Contrôle Continu du 23 novembre 2015

Exercice 1. Soit $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ donné par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Calculer le déterminant de A.
3. Déterminer les valeurs propres de A, et leurs multiplicités algébriques.
4. La matrice A est-elle trigonalisable ? Justifiez votre réponse.
5. Déterminer les espaces propres de A, leurs dimensions et en donner une base.
6. La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifiez votre réponse.

Exercice 2. Soit $A_n \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice carrée symétrique de taille $n \times n$ avec les coefficients $a_{ij} = ij$. C'est à dire :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 4 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 2(n-1) & \dots & (n-1)^2 & (n-1)n \\ n & 2n & \dots & (n-1)n & n^2 \end{pmatrix}.$$

1. Trouvez une base de $\ker(A_3)$. Quelle est la dimension de $\ker(A_3)$?
2. Généralisez ce résultat pour donner la dimension et une base de $\ker(A_n)$.
3. Sans faire de calculs, donnez une valeur propre λ de A_n de multiplicité géométrique $n-1$ (on suppose $n \geq 2$).
4. Montrez que le vecteur $v = (1, 2, 3, \dots, n)$ est un vecteur propre de A_n. Quelle est la valeur propre associée à v ?
5. La matrice A_n est-elle diagonalisable ? Justifiez votre réponse.
6. Quel est le polynôme caractéristique de A_n ?
   (Donnez-le factorisé, mais vous n'avez pas besoin de faire de calculs.)

Exercice 3. On considère la permutation σ suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 8 & 2 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la décomposition en cycles de supports disjoints et la signature de σ.
2. Soit $A_\sigma \in M_8(\mathbb{R})$ la matrice qui a pour coefficients $a_{ij} = 2$ si $j = \sigma(i)$ et $a_{ij} = 0$ si $j \neq \sigma(i)$. Quel est le déterminant de A_σ ?
3. Quel est le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $\sigma^n = \mathrm{id}$?
4. Calculer l'inverse τ de σ, c'est-à-dire la permutation τ telle que $\tau \circ \sigma = \mathrm{id}$.
5. Déterminer la décomposition en cycles de supports disjoints et la signature de τ.

Exercice 4. Considérez la matrice carrée $A_n \in M_n(\mathbb{R})$ suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire, la matrice $n \times n$ dont les coefficients diagonaux et ceux de la dernière ligne et colonne valent 1, et tous les autres sont nuls.

Soit $P_n(X)$ son polynôme caractéristique.

1. Calculez $P_2(X)$ et $P_3(X)$. Explicitez les calculs.
2. Trouvez une formule reliant $P_n(X)$ et $P_{n-1}(X)$ (pour $n \geq 3$).
3. Montrez que pour $n \geq 2$
$$P_n(X) = (1 - X)^{n-2}(X^2 - 2X - n + 2). \tag{$\Diamond$}$$
(Indication : par récurrence.)
4. Calculez le déterminant de A_n (pour $n \geq 2$).
(Vous pouvez utiliser ($\Diamond$) même si vous n'avez pas répondu à la question précédente.)
5. Quel est le déterminant de la matrice B suivante ?

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$