Contrôle Continu du 19 octobre 2015

Exercice 1. Soit $\mathcal{P}_\lambda$ le sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ défini par les équations

$$\mathcal{P}_\lambda : \begin{cases} x + z = -1, \\ x + y - \lambda z = 1; \end{cases}$$

et soit P_λ son espace vectoriel directeur.

1. Trouvez un système d'équations qui décrit P_λ.

   L'ensemble des solutions d'un système d'equations linéaires est un espace affine, dont la direction est l'espace des solutions du système homogène. Et donc P_λ est l'ensemble de solutions du système
   $$\begin{cases} x + z = 0, \\ x + y - \lambda z = 0. \end{cases}$$

2. Donnez une base de P_λ.

   P_λ est le noyau de l'application linéaire $\phi(x, y, z) = (x + z, z + y - \lambda z)$. On n'obtient une base par "réduction des colonnes" de la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{smallmatrix}\right)$. P_λ est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1 engendré par le vecteur
   $$v_\lambda = \begin{pmatrix} -1 \\ \lambda+1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Trouvez un système d'équations qui décrit l'espace affine parallèle à $\mathcal{P}_\lambda$ passant par le point $M = (2, 1, 1)$.

   Les sous-espaces affines parallèles à $\mathcal{P}_\lambda$ sont ceux dont la direction est P_λ. Les seconds membres des équations qui décrivent un sous-espace affine se trouvent en évaluant les equations en un point quelconque du sous-espace. Dans ce cas-là, on évalue sur $(2, 1, 1)$ les formes linéaires qui donnent les équations. On obtient,
   $$\begin{cases} x + z = 3, \\ x + y - \lambda z = 3 - \lambda. \end{cases}$$

Soit $\mathcal{Q}_\lambda$ le plan affine défini par l'équation

$$\mathcal{Q}_\lambda : \ \lambda x + \lambda y - z = 1,$$

et soit Q_λ son espace vectoriel directeur.

4. Pour quelles valeurs de λ, P_λ est-il inclus dans Q_λ ?

   P_λ est inclus dans Q_λ quand tous les vecteurs de sa base appartiennent à Q_λ. C'est à dire, si v_λ vérifie l'équation qui décrit Q_λ. Et donc si
   $$0 = \lambda(-1) + \lambda(\lambda + 1) - 1 = \lambda^2 - 1.$$
   Les solutions de cette équation sont $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$.

   Alternativement, on peut arriver au même résultat si on cherche pour quelles valeurs de λ l'équation qui décrit Q_λ est une combinaison linéaire de celles qui définissent P_λ. On peut faire réduction des lignes ou colonnes pour voir pour quelles valeurs de λ
   $$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \\ \lambda & \lambda & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Montrez que, pour $\lambda \neq 1, -1$, $\mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{Q}_\lambda$ est un sous-espace affine non-vide de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ?

   Le système d'équations qui décrit l'intersection $\mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{Q}_\lambda$ est le rassemblement des équations qui décrivent $\mathcal{P}_\lambda$ et $\mathcal{Q}_\lambda$. C'est à dire

$$\mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{Q}_\lambda : \begin{cases} x + z = -1, \\ x + y - \lambda z = 1, \\ \lambda x + \lambda y - z = 1. \end{cases}$$

   L'intersection des directions s'obtient en rassemblant les équations qui décrivent P_λ et Q_λ. C'est à dire,

$$P_\lambda \cap Q_\lambda : \begin{cases} x + z = 0, \\ x + y - \lambda z = 0, \\ \lambda x + \lambda y - z = 0. \end{cases}$$

   Si $\lambda \neq \pm 1$,

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \\ \lambda & \lambda & -1 \end{pmatrix} = 3.$$

   Cela implique que soit $\mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{Q}_\lambda$ est vide, soit c'est un sous-espace affine de co-dimension 3, et donc de dimension 0. C'est à dire, un point. Comme

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ \lambda & \lambda & -1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \\ \lambda & \lambda & -1 \end{pmatrix},$$

   $\mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{Q}_\lambda$ est non-vide, et donc un point.

6. Déterminer l'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{Q}_1$.

   Quand $\lambda = 1$, on obtient que l'équation qui décrit $\mathcal{Q}_1$ est une des équations qui décrivent $\mathcal{P}_1$. Et donc $\mathcal{P}_1$ est inclus dans $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{Q}_1 = \mathcal{P}_1$.

