matrice complexe suivante

$$\begin{pmatrix} 2i\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 11.** 1. Soit  $M \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice trigonalisable dans  $\mathbb{R}$  et diagonalisable dans  $\mathbb{C}$ . Montrer que  $M$  est en fait diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ .

2. Donner un exemple de matrice réelle diagonalisable dans  $\mathbb{C}$  mais pas diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 12** (à la place du prof). Fabriquer un exercice de diagonalisation de matrice à donner à vos étudiants. Attention, les calculs qu'ils auront à résoudre ne doivent être ni trop difficiles, ni trop faciles...

**Exercice 13** (Vissage). On considère l'application  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $f(x, y, z) = (x', y', z')$  où

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-2x - y + 2z) + 1 \\ y' = \frac{1}{3}(2x - 2y - z) + 1 \\ z' = \frac{1}{3}(x + 2y + 2z) + 3. \end{cases}$$

1. Justifier que  $f$  est une application affine et donner la matrice  $A$  de la partie linéaire de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Diagonaliser  $A$  sur  $\mathbb{C}$  et en déduire que  $A$  est semblable à une matrice réelle de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

pour un réel  $\theta$  que l'on déterminera.

3. Décrire géométriquement  $A$ .
4. Montrer qu'il existe une droite affine  $\mathcal{D}$  dirigée par l'espace propre  $\ker(A - I_3)$  et un vecteur propre  $\vec{u} \in \ker(A - I_3)$ , tels que  $f$  s'écrive comme la composée de la translation de vecteur  $\vec{u}$  et d'une application affine qui fixe tous les points de  $\mathcal{D}$ .
5. Décrire géométriquement  $f$ .