Contrôle Continu du 23 novembre 2015

Exercice 1. Soit $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ donné par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

   Le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = \det(A - XI_4)$. En développant par rapport à la dernière ligne, puis la troisième, on a

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1-X & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3-X & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X) \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 4 \\ 1 & 1-X & -2 \\ 0 & 0 & 3-X \end{vmatrix} \\ &= (2-X)(3-X) \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 1 & 1-X \end{vmatrix} = (2-X)(3-X)((1-X)^2 - 1) \\ &= (2-X)(3-X)(X^2 - 2X) = X(2-X)^2(3-X). \end{aligned}$$

   Et donc $P_A(X) = X(X-2)^2(X-3)$.

2. Calculer le déterminant de A.

   Le déterminant de A est $P_A(0)$, et donc $\det(A) = 0$.

3. Déterminer les valeurs propres de A, et leurs multiplicités algébriques.

   Les valeurs propres de A sont les racines de $P_A(X)$, et donc sont $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 3$. Leurs multiplicités algébriques sont leurs multiplicités comme racines de $P_A(X)$, c'est-à-dire, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ et $m_3 = 1$ respectivement.

4. La matrice A est-elle trigonalisable ? Justifiez votre réponse.

   Oui, parce que son polynôme caractéristique est scindé.

5. Déterminer les espaces propres de A, leurs dimensions et en donner une base.

   Les espaces propres de A sont $V_{\lambda_1} = \ker(A)$, $V_{\lambda_2} = \ker(A - 2I_4)$, $V_{\lambda_3} = \ker(A - 3I_4)$. Tous les trois V_{λ_1}, V_{λ_2} et V_{λ_3} sont de dimension 1, engendrés respectivement par les vecteurs v_1, v_2 et v_3 suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et } v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

   On calcule la dimension et la base de ces espaces en faisant opérations élémentaires sur les colonnes pour échelonner les matrices A, $A - 2I_4$ et $A - 3I_4$:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3 \leftarrow C_3 - 4C_1]{C_2 \leftarrow C_2 - C_1} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & 2 \\ \hline 1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_4 \leftarrow C_4 - 2C_2} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$$\left(\begin{array}{cccc} -1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3 \leftarrow C_3 + 4C_1]{C_2 \leftarrow C_2 + C_1} \left(\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 11 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$$\left(\begin{array}{cccc} -2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1]{C_2 \leftarrow C_2 + \frac{1}{2}C_1} \left(\begin{array}{cccc} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & \frac{7}{2} & 5 & -1 \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 + 5C_4} \left(\begin{array}{cccc} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & \frac{7}{2} & 0 & -1 \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{array}\right).$$

6. La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifiez votre réponse.

   La matrice A n'est pas diagonalisable, parce-que la multiplicité géométrique de sa valeur propre 2 est plus petite que sa multiplicité algébrique :

$$\dim(\ker(A - 2I_4)) = 1 < 2 = m_2.$$

Exercice 2. Soit $A_n \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice carrée symétrique de taille $n \times n$ avec les coefficients $a_{ij} = ij$. C'est à dire :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 4 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 2(n-1) & \dots & (n-1)^2 & (n-1)n \\ n & 2n & \dots & (n-1)n & n^2 \end{pmatrix}.$$

1. Trouvez une base de $\ker(A_3)$. Quelle est la dimension de $\ker(A_3)$?

La matrice

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

a un noyau de dimension 2 *qui est engendré par les vecteurs* $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. *On les trouve en faisant des opérations élémentaires par les colonnes :*

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1]{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

2. Généralisez ce résultat pour donner la dimension et une base de $\ker(A_n)$.

   On observe que la i-éme colonne est i fois la première. En conséquence, les vecteurs $v_i = e_i - ie_1$, *par* $2 \leq i \leq n-1$, *appartiennent à* $\ker(A_n)$. *C'est une famille libre de taille* $n-1$. *Comme la matrice* A *n'est pas nulle, la dimension de* $\ker(A)$ *est au plus* $n-1$. *Et donc* $\dim(\ker(A_n)) = n-1$ *et* $(v_2, \ldots, v_n)$ *n'est une base.*

3. Sans faire de calculs, donnez une valeur propre λ de A_n de multiplicité géométrique $n-1$ (on suppose $n \geq 2$).

   La dimension du noyau est la multiplicité géométrique de 0, *et donc* $\lambda = 0$ *est une valeur propre de* A_n *de multiplicité* $n-1$.

