Contrôle Continu du 20 octobre 2015

Exercice 1. Soient $\mathcal{E}$ un espace affine réel de dimension 3 et $\mathcal{R} = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ un repère cartésien. On considère l'application affine $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ définie par

$$\begin{aligned} f(O + x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}) = O &+ (2x_1 + 3x_3 + 2)\vec{e_1} \\ &+ (x_1 + x_2 + 2x_3 - 1)\vec{e_2} \\ &+ (x_2 - x_3 + 1)\vec{e_3} \end{aligned}$$

Soit $X = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$ le vecteur des coordonnées du point $O + x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}$ dans le repère cartésien $\mathcal{R}$.

1. Déterminer $A \in M_3(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^3$ tels que, pour tout $X \in \mathbb{R}^3$,
$$f(O + x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}) = AX + B.$$
2. Trouver un point $O' \in \mathcal{E}$ tel que $f(O') = O'$.
(*Indication* : on cherchera à résoudre l'équation $f(O + x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}) = O + x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}$).

On suppose qu'un point $M = O + x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}$ admet pour vecteur coordonnées $X' = \left(\begin{smallmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{smallmatrix}\right)$ dans le repère cartésien $\mathcal{R}'$ (autrement dit, $M = O' + x'_1\vec{e_1} + x'_2\vec{e_2} + x'_3\vec{e_3}$).

3. Expliciter x'_1, x'_2, x'_3 en fonction de x_1, x_2, x_3.
4. Déterminer $A' \in M_3(\mathbb{R})$ et $B' \in \mathbb{R}^3$ tels que, pour tout $X' \in \mathbb{R}^3$,
$$f(O' + x'_1\vec{e_1} + x'_2\vec{e_2} + x'_3\vec{e_3}) = A'X' + B'.$$

Corrigé.

1. On tire directement de la formule définissant f les expressions de A et B :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
2. Le vecteur coordonnées de O' doit être solution du système linéaire $AX + B = X$ On doit donc résoudre le système
$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}.$$
On obtient pour unique solution le point $\left(\begin{smallmatrix} 7 \\ -7 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$.
3. D'après la formule de changement de repère on doit avoir $X' = X - O'$, et donc $x'_1 = x_1 - 7$, $x'_2 = x_2 + 7$ et $x'_3 = x_3 + 3$.
4. Le changement de repère opéré ne modifie que le point origine et non la base. On sait donc que la matrice A' (qui représente la partie linéaire de f dans la nouvelle base) doit être la même que la matrice A (qui représente la partie linéaire de f dans l'ancienne base). Par ailleurs, le point O' (qui correspond à $X' = 0$) est envoyé sur lui-même, donc $B' = \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ -7 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$, les coordonnées de O' dans $\mathcal{R}$.

Exercice 2. Soient E un espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace vectoriel de E. On considère l'*orthogonal* $F^\perp$ de F, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel $F^\perp$ de E défini par
$$F^\perp = \{\phi \in E^* : \phi(v) = 0 \text{ pour tout } v \in F\}.$$

1. Enoncer une formule du cours exprimant la dimension de $F^\perp$ en fonction des dimensions de E et F.

On considére l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, F_t le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs
$$v_1(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2(t) := \begin{pmatrix} 2 \\ 2t \\ t-2 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer la dimension de F_t en fonction de $t \in \mathbb{R}$.
3. En déduire la dimension de $F_t^\perp$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
4. Donner une base de $F_t^\perp$ pour $t \neq 2$.
5. Donner une base de $F_2^\perp$.

