Devoir “maison” 2 : corrigé

Exercice 1. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. On rappelle que le produit de deux nombres impairs est impair et que le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est pair. Dans la formule explicite donnant le déterminant de A (qui contient $4! = 24$ termes), un seul terme de la forme $\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}a_{4\sigma(4)}$ est impair. Lequel ? Que vaut-il ?
2. On rappelle maintenant que la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est impaire. En déduire sans calcul que $\det(A)$ est impair, puis que A est inversible.
3. Calculer $\det(A)$ en essayant de faire un minimum d'opérations.

Corrigé.

1. Pour qu'un tel terme soit impair, il faut et il suffit que chacun des quatre facteurs $a_{1\sigma(1)}$, $a_{2\sigma(2)}$, $a_{3\sigma(3)}$, $a_{4\sigma(4)}$ soient tous impairs. Le seul coefficient impair de la 1ère ligne est le deuxième, donc on doit avoir $\sigma(1) = 2$. Le même argument appliqué à la deuxième ligne donne $\sigma(2) = 3$. On obtient de même $\sigma(3) = 1$, $\sigma(4) = 4$. Cela laisse donc bien un seul choix possible de permutation.

   On peut alors deviner la signature de σ : on remarque que σ est le 3-cycle $(1, 2, 3)$ et est donc de signature 1. D'où $\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}a_{4\sigma(4)} = 1$.
2. Dans la somme $\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_4} \varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}a_{4\sigma(4)}$, tous les termes sont pairs et un seul est impair. Donc la somme est impaire. Le déterminant de A est impair donc il n'est pas nul. On en déduit que $\det(A) \neq 0$ et donc que A est inversible (sans avoir fait un seul calcul !)
3. Pour calculer explicitement le déterminant, une manière rapide (mais ce n'est bien sûr pas la seule) consiste à procéder comme suit : On fait successivement les opérations suivantes : $C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2$, $C_4 \leftarrow C_4 + 2C_2$, $C_4 \leftarrow C_4 - C_3$, $C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1$. On obtient

   $$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -6 & 11 \end{vmatrix}.$$

   Puis on développe par rapport à la première ligne puis la troisième : on obtient

   $$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -6 & 11 \end{vmatrix} = -7,$$

   qui est bien impair.

Exercice 2. On note (comme d'habitude) i un nombre complexe dont le carré est -1. On considère la matrice $A_n \in M_n(\mathbb{C})$, dont tous les coefficients sont 1 sauf a_{nn} qui vaut 0, les $n-1$ premiers coefficients de la dernière ligne qui valent $-i$ et les $n-1$ premiers coefficients de la diagonale qui valent $i+1$. On peut donc écrire A_n sous la forme :

$$\begin{pmatrix} i+1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & i+1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & i+1 & 1 \\ -i & \dots & \dots & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

On veut calculer $\det(A_{2015})$. Pour cela, commencer par montrer à l'aide d'opérations élémentaires bien choisies que $\det A_n$ est égal à $i^{n-1}D_n$ où D_n est le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En développant par rapport à la première ligne, trouver une formule reliant D_n à D_{n-1}. A l'aide de cette formule calculer $\det(A_{2015})$. Bien-sûr toute autre méthode est la bienvenue.

Corrigé. On soustrait la dernière colonne à chacune des autres, on obtient le déterminant

$$\begin{vmatrix} i & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & i & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & i & 1 \\ -i & \dots & \dots & -i & 0 \end{vmatrix},$$

qui est bien égal à $i^{n-1}D_n$ par linéarité par rapport à chacune des $n-1$ premières colonnes.

On développe D_n par rapport à la première ligne :

$$D_n = D_{n-1} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

On développe ensuite ce dernier déterminant par rapport à la première colonne. On obtient

$$D_n = D_{n-1} + (-1)^{n+1}(-1)^n(-1)\det(I_{n-2}) = D_{n-1} + 1.$$

Comme $D_2 = 1$, on obtient ensuite par une récurrence simple : $D_n = n-1$ pour tout n et donc $\det A_n = (n-1)i^{n-1}$

Le nombre 2015 s'écrit $4k+3$ pour un certain entier k qu'il est inutile de calculer. Comme $i^4 = 1$, on en déduit que $i^{2015-1} = i^2 = -1$. D'où $\det A_{2015} = -2014$.