4. Montrez que le vecteur $v = (1, 2, 3, \ldots, n)$ est un vecteur propre de A_n. Quelle est la valeur propre associée à v ?

   On observe que $A_n \cdot v = (\sum_{i=1}^n i^2)v$, *ce qui montre que* v *est un vecteur propre de* A_n *associé à la valeur propre* $\mu = \sum_{i=1}^n i^2$.

5. La matrice A_n est-elle diagonalisable ? Justifiez votre réponse.

   On a vu que $\lambda = 0$ *et* $\mu = \sum_{i=1}^n i^2$ *sont valeurs propres de* A_n *de multiplicités géométriques* $n-1$ *et* 1, *respectivement. En conséquence, la famille* $(v, v_2, \ldots, v_n)$, *qui est libre, est une base formée de vecteurs propres et donc* A *est bien diagonalisable.*

6. Quel est le polynôme caractéristique de A_n ?
   (Donnez-le factorisé, mais vous n'avez pas besoin de faire de calculs.)

   Le polynôme caractéristique d'une matrice $n \times n$ *diagonalisable est celui qui a les valeurs propres comme racines (avec leur multiplicité) et coefficient dominant* $(-1)^n$, *et donc le polynôme caractéristique de* A_n *est*

$$P_{A_n}(X) = (-1)^n X^{n-1}(X - \sum_{i=1}^{n} i^2).$$

Exercice 3. On considère la permutation σ suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 8 & 2 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la décomposition en cycles de supports disjoints et la signature de σ.

   La décomposition de σ est $\sigma = (1348)(25)(67)$, et donc

   $$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon((1348)) \cdot \varepsilon((25)) \cdot \varepsilon((67)) = (-1)^3(-1)^1(-1)^1 = -1.$$

2. Soit $A_\sigma \in M_8(\mathbb{R})$ la matrice qui a pour coefficients $a_{ij} = 2$ si $j = \sigma(i)$ et $a_{ij} = 0$ si $j \neq \sigma(i)$. Quel est le déterminant de A_σ ?

   Dans la somme $\det(A_\sigma) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_8} \varepsilon(\tau) a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \dots a_{8\tau(8)}$ il y a un seul terme non-nul : celui qui correspond à la permutation σ (car il y a un seul élément non-nul dans chaque ligne). Et donc,

   $$\det(A_\sigma) = \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{8\sigma(8)} = -2^8.$$

3. Quel est le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $\sigma^n = \mathrm{id}$?

   On observe que $\sigma^n = \mathrm{id}$ si et seulement si n est un multiple de 4, et donc le plus petit est $n = 4$. En effet, comme les cycles de supports disjoints commutent, on a

   $$\sigma^n = (1348)^n(25)^n(67)^n$$

   et on vérifie facilement que la puissance n-ième d'un cycle de longueur k est l'identité si et seulement si n est un multiple de k. Notre résultat suit du fait que le ppcm de 4, 2 et 2 est 4. (Alternativement, on peut tout simplement calculer les permutations σ, σ^2, σ^3 et σ^4 et vérifier que $\sigma, \sigma^2, \sigma^3 \neq \mathrm{id}$ et $\sigma^4 = \mathrm{id}$.)