Corrigé. 1. D'après le cours, la dimension de $F^\perp$ est égale à la codimension de F, d'où :

$$\dim F^\perp = n - \dim F.$$

2. Quel que soit $t \in \mathbb{R}$, $\dim F_t \geq 1$ car $v_1 \neq 0$ et $\dim F_t \leq 2$ car il est engendré par deux éléments. La dimension de F_t est 2 sauf si les deux vecteurs sont colinéaires : $v_2(t) = \lambda v_1(t)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. De la première coordonnée, on tire $\lambda = 2$ et donc $v_1(t)$ et $v_2(t)$ sont colinéaires si et seulement si $2t = 4$ et $t - 2$, c'est-à-dire $t = 2$. En conclusion,

$$\dim F_t = \begin{cases} 2 & \text{si } t \neq 2 \\ 1 & \text{si } t = 2 \end{cases}.$$

3. Des questions 1 et 2 on déduit immédiatement :

$$\dim F_t^\perp = \begin{cases} 1 & \text{si } t \neq 2 \\ 2 & \text{si } t = 2 \end{cases}.$$

4. Pour $t \neq 2$, la dimension est 1, il suffit donc de trouver un élément non nul de $F_t^\perp$. Soit ℓ une forme linéaire représenté par la matrice $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Pour que ℓ appartienne à $F_t^\perp$, il faut (et il suffit) que $\ell(v_1(t)) = \ell(v_2(t)) = 0$, ce qui se traduit par le système

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 & = 0 \\ 2a_1 + 2ta_2 + (t-2)a_3 & = 0 \end{cases}.$$

Par exemple $a_1 = -2,\ a_2 = 1,\ a_3 = -2$ est solution de ce système (et ce, quel que soit $t \neq 2$). Donc la forme linéaire $\ell : x \mapsto -2x_1 + x_2 - 2x_3$ engendre $F_t^\perp$.

5. Pour $t = 2$, on cherche deux formes linéaires ℓ_1, ℓ_2 indépendantes et vérifiant $\ell_1(v_1) = \ell_2(v_1) = 0$. On voit que $\ell_1(x) = -2x_1 + x_2$ et $\ell_2(x) = x_3$ conviennent.

Exercice 3. On considère l'espace affine $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$. Si P, Q sont deux points *distincts* de $\mathcal{E}$ on désigne par (PQ) l'unique droite passant par ces deux points. Soient O, A, B trois points de $\mathcal{E}$ tel que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire, les points O, A, B ne sont pas alignés).
Soient $A' \in (OA)$ et $B' \in (OB)$ deux points, $A' \neq O$ et $B' \neq O$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ les uniques nombres réels tels que

$$\overrightarrow{OA'} = \alpha\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OB'} = \beta\overrightarrow{OB}.$$

1. Soit $h\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'application définie pour tout point $P \in \mathcal{E}$ par $h(P) = O + \alpha\overrightarrow{OP}$. Montrer que h est une application affine et déterminer sa partie linéaire.

Le but de l'exercice est de montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
(a) $\alpha = \beta$.
(b) $h(B) = B'$.
(c) les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles.

À l'école l'équivalence entre (a) et (c) est usuellement appellée « Théorème de Thalès ». Pour démontrer l'équivalence entre ces trois assertions, on va montrer les implications (a) $\Rightarrow$ (b), (b) $\Rightarrow$ (c) et (c) $\Rightarrow$ (a) :

2. On commence en supposant $\alpha = \beta$. Montrer alors l'égalité $h(B) = B'$.
3. On ne suppose plus $\alpha = \beta$, mais on suppose $h(B) = B'$. Calculer $\vec{h}(\overrightarrow{AB})$ et en déduire que les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles.

Dorénavant on ne suppose ni $\alpha = \beta$, ni $h(B) = B'$, mais on suppose que les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles. Il existe alors un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{AB}.$$

4. Montrer $\overrightarrow{OB'} = (\alpha - \lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$.
   (*Indication* : on commencera on écrivant $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B'}$...)
5. Utilisant la définition de β en déduire $(\alpha - \lambda)\overrightarrow{OA} + (\lambda - \beta)\overrightarrow{OB} = 0$.
6. Conclure $\lambda = \alpha = \beta$.
   (*Indication* : On utilisera que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ forment une base.)

