Feuille de TD n°5 : Réduction des endomorphismes II

Exercice 1 (Racine carrée d'une matrice complexe)**.** Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{C}^4$.

1) Pour $i = 1, 2, 3, 4$, exprimer les vecteurs Je_i dans la base $\mathcal{B}$, puis calculer $J^2 e_i$, $J^3 e_i$ et $J^4 e_i$.

2) Écrire les matrices J^2, J^3, J^4.

3) On suppose qu'il existe une matrice $A \in M_4(\mathbb{C})$ vérifiant $A^2 = J$. Que peut-on dire des valeurs propres de A ? Par conséquent, quel est le polynôme caractéristique de A ?

4) Appliquer le théorème de Cayley-Hamilton à A pour obtenir une contradiction. Qu'en conclut-on ?

Exercice 2. Calculer la décomposition en espaces caractéristiques puis trigonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A l'aide de cette décomposition, calculer A^8.

Exercice 3. Combien y a-t-il de classes de similitude de matrices $A \in M_5(\mathbb{R})$ vérifiant l'identité $A^2 = 3A - 2I_5$? (*Indication :* commencer par montrer qu'une telle matrice est diagonalisable.)

Exercice 4.

1. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice dont le polynôme caractéristique est $(X - \lambda)^2$ pour un certain réel λ. Montrer que A est semblable soit à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, soit à $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.
2. Combien y a-t-il de classes de similitude de matrices de $M_4(\mathbb{R})$ admettant $(X-1)^2(X-2)^2$ pour polynôme caractéristique ?

Exercice 5.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(V)$ un endomorphisme diagonalisable et $E \subset V$ un sous-espace vectoriel stable par u. Montrer que la restriction $u_E : E \to E$ est aussi diagonalisable.
2. Soit u et v deux endomorphismes diagonalisables qui commutent. Montrer que l'on peut les diagonaliser dans une même base. (*indication :* à l'aide de l'exercice 1 de la feuille 3, se ramener au cas où l'un des deux endomorphismes est une homothétie.)