7. Déterminer l'intersection de $\mathcal{P}_{-1}$ et $\mathcal{Q}_{-1}$.

   Comme

$$3 = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \neq \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2,$$

   le système n'a pas de solutions et $\mathcal{P}_{-1} \cap \mathcal{Q}_{-1} = \emptyset$.

Exercice 2. Soient A, B, C, D quatre points du plan affine tels que $\mathcal{B} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire, A, B et D ne sont pas alignés).

1. Montrez que si $\overrightarrow{DC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC} = \mu \overrightarrow{AD}$ pour certains $\lambda, \mu \neq 0$, alors $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ (c'est-à-dire, $\lambda = \mu = 1$). Dans ce cas-là on dit que A, B, C, D forment un parallélogramme.

   (*Indication :* Utilisez la relation de Chasles pour exprimer $\overrightarrow{AC}$ de deux façons différentes et utilisez que $\mathcal{B}$ est une base.)

   D'un coté,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD};$$

   de l'autre

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \lambda \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

   Comme chaque vecteur s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire des élements d'une base, on obtient que $\lambda = \mu = 1$.

2. Montrez que si $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ alors A, B, C, D forment un parallélogramme.
(*Indication :* Utilisez la relation de Chasles pour exprimer $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$.)

On observe que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

3. Quelles sont les coordonnées de A, B et D dans le repère $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$?

Les coordonnées de A, B et D dans $\mathcal{R}$ sont $A = \binom{0}{0}$, $B = \binom{1}{0}$ et $D = \binom{0}{1}$, car ce sont les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

4. Soient $M_{A,C}$ et $M_{B,D}$ les points au milieu des segments $[A, C]$ et $[B, D]$, respectivement. Si les coordonnées de C dans $\mathcal{R}$ sont (X, Y). Quelles sont les coordonnées de $M_{A,C}$ et de $M_{B,D}$ dans $\mathcal{R}$?

Comme $M_{A,C} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C$ et $M_{B,D} = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}D$, ses coordonnées sont

$$\begin{aligned}M_{A,C} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{X}{2}\\\frac{Y}{2}\end{pmatrix},\\ M_{B,D} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

5. Si A, B, C, D forment un parallélogramme, quelles sont les coordonnées de C dans $\mathcal{R}$?

Si A, B, C, D forment un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, et donc les coordonées de C dans $\mathcal{R}$ sont $\binom{1}{1}$.

6. Montrez que si A, B, C, D forment un parallélogramme alors $M_{A,C} = M_{B,D}$.

Si A, B, C, D forment un parallélogramme, les coordonnées de C sont $\binom{1}{1}$, et donc, ceux de $M_{A,C}$ sont $\binom{1/2}{1/2}$ (de la question 5), qui coïncident avec ceux de $M_{B,D}$. Et donc $M_{A,C} = M_{B,D}$.

7. Si les coordonnées de C dans $\mathcal{R}$ sont (X, Y). Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BC}$ dans $\mathcal{B}$?

Les coordonnées sont

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\\ \overrightarrow{AD} &= \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\\ \overrightarrow{DC} &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}X\\Y-1\end{pmatrix},\\ \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}X-1\\Y\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

8. Montrez que si $M_{A,C} = M_{B,D}$ alors A, B, C, D forment un parallélogramme.

Si $M_{A,C} = M_{B,D}$, de la question 5 on voit que les coordonnées de C sont $(1, 1)$, et donc par la question précédente $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

Soient P, Q, R, S quatre points quelconques du plan affine.

9. Montrer que les points $\frac{1}{2}P+\frac{1}{2}Q$, $\frac{1}{2}Q+\frac{1}{2}R$, $\frac{1}{2}R+\frac{1}{2}S$ et $\frac{1}{2}S+\frac{1}{2}P$ forment un parallélogramme.

On note

$$A = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q, \qquad B = \frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}R, \qquad C = \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}S, \qquad D = \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}P.$$

Alors $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$ *car, de la définition de barycentre, on a que pour tout* O

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (\frac{1}{2}\overrightarrow{OQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OR}) - (\frac{1}{2}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OQ}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OR} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}.$$

De manière analogue, on vérifie que $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QS}$, $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$ *et* $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QS}$. *Et donc* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ *et* $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, *d'où* A, B, C, D *forment un parallélogramme.*

Alternativement, si on suppose que $\overrightarrow{PR}$ *et* $\overrightarrow{QS}$ *ne sont pas parallèles, alors* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AD}$ *forment une base et on peut utiliser la question précédente. On calcule les points au milieu des diagonales* $[A, C]$ *et* $[B, D]$. *On voit que*

$$\begin{aligned} M_{A,C} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}S\right) &= \frac{1}{4}P + \frac{1}{4}Q + \frac{1}{4}R + \frac{1}{4}S \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}R\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}S + \frac{1}{2}P\right) = M_{B,D}, \end{aligned}$$

et donc A, B, C, D *forment un parallélogramme.*

Exercice 3. Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré $\leq n$ et soit $\mathcal{B}$ la base $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour $a \in \mathbb{R}$ fixé, considérez l'application $\phi_a : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ qui a tout polynôme $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme $P(X-a)$.