Corrigé. 1. On note E l'espace directeur de $\mathcal{E}$, et on considère l'application

$$\phi : E \to E$$
$$\phi(\overrightarrow{OP}) = \alpha\overrightarrow{OP}.$$

L'application ϕ est linéaire sur l'espace vectoriel réel E car c'est la multiplication par le nombre réel α (qui est toujours linéaire car $\alpha(\vec{v} + \lambda\vec{w}) = \alpha\vec{v} + \lambda\alpha\vec{w}$ pour tous $\vec{v}, \vec{w} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$). De plus, $\overrightarrow{h(O)h(P)} = \overrightarrow{O(O + \alpha\overrightarrow{OP})} = \alpha\overrightarrow{OP}$. Donc ϕ est bien l'application linéaire associée à h, et h est affine.

2. Supposons que $\alpha = \beta$. Par définition de h on a :

$$h(B) = O + \alpha\overrightarrow{OB},$$

et donc

$$h(B) = O + \beta\overrightarrow{OB} = O + \overrightarrow{OB'} = B'.$$

3. On suppose que $h(B) = B'$. Alors,

$$\vec{h}(\overrightarrow{AB}) = \vec{h}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) = -\vec{h}(\overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{h(O)h(B)} = -\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{A'B'}.$$

D'un autre côté, par définition de h, on sait que $\vec{h}(\overrightarrow{AB}) = \alpha\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont proportionnels, et donc les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles.

4. On a supposé qu'il existe un nombre réel λ tel que $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{AB}$. On obtient,

$$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B'} = \alpha\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AO} + \lambda\overrightarrow{OB} = (\alpha - \lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}.$$

5. Par définition de β on a, $\overrightarrow{OB'} = \beta\overrightarrow{OB}$. En utilisant le résultat ci-dessus on obtient :

$$(\alpha - \lambda)\overrightarrow{OA} + (\lambda - \beta)\overrightarrow{OB} = 0.$$

6. Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ forment une base de l'espace $\mathbb{R}^2$, en particulier ils sont linéairement indépendants. Alors l'équation ci-dessus implique que $(\alpha - \lambda) = (\lambda - \beta) = 0$, donc $\alpha = \lambda = \beta$.

Exercice 4. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ un nombre réel et $\mathcal{P}_\lambda$, $\mathcal{Q}_\lambda$ les sous-espaces affines de l'espace affine $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ donnés par les équations suivantes :

$$\mathcal{P}_\lambda : 2\lambda x_1 + x_2 + 4x_3 = 3$$
$$\mathcal{Q}_\lambda : \begin{cases} x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + (\lambda + 2)x_3 = 1 \end{cases}$$

1. Déterminer les espaces vectoriels P_λ, Q_λ qui dirigent respectivement de $\mathcal{P}_\lambda$ et $\mathcal{Q}_\lambda$.
2. Quelle est la dimension de P_λ et Q_λ ?
3. Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles les sous-espaces vectoriels P_λ et Q_λ engendrent tout l'espace (autrement dit, pour lesquels $P_\lambda + Q_\lambda = \mathbb{R}^3$).
4. Pour $\lambda \neq 1, -3$ déterminer l'intersection de $\mathcal{P}_\lambda$ et $\mathcal{Q}_\lambda$.
5. Déterminer l'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{Q}_1$. Que remarque-t-on ?
6. Déterminer l'intersection de $\mathcal{P}_{-3}$ et $\mathcal{Q}_{-3}$.

Corrigé. (1) L'espace vectoriel P_λ est donné par l'équation $2\lambda x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$. Il est de dimension 2 et il est engendré par exemple par les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2\lambda \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'espace vectoriel Q_λ est donné par les équations

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + (\lambda+2)x_3 = 0. \end{cases}$$

Il s'agit de deux équations linéairement indépendantes, donc l'espace vectoriel Q_λ est de dimension 1. Il est engendré par le vecteur

$$\begin{pmatrix} -(\lambda+2) \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Comme on a remarqué au cours de la réponse à la question (1), les espaces vectoriels P_λ et Q_λ sont respectivement de dimension 2 et 1.
(3) Puisque P_λ et Q_λ sont de dimension 2 et 1, pour que ces deux espaces engendrent $\mathbb{R}^3$ il faut et il suffit que leur intersection soit nulle. Autrement dit, il faut et il suffit que le système linéaire

$$(*) \qquad \begin{cases} 2\lambda x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + (\lambda+2)x_3 = 0, \end{cases}$$

soit de rang 3. En faisant des opérations sur les lignes de la matrice associée système linéaire $(*)$, on trouve :

$$\begin{pmatrix} 2\lambda & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & \lambda+2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 - L_2 - 2\lambda L_3 \;\to\; L_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2\lambda^2 - 4\lambda + 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & \lambda+2 \end{pmatrix}.$$

