Contrôle Continu du 19 octobre 2015

Exercice 1. Soit $\mathcal{P}_\lambda$ le sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ défini par les équations

$$\mathcal{P}_\lambda : \begin{cases} x + z = -1, \\ x + y - \lambda z = 1; \end{cases}$$

et soit P_λ son espace vectoriel directeur.

1. Trouvez un système d'équations qui décrit P_λ.
2. Donnez une base de P_λ.
3. Trouvez un système d'équations qui décrit l'espace affine parallèle à $\mathcal{P}_\lambda$ passant par le point $M = (2, 1, 1)$.

Soit $\mathcal{Q}_\lambda$ le plan affine défini par l'équation

$$\mathcal{Q}_\lambda : \ \lambda x + \lambda y - z = 1,$$

et soit Q_λ son espace vectoriel directeur.

4. Pour quelles valeurs de λ, P_λ est-il inclus dans Q_λ ?
5. Montrez que, pour $\lambda \neq 1, -1$, $\mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{Q}_\lambda$ est un sous-espace affine non-vide de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ?
6. Déterminer l'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{Q}_1$.
7. Déterminer l'intersection de $\mathcal{P}_{-1}$ et $\mathcal{Q}_{-1}$.

Exercice 2. Soient A, B, C, D quatre points du plan affine tels que $\mathcal{B} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire, A, B et D ne sont pas alignés).

1. Montrez que si $\overrightarrow{DC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC} = \mu \overrightarrow{AD}$ pour certains $\lambda, \mu \neq 0$, alors $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ (c'est-à-dire, $\lambda = \mu = 1$). Dans ce cas-là on dit que A, B, C, D forment un parallélogramme.

   (*Indication :* Utilisez la relation de Chasles pour exprimer $\overrightarrow{AC}$ de deux façons différentes et utilisez que $\mathcal{B}$ est une base.)
2. Montrez que si $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ alors A, B, C, D forment un parallélogramme.

   (*Indication :* Utilisez la relation de Chasles pour exprimer $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$.)
3. Quelles sont les coordonnées de A, B et D dans le repère $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$?
4. Soient $M_{A,C}$ et $M_{B,D}$ les points au milieu des segments $[A, C]$ et $[B, D]$, respectivement. Si les coordonnées de C dans $\mathcal{R}$ sont (X, Y). Quelles sont les coordonnées de $M_{A,C}$ et de $M_{B,D}$ dans $\mathcal{R}$?
5. Si A, B, C, D forment un parallélogramme, quelles sont les coordonnées de C dans $\mathcal{R}$?
6. Montrez que si A, B, C, D forment un parallélogramme alors $M_{A,C} = M_{B,D}$.
7. Si les coordonnées de C dans $\mathcal{R}$ sont (X, Y). Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BC}$ dans $\mathcal{B}$?
8. Montrez que si $M_{A,C} = M_{B,D}$ alors A, B, C, D forment un parallélogramme.

Soient P, Q, R, S quatre points quelconques du plan affine.

9. Montrer que les points $\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q$, $\frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}R$, $\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}S$ et $\frac{1}{2}S + \frac{1}{2}P$ forment un parallélogramme.

Exercice 3. Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré $\leq n$ et soit $\mathcal{B}$ la base $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour $a \in \mathbb{R}$ fixé, considérez l'application $\phi_a : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ qui a tout polynôme $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme $P(X-a)$.

1. Montrez que ϕ_a est une application linéaire.
2. Pour $n = 4$, écrivez la matrice $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi_a)$ de ϕ_a dans la base $\mathcal{B}$.
3. Montrez que ϕ_a est une bijection.
4. Montrez que $\mathcal{C} = (1, X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 4. Considerez l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$.

1. Soient $v, w \in \mathbb{R}^2$, et soit $\phi_{v,w} : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\phi_{v,w}(M) = {}^t vMw$. C'est-à-dire, si $v = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$, $w = \left(\begin{smallmatrix} z \\ t \end{smallmatrix}\right)$ et $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, alors
$$\phi_{v,w}(M) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}.$$
Montrez que $\phi_{v,w}$ est une forme linéaire de $M_2(\mathbb{R})$ pour tous vecteurs $v, w \in \mathbb{R}^2$.
2. Soit $(e_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), e_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et
$$\mathcal{B} = \left(E_{11} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), E_{12} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), E_{21} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), E_{22} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$$
la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$. Montrez que sa base duale est $\mathcal{B}^* = (\phi_{e_1,e_1}, \phi_{e_1,e_2}, \phi_{e_2,e_1}, \phi_{e_2,e_2})$.
3. Donnez les coordonnées des matrices $M_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $M_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $M_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, et $M_4 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ par rapport à $\mathcal{B}$.
4. Montrez que $\mathcal{C} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ est une base de $M_2(\mathbb{R})$.
5. Trouvez la base duale de $\mathcal{C}$.
6. Pour $v \in \mathbb{R}^2$, soit $V_v = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \ : \exists \mu \text{ tel que } Av = \mu v\}$. Montrez que V_v est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ pour tout $v \in \mathbb{R}^2$.
7. Quelle est la dimension de $V_{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}$?
8. Et sa codimension ?
9. Donnez une base de $V_{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}$.
10. Donnez une base $V_{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}^{\perp}$.