1. Montrez que ϕ_a est une application linéaire.

Il faut voir que pour tous polynômes $P(X), Q(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ *et tout* $t \in \mathbb{R}$ *on a*

$$\phi(P(X) + tQ(X)) = \phi(P(X)) + t\phi(Q(X)).$$

Comme $\phi(P(X)+tQ(X)) = P(X-a)+tQ(X-a) = \phi(P(X))+t\phi(Q(X))$, *l'application est linéaire.*

2. Pour $n = 4$, écrivez la matrice $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi_a)$ de ϕ_a dans la base $\mathcal{B}$.

C'est la matrice qui contient les coefficients des polynômes $\phi_a(1) = 1$, $\phi_a(X) = (X-a)$, $\phi_a(X^2) = (X-a)^2$, $\phi_a(X^3) = (X-a)^3$ *et* $\phi_a(X^4) = (X-a)^4$ *comme colonnes :*

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi_a) = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 & a^4 \\ 0 & 1 & -2a & 3a^2 & -4a^3 \\ 0 & 0 & 1 & -3a & 6a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Montrez que ϕ_a est une bijection.

Les colonnes de la matrice $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi_a)$ *représentent les coefficients des polynômes* $\phi_a(X^i) = (X-a)^i$. *Le i-ème de ces polynômes a degré i, et donc la matrice* $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi_a)$ *est triangulaire supérieure. En particulier, elle est déjà échelonnée et de rang* $n+1$. *Elle est donc inversible. Cela implique que* ϕ_a *est une bijection dont l'inverse est l'application donnée par la matrice* $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi_a)^{-1}$.

4. Montrez que $\mathcal{C} = (1, X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

   La matrice de passage $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ coïncide avec $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi_a)$, et en particulier, elle est échelonnée. D'ici on a que les vecteurs de $\mathcal{C}$ sont linéairement indépendants. Et donc $\mathcal{C}$ est une base car toute famille libre de $n+1$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension $n+1$ l'est.

Exercice 4. Considerez l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$.

1. Soient $v, w \in \mathbb{R}^2$, et soit $\phi_{v,w} : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\phi_{v,w}(M) = {}^t vMw$. C'est-à-dire, si $v = \binom{x}{y}$, $w = \binom{z}{t}$ et $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, alors

$$\phi_{v,w}(M) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}.$$

   Montrez que $\phi_{v,w}$ est une forme linéaire de $M_2(\mathbb{R})$ pour tous vecteurs $v, w \in \mathbb{R}^2$.

   Comme $\phi_{v,w} : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une application sur $\mathbb{R}$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, il suffit de vérifier que l'application est linéaire. C'est à dire, que

$$\phi_{v,w}(M + tN) = \phi_{v,w}(M) + \lambda\phi_{v,w}(N)$$

   pour tous $M, N \in M_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. C'est une conséquence de la distributivité du produit matriciel :

$$\begin{aligned}\phi_{v,w}(M + \lambda N) &= {}^t v(M + \lambda N)w = {}^t v(Mw + \lambda Nw) \\ &= {}^t vMw + {}^t v(\lambda Nw) = {}^t vMw + \lambda {}^t vNw = \phi_{v,w}(M) + \lambda\phi_{v,w}(N)\end{aligned}$$

2. Soit $(e_1 = \binom{1}{0}, e_2 = \binom{0}{1})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et

$$\mathcal{B} = (E_{11} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), E_{12} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), E_{21} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), E_{22} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right))$$

   la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$. Montrez que sa base duale est $\mathcal{B}^* = (\phi_{e_1,e_1}, \phi_{e_1,e_2}, \phi_{e_2,e_1}, \phi_{e_2,e_2})$.