4. Calculer l'inverse τ de σ, c'est-à-dire la permutation τ telle que $\tau \circ \sigma = \mathrm{id}$.

   L'inverse de σ es la permutation τ qu'on obtient en échangeant les deux lignes de ça représentation, et donc

   $$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 1 & 3 & 2 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

   (Du résultat de la question précédente, on obtient que $\tau = \sigma^3$.)

5. Déterminer la décomposition en cycles de supports disjoints et la signature de τ.

   La permutation inverse s'obtient en inversant l'ordre des éléments dans les cycles de support disjoint de sa décomposition. C'est-à-dire,

   $$\tau = (8431)(52)(76).$$

   Les signature d'une permutation et de son inverse coïncident, et donc $\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\sigma) = -1$.

Exercice 4. Considérez la matrice carrée $A_n \in M_n(\mathbb{R})$ suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire, la matrice $n \times n$ dont les coefficients diagonaux et ceux de la dernière ligne et colonne valent 1, et tous les autres sont nuls.

Soit $P_n(X)$ son polynôme caractéristique.

1. Calculez $P_2(X)$ et $P_3(X)$. Explicitez les calculs.

   On calcule

$$P_2(X) = \det(A_2 - XI_2) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 1 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^2 - 1 = X(X-2).$$

$$\begin{aligned} P_3(X) = \det(A_3 - XI_3) &= \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ 0 & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)\begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 1 & 1-X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1-X & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1-X)X(X-2) - (1-X) = -(X-1)(X^2-2X-1) \\ &= -(X-1)(X-1-\sqrt{2})(X-1+\sqrt{2}). \end{aligned}$$

2. Trouvez une formule reliant $P_n(X)$ et $P_{n-1}(X)$ (pour $n \geq 3$).

   En développant le déterminant par rapport à la première colonne, et puis par rapport à la première ligne :

$$\begin{aligned} P_n(X) = \det(A_n - XI_n) &= \begin{vmatrix} 1-X & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1-X & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)\begin{vmatrix} 1-X & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1-X & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1-X \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1-X & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1-X & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1-X)\begin{vmatrix} 1-X & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1-X & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1-X \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}(-1)^n\begin{vmatrix} 1-X & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)P_{n-1}(X) - (1-X)^{n-2}. \end{aligned}$$

   Et donc $P_n(X) = (1-X)P_{n-1}(X) - (1-X)^{n-2}$.

3. Montrez que pour $n \geq 2$

$$P_n(X) = (1-X)^{n-2}(X^2 - 2X - n + 2). \qquad (\Diamond)$$

   (Indication : par récurrence.)

   On le montre par récurrence. On a déjà fait l'initialisation $n = 2$ dans la question 1. On montre maintenant l'hérédité. C'est-à-dire, on suppose $P_n(X) = (1-X)^{n-2}(X^2 - 2X - n + 2)$ pour montrer $P_{n+1}(X) = (1-X)^{n-1}(X^2 - 2X - n + 1)$. En effet, du résultat de la question précédente

$$\begin{aligned} P_{n+1}(X) &= (1-X)P_n(X) - (1-X)^{n-1} \\ &= (1-X)((1-X)^{n-2}(X^2 - 2X - n + 2)) - (1-X)^{n-1} \\ &= (1-X)^{n-1}((X^2 - 2X - n + 2) - 1) = (1-X)^{n-1}(X^2 - 2X - n + 1). \end{aligned}$$

4. Calculez le déterminant de A_n (pour $n \geq 2$).
   (Vous pouvez utiliser $(\Diamond)$ même si vous n'avez pas répondu à la question précédente.)

On obtient le déterminant en évaluant le polynôme caractéristique à 0, et donc de ($\Diamond$)

$$\det(A_n) = P_n(0) = (1)^{n-2}(-n+2) = 2-n.$$

5. Quel est le déterminant de la matrice B suivante ?

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants des blocs diagonaux. En conséquence,

$$\det(B) = \det(A_4)^2 = (-2)^2 = 4.$$