Exercice 3. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{S}$ des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et le sous-espace vectoriel

$$E = \{x \in \mathcal{S} : x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}.$$

1. Soit $\pi\colon E \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\pi(x) = (x_0, x_1)$. Montrer que π est linéaire, injective et surjective. En déduire la dimension de E.
2. Trouver tous les nombres réels non nuls λ pour lesquels la suite géométrique $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Montrer par récurrence sur n que, pour tout $x \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}.$$

4. Quelles sont les valeurs propres de A ?
5. Expliciter un vecteur propre u de A, puis trouver un vecteur v tet que $Av = u + v$.
6. On note P la matrice dont les colonnes sont données par les vecteurs u et v. Expliciter une matrice diagonale D et une matrice triangulaire supérieure stricte N, telles que $A = P(D+N)P^{-1}$. Vérifier que D et N commutent, c'est à dire $DN = ND$.
7. Montrer par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A^n = PB^nP^{-1},$$

avec $B = D + N$. (*Indication : on écrira $A^{n+1} = AA^n$...*)

Soient $M, N \in M_d(\mathbb{R})$ deux matrices à coefficients réels de taille d. Si elles commutent, c'est-à-dire si $MN = NM$, alors pour tout entier $k \geq 1$ on a

$$(\heartsuit) \qquad (M+N)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} M^i N^{k-i}.$$

On admet ce fait pour l'instant.

8. En utilisant ($\heartsuit$), calculer B^n et A^n. (*Indication : remarquer que $N^2 = 0$.*)
9. Conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in E$ on a

$$x_n = nx_1 + (1-n)x_0.$$

10. Terminer en montrant que les suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$x_n = 1, \quad y_n = 1 - n,$$

forment une base de E.
11. Enfin, montrer ($\heartsuit$) par récurrence sur k. (*Indication : utiliser l'égalité $\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1} = \binom{k+1}{i}$.*)

Corrigé.

1. On peut montrer par une récurrence facile que si $x_0 = x_1 = 0$ alors tous les termes de la suites sont nuls, d'où l'injectivité. Réciproquement, pour tout couple (a, b), on construit (à nouveau par une récurrence immédiate) une suite de E vérifiant $x_0 = a$ et $x_1 = b$; d'où la surjectivité. La dimension de E est donc 2.
2. Soit λ un réel. La suite (λ^n) est solution si et seulement si $\lambda^{n+2} = 2\lambda^{n+1} - \lambda^n$, ce qui équivaut à $\lambda = 0$ ou $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, soit $\lambda = 0$ ou 1.
3. On voit facilement que

$$\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}.$$

On obtient le résultat souhaité par une récurrence facile.
4. Le polynôme caractéristique de A est $X^2 - 2X + 1$. La seule valeur propre est donc 1.
5. En cherchant à résoudre $Au - u = 0$ on trouve par exemple le vecteur $u = (1, 1)$. En résolvant $Av = u + v$, on trouve par exemple $v = (1, 0)$. (ces u et v ne sont pas les seuls possibles).
6. D'après la question précédente, si f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ associé à A, alors la matrice de f dans la base (u, v) est $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, ce qui s'écrit bien $D+N$ en posant $D = I_2$ et $N = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Comme P est la matrice de passage de la base canonique à la la base (u, v), on en déduit bien $A = P(D + N)P^{-1}$. Enfin, il est clair que $DN = ND$. (Remarquons au passage que l'on a trigonalisé A)

7. Tout est dans l'indication donnée par l'énoncé :

$$\begin{aligned}A^n &= (P(D+N)P^{-1})(P(D+N)P^{-1})\dots(P(D+N)P^{-1})(P(D+N)P^{-1})\\ &= P(D+N)(D+N)\dots(D+N)(D+N)P^{-1} = P(D+N)^nP^{-1},\end{aligned}$$

car on peut simplifier partout P avec P^{-1}.

8. On remarque que $N^2 = 0$, donc la formule du binôme (que l'on peut utiliser car D et N commutent) donne

$$(D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} = D^n + nND^{n-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

On a donc

$$A^n = P\left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)P^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} n+1 & -n \\ n & 1-n \end{smallmatrix}\right).$$

9. La formule souhaitée s'obtient directement des questions 3 et 8.
10. La question précédente montre que ces deux suites sont génératrices de E : tout élément de E est combinaison linéaire de x et y. Comme la dimension de E est 2, c'est une base.
11. La démonstration est strictement la même que pour le binôme de Newton classique que l'on peut trouver ici : https ://fr.wikipedia.org/wiki/Formule_du_binôme_de_Newton.