   Il suffit de vérifier que

$$\begin{array}{llll} \phi_{e_1,e_1}(E_{11}) = 1, & \phi_{e_1,e_1}(E_{12}) = 0, & \phi_{e_1,e_1}(E_{21}) = 0, & \phi_{e_1,e_1}(E_{22}) = 0, \\ \phi_{e_1,e_2}(E_{11}) = 0, & \phi_{e_1,e_2}(E_{12}) = 1, & \phi_{e_1,e_2}(E_{21}) = 0, & \phi_{e_1,e_2}(E_{22}) = 0, \\ \phi_{e_2,e_1}(E_{11}) = 0, & \phi_{e_2,e_1}(E_{12}) = 0, & \phi_{e_2,e_1}(E_{21}) = 1, & \phi_{e_2,e_1}(E_{22}) = 0, \\ \phi_{e_2,e_2}(E_{11}) = 0, & \phi_{e_2,e_2}(E_{12}) = 0, & \phi_{e_2,e_2}(E_{21}) = 0, & \phi_{e_2,e_2}(E_{22}) = 1. \end{array}$$

3. Donnez les coordonnées des matrices $M_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $M_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $M_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, et $M_4 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ par rapport à $\mathcal{B}$.

   Comme

$$\begin{array}{ll} M_1 = E_{11} + E_{12} & M_2 = E_{11} - E_{12}, \\ M_3 = E_{11} + E_{12} + E_{21} + E_{22}, & M_4 = E_{11} + E_{12} + E_{21} - E_{22}; \end{array}$$

   ces coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad M_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4. Montrez que $\mathcal{C} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ est une base de $M_2(\mathbb{R})$.

   Il suffit de voir que la matrice M composée des coefficients calculés dans la question précédente,
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$
   a rang 4, ce qu'on peut faire avec des opérations élémentaires sur les colonnes.

5. Trouvez la base duale de $\mathcal{C}$.

   La matrice M est la matrice de passage $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$. Comme
$$Mat_{\mathcal{B}^*}(\mathcal{C}^*) = {}^t Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})^{-1},$$
   les coefficients des vecteurs de $\mathcal{C}^*$ dans $\mathcal{B}^*$ sont les entrées des colonnes ${}^t Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})^{-1}$. On calcule M^{-1} avec des opérations élémentaires sur les colonnes, et on obtient
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$
   Donc $M_1^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $M_2^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $M_3^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ *et* $M_4^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

6. Pour $v \in \mathbb{R}^2$, soit $V_v = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \ : \exists \mu \text{ tel que } Av = \mu v\}$. Montrez que V_v est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ pour tout $v \in \mathbb{R}^2$.

   Il suffit de montrer que si $M, N \in V_v$, et $t \in \mathbb{R}$, alors $M + tN \in V_v$. Mais si $M, N \in V_v$, alors ils existent $\mu_M, \mu_N \in \mathbb{R}$ tels que $Mv = \mu_M v$ et $Nv = \mu_N v$. Alors
$$(M + tN) = Mv + tNv = \mu_M v + t\mu_N v = (\mu_M + t\mu_N)v,$$
   et donc $M + tN \in V_v$.

7. Quelle est la dimension de $V_{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}$?

   Une matrice $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ est incluse dans $V_{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}$ s'il existe un $\mu \in \mathbb{R}$ tel que
$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a+b \\ c+d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \mu \\ \mu \end{smallmatrix}\right).$$
   C'est a dire, si
$$a + b = c + d.$$
   Le sous-espace $V_{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}$ est défini par une seule équation (qui est non-triviale), et donc $\dim(V_{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}) = \dim(M_2(\mathbb{R})) - 1 = 3$.

8. Et sa codimension ?

   Sa codimension est 1 car $\operatorname{codim}(V_{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}) = \dim(M_2(\mathbb{R})) - \dim(V_{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)})$.

9. Donnez une base de $V_{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}$.

   On cherche une base du noyau de la forme linéaire $E_{11}^* + E_{12}^* - E_{21}^* - E_{22}^*$. C'est a dire, une base du noyau de la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. On trouve, par exemple avec des opérations élémentaires sur les colonnes, que les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants et appartiennent au noyau. Ils sont, donc, une base. Ils correspondent aux matrices $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

10. Donnez une base ${V_{\binom{1}{1}}}^{\perp}$.

Comme ${V_{\binom{1}{1}}}^{\perp}$ *est de dimension* 1*, il suffit d'en trouver un élément non-nul. On peut prendre la forme linéaire qui donnait l'équation originale. C'est à dire* $E_{11}^* + E_{12}^* - E_{21}^* - E_{22}^*$.