En particulier le systeme $(*)$ est de rang 3 si et seulement si

$$-2\lambda^2 - 4\lambda + 6 \neq 0.$$

L'équation de deuxième degré $2\lambda^2 + 4\lambda - 6 = 0$ a pour solutions $\lambda = 1, -3$. En conclusion, P_λ et Q_λ engendrent $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\lambda \neq 1, -3$.
(4) Pour trouver l'intersection de $\mathcal{P}_\lambda$ et $\mathcal{Q}_\lambda$ on fait des opérations sur les lignes de la matrice associée au système

$$\begin{cases} 2\lambda x_1 + x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + (\lambda+2)x_3 = 1. \end{cases}$$

On obtient :

$$(**) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2\lambda & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda+2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 - L_2 - 2\lambda L_3 \;\to\; L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -2(\lambda-1)(\lambda+3) & -2(\lambda-1) \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda+2 & 1 \end{array}\right)$$

Si $\lambda \neq 1, -3$ on peut diviser la première ligne par $-2(\lambda-1)(\lambda+3)$ et obtenir :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda+3} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda+2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 - (\lambda+2)L_1 \;\to\; L_3]{L_2 + 2L_1 \;\to\; L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda+3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 + \frac{2}{\lambda+3} \\ 1 & 0 & 0 & 1 - \frac{\lambda+2}{\lambda+3}. \end{array}\right)$$

En particulier, si $\lambda \neq 1, -3$ les sous-espaces affines $\mathcal{P}_\lambda$ et $\mathcal{Q}_\lambda$ se rencontrent au point

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda+2}{\lambda+3} \\ 1 + \frac{2}{\lambda+3} \\ \frac{1}{\lambda+3} \end{pmatrix}.$$

(5) En reprenant $(**)$, si $\lambda = 1$ on trouve que l'intersection est donnée par le système

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Ce sont les équations qui décrivent la droite $\mathcal{Q}_1$, donc $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_1$. Autrement dit, $\mathcal{Q}_1$ est contenue dans le plan $\mathcal{P}_1$.
(6) En reprenant $(**)$ pour $\lambda = -3$, on trouve que l'intersection est donnée par le système

$$\begin{cases} 0 = 8 \\ x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 1. \end{cases}$$

La première équation n'a évidemment pas de solutions, donc $\mathcal{P}_{-3}$ et $\mathcal{Q}_{-3}$ ne se rencontrent pas (on sait qu'ils sont parallèles d'après la question (3)).

Exercice 5. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer l'inverse A^{-1} de A.
2. La famille de vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix},$$

   forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^4$? Justifiez votre réponse.
3. Calculer la base duale $v_1^*, \ldots, v_4^*$.

Corrigé. (1) L'inverse de A est la matrice :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 & 2 \\ -6 & -3 & -11 & 7 \\ 2 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Les vecteurs $v_1, \ldots, v_4$ sont les colonnes de la matrice A. Puisque la matrice A est inversible (car on a calculé l'inverse !), ses colonnes sont linéairement indépendantes.
(3) Puisque les vecteurs $v_1, \ldots, v_4$ sont les colonnes de la matrice A, on a vu dans le cours que la base duale $v_1^*, \ldots, v_4^*$ est alors donnée par les lignes de A^{-1}. On a donc :

$$\begin{aligned} v_1^* &= \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\ v_2^* &= \begin{pmatrix} -6 & -3 & -11 & 7 \end{pmatrix} \\ v_3^* &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \\ v_4^* &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Plus précisément, chaque égalité ci-dessus signifie : "est représenté dans la base canonique par la matrice". On a donc par exemple $v_1^*(x) = -3x_1 - 2x_2 + 2x_2$.