# Devoir “maison”

À rendre pour le 16/11 (TD1). À rendre pour le 17/11 (TD2).

---

**Exercice 1.** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. On rappelle que le produit de deux nombres impairs est impair et que le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est pair. Dans la formule explicite donnant le déterminant de $A$ (qui contient $4! = 24$ termes), un seul terme de la forme $\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}a_{4\sigma(4)}$ est impair. Lequel ? Que vaut-il ?
2. On rappelle maintenant que la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est impaire. En déduire sans calcul que $\det(A)$ est impair, puis que $A$ est inversible.
3. Calculer $\det(A)$ en essayant de faire un minimum d'opérations.

**Exercice 2.** On note (comme d'habitude) $i$ un nombre complexe dont le carré est $-1$. On considère la matrice $A_n \in M_n(\mathbb{C})$, dont tous les coefficients sont 1 sauf $a_{nn}$ qui vaut 0, les $n-1$ premiers coefficients de la dernière ligne qui valent $-i$ et les $n-1$ premiers coefficients de la diagonale qui valent $i+1$. On peut donc écrire $A_n$ sous la forme :

$$\begin{pmatrix} i+1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & i+1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & i+1 & 1 \\ -i & \dots & \dots & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

On veut calculer $\det(A_{2015})$. Pour cela, commencer par montrer à l'aide d'opérations élémentaires bien choisies que $\det A_n$ est égal à $i^{n-1}D_n$ où $D_n$ est le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En développant par rapport à la première ligne, trouver une formule reliant $D_n$ à $D_{n-1}$. A l'aide de cette formule calculer $\det(A_{2015})$. Bien-sûr toute autre méthode est la bienvenue.

**Exercice 3.** On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{S}$ des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et le sous-espace vectoriel

$$E = \{x \in \mathcal{S} : x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}.$$

1. Soit $\pi\colon E \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\pi(x) = (x_0, x_1)$. Montrer que $\pi$ est linéaire, injective et surjective. En déduire la dimension de $E$.
2. Trouver tous les nombres réels non nuls $\lambda$ pour lesquels la suite géométrique $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $E$.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Montrer par récurrence sur $n$ que, pour tout $x \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}.$$

5. Quelles sont les valeurs propres de $A$ ?
6. Expliciter un vecteur propre $u$ de $A$, puis trouver un vecteur $v$ tet que $Av = u + v$.
7. On note $P$ la matrice dont les colonnes sont données par les vecteurs $u$ et $v$. Expliciter une matrice diagonale $D$ et une matrice triangulaire supérieure stricte $N$, telles que $A = P(D+N)P^{-1}$. Vérifier que $D$ et $N$ commutent, c'est à dire $DN = ND$.
8. Montrer par récurrence sur $n$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A^n = PB^nP^{-1},$$

avec $B = D + N$. (*Indication : on écrira* $A^{n+1} = AA^n$*...*)

Soient $M, N \in M_d(\mathbb{R})$ deux matrices à coefficients réels de taille $d$. Si elles commutent, c'est-à-dire si $MN = NM$, alors pour tout entier $k \geq 1$ on a

$$(\heartsuit) \qquad (M+N)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} M^i N^{k-i}.$$

On admet ce fait pour l'instant.

10. En utilisant ($\heartsuit$), calculer $B^n$ et $A^n$. (*Indication : remarquer que* $N^2 = 0$.)
11. Conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in E$ on a

$$x_n = nx_1 + (1-n)x_0.$$

12. Terminer en montrant que les suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$x_n = 1, \quad y_n = 1 - n,$$

forment une base de $E$.

13. Enfin, montrer ($\heartsuit$) par récurrence sur $k$. (*Indication : utiliser l'égalité* $\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1} = \binom{k+1}{i}$.)